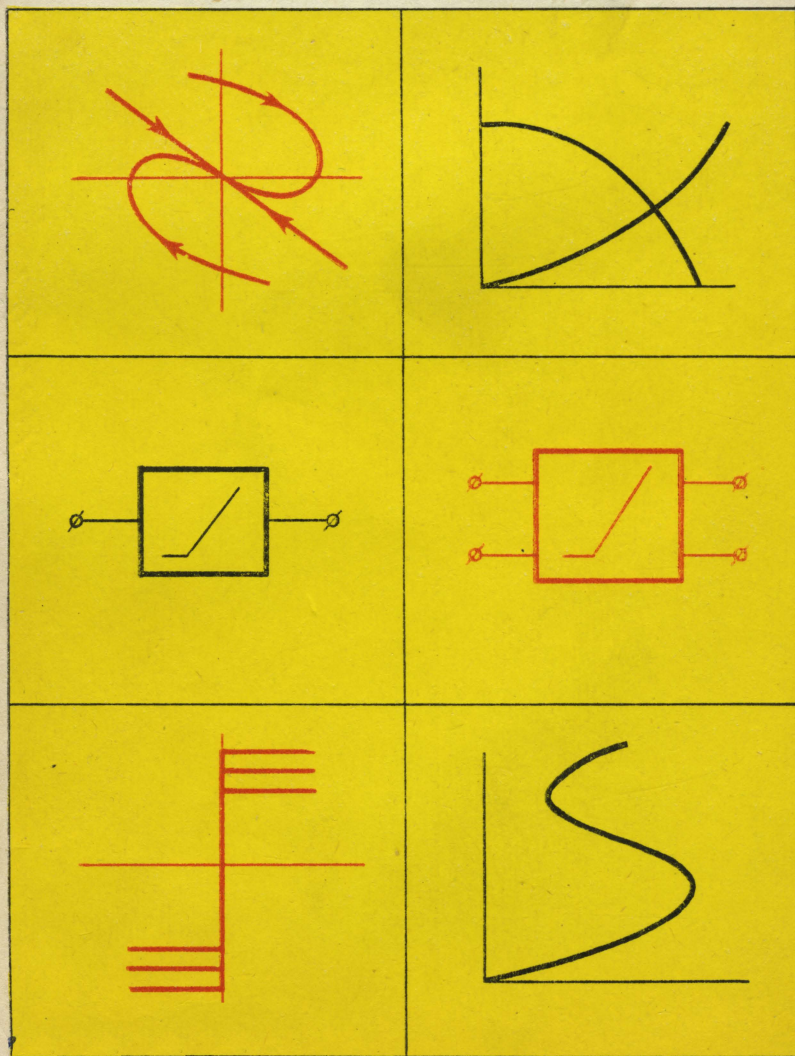


С.П. Колосов
Ю.А. Сидоров

Нелинейные двухполюсники и четырехполюсники



С. П. Колосов,
Ю. А. Сидоров

Нелинейные двухполюсники и четырехполюсники

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
электротехнических
специальностей вузов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1981

ББК 31.2
К60
УДК 621.3

Рецензенты:

зав. кафедрой ТОЭ ЭФ МЭИ, лауреат Государственной премии СССР, проф., д-р техн. наук П. А. ИОНКИН
кафедра ТОЭ МИРЭА (зав. кафедрой проф., д-р техн. наук Л. А. БЕССОНОВ)

Колосов С. П., Сидоров Ю. А.
К60 **Нелинейные двухполюсники и четырехполюсники: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1981. — 224 с., с ил.**

40 к.

В книге дано систематизированное изложение вопросов теории нелинейных цепей, применяемых в современных системах автоматики, энергетики и т. д.; рассмотрены нелинейные двухполюсники и четырехполюсники и их исходные характеристики; приведены методы анализа электрических цепей постоянного и переменного тока, магнитных и диэлектрических цепей, а также основы синтеза; даны алгоритмы для применения вычислительной техники при расчете нелинейных цепей. Рассматриваемые методы иллюстрируются числовыми примерами.

Книга предназначена для студентов электротехнических специальностей.

К	<u>30306—081</u>			6П2.1
	001(01)—81	100—81	2302010000	ББК 31.2

Предисловие

Настоящая книга является учебным пособием по второму разделу курса «Теоретические основы электротехники» — «Нелинейные электрические цепи». До сих пор в имеющейся учебной литературе часть материала этого раздела рассматривалась на конкретных электротехнических устройствах. Число разновидностей подобных устройств непрерывно растет, однако в приемах их расчета имеется много общего. В связи с этим целесообразно систематизировать эти устройства, определив такие группы нелинейных схем и их режимы, которые наиболее часто повторяются в различных случаях технического применения или имеют перспективу развития. Выявив специфические особенности каждой группы и обобщив методику их анализа, можно соответствующие методы расчета ввести в теорию нелинейных цепей в общем виде.

В данном учебном пособии авторы в какой-то мере попытались выполнить эту задачу. Для сложных разветвленных цепей указанные методы часто не дают возможности непосредственно получить удобные решения графоаналитическими или аналитическими методами. В таком случае имеет смысл использовать аналоговую и цифровую вычислительную технику.

Следует указать на нецелесообразность применения для расчетов на ЦВМ излишне точных приемов общего характера, сводящихся к составлению и решению численными методами весьма сложных систем уравнений, учитывающих несущественные или мало существенные для данного конкретного случая особенности нелинейных характеристик, несущественные гармонические составляющие и т. д.

В современной технике все шире применяют электротехнические устройства, содержащие нелинейные элементы, работающие в неподдающемся линеаризации режиме. Разработку таких устройств производят путем ориентации на прецеденты или путем изобретательства, т. е. интуитивно. Использование ЦВМ делает целесообразной алгоритмизацию синтеза электрических нелинеаризуемых цепей, что может привести не только к повышению качества разработок, но и к получению принципиально новых схмотехнических решений даже известных технических задач. Кроме того, подобный подход нужен

для проектирования твердотельных схем, экспериментальная поэлементная отработка которых практически невозможна. Поэтому для современного инженера совершенно необходимо знакомство с общими основами синтеза и путями реализации нелинейных цепей.

Цель настоящего учебного пособия — помочь студентам изучить и научиться применять для расчета характеристики нелинейных двухполюсников и семейства входных и выходных характеристик нелинейных четырехполюсников. Из большого числа возможных видов нелинейностей и режимов работы особое внимание уделено тем из них, которые наиболее часто встречаются в современных устройствах автоматики. Изложение ведется в порядке возрастания трудности материала: сначала рассматриваются установившиеся режимы в цепях постоянного тока (отдельно с двухполюсниками и четырехполюсниками), затем в цепях переменного тока, даются краткие сведения о расчете переходных процессов в нелинейных цепях и синтезе нелинейных цепей и в заключение приводятся примеры алгоритмизации электротехнических уравнений для применения вычислительной техники при расчете нелинейных цепей.

Авторы надеются, что учебное пособие позволит студентам изучить общие основы теории нелинейных цепей и существенно облегчит усвоение материала таких дисциплин, как «Элементы автоматики», «Электроника», «Электрические машины», «Электрооборудование» и «Теория автоматического управления».

Главы 1—5 пособия снабжены задачами, которые иллюстрируют большинство рассматриваемых методов и приемов расчета. Часть задач приведена с решениями.

В учебном пособии кроме авторов принимал участие в написании § 5.8 и части § 7.4 Л. Б. Соболев, в написании § 7.2 и § 7.3 В. Г. Орешников.

Авторы выражают признательность профессорам П. А. Ионкину, Л. А. Бессонову, М. Е. Заруди и доцентам Л. П. Гаврилову, В. В. Каратаеву, внимательно просмотревшим рукопись учебного пособия и сделавшим ряд весьма полезных замечаний, которые помогли авторам при подготовке рукописи к печати.

Авторы с благодарностью примут отзывы об учебном пособии, которые просят направлять по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

Авторы

Введение

Цепи, параметры которых зависят от тока или напряжения, называют **нелинейными**.

Всякая реальная цепь нелинейна. Как только частота, токи и напряжения в цепи, которая в границах определенных режимов принята линейной, достигнут достаточно больших величин, начинают сказываться нелинейные эффекты: ферромагнитные сердечники насыщаются, нарушается пропорциональность между поляризацией и полем в диэлектриках, изменяется температура, а значит, и сопротивление проводников, изменяются геометрические размеры конденсаторов и т. д.

В простейших случаях вместо линейных элементов цепи можно говорить о нелинейном сопротивлении $r(i)$ или $r(u)$, нелинейной индуктивности $L(i_L)$ или $L(\Psi)$ и нелинейной емкости $C(u_C)$ или $C(Q)$. Напряжение на ветви, содержащей последовательно включенные нелинейные элементы r , L , C , можно записать в виде нелинейного уравнения

$$u = r(i) i + \frac{d[iL(i)]}{dt} + \int \frac{i}{C(u_C)} dt$$

вместо известного для линейной цепи уравнения

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt.$$

Напомним, что **нелинейным** называют уравнение, в которое переменные и их производные входят не в первой степени или коэффициенты зависят от этих переменных и их производных. Общих методов решения нелинейных уравнений нет. Лишь для небольшого числа случаев могут быть найдены точные решения, выраженные известными функциями. Это и является причиной трудности анализа нелинейных цепей.

При этом особенно важно, что *к нелинейным уравнениям, а значит, и к нелинейным цепям неприменим принцип наложения*. Именно неприменимость принципа наложения может служить определением нелинейной цепи, которую, если возможно и если это не приводит к недо-

пустимым качественным изменениям или большим количественным погрешностям, следует пытаться описывать линейными зависимостями, т. е. сводить нелинейные цепи к линейным. Возможность пренебрежения нелинейностью зависит от свойств (характеристик) и режима работы элементов, входящих в цепь, а также от конкретных особенностей и технического назначения цепи.

Если линеаризация невозможна, то для упрощения анализа нелинейных цепей часто прибегают к рациональному изменению информации (исходных данных) о входящих в них нелинейностях. При этом должны быть сохранены все характерные черты изучаемого нелинейного процесса, а для упрощения исследования исключены только несущественные для изучаемого явления факторы. Ограничившись приближенным представлением характеристик нелинейной цепи, иногда удается даже получить точное решение упрощенных нелинейных уравнений.

Однако не всегда можно сразу правильно решить вопрос о том, какими факторами следует пренебречь при анализе данной нелинейной цепи. Поэтому, обычно сначала осуществляют экспериментальную проверку результатов упрощенного подхода, а затем уже уточняют выбранный упрощенный способ анализа и определяют пределы его применимости.

Нелинейности могут оказаться вредными. Это нелинейные искажения сигналов при передаче и преобразовании информации, искажение формы кривых тока и напряжения в энергетических установках и т. д. Но только с помощью нелинейных элементов могут быть созданы важнейшие электротехнические устройства: усилители, стабилизаторы, преобразователи частоты, выпрямители и др. Развитие автоматики, телемеханики, радиотехники, вычислительной техники и т. д. вообще было бы невозможно без применения нелинейных цепей и разработки новых нелинейных элементов.

ГЛАВА 1. УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ В ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ДВУХПОЛЮСНИКАМИ

§ 1.1. Исходные характеристики двухполюсников и их классификация

Двухполюсником называют часть электрической цепи, рассматриваемую по отношению к двум зажимам. Условное обозначение нелинейного двухполюсника показано на рис. 1.1. В частном случае нелинейный двухполюсник превращается в нелинейное сопротивление.

Общепринятой характеристикой нелинейного двухполюсника является вольт-амперная характеристика (в. а. х.), под которой понимают зависимость тока, проходящего через двухполюсник, от подводимого к нему напряжения, $I=f(U)$, определенную для установившегося режима. Для линейного двухполюсника эта характеристика — прямая линия.

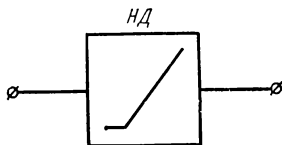


Рис. 1.1. Условное обозначение нелинейного двухполюсника

Прежде чем рассмотреть особенности вольт-амперных характеристик, покажем, что в общем случае каждая точка характеристики определяется статическим и дифференциальным сопротивлениями.

Под *статическим сопротивлением двухполюсника* понимают отношение постоянного напряжения на двухполюснике к току в нем:

$$r_{\text{ст}} = U/I. \quad (1.1)$$

Дифференциальным сопротивлением называют величину

$$r_{\text{диф}} = dU/dI, \quad (1.2)$$

характеризующую двухполюсник при малых отклонениях от рассматриваемой точки нелинейной характеристики.

В общем случае статическое и дифференциальное сопротивление не равны друг другу. Эти понятия совпадают только для линейных двухполюсников ($r_{ст} = r_{диф} = r$).

Как видно из рис. 1.2, статическое сопротивление пропорционально тангенсу угла α , образованного секущей, проведенной из начала координат в рассматриваемую точку характеристики, с осью I :

$$r_{ст} = \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \alpha = m_r \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.3)$$

где m_U — масштаб напряжения; m_I — масштаб тока; m_r — масштаб сопротивления.

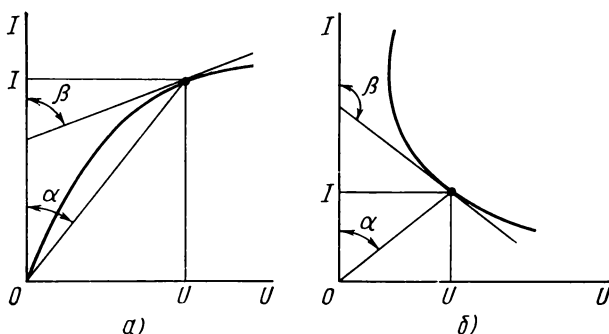


Рис. 1.2. Определение статического и дифференциального сопротивлений по в. а. х.:

a — для «восходящей» части характеристики; b — для «падающей» части характеристики

Дифференциальное сопротивление пропорционально тангенсу угла β , образованного касательной в рассматриваемой точке характеристики с осью I :

$$r_{диф} = \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \beta = m_r \operatorname{tg} \beta. \quad (1.4)$$

В дальнейшем будем считать, что статическое и дифференциальное сопротивления равны тангенсам соответствующих углов, и помнить о необходимости учитывать масштаб.

Можно также ввести понятия статической проводимости

$$g_{ст} = 1/r_{ст} \quad (1.5)$$

и дифференциальной проводимости

$$g_{\text{диф}} = 1/r_{\text{диф}}. \quad (1.6)$$

Если рассмотреть вольт-амперные характеристики двухполюсников и обобщить их по некоторым признакам, то все многообразие этих характеристик можно свести к пяти основным типам, которые (в первом квадранте) показаны на рис. 1.3: с насыщением по току (а), с насыщением по напряжению (б), с неоднозначностью по току

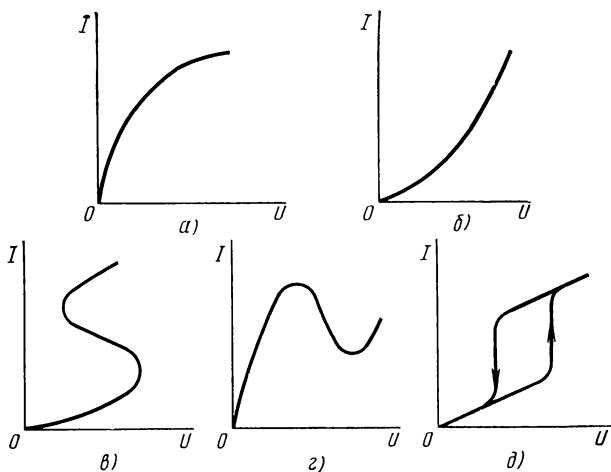


Рис. 1.3. Основные в. а. х. двухполюсников

(в), с неоднозначностью по напряжению (г) и гистерезисного типа (д).

Для некоторых задач практического применения характеристики двухполюсников могут иметь зону нечувствительности. Зона нечувствительности может быть как по напряжению (рис. 1.4, а), так и по току (рис. 1.4, б).

Вольт-амперные характеристики могут быть также симметричными относительно начала координат и не-симметричными.

В случае симметричных характеристик имеет место равенство $I(U) = -I(-U)$. На рис. 1.5 показаны некоторые симметричные характеристики: основная, т. е. без

зоны нечувствительности, с зоной нечувствительности по напряжению и с зоной нечувствительности по току.

Несимметричные характеристики $I(U) \neq -I(-U)$ могут быть двух видов: *мнимо несимметричные* и *явно несимметричные*.

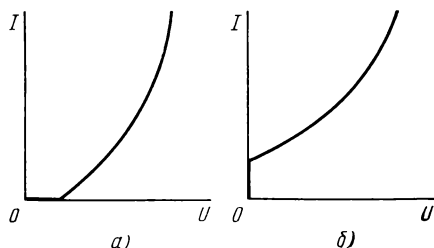


Рис. 1.4. Примеры в. а. х. с зоной нечувствительности:

a — по напряжению; *б* — по току

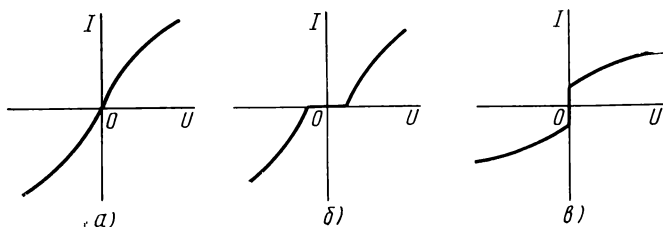


Рис. 1.5. Примеры симметричных в. а. х.:

a — без зоны нечувствительности; *б* — с зоной нечувствительности по напряжению; *в* — с зоной нечувствительности по току

Мнимо несимметричные характеристики симметричны относительно некоторой точки на оси ординат (рис. 1.6, *a*, *б*, *д*, *е*) или на оси абсцисс (рис. 1.6, *в*, *г*, *ж*, *з*). Как правило, такие характеристики соответствуют активным двухполюсникам. Мнимо несимметричные характеристики могут быть приведены к началу координат, если вместо исходного активного двухполюсника рассмотреть пассивный, имеющий симметричную характеристику и включенный параллельно с источником тока (рис. 1.6, *a*, *б*, *д*, *е*) или последовательно с источником напряжения (рис. 1.6, *в*, *г*, *ж*, *з*).

К явно несимметричным характеристикам относят такие, которые в первом и третьем квадрантах представлены сочетанием основных вольт-амперных характеристик разного типа (рис. 1.7, а), сочетанием нелинейной характеристики и линейной (рис. 1.7, б) или сочетанием ос-

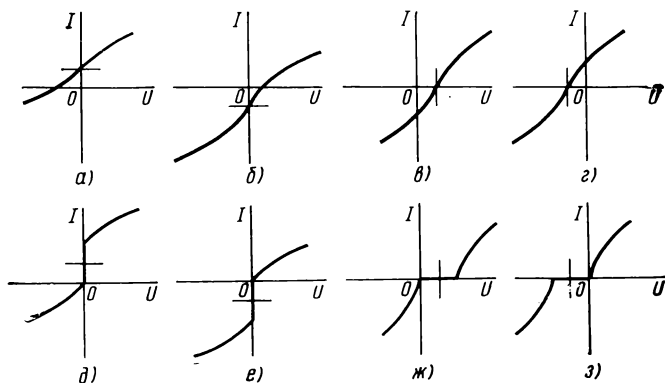


Рис. 1.6. Примеры mildly несимметричных в. а. х.:

а, б, д, е — сдвинутых по оси ординат; в, г, ж, з — сдвинутых по оси абсцисс

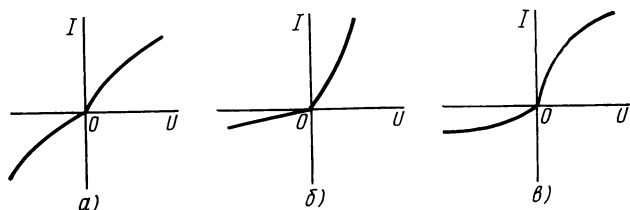


Рис. 1.7. Примеры явно несимметричных в. а. х.:

а — с насыщением по току и напряжению; б — с насыщением по напряжению и с линейной частью; в — с насыщением по току

новых вольт-амперных характеристик одного типа, но имеющих при одних и тех же значениях $|U|$ различные значения $|I|$ (рис. 1.7, в).

Кроме вольт-амперных характеристик для расчета нелинейных цепей можно использовать и зависимости статических и дифференциальных сопротивлений и проводимостей от тока и напряжения (рис. 1.8).

Эти зависимости могут быть сняты экспериментально или пересчитаны из вольт-амперной характеристики. На-

пример, задаваясь некоторыми значениями тока $I(I_1, I_2, \dots)$, можно для каждой точки вольт-амперной характеристики (см. рис. 1.2) определить $r_{ст}(r_{ст1}, r_{ст2}, \dots)$ или $r_{диф}(r_{диф1}, r_{диф2}, \dots)$ и построить графики $r_{ст}(I)$ или $r_{диф}(I)$.

Все характеристики могут быть получены одна из другой и поэтому содержат одинаковое количество ин-

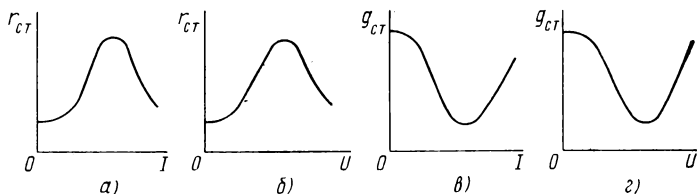


Рис. 1.8. Примеры зависимостей статических сопротивлений и проводимостей от тока и напряжения:

а — $r_{ст}(I)$; б — $r_{ст}(U)$; в — $g_{ст}(I)$; г — $g_{ст}(U)$

формации. Целесообразность использования той или иной формы характеристики зависит от конкретной задачи.

§ 1.2. Упрощение и линеаризация вольт-амперных характеристик двухполюсников. Метод компенсации. Идеализация характеристик

Прежде чем приступить к расчету цепей с нелинейными двухполюсниками, попытаемся упростить или линеаризовать исходные характеристики, так как приближенное представление характеристик облегчает расчеты.

Например, упрощая симметричную вольт-амперную характеристику (см. рис. 1.5, б), можно рассматривать ее без учета зоны нечувствительности или в одном квадранте, или в обоих сразу; мнимо несимметричные характеристики (см. рис. 1,6) могут быть приведены к началу координат, т. е. превращены в симметричные, и т. п.

Вольт-амперные характеристики могут быть двух видов: *линеаризуемые*, т. е. такие, которые в определенном режиме и для определенного диапазона воздействий могут быть сведены к линейной характеристике, и *существенно нелинейные*, когда линеаризация приводит к потере каких-либо свойств нелинейного двухполюсника.

Наиболее частым случаем является линеаризация относительно начала координат с помощью касательной или секущей (рис. 1.9).

Линеаризация при небольших отклонениях сигнала от рабочего режима возможна и для любой точки характеристики, если нелинейный двухполюсник заменить источником постоянного напряжения и сопротивлением, равным дифференциальному сопротивлению нелинейного двухполюсника на прямолинейном участке (метод компенсации). При этом исходный пассивный нелинейный двухполюсник сводится к линейному активному двухполюснику, внутреннее сопротивление которого равно дифференциальному сопротивлению исходного двухполюсника в рабочей точке.

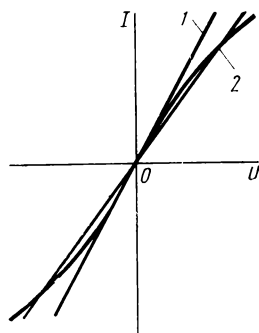


Рис. 1.9. Линеаризация с помощью касательной 1 и секущей 2

На рис. 1.10 показана такая замена для двух характеристик нелинейного двухполюсника: с насыщением по току и по напряжению. Из рисунка видно, что если провести касательные к вольт-амперным характеристикам в рабочих точках, определяемых значениями токов и напряжений I_1 , U_1 (рис. 1.10, б) и I_2 , U_2 (рис. 1.10, д), то требуемые напряжения найдем из соотношения $U_1 = -U_{i1} + r_{i1}I_1$ для первой и $U_2 = U_{i2} + r_{i2}I_2$ для второй характеристики, где $r_{i1} = \operatorname{tg} \beta_1$ и $r_{i2} = \operatorname{tg} \beta_2$, а U_{i1} и U_{i2} — отрезки на оси абсцисс. Эти уравнения могут быть реализованы в виде линейного источника напряжения U_i с линейным внутренним сопротивлением r_i , причем направление э. д. с. источника совпадает с направлением тока для первой характеристики (рис. 1.10, в) и не совпадает для второй (рис. 1.10, е), что отвечает второму закону Кирхгофа для этих цепей. При этом следует иметь в виду, что значения U_{i1} , r_{i1} и U_{i2} , r_{i2} изменяются при изменении режима работы и справедливы только в ограниченной области вблизи рабочей точки.

Иногда участки вольт-амперных характеристик могут быть заменены несколькими прямыми линиями (рис. 1.11). Такие характеристики называют кусочно-линейными.

Если в линейном виде можно представить ограниченный набор характеристик, то в кусочно-линейном — любую характеристику.

Вид линеаризованной характеристики, которая должна быть взята для расчета данного нелинейного двухполюсника

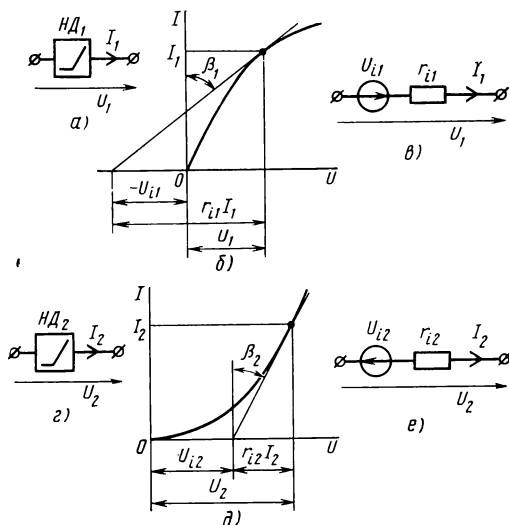


Рис. 1.10. Метод компенсации:

а — исходный нелинейный двухполюсник; *б* — графическое построение для в. а. х. с насыщением по току; *в* — исходный нелинейный двухполюсник; *г* — графическое построение для в. а. х. с насыщением по напряжению; *е* — эквивалентная линейная цепь

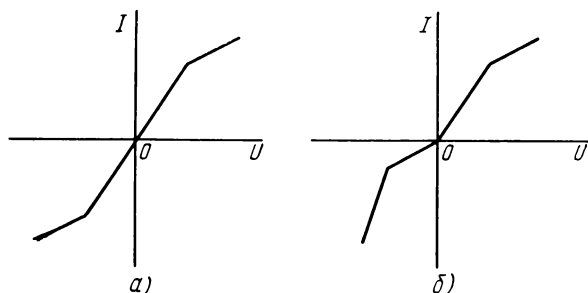


Рис. 1.11. Представление в. а. х. в кусочно-линейном виде:

а — характеристики рис. 1.5, *а*; *б* — характеристики рис. 1.7, *а*

люсника, во многом зависит от режима его работы в конкретной схеме, т. е. от пределов изменения воздействующего на него напряжения. Например, характеристику рис. 1.12, *а*, представляющую собой частный случай основной характеристики рис. 1.3, *а*, можно рассматривать в виде отдельных прямых линий при изменении напряжения: 1) $U=0-U_1$ (рис. 1.12, *б*); 2) $U=U_1-U_2$ (рис. 1.12, *в*); 3) $U>U_2$ (рис. 1.12, *г*).

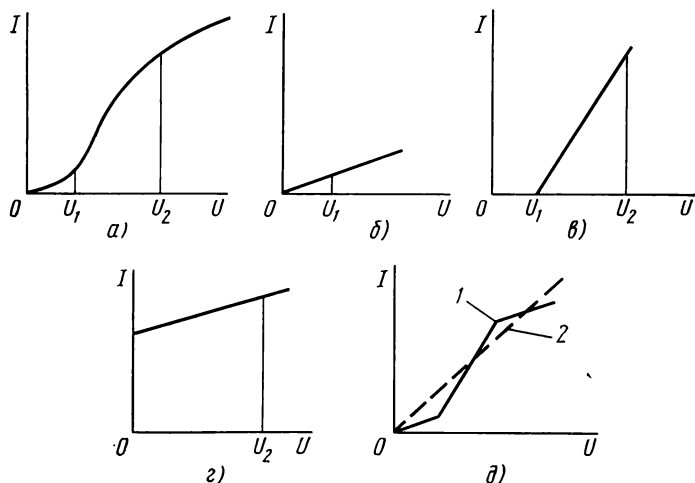


Рис. 1.12. Интерпретация в. а. х. (*а*):

б — для участка $U=0-U_1$; *в* — для участка $U=U_1-U_2$; *г* — для участка $U>U_2$; *д* — кусочная линеаризация *1* и линеаризация *2*

В зависимости от диапазона воздействий одна и та же характеристика может быть принята или кусочно-линейной, или целиком линейной. Так, если диапазон изменения напряжения достаточно велик, то рассматриваемая характеристика может быть сведена к прямой *2* (рис. 1.12, *д*). Однако точность расчета при работе с характеристикой *1* значительно выше, чем с характеристикой *2*.

Во многих случаях вводят дополнительные допущения: достаточно малые сопротивления принимают равными нулю, а достаточно большие — бесконечными; пренебрегают зоной гистерезиса и т. д. Такие характеристики называют идеализированными (рис. 1.13). Идеа-

лизация характеристик может быть проведена, если сопротивление нагрузки существенно больше или меньше статических сопротивлений соответствующих участков вольт-амперных характеристик.

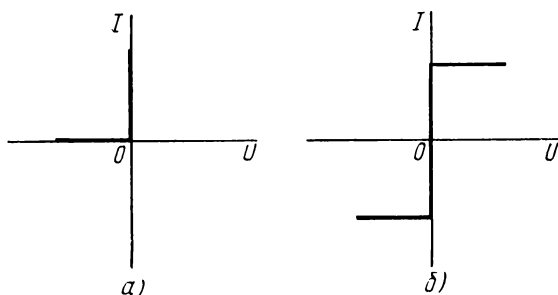


Рис. 1.13. Идеализация в. а. х.:

а — характеристики рис. 1.7, б; б — характеристики рис. 1.5, а

§ 1.3. Графический расчет цепей с двухполусниками методом эквивалентных характеристик и методом пересечения

Нелинейные цепи простой конфигурации удобно рассчитывать известными из курса математики методами графического решения уравнений, непосредственно использующими графическое изображение исходных характеристик двухполусников.

Последовательное соединение. При последовательном соединении нелинейных двухполусников $НД_1$ и $НД_2$

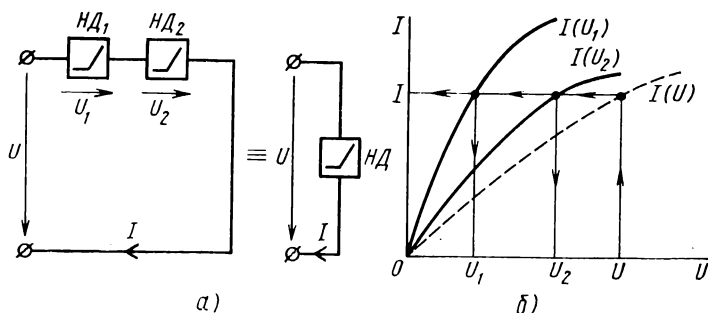


Рис. 1.14. Последовательное соединение двухполусников:

а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные и эквивалентная в. а. х.

(рис. 1.14, а), вольт-амперные характеристики которых показаны на рис. 1.14, б, необходимо воспользоваться вторым законом Кирхгофа и, задаваясь произвольными значениями ординат (токов), суммировать соответствующие им абсциссы (напряжения). В результате суммирования получится вольт-амперная характеристика, соответствующая всей цепи, которую можно рассматривать как один эквивалентный нелинейный двухполюсник (рис. 1.14, а). Далее по напряжению U , приложенному к цепи, находят ток I и падения напряжений на двухполюсниках U_1 и U_2 . Аналогично может быть построена эквивалентная характеристика участка цепи с несколькими последовательно соединенными нелинейными двухполюсниками. Этот метод носит название метода эквивалентных характеристик.

Если последовательно с двухполюсником включен источник напряжения, то вольт-амперная характеристика участка цепи с этим двухполюсником и источником получается смещением характеристики влево на величину э. д. с., если направление э. д. с. источника совпадает с током, и вправо — если не совпадает.

При фиксированном значении U ток и падения напряжений на двух нелинейных двухполюсниках могут быть найдены *методом пересечения*. Для этого одну из заданных вольт-амперных характеристик (рис. 1.15) следует перенести вправо от начала координат вдоль оси абсцисс на величину приложенного напряжения и повернуть так, чтобы получить зеркальное отображение ее относительно вертикали. Тогда вследствие равенства $U_1 = U - U_2$ точка пересечения зеркально отображенной характеристики $I(U_2)' = I(U - U_2)$ одного двухполюсника с характеристикой другого двухполюсника $I(U_1)$ определит искомый ток I и падения напряжений U_1 и U_2 .

Метод эквивалентных характеристик может быть применен и тогда, когда в качестве исходных характе-

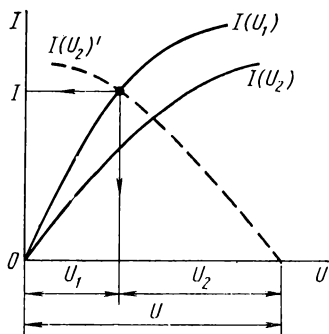


Рис. 1.15. Метод пересечения характеристик

ристик заданы зависимости сопротивлений (статических или дифференциальных) от тока. При этом пользуются правилом преобразования цепи при последовательном соединении, согласно которому сопротивление эквивалентного двухполюсника равно сумме сопротивлений последовательно соединенных двухполюсников (при одном и том же токе). Поэтому, если заданы характеристики $r_{ст1}(I)$ и $r_{ст2}(I)$ (рис. 1.16, а) нелинейных двухполюсников $НД_1$ и $НД_2$, приведенных на рис. 1.14, а, то,

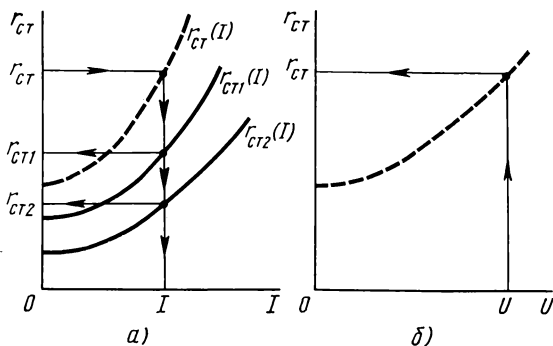


Рис. 1.16. Последовательное соединение двухполюсников:

а — график исходных и эквивалентной зависимостей $r_{ст}(I)$; б — кривая зависимости $r_{ст}(U)$

задаваясь произвольными значениями абсцисс (токов), нужно просуммировать соответствующие им значения ординат (статических сопротивлений). В результате суммирования получим зависимость $r_{ст}(I)$ для двухполюсника, эквивалентного двум заданным. Используя эту характеристику, нужно построить промежуточную зависимость $r_{ст}(U)$ (рис. 1.16, б), отложить по оси абсцисс напряжение U , приложенное к цепи, и определить $r_{ст}$. Затем значение $r_{ст}$ переносят на график исходных и эквивалентной характеристик (рис. 1.16, а), определяют ток в цепи I и статические сопротивления заданных двухполюсников $r_{ст1}$ и $r_{ст2}$. Падения напряжений на этих двухполюсниках могут быть подсчитаны по закону Ома: $U_1 = r_{ст1}I$ и $U_2 = r_{ст2}I$.

Параллельное соединение. При параллельном соединении нелинейных двухполюсников (рис. 1.17, а) необходимо применить первый закон Кирхгофа: задаваясь

произвольными значениями абсцисс (напряжений), просуммировать соответствующие значения ординат (токов). Полученная вольт-амперная характеристика соответствует эквивалентному нелинейному двухполюснику. Далее по заданному току I находят напряжение U и токи ветвей I_1 и I_2 (рис. 1.17, б).

Если же задано напряжение U , то строить эквивалентную вольт-амперную характеристику не надо, так как токи I_1 и I_2 определяются из характеристик $I_1(U)$ и $I_2(U)$, а суммарный ток $I = I_1 + I_2$.

Аналогичный подход может быть использован при параллельном соединении нескольких нелинейных двухполюсников.

Если параллельно с двухполюсником включен источник тока, то вольт-амперная характеристика участка цепи с этим двухполюсником получается смещением характеристики вверх на величину тока источника, если его направление совпадает с напряжением, и вниз — если не совпадает.

Если при параллельном соединении двухполюсников заданы зависимости $g_{ст1}(U)$ и $g_{ст2}(U)$ (рис. 1.18, а), то можно применить правило преобразования цепи при параллельном соединении и, задаваясь значениями абсцисс

(напряжений), просуммировать соответствующие значения ординат (статических проводимостей). Получим характеристику для эквивалентного двухполюсника. Далее необходимо построить промежуточную характеристику $g_{ст}(I)$ и по заданному току I найти значение статической проводимости $g_{ст}$ (рис. 1.18, б). Перенос значения этой проводимости на эквивалентную характеристику (рис. 1.18, а) позволит определить значения приложенного к цепи напряжения U и статических проводимостей

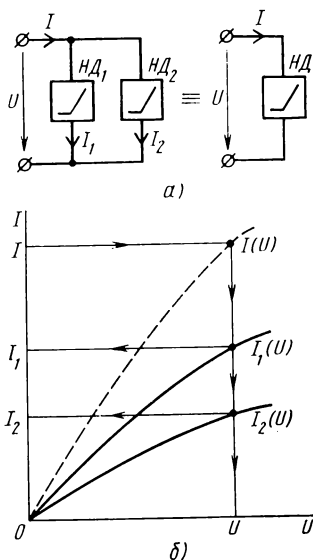


Рис. 1.17. Параллельное соединение двухполюсников: а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные и эквивалентная в. а. х.

$g_{ст1}$ и $g_{ст2}$ двухполюсников $НД_1$ и $НД_2$. Токи параллельных ветвей найдем по закону Ома: $I_1 = g_{ст1}U$ и $I_2 = g_{ст2}U$.

Если же задано напряжение U , то строить эквивалентную характеристику нет необходимости, так как $g_{ст1}$ и $g_{ст2}$ определяются по исходным характеристикам.

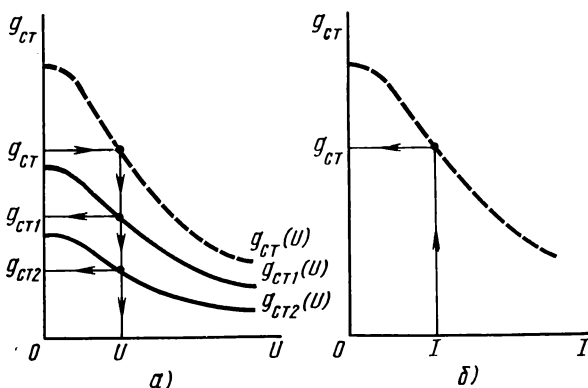


Рис. 1.18. Параллельное соединение двухполюсников:

а — графики исходных и эквивалентной зависимостей $g_{ст}(U)$; б — кривая зависимости $g_{ст}(I)$

Смешанное соединение. Применяя те же приемы расчета, можно определить рабочий режим для любой цепи с последовательно-параллельным соединением двухполюсников.

На рис. 1.19, а показана схема для случая смешанного соединения линейного сопротивления r и двух нелинейных двухполюсников $НД_1$ и $НД_2$, характеристики которых соответственно $I_3(U_2)$, $I_1(U_1)$ и $I_2(U_2)$ показаны на рис. 1.19, б. После замены двух параллельных двухполюсников одним эквивалентным $(I_2 + I_3)(U_2) = I_1(U_2)$, а затем двух последовательных — также одним эквивалентным $I_1(U)$, по заданному напряжению U находим ток I_1 . Определив ток I_1 , найдем напряжения U_1 и U_2 ; зная напряжение U_2 , найдем токи I_2 и I_3 .

Если при смешанном соединении двухполюсников заданы зависимости сопротивлений или проводимостей от тока или напряжения, то целесообразно из них получить вольт-амперные характеристики и использовать их для

расчета. Это объясняется тем, что в случае смешанного соединения эти исходные зависимости менее удобны, чем вольт-амперные характеристики, так как для расчета необходимо использовать как зависимости $r_{ст}$ (I или U), так и зависимости $g_{ст}$ (I или U) и переходить от одной к другой.

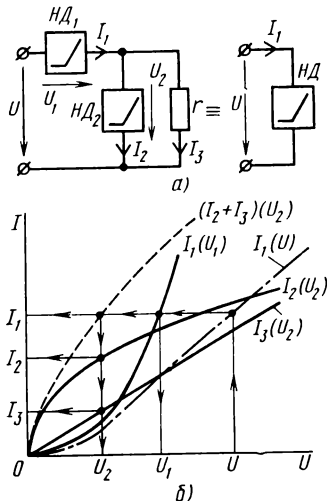


Рис. 1.19. Смешанное соединение двухполюсников:

а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные и эквивалентные в. а. х.

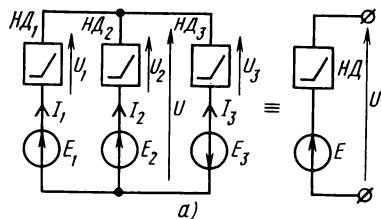


Рис. 1.20. Нелинейная цепь с двумя узлами:

а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные и эквивалентные в. а. х.

Расчет цепи с двумя узлами. Графическое построение для расчета цепи с параллельными ветвями возможно и тогда, когда наряду с нелинейными двухполюсниками в них имеются источники постоянной э. д. с., включенные последовательно с двухполюсниками (рис. 1.20, а). Для этого вместо вольт-амперных характеристик двухполюсников $I_1(U_1)$, $I_2(U_2)$ и $I_3(U_3)$ предварительно строят характеристики каждой ветви с учетом э. д. с. $I_1(U)$, $I_2(U)$ и $I_3(U)$ (смещение влево на величину E_1 и E_2 и вправо на величину E_3 по оси абсцисс), а затем — эквивалентную характеристику параллельных ветвей

$(I_1 + I_2 + I_3) (U)$ (рис. 1.20, б). Эта характеристика смещена влево от начала координат на величину E , которую можно рассматривать как э. д. с. эквивалентной цепи.

Так как сумма токов в узле $(I_1 + I_2 + I_3)$ равна нулю, то в эквивалентной цепи ток отсутствует. Следовательно, точка пересечения характеристики $(I_1 + I_2 + I_3) (U)$ с осью абсцисс — решение задачи. Отсюда находят токи в каждой ветви I_1 , I_2 и I_3 , как это показано на рис. 1.20, б, а по соответствующим вольт-амперным характеристикам — напряжения U_1 , U_2 и U_3 .

Описанный метод применим и в том случае, когда источники содержатся не во всех параллельных ветвях.

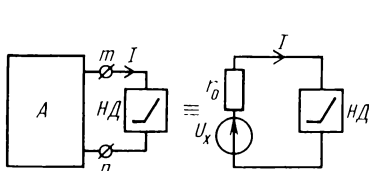


Рис. 1.21. Применение метода эквивалентного генератора для расчета цепи с одним нелинейным двухполюсником

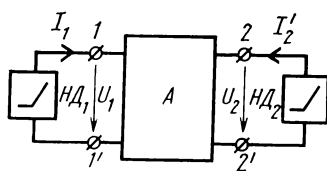


Рис. 1.22. Цепь с двумя нелинейными двухполюсниками

Расчет сложной цепи с одним и двумя нелинейными двухполюсниками. При расчете сложных электрических цепей необходимо, используя методы преобразования, упрощать схемы, пытаясь свести их к одноконтурным или к схемам с двумя узлами.

Можно также, если электрическая цепь любой сложности содержит несколько источников напряжения и один нелинейный двухполюсник, применить для расчета такой цепи *метод эквивалентного генератора*. Для этого выделяют ветвь с двухполюсником и изображают всю остальную часть цепи в виде активного линейного двухполюсника (рис. 1.21), который может быть заменен эквивалентным источником напряжения. Тогда схема приводится к одноконтурной, состоящей из линейного сопротивления и нелинейного двухполюсника. Расчет ее проводится методом эквивалентных характеристик или методом пересечения.

Как известно из раздела линейных электрических цепей, напряжение эквивалентного источника U_x и сопротивление r_0 , которое является входным сопротивлением

пассивного двухполюсника относительно зажимов m и n , определяются в режиме, когда выделенная ветвь разомкнута. Поэтому необходимо, чтобы характеристика $I(U)$ нелинейного двухполюсника проходила через начало координат (чтобы при $I=0$ также и $U=0$). Если же исходная характеристика смещена, то нужно перенести ее в начало координат включением дополнительного источника напряжения или тока (см. § 1.1). Этот источник учитывается в дальнейшем в линейной части цепи при нахождении напряжения U_x .

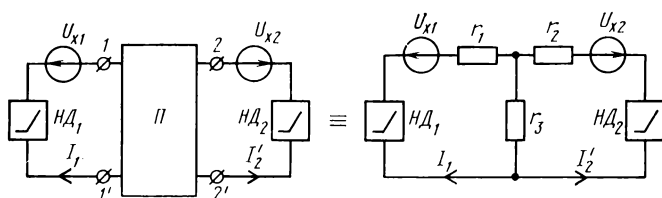


Рис. 1.23. Применение метода эквивалентного генератора для расчета цепи с двумя нелинейными двухполюсниками

Если сколь угодно сложная цепь с источниками напряжения содержит два нелинейных двухполюсника, то можно выделить две эти ветви, а всю остальную линейную часть цепи представить в виде активного четырехполюсника (рис. 1.22).

Известно, что если в две ветви одновременно ввести по источнику, э. д. с. которых равны напряжениям на разомкнутых зажимах этих ветвей, то токи в них найдем из схемы рис. 1.23. Упрощение задачи заключается в том, что вместо большого числа заданных источников, действующих в ветвях сложной цепи, теперь имеем только два (U_{x1} и U_{x2}), включенные в ветви с нелинейными двухполюсниками. При этом вся сложная линейная часть цепи стала пассивным четырехполюсником. Следует отметить, что если токи в ветвях с двухполюсниками находят из схемы рис. 1.23, то токи во всех других ветвях получат суммированием токов режима холостого хода активного четырехполюсника (при определении напряжений U_{x1} и U_{x2}) и режима схемы рис. 1.23.

Линейный пассивный четырехполюсник нужно затем заменить Т-образной схемой замещения и рассчитать эквивалентную схему как схему с двумя узлами.

Такой подход к решению цепи с двумя нелинейными двухполюсниками не является единственным. Можно разомкнуть только одну ветвь, например с двухполюсником HD_2 (см. рис. 1.22), и определить напряжение между разомкнутыми зажимами 2 и 2' и входное нелинейное сопротивление относительно тех же зажимов, т. е. преобразовать схему в эквивалентную относительно одного двухполюсника. Если это удастся сделать, то схема рис. 1.22 преобразуется в одноконтурную, однако в отличие от схемы рис. 1.21 с двумя нелинейными двухполюсниками.

§ 1.4. Релейный эффект в цепи с двухполюсником с отрицательным дифференциальным сопротивлением

Если цепь содержит нелинейный двухполюсник с падающим участком вольт-амперной характеристики, то в цепи может возникнуть релейный эффект, т. е. скачкообразное изменение тока.

Пусть цепь приведена соответствующими преобразованиями к цепи с последовательно соединенными линейным сопротивлением r и нелинейным двухполюсником HD (рис. 1.24, а).

Если использовать метод пересечения и увеличивать входное напряжение U , то линейная характеристика $I(U_1)'$ будет смещаться вправо параллельно самой себе. Одно из таких положений показано на рис. 1.24, б. При дальнейшем увеличении входного напряжения наступит момент, когда характеристика $I(U_1)'$ коснется характеристики $I(U_2)$ (точка 1 на рис. 1.24, в). Теперь при даже незначительном увеличении напряжения U произойдет скачкообразное изменение тока, и рабочий режим будет соответствовать току в цепи I_2 и падениям напряжений U_1 и U_2 , определяемым точкой 2 (так как рабочая точка должна лежать на пересечении характеристик). Значение входного напряжения, при котором произойдет такое явление, называют напряжением срабатывания ($U_{ср}$).

Дальнейшее увеличение входного напряжения не приведет к каким-либо качественным изменениям расчетных соотношений (рис. 1.24, г).

При уменьшении входного напряжения U до значения, при котором произойдет касание характеристик $I(U_1)'$ и $I(U_2)$ в точке 3 (рис. 1.24, д), ток опять изме-

нится скачком, и рабочий режим будет соответствовать току в цепи I_4 и падениям напряжений U_1 и U_2 , определяемым точкой 4. Значение входного напряжения, при котором произойдет такое явление, называют напряжением отпущения ($U_{отп}$). График самого релейного эффекта, т. е. зависимость $I=f(U)$, показан на рис. 1.24, е.

Диапазон напряжений срабатывания и отпущения, а следовательно, и ширина зоны характеристики нелиней-

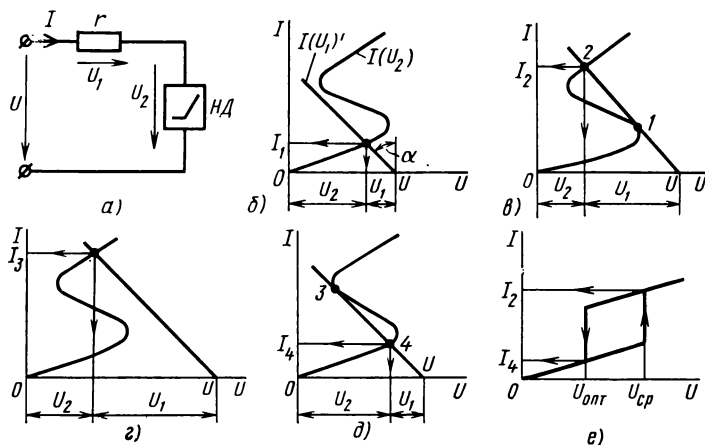


Рис. 1.24. Релейный эффект в нелинейной цепи:

а — схема; б — режим до $U_{ср}$ (или после $U_{отп}$); в — режим при $U_{ср}$; г — режим после $U_{ср}$ (или до $U_{отп}$); д — режим при $U_{отп}$; е — в. а. х. релейного режима

ного двухполюсника между точками 1 и 3 определяются коэффициентом возврата $k=U_{отп}/U_{ср} \leq 1$.

Следует также отметить, что релейный эффект в принципе может быть получен не только изменением напряжения U , но и изменением сопротивления r , что равнозначно изменению угла наклона линейной вольт-амперной характеристики.

Условием возникновения релейного режима является касание характеристик, т. е.

$$|r_{диф}| = r. \quad (1.7)$$

Релейный эффект, естественно, может возникнуть и в цепи с двумя нелинейными двухполюсниками.

§ 1.5. Нелинейная аппроксимация исходных характеристик

Графические методы, удобные и наглядные для простых схем, становятся слишком громоздкими для сложных схем. Кроме того, графический метод даже для простых схем требует большой точности выполнения чертежей и выбора удовлетворительного масштаба. Для сложных схем графические методы не позволяют уста-

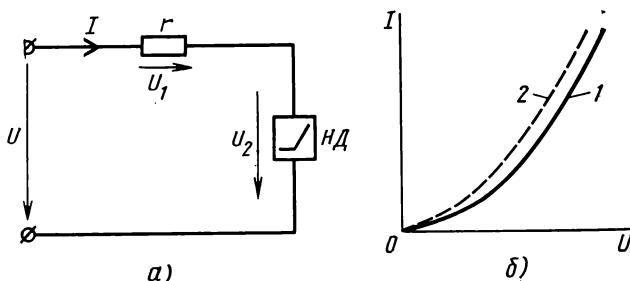


Рис. 1.25. Пример аппроксимации в. а. х.:

а — схема; б — исходная 1 и аппроксимирующая 2 характеристики

новить общие закономерности, найти оптимальные решения, варьировать параметрами и т. д. В таких случаях предпочтительнее аналитические методы расчета, которые основываются на аппроксимации вольт-амперных характеристик или зависимостей сопротивлений от тока (напряжения), т. е. на замене нелинейной характеристики аналитической функцией, приближенно выражающей заданную зависимость.

Если часть расчетных операций выполняется аналитически, а часть — графически, то метод расчета называется графо-аналитическим.

Точная аппроксимация характеристики обычно приводит к сложным математическим соотношениям, что сильно затрудняет анализ. Поэтому на практике не стремятся к особо точной аппроксимации, причем аппроксимирующее выражение должно удовлетворять двум требованиям: 1) по возможности точно выражать характер аппроксимируемой зависимости и всегда отражать черты этой зависимости, являющиеся определяющими для

анализа исследуемого явления; 2) быть как можно проще, чтобы были простыми и решения уравнений, в которые они вводятся при анализе цепи.

Поэтому для одной и той же характеристики в одних режимах может оказаться предпочтительнее один вид аппроксимации, в других режимах — другой.

Аппроксимацию характеристик чаще всего производят с помощью полиномов, иногда с помощью степенных, тригонометрических или гиперболических функций, экспонент, ломаной линии (кусочно-линейная аппроксимация) и т. д.

Рассмотрим цепь, состоящую из двух последовательно соединенных линейного сопротивления r и нелинейного двухполюсника HD (рис. 1.25, *а*). Двухполюсник задан вольт-амперной характеристикой (кривая 1, рис. 1.25, *б*), которая на некотором интервале может быть аппроксимирована параболой второго порядка

$$I = aU_2^2, \quad (1.8)$$

достаточно точно (кривая 2, рис. 1.25, *б*) совпадающей с исходной вольт-амперной характеристикой.

На основании второго закона Кирхгофа

$$U = U_1 + U_2 = rI + \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{I}. \quad (1.9)$$

Решение этого квадратного уравнения позволит определить ток как функцию напряжения и параметров цепи.

Если в качестве исходной характеристики задана зависимость $r_{ст}(I)$, то она также может быть аппроксимирована в требуемом интервале некоторой функцией. Тогда ток найдем из уравнения

$$U = U_1 + U_2 = rI + r_{ст}(I)I. \quad (1.10)$$

Если получено аппроксимирующее выражение нелинейной характеристики, то оно затем может быть линеаризовано (как это было показано ранее для графического варианта) с помощью касательной или секущей.

Аналитический путь линеаризации с помощью касательной заключается в том, что кривая на соответствующем участке заменяется линейным членом разложения ее в ряд Тейлора в окрестности рабочей точки или в ряд Маклорена, если линеаризация производится относительно начала координат.

При линеаризации с помощью секущей необходимо выбрать положение секущей (угловой коэффициент), которое обычно определяется по способу наименьших квадратов.

§ 1.6. Расчет цепей с двухполюсниками методом компенсации

Если в электрическую цепь включить нелинейный двухполюсник (рис. 1.26, а), имеющий, например, вольт-амперную характеристику, показанную на рис. 1.26, б

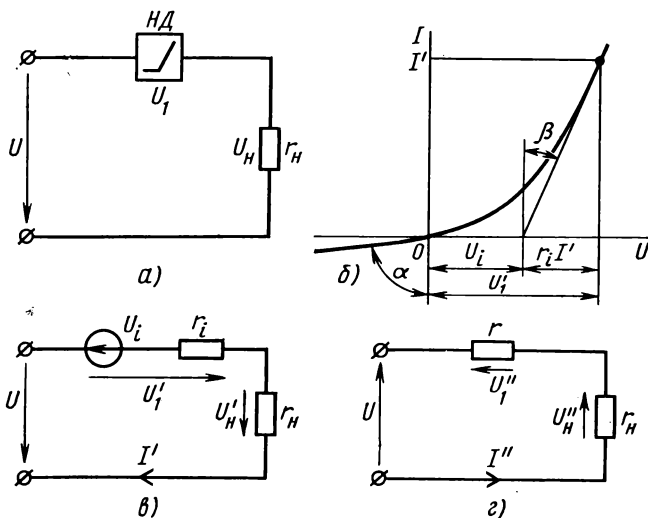


Рис. 1.26. Применение метода компенсации для цепи с нелинейным двухполюсником:

а — схема; б — графическое построение для исходной в. а. х.; в — эквивалентная схема для ветви $I(U)$; г — эквивалентная схема для ветви $-I(-U)$

(так называемая вентильная характеристика), то к прямой ветви этой характеристики $I = f_1(U)$ можно применить метод компенсации (см. § 1.2). Эквивалентная схема для определения тока I' показана на рис. 1.26, в. Из этой схемы

$$I' = \frac{U - U_i}{r_i + r_H}. \quad (1.11)$$

Рабочая точка (I' , U'_1) определяется током нагрузки и должна лежать на прямолинейном участке характеристики. Это дает возможность, определив по методу компенсации значения U_i и r_i , не прибегать в дальнейшем к вольт-амперной характеристике, а непосредственно из (1.11) находить ток I' при изменении значения входного напряжения U или сопротивления нагрузки $r_{н}$. При этом необходимо иметь в виду, что расчеты справедливы только в случае, если значения тока I' не выходят из зоны, ограниченной участком, вне которого вольт-амперная характеристика и прямая линия начинают расходиться.

При изменении полярности входного напряжения U расчет ведется по обратной ветви характеристики $-I = f_2(-U)$, которая практически во всем рабочем диапазоне может быть линеаризована и заменена одним сопротивлением r . При этом из эквивалентной схемы (рис. 1.26, з) находим

$$I'' = \frac{U}{r + r_{н}} \approx \frac{U}{r}, \quad (1.12)$$

где $r = \operatorname{tg} \alpha$ — статическое (дифференциальное) сопротивление для обратного направления тока ($r \gg r_{н}$).

§ 1.7. Магнитные цепи при постоянном магнитном потоке

Далее будет показано, что магнитная цепь и ее параметры аналогичны электрической цепи и ее параметрам. Поэтому рассмотренные ранее методы и приемы расчета электрических цепей с нелинейными двухполюсниками полностью применимы и для расчета магнитных цепей. Чтобы провести указанную аналогию, необходимо уяснить особенности магнитной цепи, определить ее параметры и понять соотношения, определяемые физическими процессами, протекающими в ней.

Для увеличения магнитного потока при заданной намагничивающей силе, а также для придания магнитному полю желаемой конфигурации в определенном месте электротехнического устройства части этого устройства выполняют из ферромагнитных материалов. Эти ферромагнитные части называют магнитопроводами (сердечниками). Магнитный поток создается то-

ком, протекающим по навитой на магнитопровод обмотке.

Систему ферромагнитных тел, предназначенную для надлежащего направления и концентрации магнитного потока, совместно с обмоткой называют магнитной цепью. Если весь магнитопровод выполнен из какого-либо одного ферромагнитного материала, то магнитную цепь называют однородной. При выполнении магнитопровода из материалов с различными магнитными свойствами магнитную цепь называют неоднородной. Магнитную цепь, во всех сечениях которой магнитный поток одинаков, называют неразветвленной. В разветвленной магнитной цепи потоки в различных частях неодинаковы.

Если в полностью размагниченном ферромагнитном материале монотонно увеличивать напряженность и определять индукцию в установившемся режиме, то зависимость *магнитной индукции от напряженности магнитного поля* $B=f(H)$, называемая кривой начального намагничивания, будет иметь вид, показанный на рис. 1.27.

Вследствие необратимости процессов намагничивания магнитное состояние зависит от предшествующих воздействий. Свойство *сохранения следа предшествующих воздействий* называют гистерезисом. После ряда повторных достаточно медленных изменений напряженности поля в пределах $\pm H$ (от $+H_1$ до $-H_1$; от $+H_2$ до $-H_2$ и т. д.) устанавливается статическая симметричная петля гистерезиса (рис. 1.28). Когда же достигается предельное значение $\pm H_{\max}$, форма собственно петли уже не изменяется, а растут только безгистерезисные участки в области насыщения. Соответствующую петлю называют предельной петлей гистерезиса. Остальные возможные петли носят название частных циклов (или частных петель).

Характерными точками на предельной петле гистерезиса являются: значение индукции при напряженности, равной нулю, называемое остаточной индукцией B_r ; значение напряженности магнитного поля, необходимой для того, чтобы довести индукцию в предварительно намагниченном материале до нуля, называемое коэрцитивной силой H_c .

Даже в статических условиях нелинейная магнитная цепь обладает совершенно различными характеристика-

ми в зависимости от магнитной предыстории. Поэтому принято характеризовать магнитные материалы *основ- ной кривой намагничивания* — геометрическим местом вершин симметричных петель гистерезиса, получающих- ся при различных максимальных значениях напряженно- сти магнитного поля для частных петель гистерезиса (см. рис. 1.28). Начальная и основная кривые намагничива- ния обычно близки друг к другу.

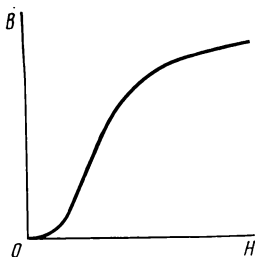


Рис. 1.27. Кривая на-
чального намагничи-
вания

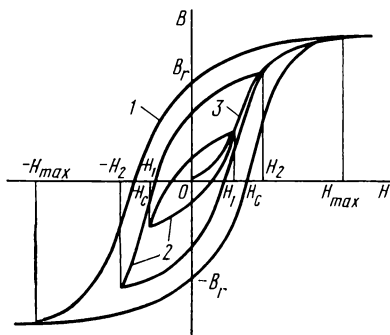


Рис. 1.28. Предельная 1 и частные
2 петли гистерезиса. Основная
кривая намагничивания 3

Основные законы и особенности магнитной цепи.
В основу расчета магнитных цепей положены известные из курса физики закон полного тока: *линейный интеграл (циркуляция) вектора напряженности H вдоль произвольного замкнутого контура l равен алгебраической сумме токов, охваченных этим контуром:*

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \Sigma I \quad (1.13)$$

и принцип непрерывности магнитного потока: магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю; линии вектора B (или магнитные силовые линии) всегда замкнуты:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (1.14)$$

Поток вектора магнитной индукции B через некото- рую поверхность S называют магнитным потоком.

$$\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1.15)$$

При расчете магнитных цепей в большинстве случаев принимают допущение, которое позволяет перейти от интегральных выражений к алгебраическим. Для этого считают, что величины H и B не изменяются вдоль поперечного сечения S магнитопровода, и расчет можно вести по некоторой средней силовой линии магнитопровода. Поэтому в дальнейшем под магнитной индукцией будем понимать некоторое среднее по сечению магнитопровода значение

$$B = \Phi / S, \quad (1.16)$$

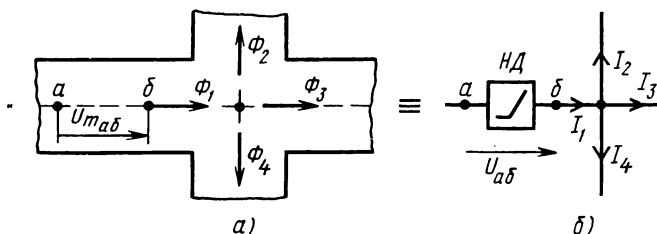


Рис. 1.29. Магнитный узел (а) и его электрический аналог (б)

а под линейным интегралом напряженности вдоль длины ab магнитной цепи (рис. 1.29, а) — магнитное напряжение на этой длине

$$\int_{ab} H dl = U_{маб} \quad (1.17)$$

или

$$H l_{аб} = U_{маб}. \quad (1.18)$$

Кроме того, явление гистерезиса не учитывают, и зависимость B от H определяют по основной кривой намагничивания, пренебрегая потоками рассеяния, которые создают в воздухе параллельные пути прохождения магнитного потока со значительно большими магнитными сопротивлениями.

Законы Кирхгофа для магнитной цепи. Из принципа непрерывности магнитного потока следует, что для узла магнитной цепи справедливо уравнение

$$\Sigma \Phi = 0, \quad (1.19)$$

выражающее первый закон Кирхгофа для магнитной цепи: *алгебраическая сумма магнитных потоков в узле равна нулю, причем потоки, направленные к узлу, берут со знаком «+», а направленные от узла — со знаком «-».*

Для магнитного узла, показанного на рис. 1.29, а, первый закон Кирхгофа запишем в виде:

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 - \Phi_4 = 0, \quad (1.20)$$

что соответствует уравнению для токов электрического аналога этого магнитного узла (рис. 1.29, б).

Чтобы применить второй закон Кирхгофа для магнитной цепи, необходимо разбить ее на участки. Участки могут отличаться друг от друга материалом или поперечным сечением, или тем и другим одновременно. Кроме того, различными являются также участки одинакового сечения и материала, но находящиеся в зоне действия разных потоков (разветвленная цепь).

Произведение тока в обмотке на число витков составляет магнитодвижущую силу (м. д. с.) обмотки

$$F = IN. \quad (1.21)$$

Направление тока и м. д. с. связаны между собой правилом правоугового винта.

Из закона полного тока следует магнитный аналог второго закона Кирхгофа: *алгебраическая сумма м. д. с. обмоток в замкнутом контуре магнитной цепи равна алгебраической сумме магнитных напряжений на отдельных участках контура:*

$$\sum IN = \sum Hl \quad (1.22)$$

или

$$\sum F = \sum U_m. \quad (1.23)$$

Если направление обхода контура совпадает с направлением м. д. с., то эта м. д. с. пишется со знаком «+»; если направление магнитного потока в участке совпадает с направлением обхода контура, то магнитное напряжение на этом участке также пишется со знаком «+».

Составим уравнения по законам Кирхгофа для магнитной цепи рис. 1.30, а в такой последовательности:

1) зададимся положительными направлениями потоков Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 ;

2) определим положительные направления м. д. с. F_1 и F_2 , зная положительные направления токов I_1 и I_2 и направление намотки катушек N_1 и N_2 ;

3) выберем независимые контуры, например левый и правый;

4) выберем направление обхода контуров; например, для первого контура — по часовой стрелке, для второго контура — против;

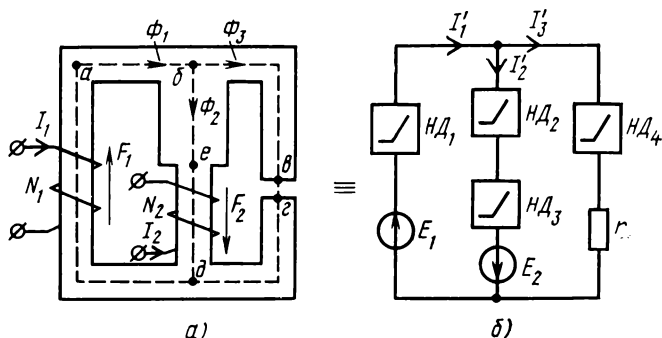


Рис. 1.30. Разветвленная магнитная цепь (а) и ее электрический аналог (б)

5) наметим средние линии каждой ветви магнитной цепи и определим число участков: 1-й участок — $ба\delta$; 2-й участок — $бе$; 3-й участок — $ед$; 4-й участок — $бв + \delta\delta$; 5-й участок — $вг$;

6) составим уравнения Кирхгофа:

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0;$$

$$F_1 + F_2 = I_1 N_1 + I_2 N_2 = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3;$$

$$F_2 = I_2 N_2 = H_2 l_2 + H_3 l_3 - H_4 l_4 - H_5 l_5.$$

Аналогичные уравнения могут быть составлены и для электрической цепи (рис. 1.30, б), представляющей собой аналог магнитной цепи (рис. 1.30, а).

По аналогии с электрическими цепями в расчетные соотношения магнитных цепей может быть введено понятие магнитного сопротивления

$$r_m = U_m / \Phi = l / (\mu_0 \mu S) \quad (1.24)$$

или магнитной проводимости

$$g_m = 1/r_m. \quad (1.25)$$

Так как относительная магнитная проницаемость ферромагнитного участка зависит от индукции

$$\mu = B/(\mu_0 H), \quad (1.26)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м,

то его магнитное сопротивление (проводимость) нелинейно. Поэтому для расчета используют нелинейные характеристики, из которых наиболее часто применяют вебер-амперные (магнитные) характеристики участков магнитной цепи $\Phi = f(Hl)$ или $\Phi = f(IN)$. Вебер-амперные характеристики легко определить по кривой намагничивания материала участка $B(H)$ и его геометрическим размерам. Для этого значения ординат умножают на площадь поперечного сечения ($\Phi = BS$), а значения абсцисс — на длину соответствующего участка (Hl) (рис. 1.31). Фактически вебер-амперные характеристики являются аналогами вольт-амперных характеристик, а участки магнитной цепи — аналогами электрических двухполюсников, т. е. магнитными двухполюсниками.

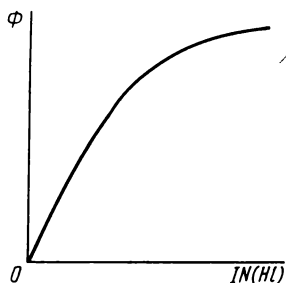


Рис. 1.31. Вебер-амперная (магнитная) характеристика

При расчете магнитных цепей можно также ввести понятия *статических* и *дифференциальных магнитных сопротивлений* и *проводимостей* и пользоваться зависимостями $r_{\text{мст}}(Hl)$, $r_{\text{мст}}(\Phi)$, $r_{\text{мдиф}}(Hl)$ и т. д.

Воздушный зазор в магнитной цепи является аналогом линейного сопротивления, и связь между напряженностью магнитного поля и индукцией в нем определяется уравнением

$$H_{\delta} = B_{\delta}/\mu_0 = 0,8 \cdot 10^6 B_{\delta}, \quad (1.27)$$

которое получается из (1.26), так как относительная магнитная проницаемость воздуха равна единице.

Таким образом, очевидно, что между электрическими и магнитными цепями существует аналогия. При этом аналогичны следующие величины и уравнения:

$$\begin{aligned}
\Phi &\sim I; \\
F &= IN \sim E; \\
U_m &= Hl \sim U; \\
\Sigma \Phi &= 0 \sim \Sigma I = 0; \\
\Sigma F &= \Sigma U_m \sim \Sigma E = \Sigma U; \\
r_m &= Hl/\Phi = l/(\mu_0 \mu S) \sim r = U/I = l/(\gamma S); \\
g_m &= 1/r_m \sim g = 1/r; \\
B &= \Phi/S \sim J = I/S;
\end{aligned}$$

нелинейные магнитные двух- ~ нелинейным электрическим
 полюсники (участки магнитной двухполюсникам;
 цепи)

$$\Phi(Hl) \text{ или } \Phi(IN) \sim I(U);$$

$$r_{m\text{ст}}, r_{m\text{диф}}, g_{m\text{ст}}, g_{m\text{диф}} \sim r_{\text{ст}}, r_{\text{диф}}, g_{\text{ст}}, g_{\text{диф}};$$

линейное магнитное сопротив-	~	линейному электрическому со-
ление (воздушный зазор)		противлению;
магнитная цепь	~	электрической цепи;
выбор положительных направ-	~	выбору положительных направ-
лений потоков и магнитных на-		лений токов и напряжений, не-
пряжений, независимых магнит-		зависимых электрических кон-
ных контуров, направления об-		туров, направления обхода
хода магнитных контуров и т. д.		электрических контуров и т. д.;
методы и приемы расчета маг-	~	методам и приемам расчета
нитных цепей		электрических цепей.

Таким образом, при графическом расчете магнитной цепи необходимо построить вебер-амперные характеристики магнитных двухполюсников, составить электрический аналог магнитной цепи и применить соответствующий метод расчета. Так, например, неразветвленную магнитную цепь (рис. 1.32, *a*) можно рассчитать или методом эквивалентных характеристик, или методом пересечения (см. § 1.3). Разветвленная магнитная цепь (рис. 1.32, *б*) представляет собой схему с двумя узлами, которую рассчитывают аналогично электрической цепи (см. § 1.3).

Для расчета магнитных цепей могут быть применены и аналитические методы расчета, включая метод компенсации (см. § 1.5, 1.6).

Магнитные цепи с постоянными магнитами. Явление остаточного намагничивания, характерное для ферромагнитных материалов, широко используется при изготовлении постоянных магнитов. При этом применяют так

называемые магнитотвердые материалы, обладающие сравнительно большими коэрцитивной силой (десятки и сотни ампер на сантиметр) и площадью петли гистерезиса.

При расчете постоянных магнитов пользуются частью петли гистерезиса, которая лежит во втором квадранте и называется кривой размагничивания (см.

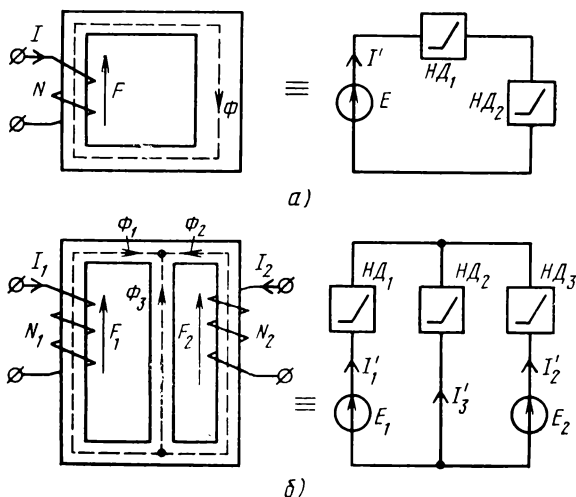


Рис. 1.32. К расчету магнитных цепей:

а — неразветвленная цепь и ее электрический аналог;
б — разветвленная цепь и ее электрический аналог

рис. 1.28). Зная геометрические размеры магнитопровода, можно построить вебер-амперную характеристику (кривая 1, рис. 1.33), которая смещена от начала координат на величину

$$-F_r = -H_c l_m, \quad (1.28)$$

где F_r — остаточная м. д. с.; l_m — длина средней силовой линии магнита.

Характеристика такого вида относится к числу минимума несимметричных характеристик (см. § 1.1) и определяет активный магнитный двухполюсник. Эта характеристика может быть перенесена в начало координат (кривая 2, рис. 1.33), если «последовательно» с пассив-

ным магнитным двухполюсником включить источник магнитодвижущей силы.

Если рассмотреть кольцевой постоянный магнит без воздушного зазора (рис. 1.34, а), который представляет собой активный магнитный двухполюсник (за счет $-F_r$)

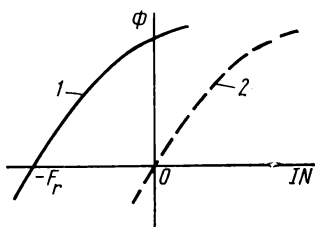


Рис. 1.33. Исходная 1 и эквивалентная 2 вебер-амперные характеристики постоянного магнита

и характеризуется кривой 1 на рис. 1.33, то его магнитным аналогом, отвечающим характеристике 2 на рис. 1.33, будет магнитная цепь, показанная на рис. 1.34, б. Электрический аналог (рис. 1.34, в) можно рассматривать или как активный двухполюсник, замкнутый накоротко, или как пассивный двухполюсник, включенный на источник напряжения.

Для расчета такого магнита, т. е. для определения магнитного потока, можно использовать или эквивалентную характеристику (рис. 1.35, а), или исходную (рис. 1.35, б).

Если задан постоянный магнит с воздушным зазором (рис. 1.34, з), аналоги которого показаны на рис. 1.34, д, е, то для расчета такой магнитной цепи удобно использовать метод пересечения (см. § 1.3). Для этого необходимо определить угол α (рис. 1.35, в), под которым проводят прямую линию, являющуюся характеристикой воздушного зазора. Воспользуемся уравнением (1.24), которое для определения магнитного сопротивления воздушного зазора будет иметь вид

$$r_{m,\delta} = \frac{l_\delta}{\mu_0 S_\delta}, \quad (1.29)$$

где l_δ — длина средней силовой линии воздушного зазора; S_δ — площадь поперечного сечения воздушного зазора.

Используя уравнение (1.29), можно определить угол α , так как $\alpha = \arctg r_{m,\delta}$.

Линейная вебер-амперная характеристика воздушного зазора может быть построена, если умножить левую часть уравнения (1.27) на l_δ , а правую часть — на S_δ .

Точка пересечения линейной и нелинейной характеристик (рис. 1.35, в) является рабочей точкой, которая определяет значения магнитного потока Φ и магнитных напряжений магнитопровода $H_m l_m$ и воздушного зазора $H_\delta l_\delta$. Те же значения можно получить, если использовать для расчета исходную характеристику (рис. 1.35, з).

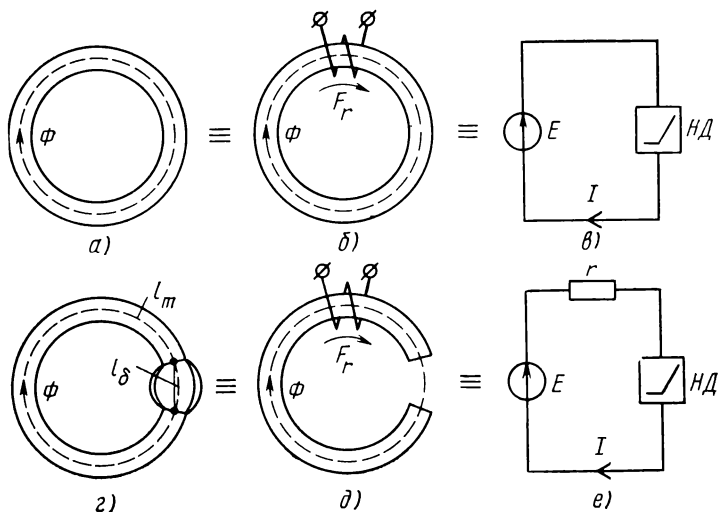


Рис. 1.34. Кольцевой постоянный магнит и его аналоги:

а — постоянный магнит без воздушного зазора; б — его магнитный аналог; в — его электрический аналог; г — постоянный магнит с воздушным зазором; д — его магнитный аналог; е — его электрический аналог

Значения магнитных индукций магнитопровода B_m и воздушного зазора B_δ можно определить согласно уравнению (1.16):

$$B_m = \Phi/S_m \text{ и } B_\delta = \Phi/S_\delta,$$

где S_m — площадь поперечного сечения магнита.

Следует заметить, что в магнитных цепях, рассмотренных ранее, площади магнитопровода и воздушного зазора в большинстве случаев принимались равными. Это объяснялось малой длиной воздушного зазора, и поэтому выпучивание магнитного потока в воздушном зазоре было несущественно.

В цепях с постоянными магнитами воздушные зазоры имеют значительную длину, а магнитный поток — сложную конфигурацию, замыкаясь не только по прямым линиям (рис. 1.34, *г*). Поэтому площадь поперечного сечения воздушного зазора S_δ в отдельных случаях значительно превышает площадь поперечного сечения магнита S_m .

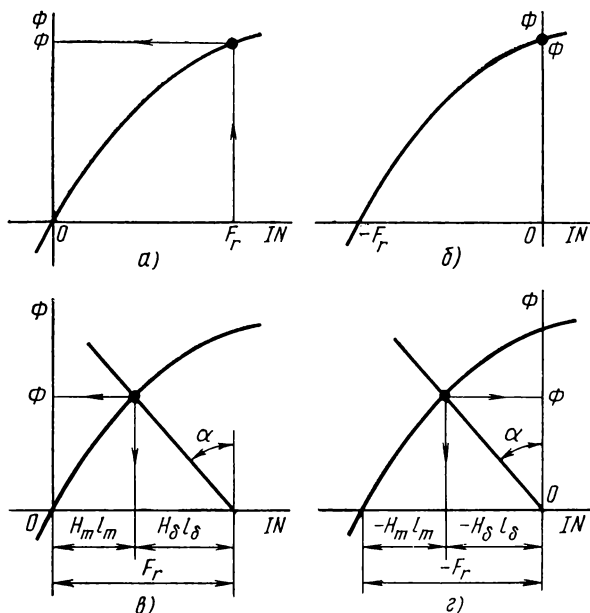


Рис. 1.35. Графический расчет постоянных магнитов:

а — эквивалентная характеристика для рис. 1.34, *а*; *б* — исходная характеристика для рис. 1.34, *а*; *в* — эквивалентная характеристика для рис. 1.34, *г*; *г* — исходная характеристика для рис. 1.34, *г*

Задачи

1.1. Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника описывается уравнением $I = aU + bU^3$. Определить статическое и дифференциальное сопротивления этого двухполюсника при напряжении $U = 4$ В, если $a = 8 \cdot 10^{-3}$ А/В и $b = 5 \cdot 10^{-4}$ А/В³.

О т в е т. $r_{ст} = 62,5$ Ом; $r_{диф} = 31,25$ Ом.

1.2. Определить статическое и дифференциальное сопротивления нелинейного двухполюсника при напряжении $U = 225$ В, если его вольт-амперная характеристика $I = 0,08 \cdot 10^{-3} U^{3/2}$.

Ответ. $r_{ст}=833,3 \text{ Ом}$; $r_{диф}=555,5 \text{ Ом}$.

1.3. Нелинейный двухполюсник, вольт-амперная характеристика которого приведена в табл. 1.1, работает в режиме, при котором напряжение на нем может меняться в пределах от 40 до 60 В.

Таблица 1.1

U	В	0	10	20	30	40	50	60
I	мА	0	120	175	210	235	260	285

Определить статические и дифференциальные сопротивления для граничных значений напряжений. Чему равны э. д. с. источников и сопротивления эквивалентных схем, которыми можно заменить нелинейный двухполюсник в граничных точках?

Решение. Статические сопротивления при напряжениях 40 и 60 В пропорциональны $\operatorname{tg} \alpha_1$ и $\operatorname{tg} \alpha_2$ соответственно (рис. 1.36, а):

$$r_{ст1} = 40/0,235 = 170,2 \text{ Ом}; \quad r_{ст2} = 60/0,285 = 210,5 \text{ Ом}.$$

Для определения дифференциальных сопротивлений и сопротивлений эквивалентных схем необходимо провести касательные к вольт-амперной характеристике в точках с напряжениями 40 и 60 В. В данном случае эти касательные совпадают. Поэтому дифференциальные сопротивления (и сопротивления эквивалентных схем) равны между собой и пропорциональны $\operatorname{tg} \beta$:

$$r_{диф} = r_t = 54/0,135 = 400 \text{ Ом}.$$

Пересечение касательной с осью абсцисс произошло в точке —54 В. Это и есть значение э. д. с. источника эквивалентной схемы (рис. 1.36, б).

Ответ. $r_{ст1}=170,2 \text{ Ом}$; $r_{ст2}=210,5 \text{ Ом}$; $r_{диф}=400 \text{ Ом}$; $U_i = -54 \text{ В}$; $r_i=400 \text{ Ом}$.

1.4. Зная вольт-амперную характеристику нелинейного двухполюсника (см. табл. 1.1), построить зависимости $r_{ст}(I)$ и $r_{диф}(I)$.

1.5. Используя вольт-амперную характеристику, заданную табл. 1.2, построить зависимости $g_{ст}(I)$ и $g_{диф}(I)$.

Таблица 1.2

U	В	0	2	6	10	15	20	25	30
I	А	0	0,1	0,2	0,26	0,3	0,33	0,35	0,36

1.6. Вольт-амперную характеристику нелинейного двухполюсника, приведенную в табл. 1.1, представить в виде ломаной кривой из прямолинейных отрезков и для каждого участка построить эквивалентную схему, заменив нелинейный двухполюсник линейным сопротивлением и источником э. д. с.

1.7. Цепь, представляющая собой последовательное соединение сопротивления r и двухполюсника, вольт-амперная характеристика которого приведена в табл. 1.2, подключается к источнику с напряжением $U=27$ В.

Чему равен ток в цепи, если $r=70$ Ом? На сколько надо изменить сопротивление, чтобы ток стал равен $0,2$ А?

Отв. $I=0,25$ А; увеличить на 35 Ом.

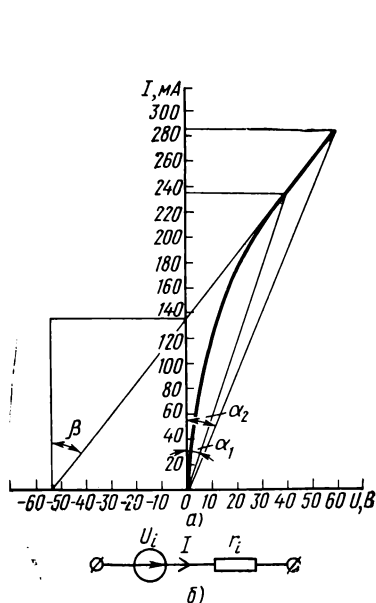


Рис. 1.36. К решению задачи 1.3:

a — графический расчет; b — эквивалентная схема

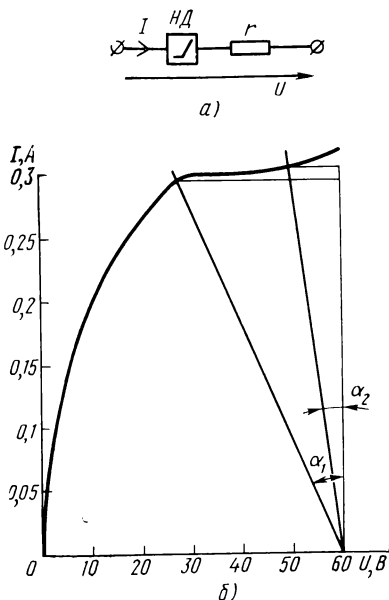


Рис. 1.37. К решению задачи 1.10:

a — схема; b — графический расчет

1.8. Нелинейный двухполюсник с вольт-амперной характеристикой $I=0,01 U_{\text{нд}}^2$, соединенный последовательно с сопротивлением $r=12$ Ом, подключен к источнику с напряжением $U=12$ В. Определить ток в цепи и падения напряжений на элементах аналитическим и графическим способами. Чему должно быть равно сопротивление, включенное последовательно, чтобы падение напряжения на нелинейном двухполюснике было равно 4 В?

Отв. $I=0,444$ А; $U_{\text{нд}}=6,67$ В; $U_r=5,33$ В; $r=50$ Ом.

1.9. Для стабилизации тока в сопротивлении $r_n=50$ Ом, подключенном к источнику постоянного напряжения, последовательно с сопротивлением включается нелинейный двухполюсник с вольт-амперной характеристикой, представленной в табл. 1.3.

В каких пределах может меняться напряжение источника, если $I=0,3 \pm 0,005$ А?

Отв. От 40 до 65 В.

Таблица 1.3

U	В	0	3	10	20	25	30	40	50	60
I	А	0	0,1	0,2	0,275	0,295	0,3	0,3	0,305	0,32

1.10. Последовательно соединенные сопротивление r и нелинейный двухполосник подключены к источнику с напряжением $U=60$ В. Как должно меняться сопротивление r , чтобы при этом ток был в пределах от 0,295 до 0,305 А? Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполосника представлена в табл. 1.3.

Решение. Используя метод пересечения (для схемы рис. 1.37, а), соединяем точки вольт-амперной характеристики $I_1=0,295$ А и $I_2=0,305$ А с точкой на оси абсцисс $U=60$ В (рис. 1.37, б).

Искомые сопротивления пропорциональны $\operatorname{tg} \alpha_1$ и $\operatorname{tg} \alpha_2$ соответственно и составят:

$$r' = 32,5/0,295 = 110 \text{ Ом}; \quad r'' = 10/0,305 = 33 \text{ Ом}.$$

Ответ. От 110 до 33 Ом.

1.11. Вольт-амперная характеристика последовательно соединенных сопротивлений $r=50$ Ом и нелинейного двухполосника приведена в табл. 1.4.

Таблица 1.4

U	В	0	7,5	17	34	55	78	106	150
I	А	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

Построить вольт-амперную характеристику нелинейного двухполосника.

1.12. Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполосника описывается уравнением $I=2,5/(U-20)$. Нелинейный двухполосник и включенное последовательно с ним сопротивление r присоединены к источнику с напряжением $U=50$ В. Каким должно быть сопротивление $r=r_1$, чтобы в устойчивом режиме ток был $I_1=0,5$ А? При каком значении $r=r_{кр}$ ток будет прерываться?

Ответ. $r_1=5$ Ом; $r_{кр}=90$ Ом.

1.13. Два нелинейных двухполосника с вольт-амперными характеристиками, представленными в табл. 1.5, соединены последовательно и подключены к источнику с напряжением $U=27$ В.

Определить ток в цепи и напряжение на каждом двухполоснике.

Решение. Для решения задачи (рис. 1.38, а) воспользуемся мето-

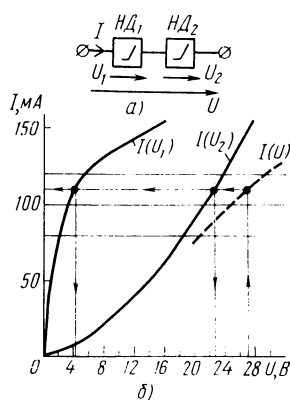


Рис. 1.38. К решению задачи 1.13:

а — схема; б — графический расчет

Таблица 1.5

U	В	0	1	2,5	5	7,5	10	15	20	25	30
I_1	мА	0	56	90	118	130	138	152	166	180	195
I_2	мА	0	2	4	10	18	30	55	90	130	175

дом эквивалентных характеристик и построим часть эквивалентной характеристики, задавая значениями токов от 80 до 120 мА (рис. 1.38, б):

$$I' = 80 \text{ мА}, \quad U' = U'_1 + U'_2 = 2 + 18,7 = 20,7 \text{ В};$$

$$I'' = 100 \text{ мА}, \quad U'' = U''_1 + U''_2 = 3,3 + 21,5 = 24,8 \text{ В};$$

$$I''' = 120 \text{ мА}, \quad U''' = U'''_1 + U'''_2 = 5,4 + 24 = 29,4 \text{ В}.$$

Перенесем значение напряжения питания $U=27$ В на эквивалентную характеристику и найдем ток в цепи $I=0,11$ А, а затем напряжения $U_1=4,2$ В и $U_2=22,8$ В.

Ответ $I=0,11$ А; $U_1=4,2$ В; $U_2=22,8$ В.

1.14. Для двух нелинейных двухполюсников в табл. 1.6 заданы зависимости $r_{ст1}(I)$ и $r_{ст2}(I)$.

Таблица 1.6

I , мА	0	2	5	10	20	30	40	50	60
$r_{ст1}$, Ом	500	500	480	400	260	160	100	70	60
$r_{ст2}$, Ом	100	100	100	100	125	175	270	405	580

При подключении цепи, представляющей собой последовательное соединение этих двухполюсников, к источнику с напряжением $U=27$ В определить ток и падение напряжения на двухполюсниках.

Ответ. $I=52$ мА; $U_1=3,9$ В; $U_2=23,1$ В.

1.15. Нелинейный двухполюсник, зависимость $r_{ст}(I)$ которого задана в табл. 1.7, включен последовательно с сопротивлением $r=1130$ Ом.

Таблица 1.7

I , мА	0	2	5	10	20	30	40	50	60
$r_{ст}$, Ом	600	600	580	500	385	335	370	475	640

Какое напряжение нужно подать на эту цепь, чтобы обеспечить в ней ток 40 мА?

Ответ. $U=60$ В.

1.16. Параллельно нелинейному двухполюснику, вольт-амперная характеристика которого $I=0,02 U^2$, включено сопротивление $r=25$ Ом. При каком напряжении сети общий ток в цепи будет равен 225 мА? Какой должна быть величина сопротивления r , чтобы при напряжении источника $U=4$ В выполнялось условие $I_r/I_{нд}=1/2$?

Ответ. $U=2,5$ В; $r=25$ Ом.

1.17. Параллельно нелинейному двухполюснику, который задан зависимостью $g_{ст}(U)$ (табл. 1.8), включено сопротивление $r=500$ Ом.

Т а б л и ц а 1.8

U	В	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$g_{ст} \cdot 10^{-3}$	См	1,67	2,0	2,94	2,7	2,32	2,04	1,82	1,63	1,52

При каком входном напряжении общий ток в цепи будет равен 114,6 мА?

Ответ. $U=30$ В.

1.18. Два параллельных нелинейных двухполюсника $НД_2$ и $НД_3$ включены последовательно с нелинейным двухполюсником $НД_1$. Определить токи во всех ветвях и напряжения на нелинейных двухполюсниках, если напряжение на входе $U=27$ В. Вольт-амперные характеристики нелинейных двухполюсников $I_1(U)=I_3(U)$ и $I_2(U)$ приведены в табл. 1.5.

Ответ. $I_1=162$ мА; $I_2=26$ мА; $I_3=136$ мА; $U_1=18$ В; $U_2=U_3=9$ В.

1.19. Нелинейный двухполюсник и сопротивление r_2 , соединенные параллельно, включены последовательно с сопротивлением r_1 . Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника $I_1(U)$ задана в табл. 1.5. Определить токи в ветвях и напряжение на нелинейном двухполюснике, если $U=20$ В; $r_1=100$ Ом; $r_2=400$ Ом.

Ответ. $I_1=140$ мА; $I_2=15$ мА; $I_{нд}=125$ мА; $U_{нд}=6$ В.

1.20. В диагональ мостовой схемы, состоящей из ветвей: нелинейный двухполюсник $НД_1$ — сопротивление r_2 и сопротивление r_1 — нелинейный двухполюсник $НД_2$, включено сопротивление r_3 . Вольт-амперные характеристики нелинейных двухполюсников приведены в табл. 1.5. Найти токи во всех ветвях, если напряжение первого нелинейного двухполюсника изменяется от 10 до 20 В, а второго — от 23 до 30 В. Параметры схемы: $r_1=22$ Ом; $r_2=64$ Ом; $r_3=90$ Ом; $U=30$ В.

Ответ. $I_1=0,23$ А; $I_2=0,25$ А; $I_3=0,1$ А; $I_{нд1}=0,15$ А; $I_{нд2}=0,13$ А.

1.21. Мостовая схема (см. задачу 1.20) подключена к источнику с напряжением $U=25$ В. Определить, при каком значении сопротивления r_1 мост будет находиться в равновесии, если $r_2=45$ Ом. Нелинейные двухполюсники имеют одинаковую вольт-амперную характеристику, представленную в табл. 1.9.

Таблица 1.9

U	B	0	2,5	5	10	15	20	25
I	A	0	0,12	0,2	0,325	0,4	0,45	0,475

Ответ. $r_1=25$ Ом.

1.22. Построить вольт-амперную характеристику $I(U)$ цепи, представляющей собой четыре параллельные ветви: диод — сопротивление r_1 — источник E_1 , диод — сопротивление r_2 — источник E_2 , диод — сопротивление r_3 — источник E_3 , сопротивление r_4 . Источники и диоды направлены навстречу друг другу. $E_1=20$ В, $E_2=17$ В, $E_3=10$ В, $r_1=r_2=r_3=r_4=400$ Ом. Диоды имеют идеализированные характеристики.

1.23. Цепь с двумя узлами: нелинейный двухполюсник $НД_1$ — источник E_1 , нелинейный двухполюсник $НД_2$, сопротивление r_1 — источник E_2 имеет следующие параметры: $E_1=25$ В, $E_2=23$ В, $r_1=1000$ Ом. Вольт-амперные характеристики нелинейных двухполюсников определяются табл. 1.5. Источник E_1 направлен к верхнему узлу, источник E_2 — к нижнему.

Ответ. $I_1=0,124$ А; $I_2=0,082$ А; $I_3=0,042$ А.

1.24. Цепь с двумя узлами состоит из следующих ветвей: нелинейный двухполюсник $НД_1$ — источник E_1 , нелинейный двухполюсник $НД_2$ — источник E_2 , нелинейный двухполюсник $НД_3$. Источник E_1 направлен к нижнему узлу, источник E_2 — к верхнему. Вычислить токи в ветвях, если $E_1=5$ В, $E_2=15$ В, а нелинейные двухполюсники имеют одинаковые вольт-амперные характеристики, определяемые табл. 1.9.

Решение. Для нахождения токов в схеме с двумя узлами необходимо построить вольт-амперные характеристики параллельных ветвей, если известны вольт-амперные характеристики нелинейных двухполюсников. Для исходной схемы (рис. 1.39, а) такое построение показано на рис. 1.39, б.

Теперь можно получить эквивалентную характеристику $(I_1+I_2+I_3)(U_3)$, точка пересечения которой с осью абсцисс ($\sim 2,25$ В) — решение задачи. Восставим из этой точки перпендикуляры до пересечения с характеристиками $I_1(U_3)$, $I_2(U_3)$ и $I_3(U_3)$ и найдем токи в ветвях: $I_1=0,26$ А; $I_2=-0,37$ А; $I_3=0,11$ А.

Ответ. $I_1=0,26$ А; $I_2=0,37$ А; $I_3=0,11$ А.

1.25. Одноконтурная магнитная цепь имеет два одинаковых воздушных зазора $l_{\delta}=0,08$ см, участки $l_1=2,1$ см и $l_2=3,2$ см, площадь поперечного сечения $S_1=S_2=0,05$ см². Относительная магнитная проницаемость материала первого участка $\mu_1=150$, а второго $\mu_2=600$. Определить ток в обмотке с числом витков $N=1000$, создающий магнитный поток $\Phi=10^{-5}$ Вб. Вычислить статическую индуктивность катушки.

Ответ. $I=2,85$ А; $L_{ст}=3,5$ мГн.

1.26. Кольцевой сердечник, на который навита обмотка с числом витков $N=100$, имеет внутренний диаметр $d_{вт}=40$ мм, внешний диаметр $d_{вн}=60$ мм и толщину $b=10$ мм. Построить зависимость $B=f(H)$ для ферромагнитного материала сердечника, если при воз-

душном зазоре $l_{\delta}=0,1$ мм была получена зависимость $\Phi=f(IN)$, приведенная в табл. 1.10.

Таблица 1.10

IN	A	0	43	65,3	93	109	127	150	181
$\Phi \cdot 10^{-4}$	B6	0	0,4	0,6	0,8	0,9	1	1,1	1,2

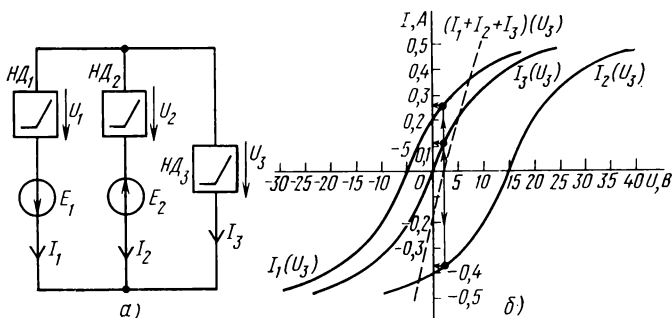


Рис. 1.39. К решению задачи 1.24:

а — схема; б — графический расчет

1.27. На кольцевом сердечнике из листовой стали Э31 (табл. 1.11) намота обмотка в 200 витков.

Таблица 1.11

B	Тл	0	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
H	A/м	0	43	49	55	61	67	72,5	78	84	90	100
B	Тл	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20
H	A/м	110	123	137	155	173	192	210	240	300	395	520
B	Тл	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,62	1,70	1,80	1,90
H	A/м	643	800	920	1100	1300	1800	2400	4000	6500	10 500	21 000

Какой величины ток необходимо пропустить через обмотку, чтобы создать в сердечнике поток $\Phi=10^{-4}$ Вб? Внутренний диаметр сердечника $d_{вт}=50$ мм, внешний диаметр $d_{вн}=70$ мм, толщина $b=10$ мм. Как изменится поток, если ток уменьшить в два раза?

Ответ. $I=0,198$ А; $\Phi=0,65 \cdot 10^{-4}$ Вб.

1.28. Два кольцевых сердечника охвачены одной обмоткой с числом витков $N=1000$. Определить ток в обмотке и поток в большем сердечнике, если поток в меньшем сердечнике $\Phi_1=1,3 \cdot 10^{-4}$ Вб.

Сердечники изготовлены из листовой стали Э31 (см. табл. 1.11), толщина обоих сердечников одинакова: $b=20$ мм. Размер большего сердечника: $d_{вт}=40$ мм, $d_{вн}=80$ мм. Размер меньшего сердечника: $d_{вт}=30$ мм, $d_{вн}=40$ мм, воздушный зазор $l_{\delta}=1$ мм.

Ответ. $I=1,123$ А; $\Phi=1,685 \cdot 10^{-4}$ Вб.

1.29. К обмотке, сопротивление которой $r=30$ Ом и число витков $N=800$, навитой на кольцевой сердечник из листовой стали Э31 (см. табл. 1.11), подведено постоянное напряжение $U=27$ В.

Длина средней линии сердечника $l_{cp}=20$ см, площадь сечения $S=2$ см² и длина воздушного зазора $l_{\delta}=0,5$ мм. Определить магнитный поток в сердечнике.

Ответ. $\Phi=2,7 \cdot 10^{-4}$ Вб.

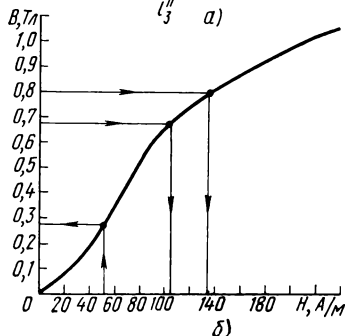
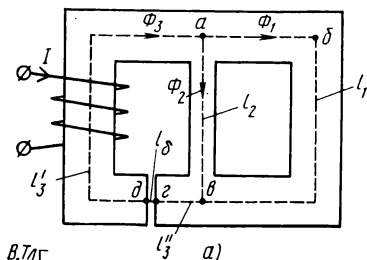


Рис. 1.40. К решению задачи 1.30:

а — магнитная цепь; б — графический расчет

1.30. Индукция в среднем стержне двухконтурной магнитной цепи $B=0,8$ Тл. Определить ток в обмотке с числом витков $N=1000$, если магнитопровод изготовлен из листовой стали Э31 (см. табл. 1.11). Размеры магнитопровода: а) правый стержень: средняя линия — 0,29 м, площадь поперечного сечения — $8 \cdot 10^{-4}$ м²; б) средний стержень: средняя линия — 0,11 м, площадь поперечного сечения — $4 \cdot 10^{-4}$ м²; в) левый стержень: средняя линия — 0,289 м, воздушный зазор — 0,001 м, площадь поперечного сечения — $8 \cdot 10^{-4}$ м². Обмотка намотана на левом стержне.

Решение. Так как в среднем стержне магнитопровода (рис. 1.40, а) величина индукции задана ($B_2=0,8$ Тл), можно найти в этом стержне напряженность магнитного поля, воспользовавшись кривой намагничивания $B(H)$ (рис. 1.40, б). Получим $H_2=137$ А/м.

Для контура $abva$ по второму закону Кирхгофа

$$H_2 l_2 - H_1 l_1 = 0,$$

откуда

$$H_1 = \frac{H_2 l_2}{l_1} = \frac{137 \cdot 0,11}{0,29} = 52 \text{ А/м.}$$

По кривой намагничивания для $H_1=52$ А/м получим $B_1=0,275$ Тл. Определим потоки Φ_1 и Φ_2 :

$$\Phi_1 = B_1 S_1 = 0,275 \cdot 8 \cdot 10^{-4} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ Вб;}$$

$$\Phi_2 = B_2 S_2 = 0,8 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

По первому закону Кирхгофа для узла а

$$-\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0.$$

Поэтому

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2 = 2,2 \cdot 10^{-4} + 3,2 \cdot 10^{-4} = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Найдем индукцию в левом стержне

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{5,4 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 10^{-4}} = 0,675 \text{ Тл.}$$

По кривой намагничивания для $B_3 = 0,675$ Тл получим $H_3 = 105$ А/м. Напряженность магнитного поля в воздушном зазоре

$$H_\delta = 0,8 B_\delta \cdot 10^6 = 0,8 \cdot 0,675 \cdot 10^6 = 0,54 \cdot 10^6 \text{ А/м.}$$

Для контура *авгда* по второму закону Кирхгофа

$$IN = H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_\delta l_\delta,$$

где

$$l_3 = l'_3 + l''_3.$$

Из последнего уравнения

$$I = \frac{H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_\delta l_\delta}{N} = \frac{137 \cdot 0,11 + 105 \cdot 0,289 + 0,54 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}{1000} = \frac{585,415}{1000} \approx 0,585 \text{ А.}$$

Ответ. $I = 0,585$ А.

1.31. Кольцевой постоянный магнит, внешний диаметр которого $d_{\text{вн}} = 50$ мм, внутренний диаметр $d_{\text{вт}} = 30$ мм и толщина $b = 10$ мм, имеет воздушный зазор $l_\delta = 10$ мм. Определить магнитный поток и напряженность магнитного поля в воздушном зазоре и в теле магнита, если зависимость $B(H)$ приведена в табл. 1.12.

Т а б л и ц а 1.12

H_m	А/м	—9600	—9100	—8200	—6800	—4750	—1200	0
B_m	Тл	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,05

Ответ. $\Phi = 0,14 \cdot 10^{-4}$ Вб; $H_m = -1215$ А/м; $H_\delta = -106\,930$ А/м.

1.32. Два одинаковых подковообразных постоянных магнита, каждый из которых имеет длину средней линии $l_{\text{ср}} = 15$ см и площадь поперечного сечения $S = 1$ см², сведены до соприкосновения и намагничены. Остаточная индукция в них равна $B_r = 1,05$ Тл. Определить зависимость потока от воздушного зазора при разделении магнитов. Зависимость $B(H)$ материала, из которого изготовлены магниты, представлена в табл. 1.12.

ГЛАВА 2. УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ В ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ

§ 2.1. Исходные характеристики четырёхполюсников и их систематизация

Четырёхполюсником называют часть электрической цепи, рассматриваемую по отношению к двум парам ее зажимов (рис. 2.1).

Если свойства двухполюсников определяются одной характеристикой, то для анализа четырёхполюсников

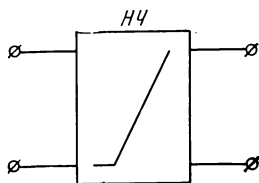


Рис. 2.1. Условное обозначение нелинейного четырёхполюсника

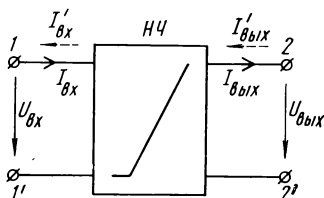


Рис. 2.2. Положительные направления напряжений и токов четырёхполюсника

необходимо иметь два семейства вольт-амперных характеристик: *входное* и *выходное*. Каждая из характеристик семейств может иметь своим прототипом одну из вольт-амперных характеристик двухполюсников (см. рис. 1.3—1.7).

Соотношения между токами и напряжениями на входе и выходе четырёхполюсника для выбранных положительных направлений токов и напряжений (рис. 2.2) могут быть сведены к одной из следующих систем уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); \\ I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_2(I_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, I'_{\text{вых}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); \\ I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, I'_{\text{вых}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_2(I_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}). \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Нетрудно видеть, что первая система уравнений, изображенная графически на рис. 2,3, а, б, д, е, представляет собой нелинейный вариант формы g -параметров. Следовательно, если возможна линейризация этих ха-

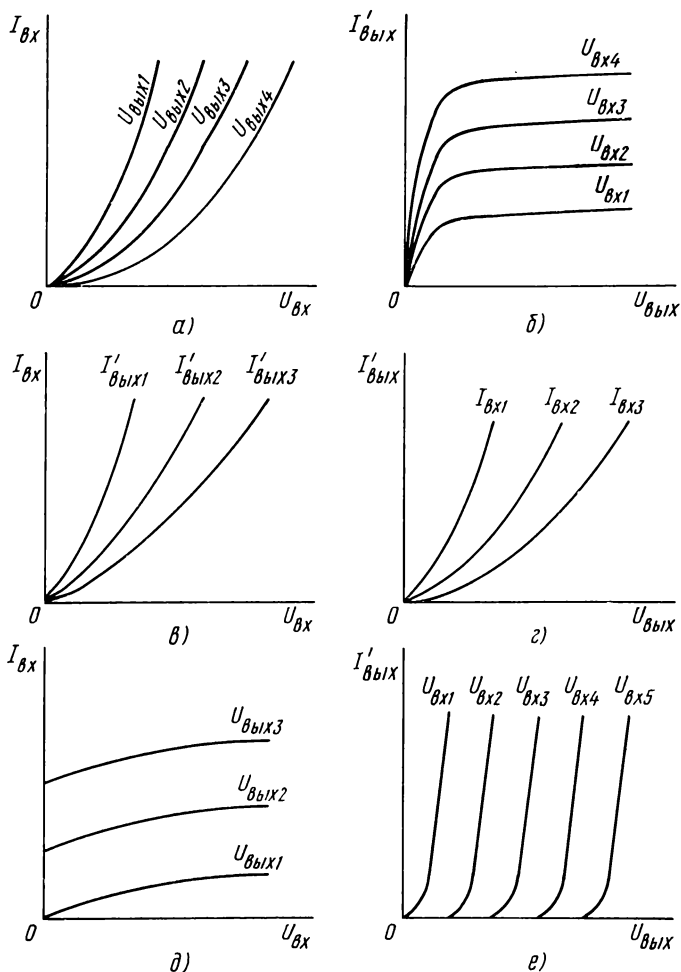


Рис. 2.3. Примеры семейств в. а. х. четырехполюсника:
а, б — входных $I_{вх}$ ($U_{вх}$, $U_{вых}$); в, г — выходных $I'_{вх}$ ($U_{вх}$, $U_{вых}$); д — входных $I_{вх}$ ($U_{вх}$, $I'_{вх}$); е — выходных $I'_{вх}$ ($I_{вх}$, $U_{вых}$)

рактических, то аналитическое выражение будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= g_{11} U_{\text{вх}} + g_{12} U_{\text{вых}}; \\ I'_{\text{вых}} &= g_{21} U_{\text{вх}} + g_{22} U_{\text{вых}}. \end{aligned} \right\}$$

Последующие три формы записи не имеют аналогии с принятыми формами уравнений линейных четырехполюсников, поскольку в каждой паре уравнений одна и та же величина входит как в левую, так и в правую части уравнений (т.е. в качестве и независимой, и зависи-

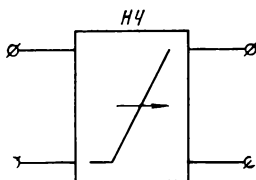


Рис. 2.4. Условное обозначение направленного четырехполюсника

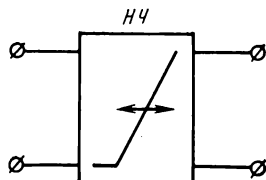


Рис. 2.5. Условное обозначение ненаправленного четырехполюсника

мой величины). Преимуществом таких форм записи является то, что они связаны с графическим представлением семейств входных и выходных вольт-амперных характеристик, которые иногда более удобны, чем соответствующие принятым формам четырехполюсников графики [например, последняя система уравнений (2.1) и рис. 2.3, в, г].

Исходными характеристиками для четырехполюсника могут быть также семейства зависимостей сопротивлений или проводимостей либо безразмерных зависимостей (передаточных коэффициентов) от входных и выходных токов и напряжений. Семейств характеристик такого рода должно быть четыре, так как нелинейный четырехполюсник определяется четырьмя независимыми нелинейными характеристиками (линейный четырехполюсник определяется тремя коэффициентами, так как для него справедлив неприменимый в данном случае принцип взаимности). Например:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_{11}(U_{\text{вх}}) + f_{12}(U_{\text{вых}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_{21}(U_{\text{вх}}) + f_{22}(U_{\text{вых}}). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Нелинейные четырехполюсники могут быть *направленными и ненаправленными*.

Направленным четырехполюсником (рис. 2.4) называют такой, у которого выходные ток и напряжение не влияют на входные. Семейство его входных характеристик вырождается в одну вольт-амперную характеристику, и направленный четырехполюсник описывается одной характеристикой по входу и семейством характеристик по выходу (т.е. характеризуется только тремя нелинейными зависимостями). Например:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

или

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_{11}(U_{\text{вх}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_{21}(U_{\text{вх}}) + f_{22}(U_{\text{вых}}). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Ненаправленный четырехполюсник (рис. 2.5), у которого выходные ток и напряжение влияют на входные, характеризуется полной системой уравнений (2.1), (2.2).

Нелинейные четырехполюсники целесообразно подразделять еще по следующим признакам:

1) четырехполюсники с выходными характеристиками без участков с отрицательными дифференциальными сопротивлениями, у которых при плавном изменении входного сигнала происходит плавное изменение выходного сигнала;

2) четырехполюсники с выходными характеристиками, имеющими участки с отрицательными дифференциальными сопротивлениями, у которых при плавном изменении входного сигнала происходит скачкообразное изменение выходного сигнала.

К семейству выходных характеристик четырехполюсников первой группы может быть применен метод компенсации, а к семейству выходных характеристик четырехполюсников второй группы, если рабочий участок захватывает область скачка, — нет.

§ 2.2. Графический расчет цепей с направленными четырехполюсниками

Рассмотрим цепь с направленным четырехполюсником *НЧ* (рис. 2.6, а), у которой заданы: E_1 — э. д. с. источника входного сигнала; r_1 — внутреннее сопротивление

ние источника E_1 ; E_2 — э. д. с. источника питания выходной цепи; r_H — сопротивление нагрузки; входная и выходные характеристики четырехполосника (рис. 2.6, б, в). Внутренним сопротивлением r_2 источника E_2 можно или пренебречь, или включить его в состав сопротивления нагрузки r_H .

Расчет начинают с входной характеристики (рис. 2.6, б), на оси абсцисс которой откладывают значение

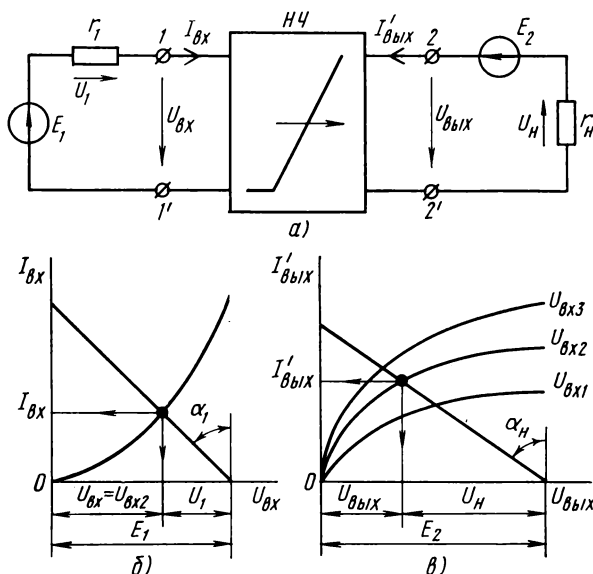


Рис. 2.6. Графический расчет цепи с направленным четырехполосником:

а — схема; б — расчет входной цепи; в — расчет выходной цепи

E_1 и, используя метод пересечения, проводят прямую под углом $\alpha_1 = \arctg r_1$. Возможность применения метода пересечения объясняется тем, что для входной (а также выходной) цепи с четырехполосником по второму закону Кирхгофа можно записать $E_1 = U_1 + U_{вх}$ и получить, таким образом, цепь с последовательным соединением двух двухполосников (один из которых нелинейный) при заданном значении входной э. д. с. E_1 (см. § 1.3).

Рабочая точка на характеристике входной цепи дает возможность определить значения входного тока $I_{вх}$, входного напряжения четырехполосника $U_{вх} = U_{вх2}$

и падение напряжения на сопротивлении r_1 графически или аналитически: $U_1 = r_1 I_{\text{вх}}$.

На выходных характеристиках (рис. 2.6, в), также используя метод пересечения, строят прямую под углом $\alpha_H = \text{arctg } r_H$, и пересечение ее с одной из характеристик семейства, соответствующей в данном случае значению входного напряжения $U_{\text{вх}2}$, даст рабочую точку на характеристиках выходной цепи. Далее определяются значения выходного тока $I'_{\text{вых}}$, выходного напряжения че-

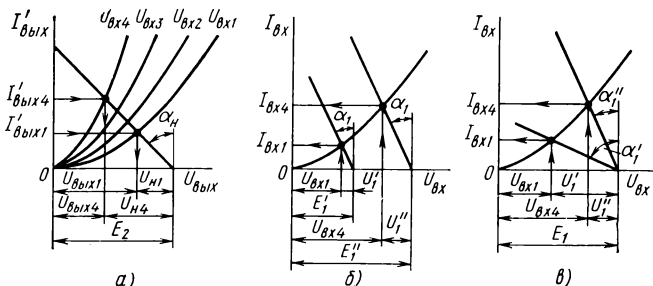


Рис. 2.7. Графический расчет цепи с направленным четырех-
полюсником:

а — в. а. х. выходной цепи; б — изменение E_1 при $r_1 = \text{const}$; в — изменение r_1 при $E_1 = \text{const}$

тырехполюсника $U_{\text{вых}}$ и падение напряжения на сопротивлении нагрузки r_H графически или аналитически: $U_H = r_H I'_{\text{вых}}$.

Если необходимо получить определенный диапазон изменения выходного тока, то следует изменять входное напряжение, например, от $U_{\text{вх}1}$ до $U_{\text{вх}4}$ (рис. 2.7, а). В этом случае переменное значение входного напряжения может быть обеспечено как изменением э. д. с. входного сигнала E_1 , так и изменением сопротивления r_1 (см. рис. 2.6, а).

Для этого следует отложить на оси абсцисс значения $U_{\text{вх}1}$ и $U_{\text{вх}4}$ и определить токи $I_{\text{вх}1}$ и $I_{\text{вх}4}$ (рис. 2.7, б, в), т. е. определить рабочий диапазон на входной вольт-амперной характеристике. Теперь можно графически найти значения э. д. с. входного источника, если через точки с координатами $I_{\text{вх}1}$, $U_{\text{вх}1}$ и $I_{\text{вх}4}$, $U_{\text{вх}4}$ провести прямые под углом $\alpha_1 = \text{arctg } r_1$ (при этом $r_1 = \text{const}$) (рис. 2.7, б). Если $E_1 = \text{const}$, то сопротивления r_1' и r_1 равны соот-

ветственно $\operatorname{tg} \alpha_1'$ и $\operatorname{tg} \alpha_1''$ (рис. 2.7, в). Значения э. д. с. E_1' и E_1'' и сопротивлений r_1' и r_1'' можно определить также, не прибегая к графическим построениям, а используя уравнение для входной цепи четырехполюсника: $E_1 = r_1 I_{\text{вх}} + U_{\text{вх}}$.

Вместо линейных сопротивлений r_n и r_1 в схеме (рис. 2.6, а) могут быть применены и нелинейные двухполюсники. Это будет означать, что прямые нагрузочные линии на рис. 2.6, б, в необходимо заменить на зеркально отображенные вольт-амперные характеристики двухполюсников.

Если в аналогичную схему (см. рис. 2.6, а) включен направленный четырехполюсник, у которого при плавном изменении входного сигнала должно происходить скачкообразное изменение выходного сигнала, то для расчета цепи применяется тот же подход, что и для цепи с двухполюсником. При этом рассматривается, естественно, некоторый диапазон выходного тока (а не фиксированное значение), чтобы использовать область выходных характеристик, позволяющих получить скачкообразное изменение тока. Заметим, что в принципе изменение тока можно также обеспечить при фиксированных входных величинах E_1 и r_1 за счет изменения E_2 или r_n .

Общий подход при этом аналогичен изложенному для случая релейного эффекта применительно к двухполюсникам (см. § 1.4).

§ 2.3. Графический расчет цепей с направленными четырехполюсниками и обратными связями

Чтобы изменить в нужном направлении характеристики четырехполюсника, пользуются *положительными и отрицательными обратными связями*. Обратные связи могут быть осуществлены по *напряжению* или по *току*. На рис. 2.8, а показана цепь с нелинейным направленным четырехполюсником *НЧ*, у которого осуществлена обратная связь по напряжению с помощью линейного направленного четырехполюсника *ЛЧ*.

Для графического расчета такой цепи необходимо предварительно построить зависимость напряжения нагрузки U_n от напряжения источника сигнала U для четырехполюсника без обратной связи (кривая 3, рис.

2.8, в). В этом случае $U = U_{вх}$ и для построения кривой $U_{н}$ (U) используют семейство выходных вольт-амперных характеристик, изображенных совместно с нагрузочной прямой (рис. 2.8, б).

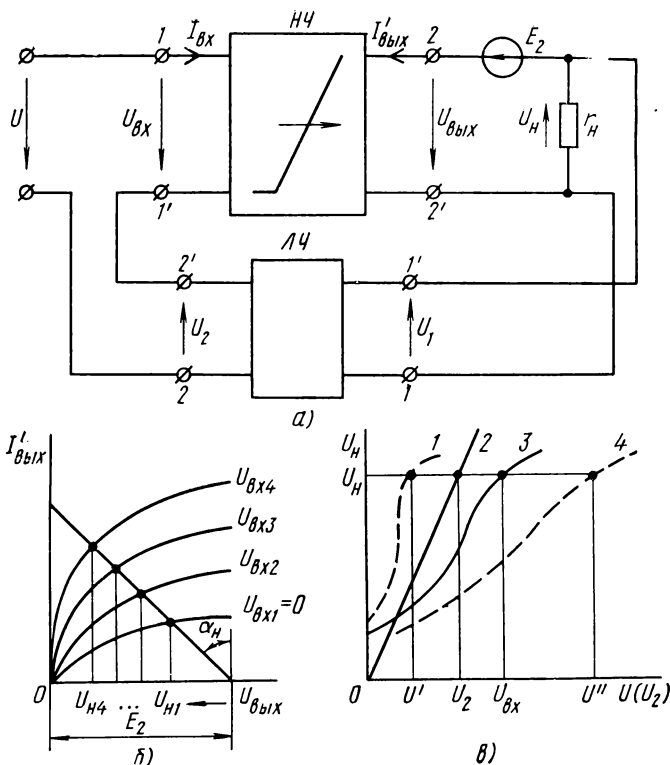


Рис. 2.8. Графический расчет цепи с направленным четырех-полюсником и обратной связью;

а — схема; б — в. а. х. выходной цепи; в — зависимости $U_{н}(U)$

Теперь рассмотрим, как влияет обратная связь на напряжение на нагрузке.

При появлении напряжения на входе основного четырехполюсника появляется напряжение на нагрузке (кривая 3, рис. 2.8, в), которое, в свою очередь, является напряжением входа четырехполюсника обратной связи, так как $U_1 = U_{н}$. Характеристика U_2 (U_1) четырех-

полюсника обратной связи показана на рис. 2.8, в (прямая 2), причем напряжение U_2 откладывают по оси абсцисс, чтобы получить единую систему координат для обоих четырехполюсников.

Из рис. 2.8, в (кривая 3) видно, что, для того чтобы получить на нагрузке, например, напряжение U_n , необходимо на вход основного четырехполюсника без обратной связи подать напряжение $U_{вх} = U$. Однако напряжение, появившееся на нагрузке, поступает на вход четырехполюсника обратной связи, и на его выходе возникает напряжение U_2 (прямая 2, на рис. 2.8, в). Если это напряжение складывается с напряжением источника сигнала U (как это показано на рис. 2.8, а), то обратная связь будет являться положительной (ПОС), т. е. при положительной обратной связи $U_{вх} = U' + U_2$. Это означает, что теперь для получения на нагрузке того же напряжения U_n требуется меньшее значение (на величину U_2) напряжения источника сигнала (кривая 1, рис. 2.8, в), так как $U' = U_{вх} - U_2$.

Характеристика $U_n(U)$ цепи с положительной обратной связью получается круче, чем характеристика цепи без обратной связи. Это в пределе позволяет получить даже релейный эффект в цепях с четырехполюсниками, имеющими однозначные входные и выходные характеристики. Крутизна результирующей характеристики $U_n(U)$ зависит от наклона характеристики четырехполюсника обратной связи, или, как иногда говорят, от глубины обратной связи.

Если теперь поменять местами зажимы 2 и 2' или 1 и 1' у четырехполюсника обратной связи (рис. 2.8, а), то $U_{вх} = U'' - U_2$. Такую обратную связь называют отрицательной (ООС), так как теперь, чтобы получить на нагрузке напряжение U_n , требуется увеличить (на величину U_2) напряжение источника сигнала (кривая 4, рис. 2.8, в), поскольку $U'' = U_{вх} + U_2$.

Обратная связь позволяет осуществить влияние выхода на вход у направленного четырехполюсника, что превращает систему «направленный четырехполюсник — обратная связь» в ненаправленный четырехполюсник. Подобная внешняя обратная связь приводит к указанному преобразованию четырехполюсников, поэтому всякий ненаправленный четырехполюсник можно трактовать как направленный с внутренней обратной связью. Отсюда, в частности, следует, что физической причиной воз-

никновения релейных режимов может являться положительная внешняя или внутренняя обратная связь.

§ 2.4. Расчет цепей с направленными четырехполюсниками методом компенсации

Во многих случаях режим работы четырехполюсника выбирают так, чтобы рабочие точки на входной и выходной характеристиках лежали на прямолинейных участках. Тогда можно, применив метод компенсации, со-

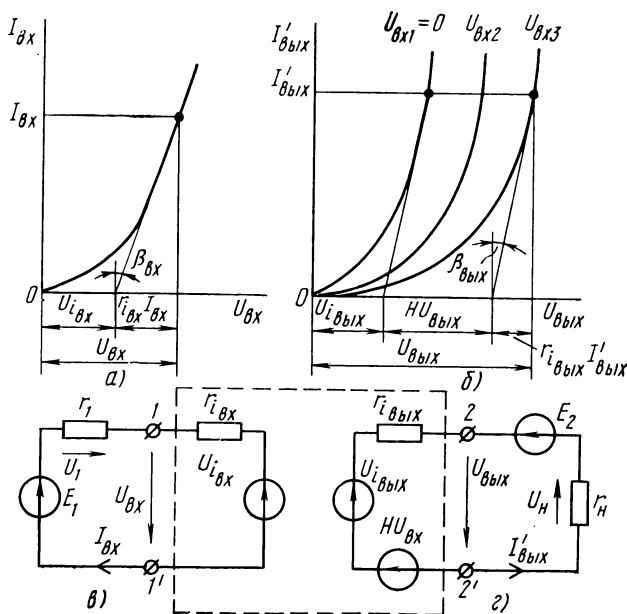


Рис. 2.9. Расчет цепи с направленным четырехполюсником методом компенсации:

a — входная в. а. х.; *б* — выходные в. а. х.; *в* — схема замещения входной цепи; *г* — схема замещения выходной цепи

ставить линеаризованные уравнения для нелинейного четырехполюсника и всей цепи в целом. В дальнейшем из этих уравнений можно получить необходимые параметры всей цепи при условии, что рабочие точки на характеристиках не выходят из зоны прямолинейных участков,

Рассмотрим цепь с направленным четырехполюсником $HЧ$ (см. рис. 2.6, a), свойства которого описываются характеристиками, представленными на рис. 2.9, a , b .

Из входной характеристики четырехполюсника (рис. 2.9, a) уравнение входного напряжения можно записать в следующем виде (см. § 1.2):

$$U_{\text{вх}} = U_{i_{\text{вх}}} + r_{i_{\text{вх}}} I_{\text{вх}}. \quad (2.5)$$

Уравнение выходного напряжения, которое можно получить из выходных характеристик четырехполюсника (рис. 2.9, b), имеет более сложный вид, поскольку появляется член уравнения ($HU_{\text{вх}}$), определяющий положение той кривой семейства характеристик, на которой в данный момент лежит рабочая точка, относительно кривой, соответствующей $U_{\text{вх}}=0$:

$$U_{\text{вых}} = U_{i_{\text{вых}}} + HU_{\text{вх}} + r_{i_{\text{вых}}} I'_{\text{вых}}, \quad (2.6)$$

где $H = \Delta U_{\text{вых}} / \Delta U_{\text{вх}}$ — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых выходных зажимах.

Следует заметить, что как в этом, так и во всех последующих случаях, когда рассматривают семейства характеристик, предполагают, что прямолинейные участки этих характеристик приблизительно параллельны и равно отстоят друг от друга (рис. 2.9, b).

В соответствии с уравнениями (2.5) и (2.6) можно составить схему замещения четырехполюсника, а также всей цепи в целом, которая состоит из двух частей, относящихся к входу (рис. 2.9, $в$) и к выходу (рис. 2.9, $г$). Из этих схем видно, что входная цепь влияет на выход через зависимый источник напряжения $HU_{\text{вх}}$, а выходная цепь на вход не влияет. Четырехполюсник, представленный данной схемой замещения, является направленным, однако в отличие от исходного (см. рис. 2.6, a) — линейным.

Из схемы рис. 2.9, $в$ можно найти значения входного тока

$$I_{\text{вх}} = \frac{E_1 - U_{i_{\text{вх}}}}{r_1 + r_{i_{\text{вх}}}} \quad (2.7)$$

и входного напряжения

$$U_{\text{вх}} = E_1 - r_1 I_{\text{вх}} = \frac{r_{i_{\text{вх}}} E_1 + r_1 U_{i_{\text{вх}}}}{r_1 + r_{i_{\text{вх}}}}. \quad (2.8)$$

Из схемы рис. 2.9, z выходной ток

$$I'_{\text{вых}} = \frac{E_2 - U_{i_{\text{вых}}} - HU_{\text{вх}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}}, \quad (2.9)$$

откуда после подстановки уравнения (2.8) находим

$$\begin{aligned} I'_{\text{вых}} &= \frac{(r_1 + r_{i_{\text{вх}}})(E_2 - U_{i_{\text{вых}}}) - H(r_{i_{\text{вх}}}E_1 + r_1U_{i_{\text{вх}}})}{(r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}})(r_1 + r_{i_{\text{вх}}})} = \\ &= \frac{E_2 - U_{i_{\text{вых}}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}} - H \frac{r_{i_{\text{вх}}}E_1 + r_1U_{i_{\text{вх}}}}{(r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}})(r_1 + r_{i_{\text{вх}}})}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Теперь можно найти напряжение на нагрузке:

$$\begin{aligned} U_{\text{н}} = r_{\text{н}} I'_{\text{вых}} &= \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}} (E_2 - U_{i_{\text{вых}}}) - \\ &- Hr_{\text{н}} \frac{r_{i_{\text{вх}}}E_1 + r_1U_{i_{\text{вх}}}}{(r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}})(r_1 + r_{i_{\text{вх}}})} \end{aligned} \quad (2.11)$$

или

$$U_{\text{н}} = \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}} (E_2 - U_{i_{\text{вых}}} - HU_{\text{вх}}). \quad (2.12)$$

Падение напряжения на сопротивлении r_1 и выходное напряжение четырехполюсника могут быть найдены соответственно как $U_1 = r_1 I_{\text{вх}}$ и $U_{\text{вых}} = E_2 - U_{\text{н}}$ или из уравнения (2.6).

Во многих случаях значения $U_{i_{\text{вх}}}$ и $U_{i_{\text{вых}}}$ бывают весьма малыми по сравнению с другими членами уравнений или взаимно компенсируются в схемах с несколькими четырехполюсниками и ими можно пренебречь. Тогда

$$I_{\text{вх}} = \frac{E_1}{r_1 + r_{i_{\text{вх}}}}; \quad (2.13)$$

$$U_{\text{вх}} = \frac{r_{i_{\text{вх}}}}{r_1 + r_{i_{\text{вх}}}} E_1; \quad (2.14)$$

$$I'_{\text{вых}} = \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}} - \frac{Hr_{i_{\text{вх}}}E_1}{(r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}})(r_1 + r_{i_{\text{вх}}})}; \quad (2.15)$$

$$U_{\text{н}} = \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{н}} + r_{i_{\text{вых}}}} \left(E_2 - \frac{r_{i_{\text{вх}}}}{r_1 + r_{i_{\text{вх}}}} HE_1 \right) \quad (2.16)$$

или

$$U_H = \frac{r_H}{r_H + r_{\text{ВЫХ}}} (E_2 - HU_{\text{ВХ}}). \quad (2.17)$$

Из выражений (2.5) и (2.6) можно также получить любую общепринятую форму уравнений линейного активного четырехполюсника и использовать эти уравнения для расчета цепи, как это было рассмотрено в разделе линейных электрических цепей.

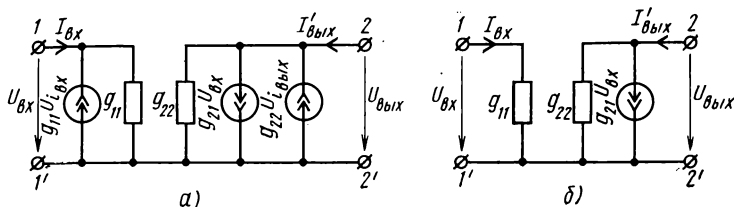


Рис. 2.10. Расчет цепи с направленным четырехполюсником методом компенсации:

a — полная схема замещения четырехполюсника (с g -параметрами); *б* — схема замещения при условии $U_{i_{\text{ВХ}}} = 0$ и $U_{i_{\text{ВЫХ}}} = 0$

Так, например, если решить уравнения (2.5) и (2.6) относительно $I_{\text{ВХ}}$ и $I'_{\text{ВЫХ}}$, то получится система уравнений четырехполюсника в форме g -параметров с одним укороченным уравнением:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{ВХ}} &= \frac{1}{r_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВХ}} - \frac{1}{r_{i_{\text{ВХ}}}} U_{i_{\text{ВХ}}} = g_{11} (U_{\text{ВХ}} - U_{i_{\text{ВХ}}}); \\ I'_{\text{ВЫХ}} &= -\frac{H}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВХ}} + \frac{1}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} - \frac{1}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{i_{\text{ВЫХ}}} = \\ &= g_{21} U_{\text{ВХ}} + g_{22} (U_{\text{ВЫХ}} - U_{i_{\text{ВЫХ}}}) \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

или для случая, когда $U_{i_{\text{ВХ}}} = 0$ и $U_{i_{\text{ВЫХ}}} = 0$:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{ВХ}} &= \frac{1}{r_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВХ}} = g_{11} U_{\text{ВХ}}; \\ I'_{\text{ВЫХ}} &= -\frac{H}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВХ}} + \frac{1}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} = g_{21} U_{\text{ВХ}} + g_{22} U_{\text{ВЫХ}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Схемы замещения четырехполюсников, отвечающих уравнениям (2.18) и (2.19), приведены соответственно на рис. 2.10, *a* и *б*. Отметим, что все три параметра ли-

неаризованного направленного четырехполюсника g_{11} , g_{21} и g_{22} (так же как H , $r_{i_{вх}}$ и $r_{i_{вых}}$ в предыдущем варианте записи) взаимно независимы.

Аналогично может быть получена система уравнений в форме r -параметров, h -параметров и т. д.

В случае необходимости от источников тока в схемах замещения можно перейти к источникам напряжений и, кроме того, иметь зависимые источники не только от входного напряжения, но и от входного тока. Однако линейаризованный направленный четырехполюсник с зависимыми источниками всегда будет определяться тремя параметрами.

§ 2.5. Графический расчет цепей с ненаправленными четырехполюсниками

Расчет цепи с ненаправленным четырехполюсником $HЧ$ (рис. 2.11, *а*) (как и в предыдущих случаях) состоит в нахождении входного и выходного токов, если заданы E_1 , r_1 , E_2 , $r_н$, а также входные (рис. 2.11, *з*) и выходные (рис. 2.11, *в*) характеристики четырехполюсника.

Предварительно целесообразно построить две промежуточные характеристики, относящиеся к схеме рис. 2.11, *а* в целом, координаты которых определяются из семейства входных и выходных характеристик и параметров схемы.

Расчет начинают с выходных характеристик (рис. 2.11, *в*), на которых строят нагрузочную прямую под углом $\alpha_n = \text{arctg } r_n$. Пересечение этой прямой с кривыми, соответствующими определенным значениям входного напряжения ($U_{вх1}$, $U_{вх2}$ и т. д.), дает возможность построить промежуточную зависимость $I'_{вых}(U_{вх})$ (рис. 2.11, *б*).

Кроме того, точки пересечения на выходных характеристиках позволяют определить значения $U_{вых1}$, $U_{вых2}$ и т. д. и, используя зависимость $I'_{вых}(U_{вх})$, построить вторую промежуточную кривую $I_{вх}(U_{вх})$. Обе промежуточные зависимости соответствуют сопротивлению нагрузки, равному r_n , и э. д. с. источника питания выходной цепи, равной E_2 . Кривая $I_{вх}(U_{вх})$ показана пунктиром на графике входных характеристик (рис. 2.11, *з*), которые перевернуты на 180° для удобства построений.

Отложив на оси абсцисс (рис. 2.11, *з*) значение E_1 ,

построим прямую под углом $\alpha_1 = \arctg r_1$. Рабочей точкой на семействе входных характеристик будет точка пересечения промежуточной кривой и прямой линии. На оси ординат найдем значение входного тока $I_{вх}$; на оси абсцисс — значение входного напряжения $U_{вх}$ и, если нужно, напряжения U_1 .

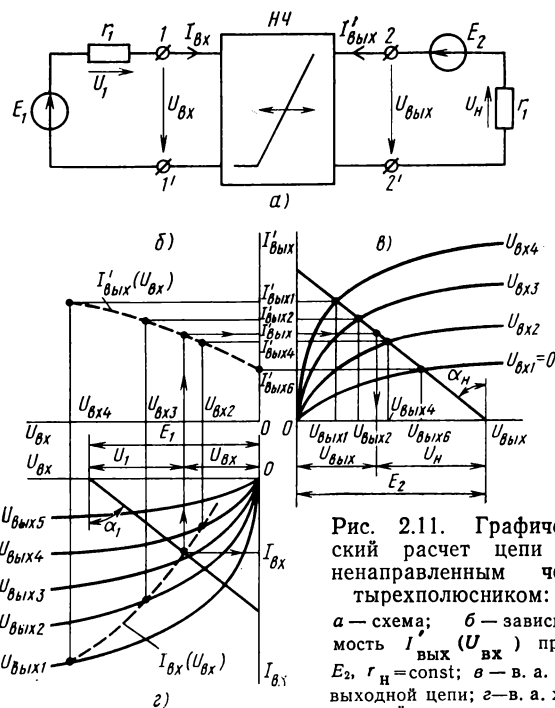


Рис. 2.11. Графический расчет цепи с ненаправленным четырехполюсником:
а — схема; б — зависимость $I'_{вых}(U_{вых})$ при $E_2, r_H = \text{const}$; в — в. а. х. выходной цепи; г — в. а. х. входной цепи и характеристика $I_{вх}(U_{вх})$ при $E_2, r_H = \text{const}$

Если теперь перенести положение рабочей точки на промежуточную кривую $I'_{вых}(U_{вых})$ (рис. 2.11, б), то получим значение выходного тока $I'_{вых}$, соответствующее входному сигналу четырехполюсника. Точка пересечения ординаты выходного тока $I'_{вых}$ с нагрузочной прямой (рис. 2.11, в) — рабочая точка на семействе выходных характеристик, по которой далее определяют выходное напряжение четырехполюсника $U_{вых}$ и напряжение на нагрузке U_H .

§ 2.6. Расчет цепей с ненаправленными четырехполюсниками методом компенсации

Если рабочие точки на входных и выходных характеристиках ненаправленного четырехполюсника не выходят за пределы прямолинейных участков, то для расчета цепи и в этом случае можно применить метод компенсации.

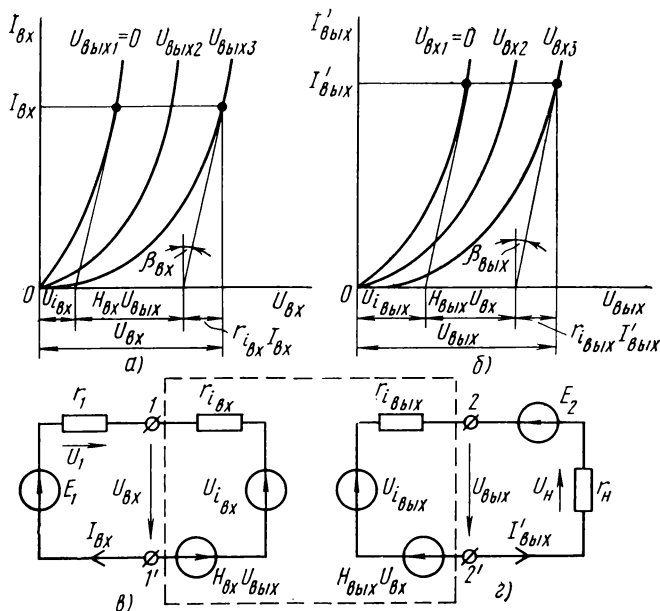


Рис. 2.12. Расчет цепи с ненаправленным четырехполюсником методом компенсации:

а — входные в. а. х.; б — выходные в. а. х.; в — схема замещения входной цепи; г — схема замещения выходной цепи

Рассмотрим цепь с ненаправленным четырехполюсником НЧ (см. рис. 2.11, а), характеристики которого показаны на рис. 2.12, а, б.

Из входных характеристик четырехполюсника (рис. 2.12, а) можно записать уравнение входного напряжения

$$U_{\text{вх}} = U_{i\text{вх}} + H_{\text{вх}} U_{\text{вых}} + r_{i\text{вх}} I_{\text{вх}}, \quad (2.20)$$

где $H_{\text{вх}} = \Delta U_{\text{вх}} / \Delta U_{\text{вых}}$ — коэффициент передачи четырех-

полюсника по напряжению при разомкнутых входных зажимах.

Для выходного напряжения

$$U_{\text{вых}} = U_{i_{\text{вых}}} + H_{\text{вых}} U_{\text{вх}} + r_{i_{\text{вых}}} I'_{\text{вых}}, \quad (2.21)$$

где $H_{\text{вых}} = \Delta U_{\text{вых}} / \Delta U_{\text{вх}}$ — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых выходных зажимах.

Согласно уравнениям (2.20) и (2.21) можно составить схему замещения для четырехполюсника, а также всей цепи в целом, состоящую из двух частей: входной (рис. 2.12, в) и выходной (рис. 2.12, г). Влияние выхода на вход и входа на выход осуществляется соответственно через зависимые источники напряжения $H_{\text{вх}} U_{\text{вых}}$ и $H_{\text{вых}} U_{\text{вх}}$. Четырехполюсник, представленный данной схемой замещения, является линейным в отличие от исходного (см. рис. 2.11, а).

Из схем рис. 2.12, в и г можно получить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= (r_1 + r_{i_{\text{вх}}}) I_{\text{вх}} + U_{i_{\text{вх}}} + H_{\text{вх}} (E_2 - r_n I'_{\text{вых}}); \\ E_2 &= (r_n + r_{i_{\text{вых}}}) I'_{\text{вых}} + U_{i_{\text{вых}}} + H_{\text{вых}} (E_1 - r_1 I_{\text{вх}}), \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

которая преобразуется относительно двух неизвестных $I_{\text{вх}}$ и $I'_{\text{вых}}$ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_1 - U_{i_{\text{вх}}} - H_{\text{вх}} E_2 &= (r_1 + r_{i_{\text{вх}}}) I_{\text{вх}} - H_{\text{вх}} r_n I'_{\text{вых}}; \\ E_2 - U_{i_{\text{вых}}} - H_{\text{вых}} E_1 &= -H_{\text{вых}} r_1 I_{\text{вх}} + \\ &+ (r_n + r_{i_{\text{вых}}}) I'_{\text{вых}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Совместное решение уравнений системы (2.23) дает возможность определить входной ток

$$I_{\text{вх}} = \frac{(r_n + r_{i_{\text{вых}}}) (E_1 - U_{i_{\text{вх}}}) - H_{\text{вх}} (H_{\text{вых}} r_n E_1 + r_{i_{\text{вых}}} E_2 + r_n U_{i_{\text{вых}}})}{(r_n + r_{i_{\text{вых}}}) (r_1 + r_{i_{\text{вх}}}) - H_{\text{вх}} H_{\text{вых}} r_1 r_n} \quad (2.24)$$

и выходной ток

$$I'_{\text{вых}} = \frac{(r_1 + r_{i_{\text{вх}}}) (E_2 - U_{i_{\text{вых}}}) - H_{\text{вых}} (H_{\text{вх}} r_1 E_2 + r_{i_{\text{вх}}} E_1 + r_1 U_{i_{\text{вх}}})}{(r_n + r_{i_{\text{вых}}}) (r_1 + r_{i_{\text{вх}}}) - H_{\text{вх}} H_{\text{вых}} r_1 r_n}, \quad (2.25)$$

а зная токи, найти напряжения $U_{\text{вх}}$, $U_{\text{вых}}$, U_1 и U_n .

В тех случаях, когда значениями $U_{i_{\text{ВХ}}}$ и $U_{i_{\text{ВЫХ}}}$ можно пренебречь, имеем

$$I_{\text{ВХ}} = \frac{(r_{\text{Н}} + r_{i_{\text{ВЫХ}}}) E_1 - H_{\text{ВХ}} (H_{\text{ВЫХ}} r_{\text{Н}} E_1 + r_{i_{\text{ВЫХ}}} E_2)}{(r_{\text{Н}} + r_{i_{\text{ВЫХ}}}) (r_1 + r_{i_{\text{ВХ}}}) - H_{\text{ВХ}} H_{\text{ВЫХ}} r_1 r_{\text{Н}}} \quad (2.26)$$

и

$$I'_{\text{ВЫХ}} = \frac{(r_1 + r_{i_{\text{ВХ}}}) E_2 - H_{\text{ВЫХ}} (H_{\text{ВХ}} r_1 E_2 + r_{i_{\text{ВХ}}} E_1)}{(r_{\text{Н}} + r_{i_{\text{ВЫХ}}}) (r_1 + r_{i_{\text{ВХ}}}) - H_{\text{ВХ}} H_{\text{ВЫХ}} r_1 r_{\text{Н}}} \quad (2.27)$$

Входное напряжение при этом допущении

$$U_{\text{ВХ}} = \frac{(r_{\text{Н}} + r_{i_{\text{ВЫХ}}}) r_{i_{\text{ВХ}}} E_1 - H_{\text{ВХ}} r_1 r_{i_{\text{ВЫХ}}} E_2}{(r_{\text{Н}} + r_{i_{\text{ВЫХ}}}) (r_1 + r_{i_{\text{ВХ}}}) - H_{\text{ВХ}} H_{\text{ВЫХ}} r_1 r_{\text{Н}}} \quad (2.28)$$

а напряжение на нагрузке

$$U_{\text{Н}} = \frac{(r_1 + r_{i_{\text{ВХ}}}) E_2 - H_{\text{ВЫХ}} (H_{\text{ВХ}} r_1 E_2 + r_{i_{\text{ВХ}}} E_1)}{(r_{\text{Н}} + r_{i_{\text{ВЫХ}}}) (r_1 + r_{i_{\text{ВХ}}}) - H_{\text{ВХ}} H_{\text{ВЫХ}} r_1 r_{\text{Н}}} r_{\text{Н}} \quad (2.29)$$

Из выражений (2.20) и (2.21) можно также получить любую общепринятую форму уравнений линейного активного четырехполюсника и использовать эти уравнения для расчета.

Если решить уравнения (2.20) и (2.21) относительно $I_{\text{ВХ}}$ и $I'_{\text{ВЫХ}}$, то получится система уравнений четырехполюсника в форме g -параметров:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{ВХ}} &= \frac{1}{r_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВХ}} - \frac{H_{\text{ВХ}}}{r_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} - \frac{1}{r_{i_{\text{ВХ}}}} U_{i_{\text{ВХ}}} = \\ &= g_{11} (U_{\text{ВХ}} - U_{i_{\text{ВХ}}}) + g_{12} U_{\text{ВЫХ}}; \\ I'_{\text{ВЫХ}} &= -\frac{H_{\text{ВЫХ}}}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВХ}} + \frac{1}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} - \\ &- \frac{1}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{i_{\text{ВЫХ}}} = g_{21} U_{\text{ВХ}} + g_{22} (U_{\text{ВЫХ}} - U_{i_{\text{ВЫХ}}}), \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

или с учетом, что в некоторых случаях $U_{i_{\text{ВХ}}} = 0$ и $U_{i_{\text{ВЫХ}}} = 0$,

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{ВХ}} &= \frac{1}{r_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВХ}} - \frac{H_{\text{ВХ}}}{r_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} = g_{11} U_{\text{ВХ}} + g_{12} U_{\text{ВЫХ}}; \\ I'_{\text{ВЫХ}} &= -\frac{H_{\text{ВЫХ}}}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВХ}} + \frac{1}{r_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} = g_{21} U_{\text{ВХ}} + g_{22} U_{\text{ВЫХ}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Из уравнений (2.30) и (2.31) видно, что линеаризованный ненаправленный четырехполюсник характеризуется четырьмя взаимно независимыми параметрами: g_{11} , g_{12} , g_{21} и g_{22} ($H_{вх}$, $H_{вых}$, $r_{i_{вх}}$ и $r_{i_{вых}}$).

На рис. 2.13, а приведена П-образная схема замещения четырехполюсника, которая соответствует системе уравнений (2.30). Действительно, если составить для

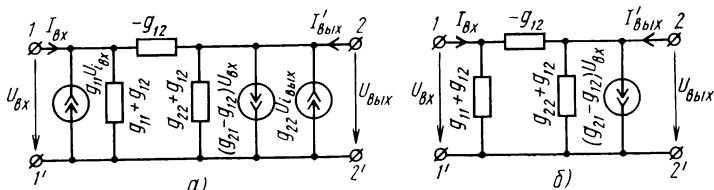


Рис. 2.13. Расчет цепи с ненаправленным четырехполюсником методом компенсации:

а — полная схема замещения четырехполюсника (с g -параметрами); б — схема замещения при условии $U_{и_{вх}} = 0$ и $U_{и_{вых}} = 0$

этой схемы уравнения методом узловых напряжений, то для левого узла

$$\begin{aligned} I_{вх} &= (g_{11} + g_{12}) U_{вх} - g_{11} U_{и_{вх}} - g_{12} (U_{вх} - U_{вых}) = \\ &= g_{11} (U_{вх} - U_{и_{вх}}) + g_{12} U_{вых}, \end{aligned}$$

для правого узла

$$\begin{aligned} I'_{вых} &= (g_{22} + g_{12}) U_{вых} - g_{22} U_{и_{вых}} + (g_{21} - g_{12}) U_{вх} - \\ &- g_{12} (U_{вых} - U_{вх}) = g_{21} U_{вх} + g_{22} (U_{вых} - U_{и_{вых}}). \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что П-образная схема замещения, показанная на рис. 2.13, б, соответствует уравнениям (2.31).

В случае необходимости известными методами преобразования можно получить систему уравнений в форме r -параметров, h -параметров и т. д., П-образную схему можно заменить Т-образной, от источников тока можно перейти к источникам напряжений. Кроме того, источники в схемах замещения могут зависеть не только от входного напряжения, но и от входного тока и даже от сигналов промежуточных цепей схемы замещения и т. д.

Но всегда линеаризованный ненаправленный четырехполюсник с зависимыми источниками будет определяться четырьмя параметрами.

Задачи

2.1. Для цепи, изображенной на рис. 2.6, а, характеристики нелинейного направленного четырехполюсника приведены: входная — в табл. 2.1, выходные — в табл. 2.2.

Таблица 2.1

$U_{вх}$	В	0	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5
$I_{вх}$	мА	0	2	3,25	5	7,5	10,5	13,5	17	25

Таблица 2.2

$I'_{вых}, \text{ А}$	$U_{вх}=0$	$U_{вх}=1 \text{ В}$	$U_{вх}=2 \text{ В}$	$U_{вх}=3 \text{ В}$	$U_{вх}=4 \text{ В}$
	$U_{вых}, \text{ В}$	$U_{вых}, \text{ В}$	$U_{вых}, \text{ В}$	$U_{вых}, \text{ В}$	$U_{вых}, \text{ В}$
0	0	0	0	0	0
0,1	8	11	15,5	21	27,5
0,2	12	17,5	23,5	31	38
0,3	15,5	22	30	38	46
0,4	18	26,5	35	44	53
0,5	20	30	40	50	60

Определить $I_{вх}$, $U_{вх}$, $I'_{вых}$, $U_{вых}$ и падения напряжений на сопротивлениях r_1 и r_n , если $E_1=4 \text{ В}$, $r_1=56 \text{ Ом}$, $E_2=60 \text{ В}$, $r_n=96 \text{ Ом}$.

Решение. Применив метод пересечения к расчету входной цепи (рис. 2.14, а), найдем $I_{вх}=12,5 \text{ мА}$, $U_{вх}=3,3 \text{ В}$ и $U_1=0,7 \text{ В}$.

Исходные характеристики выходной цепи (рис. 2.14, б) построенные при значениях входного напряжения 0, 1, 2, 3, 4 В, поэтому необходимо дополнительно достроить характеристику при $U_{вх}=3,3 \text{ В}$. Тогда методом пересечения можно определить рабочую точку, а затем ток и напряжения выходной цепи: $I'_{вых}=0,25 \text{ А}$; $U_{вых}=36 \text{ В}$; $U_n=24 \text{ В}$.

Ответ. $I_{вх}=12,5 \text{ мА}$; $U_{вх}=3,3 \text{ В}$; $U_1=0,7 \text{ В}$; $I'_{вых}=0,25 \text{ А}$; $U_{вых}=36 \text{ В}$; $U_n=24 \text{ В}$.

2.2. В каких пределах должно изменяться сопротивление r_1 , чтобы в выходной цепи направленного четырехполюсника (см. рис. 2.6, а) ток изменялся от 0,28 до 0,4 А? Параметры цепи: $E_1=5 \text{ В}$, $E_2=90 \text{ В}$, $r_n=160 \text{ Ом}$. Входная и выходные характеристики четырехполюсника определены соответственно в табл. 2.1 и 2.2.

Ответ. От 59 до 2142 Ом.

2.3. Нелинейный направленный четырехполюсник, включенный в цепь (см. рис. 2.6, а), задан входной и выходными характеристика-

ми, значения которых приведены в табл. 2.1 и 2.2 соответственно. Каковы пределы изменения э. д. с. E_1 , если ток в выходной цепи увеличивается от 0,28 до 0,4 А? Параметры цепи: $r_1=320$ Ом, $E_2=90$ В, $r_H=160$ Ом.

Отв. От 9,4 до 1,6 В.

2.4. Составить линеаризованную схему замещения входной и выходной цепей нелинейного направленного четырехполюсника и определить ее параметры, используя метод компенсации, если рабочая

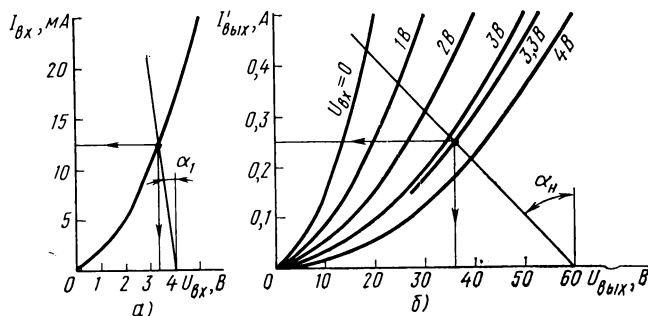


Рис. 2.14. К решению задачи 2.1.:

а — графический расчет входной цепи; б — графический расчет выходной цепи

Таблица 2.3

U_{BX}	В	0	1	2	3	4	5	6	7	8
I_{BX}	мА	0	2,5	6,5	11,5	18	24,5	32	40	49,5

точка на входной характеристике (табл. 2.3) определяется значениями $I_{BX}=40$ мА, $U_{BX}=7$ В, а рабочая точка на выходных характеристиках (табл. 2.4) — $I'_{B_{VIX}}=5$ А, $U_{B_{VIX}}=45$ В.

Таблица 2.4

$I'_{B_{VIX}}, \text{ А}$	$U_{BX}=0$	$U_{BX}=3,5 \text{ В}$	$U_{BX}=7 \text{ В}$
	$U_{B_{VIX}}, \text{ В}$	$U_{B_{VIX}}, \text{ В}$	$U_{B_{VIX}}, \text{ В}$
0	0	0	0
1	8,5	15,5	24,5
2	14	23	32,5
3	18,5	28	37,5
4	22	32	42
5	25	35	45

Ответ. $U_{i_{\text{вх}}} = 2,6 \text{ В}$; $r_{i_{\text{вх}}} = 110 \text{ Ом}$; $U_{i_{\text{вых}}} = 10 \text{ В}$; $r_{i_{\text{вых}}} = 3 \text{ Ом}$, $H = 2,86$.

2.5. Используя схему замещения нелинейного направленного четырехполюсника, полученную в задаче 2.4, определить аналитически входные и выходные токи и напряжения в цепи, изображенной на рис. 2.6, а, если $E_1 = 16 \text{ В}$, $r_1 = 140 \text{ Ом}$, $E_2 = 81,8 \text{ В}$, $r_n = 5 \text{ Ом}$. Проверить расчеты графически.

Ответ. $I_{\text{вх}} = 0,0536 \text{ А}$; $U_{\text{вх}} = 8,5 \text{ В}$; $U_1 = 7,5 \text{ В}$; $I'_{\text{вых}} = 5,94 \text{ А}$; $U_{\text{вых}} = 52,1 \text{ В}$; $U_n = 29,7 \text{ В}$.

2.6. В цепь, схема которой приведена на рис. 2.11, а, включен нелинейный ненаправленный четырехполюсник, входные и выходные характеристики которого приведены в табл. 2.5 и 2.6 соответственно.

Т а б л и ц а 2.5

$U_{\text{вх}}, \text{ В}$	$U_{\text{вых}} = 10 \text{ В}$	$U_{\text{вых}} = 20 \text{ В}$	$U_{\text{вых}} = 30 \text{ В}$	$U_{\text{вых}} = 40 \text{ В}$
	$I_{\text{вх}}, \text{ мА}$	$I_{\text{вх}}, \text{ мА}$	$I_{\text{вх}}, \text{ мА}$	$I_{\text{вх}}, \text{ мА}$
0	0	0	0	0
1	4	8	14	20
2	6,5	12,5	21	27,5
3	8	16,5	24	32
4	9	18,5	27	35
5	9,5	19,5	28,5	37,5
6	10	20	30	40

Т а б л и ц а 2.6

$I'_{\text{вых}}, \text{ А}$	$U_{\text{вх}} = 0$	$U_{\text{вх}} = 2 \text{ В}$	$U_{\text{вх}} = 4 \text{ В}$	$U_{\text{вх}} = 6 \text{ В}$
	$U_{\text{вых}}, \text{ В}$	$U_{\text{вых}}, \text{ В}$	$U_{\text{вых}}, \text{ В}$	$U_{\text{вых}}, \text{ В}$
0	0	0	0	0
1	7	11,5	15,5	23
2	11,5	17	23,5	32
3	15	22	30	39
4	17,5	26	35	44,4
5	20	30	40	50

Определить входные и выходные токи и напряжения, если $E_1 = 5 \text{ В}$, $r_1 = 100 \text{ Ом}$, $E_2 = 50 \text{ В}$, $r_n = 7 \text{ Ом}$. Чему должно быть равно сопротивление r_1 , чтобы ток в выходной цепи был равен $2,6 \text{ А}$? Можно ли в выходной цепи получить ток $I'_{\text{вых}} = 2 \text{ А}$?

Ответ. а) $I_{\text{вх}} = 21,5 \text{ мА}$; $U_{\text{вх}} = 2,85 \text{ В}$; $U_1 = 2,15 \text{ В}$; $I'_{\text{вых}} = 3,3 \text{ А}$; $U_{\text{вых}} = 27 \text{ В}$; $U_n = 23 \text{ В}$; б) $r_1 = 0$; в) нельзя.

2.7. Для нелинейного ненаправленного четырехполюсника (см. рис. 2.11, а) заданы входные (табл. 2.7) и выходные (табл. 2.8) характеристики.

Таблица 2.7

$U_{ВХ}, В$	$U_{ВЫХ} = 0$	$U_{ВЫХ} = 50 В$	$U_{ВЫХ} = 100 В$
	$I_{ВХ}, мА$	$I_{ВХ}, мА$	$I_{ВХ}, мА$
0	0	0	0
0,2	0,095	0,18	0,27
0,4	0,175	0,27	0,36
0,6	0,24	0,34	0,435
0,8	0,3	0,4	0,5

Таблица 2.8

$I'_{ВЫХ}, А$	$U_{ВХ} = 0$	$U_{ВХ} = 0,5 В$	$U_{ВХ} = 1 В$
	$U_{ВЫХ}, В$	$U_{ВЫХ}, В$	$U_{ВЫХ}, В$
0	0	0	0
0,5	14	28	45
1	23	41	61
1,5	30	50	69
2	35	56	75
2,5	40	60	80

Используя метод компенсации, составить линеаризованную схему замещения входной и выходной цепей этого четырехполюсника и определить ее параметры, если рабочие точки на входных и выходных характеристиках определяются значениями: $I_{ВХ}=0,37 мА$, $U_{ВХ}=0,7 В$ и $I'_{ВЫХ}=2,5 А$, $U_{ВЫХ}=80 В$.

Решение. Проведем касательную к рабочей точке на входных характеристиках (рис. 2.15, а) и параллельно ей касательную к характеристике при $U_{ВЫХ}=0$. Найдем

$$U_{iВХ} = -0,26 В; \quad r_{iВХ} = \frac{0,6}{0,17} 10^3 = 3512 \text{ Ом}$$

$$(r_{iВХ} \text{ пропорционально } \operatorname{tg} \beta_{ВХ}); \quad H_{ВХ} = \frac{\Delta U_{ВХ}}{\Delta U_{ВЫХ}} = \frac{-0,6 - (-0,26)}{50 - 0} = -0,0068.$$

Такие же построения проведем на выходных характеристиках (рис. 2.15, б) и определим

$$U_{iВЫХ} = 20 В; \quad r_{iВЫХ} = 20/2,5 = 8 \text{ Ом}$$

($r_{iВЫХ}$ пропорционально $\operatorname{tg} \beta_{ВЫХ}$);

$$H_{ВЫХ} = \frac{\Delta U_{ВЫХ}}{\Delta U_{ВХ}} = \frac{60 - 20}{1 - 0} = 40.$$

Далее составим схемы замещения входной (рис. 2.15, в) и выходной (рис. 2.15, г) цепей четырехполюсника. При этом следует

иметь в виду, что при подстановке найденных значений в схему замещения входной цепи источники $U_{i_{вх}}$ и $H_{вх}U_{вх}$ изменят свое направление на противоположное.

О т в е т. $U_{i_{вх}} = -0,26$ В; $r_{i_{вх}} = 3512$ Ом; $H_{вх} = -0,0068$; $U_{i_{вых}} = -20$ В; $r_{i_{вых}} = 8$ Ом; $H_{вых} = 40$.

2.8. Используя схему замещения нелинейного ненаправленного четырехполюсника, полученную в задаче 2.7, определить аналитически входные и выходные токи и напряжения цепи, изображенной на рис. 2.11, а, если $E_1 = 1$ В, $r_1 = 536$ Ом, $E_2 = 180$ В, $r_H = 28$ Ом. Проверить расчеты графически.

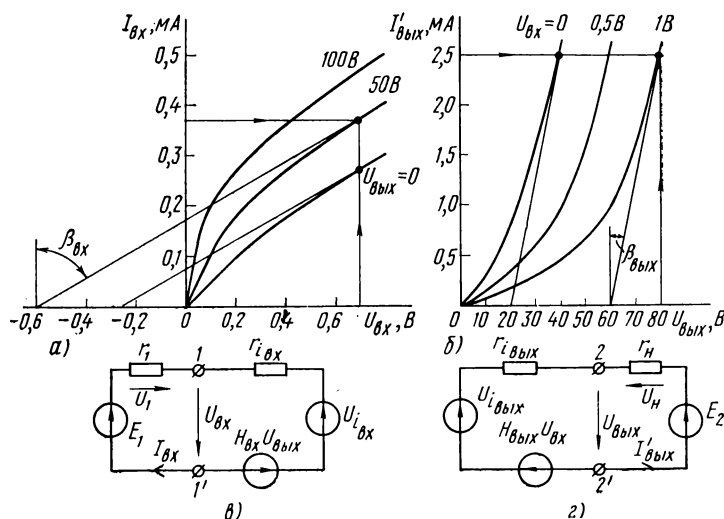


Рис. 2.15. К решению задачи 2.7 :

а — входные в. а. х.; б — выходные в. а. х.; в — схема замещения входной цепи; г — схема замещения выходной цепи

Решение. Для определения входного тока (рис. 2.15, в) подставим числовые значения в уравнение (2.24):

$$I_{вх} = \frac{(28 + 8)(1 + 0,26) + 0,0068(40 \cdot 28 \cdot 1 + 8 \cdot 180 + 28 \cdot 20)}{(28 + 8)(536 + 3512) + 0,0068 \cdot 40 \cdot 536 \cdot 28} = \frac{66,576}{149\,808} = 0,445 \text{ мА.}$$

Тогда напряжения входной цепи

$$U_1 = r_1 I_{вх} = 536 \cdot 0,445 \cdot 10^{-3} = 0,24 \text{ В;}$$

$$U_{вх} = E_1 - U_1 = 1 - 0,24 = 0,76 \text{ В.}$$

Выходной ток (рис. 2.15, з) найдем из уравнения (2.25)

$$I'_{\text{вых}} = \frac{(536 + 3512)(180 - 20) - 40(-0,0068 \cdot 536 \cdot 180 + (28 + 8)(536 + 3512) + +3512 \cdot 1 - 536 \cdot 0,26)}{+0,0068 \cdot 40 \cdot 536 \cdot 28} = \frac{539\,000}{149\,808} = 3,6 \text{ А.}$$

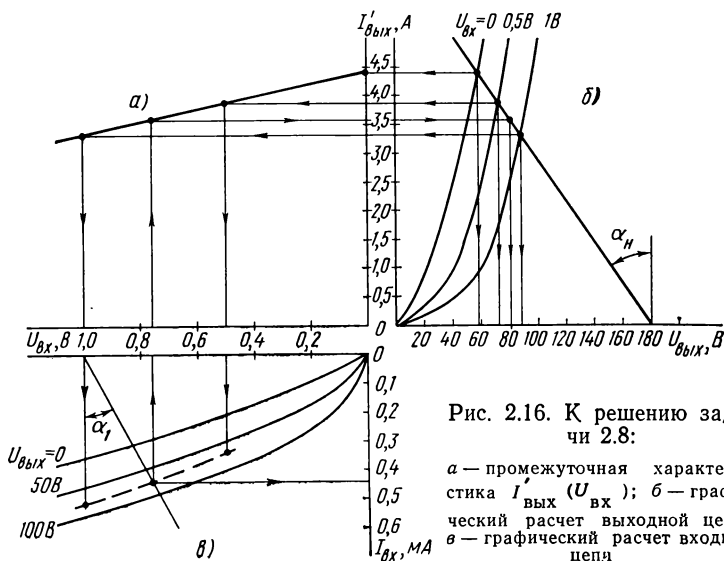


Рис. 2.16. К решению задачи 2.8:

а — промежуточная характеристика $I'_{\text{вых}}(U_{\text{вых}})$; б — графический расчет выходной цепи; в — графический расчет входной цепи

Тогда напряжения выходной цепи

$$U_{\text{H}} = r_{\text{H}} I'_{\text{вых}} = 28 \cdot 3,6 = 100,8 \text{ В;}$$

$$U_{\text{вых}} = E_2 - U_{\text{H}} = 180 - 100,8 = 79,2 \text{ В.}$$

Проверим расчеты графически.

Предварительно у входных (рис. 2.16, в) и выходных (рис. 2.16, б) характеристик четырехполюсника продлим прямые участки этих характеристик, так как в табл. 2.7 и 2.8 заданы ограниченные числовые значения этих характеристик.

Проведем графические построения в последовательности, рассмотренной в § 2.5.

На входных характеристиках получим следующие расчетные значения: $I_{\text{вх}} = 0,445 \text{ мА}$; $U_{\text{вх}} = 0,76 \text{ В}$; $U_1 = 0,24 \text{ В}$.

На выходных характеристиках:

$$I'_{\text{вых}} = 3,575 \text{ А; } U_{\text{вых}} = 81 \text{ В; } U_{\text{H}} = 99 \text{ В.}$$

Ответ. $I_{\text{вх}} = 0,445 \text{ мА}$; $U_{\text{вх}} = 0,76 \text{ В}$; $U_1 = 0,24 \text{ В}$; $I'_{\text{вых}} = 3,6 \text{ А}$; $U_{\text{вых}} = 79,2 \text{ В}$; $U_{\text{H}} = 100,8 \text{ В}$.

ГЛАВА 3. УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ДВУХПОЛЮСНИКАМИ

§ 3.1. Особенности двухполюсников, работающих на переменном токе, их исходные характеристики и классификация

В цепях переменного тока с нелинейными двухполюсниками наблюдаются явления гораздо более сложные, чем в цепях постоянного тока. В этом случае будем полагать, что двухполюсники могут быть со свойствами *активного сопротивления* (резистивными), *реактивными* (индуктивными или емкостными) или *смешанными* (активно-реактивными). Условные обозначения таких двухполюсников показаны на рис. 3.1. Частным случаем двухполюсников являются нелинейные сопротивление, индуктивность и емкость.

Если в активно-реактивном двухполюснике нелинейной является только одна часть, то вторая обычно может быть выделена в виде отдельных линейных активных или реактивных сопротивлений. Поэтому, если в схеме задан активно-реактивный двухполюсник вида рис. 3.1, *ж*, то предполагается, что нелинейными являются все три составляющие (r , L и C). Если же нелинейной является только часть этого двухполюсника, например r , то он должен быть преобразован в двухполюсник вида рис. 3.1, *а*, включенный последовательно с линейными индуктивностью и емкостью. Далее в качестве исходных будем рассматривать, как правило, двухполюсники вида рис. 3.1, *а*, *б* и *в*.

Свойства нелинейных двухполюсников на переменном токе описываются большим числом исходных характеристик, выбор координат которых зависит от физических процессов, протекающих в конкретных схемах, содержащих двухполюсники. Характеристики по своему виду могут быть такими же, как это показано на рис. 1.3—1.7.

В общем случае при синусоидальном напряжении ток в цепях с нелинейными двухполюсниками становится несинусоидальным. Тогда для полного анализа явле-

ния нужно пользоваться характеристикой, связывающей мгновенные значения величин между собой. Однако, как известно, прямая связь между мгновенными значениями тока и напряжения (закон Ома) наблюдается только у резистивного двухполюсника (рис. 3.1, а). У индуктивного (рис. 3.1, б) и емкостного (рис. 3.1, в) двух-

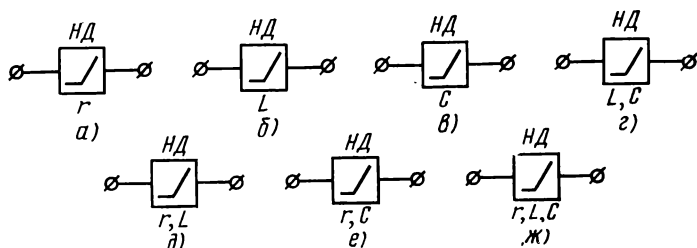


Рис. 3.1. Условные обозначения нелинейных двухполюсников на переменном токе:

а — резистивного; б — индуктивного; в — емкостного; г — индуктивно-емкостного; д — активно-индуктивного; е — активно-емкостного; ж — активно-реактивного

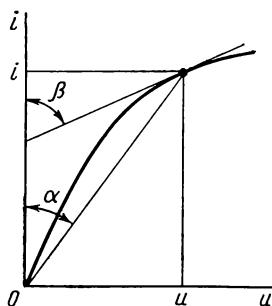


Рис. 3.2. Определение активного статического и дифференциального сопротивлений по в. а. х.

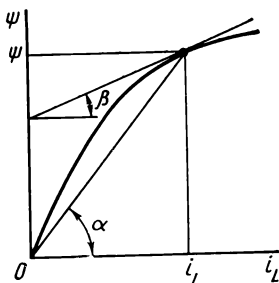


Рис. 3.3. Определение статической и дифференциальной индуктивностей по вебер-амперной характеристике

полюсников такая связь — интегро-дифференциальная. Поэтому и форма исходных характеристик этих двухполюсников будет различная.

Резистивный двухполюсник описывается вольт-амперной характеристикой $i=f(u)$ (рис. 3.2), из которой, как и в случае постоянного тока, для каждой точки харак-

характеристики могут быть получены значения *активного статического сопротивления*

$$r_{\text{ст}} = u/i = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.1)$$

и *активного дифференциального сопротивления*

$$r_{\text{диф}} = du/di = \operatorname{tg} \beta. \quad (3.2)$$

Из характеристики $i=f(u)$ можно получить зависимости $r_{\text{ст}}(i)$, $r_{\text{диф}}(i)$, $r_{\text{ст}}(u)$ и $r_{\text{диф}}(u)$ и использовать их в качестве исходных.

Для индуктивного двухполюсника (см. рис. 3.1, б) первичной характеристикой является зависимость потокосцепления самоиндукции от тока $\Psi=f(i_L)$ (рис. 3.3). По аналогии с изложенным ранее здесь также могут быть введены понятия *статической индуктивности*

$$L_{\text{ст}} = \Psi/i_L = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.3)$$

и *дифференциальной индуктивности*

$$L_{\text{диф}} = d\Psi/di_L = \operatorname{tg} \beta. \quad (3.4)$$

На основании закона электромагнитной индукции напряжение на индуктивном двухполюснике

$$\begin{aligned} u_L &= \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi}{di_L} \cdot \frac{di_L}{dt} = \frac{d}{di_L} (L_{\text{ст}} i_L) \frac{di_L}{dt} = \\ &= \left(L_{\text{ст}} + i_L \frac{dL_{\text{ст}}}{di_L} \right) \frac{di_L}{dt}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

или

$$u_L = \frac{d\Psi}{di_L} \cdot \frac{di_L}{dt} = L_{\text{диф}} \frac{di_L}{dt}. \quad (3.6)$$

Из характеристики $\Psi=f(i_L)$ можно получить зависимости $L_{\text{ст}}(i_L)$, $L_{\text{диф}}(i_L)$, $L_{\text{ст}}(\Psi)$ и $L_{\text{диф}}(\Psi)$. Особенно удобной для расчета, как это следует из уравнения (3.6), является зависимость $L_{\text{диф}}(i_L)$, используя которую можно получить простую связь между мгновенными значениями тока и напряжения.

Для емкостного двухполюсника (см. рис. 3.1, в) первичной характеристикой является зависимость заряда от напряжения $Q=f(u_C)$ (рис. 3.4). При этом следует различать *статическую емкость*

$$C_{\text{ст}} = Q/u_C = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.7)$$

и дифференциальную емкость

$$C_{\text{диф}} = dQ/du_C = \operatorname{tg} \beta. \quad (3.8)$$

Ток через емкостный двухполюсник

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{du_C} \cdot \frac{du_C}{dt} = \frac{d}{du_C} (C_{\text{ст}} u_C) \frac{du_C}{dt} = \\ &= \left(C_{\text{ст}} + u_C \frac{dC_{\text{ст}}}{du_C} \right) \frac{du_C}{dt}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

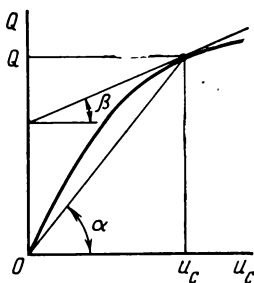


Рис. 3.4. Определение статической и дифференциальной емкостей по кулон-вольтной характеристике

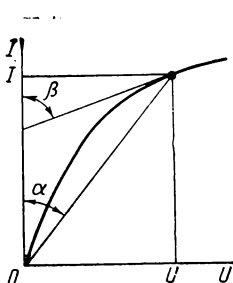


Рис. 3.5. Определение полного статического и дифференциального сопротивлений по в. а. х.

или

$$i_C = \frac{dQ}{du_C} \cdot \frac{du_C}{dt} = C_{\text{диф}} \frac{du_C}{dt}. \quad (3.10)$$

Из характеристики $Q=f(u_C)$ могут быть получены зависимости $C_{\text{ст}}(u_C)$, $C_{\text{диф}}(u_C)$, $C_{\text{ст}}(Q)$ и $C_{\text{диф}}(Q)$, из которых наиболее удобной для расчета является зависимость $C_{\text{диф}}(u_C)$.

Во многих случаях форма тока или напряжения не очень существенна, и тогда вольт-амперная характеристика может быть построена не для мгновенных, а для действующих $I=f_1(U)$, средних $I_{\text{ср}}=f_2(U_{\text{ср}})$ или амплитудных $I_m=f_3(U_m)$ значений тока и напряжения соответствующей фиксированной частоты. При этом под действующим значением понимают или действующее значение основной (первой) гармоники, или эквивалентное действующее значение несинусоидальной функции.

Методы расчета, основанные на таком допущении, называют квазилинейными, так как предполагается, что форма токов и напряжений остается синусоидальной (как и в линейных цепях), а нелинейность сохраняется только для соотношений между действующими значениями тока и напряжения.

Имеется группа двухполюсников, которые не приближенно, а фактически обладают квазилинейными свойствами. Так, например, если нелинейность основана на температурной зависимости сопротивления, то тепловой процесс, который обуславливает нелинейность вольт-амперной характеристики, протекает относительно медленно. Постоянная времени нагрева часто бывает так велика, что даже при сравнительно низкой частоте температура таких двухполюсников и соответственно сопротивление в течение периода практически не изменяются, т. е. температура не успевает следовать за изменениями мгновенных значений тока.

В общем случае для нелинейного двухполюсника при квазилинейном рассмотрении могут быть введены понятия *полного статического сопротивления* (рис. 3.5)

$$Z_{\text{ст}} = U/I = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.11)$$

и *полного дифференциального сопротивления*

$$Z_{\text{диф}} = dU/dI = \operatorname{tg} \beta. \quad (3.12)$$

Эти понятия справедливы для всех двухполюсников, показанных на рис. 3.1, причем для первых трех двухполюсников они превращаются соответственно в *активное статическое* и *дифференциальное сопротивления* $r_{\text{ст}}$ и $r_{\text{диф}}$, *индуктивное статическое* и *дифференциальное сопротивления* $x_{L\text{ст}}$ и $x_{L\text{диф}}$ и *емкостное статическое* и *дифференциальное сопротивления* $x_{C\text{ст}}$ и $x_{C\text{диф}}$. По аналогии с цепями постоянного тока можно также использовать понятия *статических* и *дифференциальных проводимостей*.

Кроме вольт-амперных характеристик в качестве исходных можно пользоваться зависимостями $Z_{\text{ст}}(I)$, $r_{\text{ст}}(I)$, $x_{L\text{ст}}(I)$, $x_{C\text{ст}}(I)$, $Z_{\text{ст}}(U)$ и т. д. Следует отметить, что характеристики $Z_{\text{ст}}(I)$, $Z_{\text{диф}}(I)$, $Z_{\text{ст}}(U)$ и $Z_{\text{диф}}(U)$ не дают полной информации о двухполюснике, так как неизвестно изменение фазовых сдвигов с изменением сигнала.

Вольт-амперные характеристики реактивных и активно-реактивных двухполюсников зависят от частоты. Поэтому для анализа нелинейной цепи не при фиксированной, а при меняющейся частоте необходимо располагать зависимостью тока от двух переменных (напряжения и частоты), т. е. семейством характеристик $I=f(U, \omega)$. На рис. 3.6 показано такое семейство характеристик для емкостного двухполюсника. При $\omega=\text{const}$ вместо семейства получается одна вольт-амперная характеристика; при

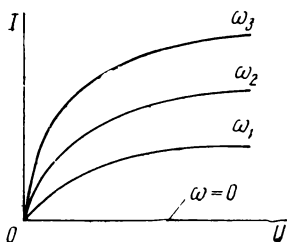


Рис. 3.6. Семейство в. а. х. емкостного двухполюсника для разных частот

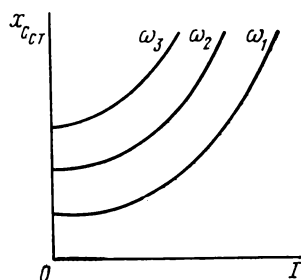


Рис. 3.7. Семейство характеристик $x_{C_{ст}}(I)$ для разных частот

$\omega=0 \rightarrow$ вырожденная характеристика на постоянном токе.

Если в качестве исходных данных используются статические и дифференциальные сопротивления, то их также следует рассматривать в функции двух переменных — тока и частоты или напряжения и частоты (рис. 3.7).

Семейства характеристик двухполюсника могут быть представлены также в трехмерном пространстве.

При квазилинейном подходе существенной разницы между расчетом цепей переменного и постоянного тока нет, хотя методы расчета обычно усложняются, что связано с необходимостью учитывать фазовые сдвиги между током и напряжением.

Необходимо также отметить, что если расчет линейных цепей и цепей с нелинейными двухполюсниками на постоянном токе можно проводить в известной степени формально, то для расчета нелинейных цепей переменного тока необходимо, как правило, предварительно уяснить сущность физических процессов, происходящих в конкретной анализируемой цепи. Только тогда можно выбрать рациональный метод расчета.

§ 3.2. Графический расчет квазилинейных цепей методом эквивалентных характеристик и методом эллипса

За исключением случаев фактической квазилинейности, расчет по действующим значениям всегда будет приближенным, так как степень несинусоидальности токов и напряжений в каждой конкретной цепи зависит от режима работы.

Таким образом, в принципе не может быть универсальных исходных характеристик, и в каждом отдельном случае приходится ориентироваться на характеристики двухполюсников, снятые в режиме, близком к ожидаемому. Для оценки степени этой близости точных критериев не существует. Будем полагать в дальнейшем, что соответствующие ожидаемому режиму исходные характеристики на требуемой частоте имеются.

При последовательном, параллельном и смешанном соединениях двухполюсников на переменном токе возможны различные их комбинации, которые определяют тот или иной подход к расчету электрической цепи.

Так, если соединяются двухполюсники с одинаковыми свойствами (r и r ; L и L ; C и C) или двухполюсники и линейные элементы одного характера, то графический расчет проводят так же, как и для цепей на постоянном токе (см. § 1.3). Приемы расчета цепей на постоянном токе применимы и для активно-реактивных двухполюсников (r , L и r , L ; r , C и r , C ; r , L , C и r , L , C), если углы сдвига между током и напряжением в каждом из соединяемых двухполюсников одинаковы. Тогда суммирование абсцисс (напряжений) или ординат (токов) производят алгебраически (для соединения L и C вычитают абсциссы или ординаты).

При соединении между собой двухполюсников с различными свойствами (r и C ; r и L) или двухполюсников (r ; L ; C) и линейных комплексных сопротивлений необходимо учитывать углы сдвига между током и напряжением, которые для таких сочетаний двухполюсников и линейных сопротивлений легко определяются.

Если в цепи соединены между собой активно-реактивные двухполюсники, то для расчета такой цепи кроме вольт-амперных характеристик $I=f_1(U)$ необходимо иметь зависимости угла сдвига между током и напряжением от тока (или напряжения): $\varphi=f_2(I)$ или $\varphi=f_3(U)$.

Это объясняется тем, что в этом случае для каждой точки вольт-амперной характеристики угол сдвига будет разный (рис. 3.8, б).

Последовательное соединение. Резонанс напряжений. Рассмотрим последовательное соединение двух нелинейных двухполюсников $HD_1(r)$ и $HD_2(C)$ (рис. 3.8, а),

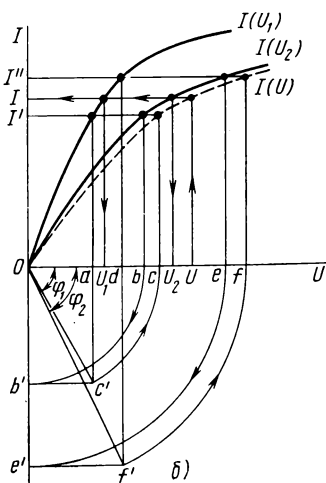
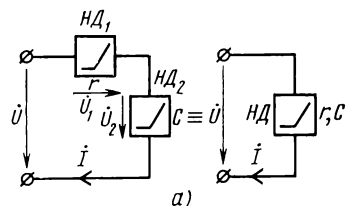


Рис. 3.8. Последовательное соединение двухполюсников r и C :

а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные и эквивалентная в. а. х.

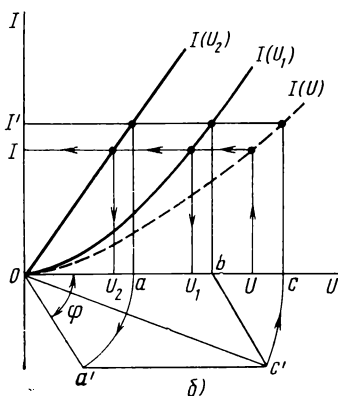
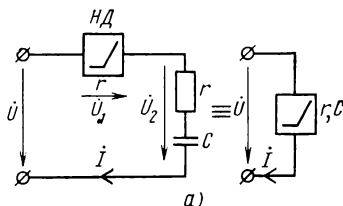


Рис. 3.9. Последовательное соединение двухполюсника r и линейного активно-емкостного сопротивления:

а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные и эквивалентная в. а. х.

вольт-амперные характеристики которых $I(U_1)$ и $I(U_2)$ представлены на рис. 3.8, б.

Так как для цепи синусоидального тока по второму закону Кирхгофа $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$ или $U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}$, то сложение ординат (напряжений) для построения эквивалентной характеристики необходимо производить гео-

метрически. Это построение показано на рис. 3.8, б для двух значений тока: I' и I'' . При значении тока в цепи I' падения напряжений на двухполюсниках $НД_1$ и $НД_2$ определяются соответственно отрезками на оси абсцисс oa и ov . Если считать, что вектор тока совпадает с осью абсцисс, то напряжение U_1 (отрезок oa) совпадает с осью абсцисс, а напряжение U_2 (отрезок ov) отстает от тока на угол 90° , и его необходимо повернуть на этот угол по часовой стрелке. Геометрическое сложение отрезков oa и ov' даст отрезок oc' , который необходимо повернуть до совпадения с осью абсцисс, а затем найти точку пересечения этого отрезка, т. е. напряжения U , с током I' . Аналогичное построение проведено и для значения тока I'' . Поскольку свойства (характер фазового сдвига) двухполюсников (r и C) не меняются в зависимости от тока (напряжения), то для любых значений тока угол сдвига между напряжениями U_1 и U_2 будет равен 90° .

Из графических построений на рис. 3.8, б видно, что в каждой точке эквивалентной вольт-амперной характеристики $I(U)$ меняется не только модуль напряжения, но и угол сдвига между током и напряжением (геометрически построенные отрезки oc' и of'). Таким образом, если необходимо, зависимость $\varphi(I)$ или $\varphi(U)$ легко получить из рис. 3.8, б.

Рассмотрим теперь последовательное соединение двухполюсника $НД(r)$ и линейного комплексного сопротивления, имеющего активно-емкостный характер (рис. 3.9, а). Вольт-амперные характеристики $I(U_1)$ и $I(U_2)$ приведены на рис. 3.9, б. В этом случае можно воспользоваться методом, изложенным ранее, объединив двухполюсник $НД(r)$ и активное сопротивление r . Однако целесообразней не делать промежуточной операции, а сразу получить эквивалентную характеристику.

Будем считать, что вектор тока совпадает с осью абсцисс, тогда при любых значениях тока напряжение U_1 будет совпадать с осью абсцисс, а напряжение U_2 — отставать от этой оси на угол $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_C}{r}$. Значение напря-

жения U есть геометрическая сумма напряжений U_1 и U_2 (для одних и тех же токов).

На рис. 3.9, б показано построение одной точки эквивалентной характеристики $I(U)$ для тока I' . Отрезок oa (напряжение U_2) необходимо повернуть по часовой

стрелке на угол φ и сложить геометрически с отрезком $ов$ (напряжение U_1). Полученный отрезок $ос'$ (напряжение U) поворачивают до совпадения с осью абсцисс и находят точку пересечения этой абсциссы с линией заданного тока I' .

После построения эквивалентной характеристики по заданному входному напряжению U находят ток I в цепи и падения напряжений U_1 и U_2 .

Аналогично строят эквивалентную характеристику, если задана цепь с последовательно включенными активное-реактивными двухполюсниками. Однако в этом случае, как было указано ранее, необходимо для каждого двухполюсника иметь кроме вольт-амперной характеристики зависимость $\varphi(I)$. Тогда, задаваясь значениями токов, можно найти значения напряжений и углов сдвига между током и напряжениями и произвести геометрические построения. При этом для каждой пары напряжений получатся различные углы сдвига между ними, так как $\psi_U = \varphi_1 - \varphi_2$.

В качестве исходных для графического расчета цепей можно использовать зависимости сопротивлений от тока и напряжения.

Если для схемы рис. 3.8, *а* заданы зависимости $r_{ст}(I)$ и $x_{сст}(I)$ (рис. 3.10, *а*), то, задаваясь значениями тока, можно найти соответствующие им значения $r_{ст}$ и $x_{сст}$ и значения $Z_{ст}$. Так как $Z_{ст} = \sqrt{r_{ст}^2 + x_{сст}^2}$, необходимо произвести геометрическое сложение $r_{ст}$ и $x_{сст}$, что и показано на рис. 3.10, *а* для значения тока I' .

Эквивалентную характеристику $Z_{ст}(I)$ используют далее для построения зависимости $Z_{ст}(U)$, по которой при заданном входном напряжении U можно определить значение $Z_{ст}$ (рис. 3.10, *б*). Это значение переносят на рис. 3.10, *а* и по эквивалентной характеристике $Z_{ст}(I)$ определяют ток в цепи I , после чего по характеристикам $r_{ст}(I)$ и $x_{сст}(I)$ можно определить значения $r_{ст}$ и $x_{сст}$. Падения напряжений на двухполюсниках (рис. 3.8, *а*) можно получить из закона Ома: $U_1 = r_{ст} I$ и $U_2 = x_{сст} I$.

При последовательном соединении для расчета цепи при переменном токе, как и цепи при постоянном токе, можно применять метод пересечения, который в этом случае называют методом эллипса.

Рассмотрим схему, представленную на рис. 3.11, *а*.

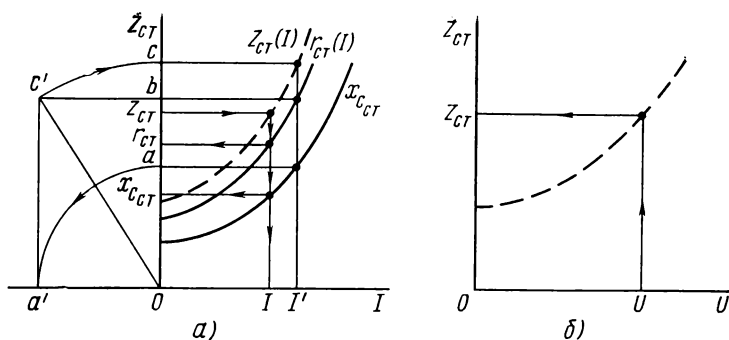


Рис. 3.10. Последовательное соединение двухполюсников r и C :
 a — графики исходных и эквивалентных зависимостей $Z_{CT}(I)$; b — кривая зависимости $Z_{CT}(U)$

Введем для этой схемы *условный ток короткого замыкания*, под которым понимают ток в цепи при коротком замыкании зажимов двухполюсника HD :

$$I_K = U/x_C. \quad (3.13)$$

Если теперь уравнение $U^2 = U_1^2 + x_C^2 I^2$ разделить на U^2 и использовать соотношение (3.13), то получим каноническое уравнение эллипса

$$U_1^2/U^2 + I^2/I_K^2 = 1 \quad (3.14)$$

с центром в начале координат и полуосями U и I_K . Переменным U_1 и I геометрически соответствуют текущие координаты эллипса.

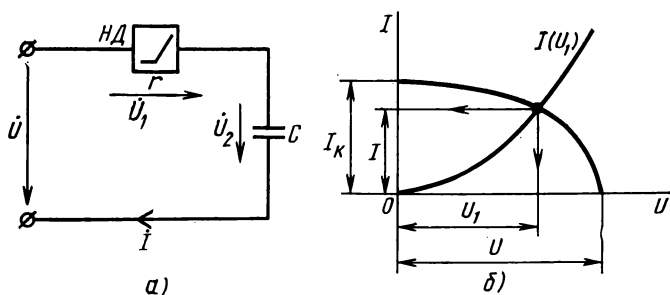


Рис. 3.11. Последовательное соединение двухполюсника r и линейной емкости:

a — схема; b — расчет цепи методом эллипса

Графический расчет цепи рис. 3.11, *а* показан на рис. 3.11, *б*, где точка пересечения эллипса с вольт-амперной характеристикой двухполюсника $I(U_1)$ определяет значения тока в цепи I и напряжения U_1 . Напряжение U_2 можно найти по закону Ома: $U_2 = x_C I$. Метод эллипса является более общим случаем метода пересечения, когда вследствие фазовых сдвигов линейная вольт-амперная характеристика $I(U_2)'$ преобразуется в эллипс. Если же

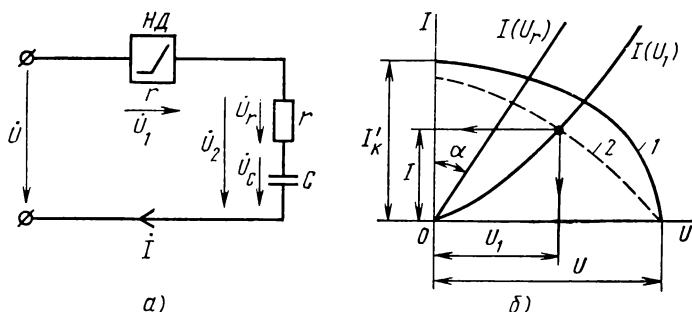


Рис. 3.12. Последовательное соединение двухполюсника r и активно-емкостного сопротивления:

а — схема; *б* — расчет цепи методом эллипса

в схеме рис. 3.11, *а* вместо емкости C было бы включено сопротивление r , при котором фазовые сдвиги между напряжениями U_1 и U_2 отсутствуют, то уравнение эллипса превратилось бы в уравнение прямой в отрезках на осях. Действительно, при этом $U = U_1 + rI$, $I_K = U/r$, что приводит к выражению

$$U_1/U + I/I_K = 1. \quad (3.15)$$

Метод эллипса можно применять и для цепи, в которой последовательно с нелинейным двухполюсником включено комплексное сопротивление. Тогда строят эллипс для цепи без учета той составляющей комплексного сопротивления, которая имеет один характер с двухполюсником, а затем из координат эллипса вычитают координаты линейной вольт-амперной характеристики не учтенной части комплексного сопротивления.

Так, для цепи рис. 3.12, *а* строят эллипс (кривая 1, рис. 3.12, *б*), который не учитывает сопротивление r , т. е. рассматривают схему рис. 3.11, *а*, и $I_K = U/x_C$. Теперь из абсцисс эллипса, которые получаются, если задаться не-

которыми значениями токов в цепи, необходимо вычесть соответствующие абсциссы линейной вольт-амперной характеристики $I(U_r)$, которую строят под углом $\alpha = \arctg r$. Получившаяся эквивалентная кривая (кривая 2, рис. 3.12, б) лежит ниже эллипса, что отвечает физическим процессам, происходящим в цепи, так как $Z = \sqrt{r^2 + x_C^2} > x_C$, следовательно, действительное значение тока должно уменьшиться.

Точка пересечения эквивалентной кривой и вольт-амперной характеристики $I(U_1)$ — рабочая точка, по кото-

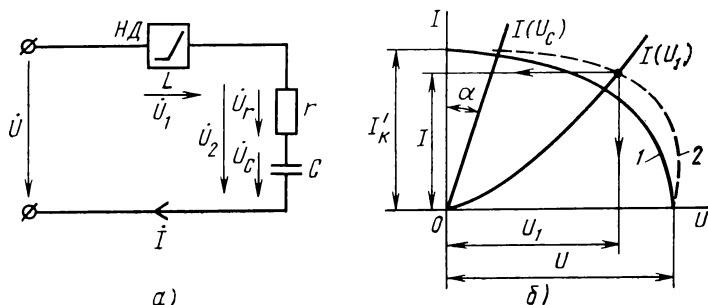


Рис. 3.13. Последовательное соединение двухполюсника L и активно-емкостного сопротивления:

а — схема; б — расчет цепи методом эллипса

рой определяют ток I и напряжение U_1 . Напряжение U_2 и, если требуется, напряжения U_r и U_C можно найти по закону Ома: $U_2 = ZI$, $U_r = rI$ и $U_C = x_C I$.

Аналогично изложенному можно построить эллипс для цепи, показанной на рис. 3.13, а. При этом емкость C вначале не учитывают, и эллипс имеет полуоси, равные U и $I'_K = U/r$ (кривая 1, рис. 3.13, б). Однако далее абсциссы эллипса складывают с соответствующими абсциссами линейной вольт-амперной характеристики $I(U_C)$, построенной под углом $\alpha = \arctg x_C$, и поэтому эквивалентная кривая (кривая 2, рис. 3.13, б) лежит выше эллипса. Это объясняется известным соотношением $x = x_L - x_C$, когда реактивное сопротивление уменьшается, если в цепи последовательно с индуктивностью включают емкость.

Пересечение эквивалентной кривой с вольт-амперной характеристикой двухполюсника $I(U_1)$ определяет рабо-

чий режим цепи, т. е. ток I и напряжение U_1 ; затем по закону Ома находят напряжения U_2 , U_r и U_c .

Рабочие точки на рис. 3.12, б и 3.13, б могут быть также получены, если повернуть эллипсы на угол α относительно начала координат: по часовой стрелке, если сопротивление увеличивается (см. рис. 3.12), и против часовой стрелки, если оно уменьшается (см. рис. 3.13).

Графический расчет цепи, показанный на рис. 3.13, б, предполагает, как это видно из характеристик $I(U_c)$ и

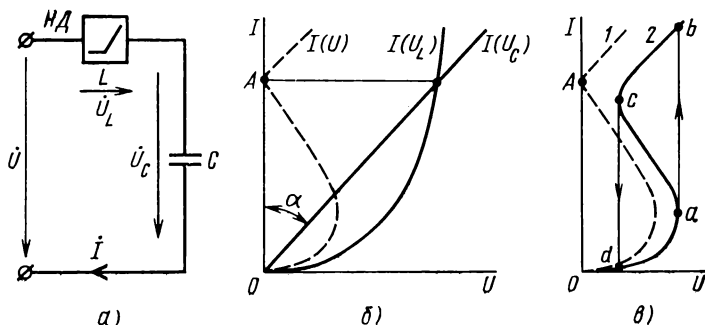


Рис. 3.14. Резонанс напряжений:

а — схема; б — исходные и эквивалентная в. а. х.; в — в. а. х. цепи без учета r (1) и с учетом r (2)

$I(U_1)$, что эти характеристики не пересекаются. Если же это имеет место и если это характеристики индуктивного и емкостного двухполюсников, то в цепи возможен *резонанс напряжений*.

Рассмотрим схему рис. 3.14, а, в которой нелинейный индуктивный двухполюсник включен последовательно с линейной емкостью. Вольт-амперные характеристики двухполюсника $I(U_L)$ и емкости $I(U_C)$ ($\alpha = \text{arctg } x_C$) показаны на рис. 3.14, б.

Для такой цепи

$$U = |U_L - U_C|, \quad (3.16)$$

так как падения напряжений на индуктивности и емкости находятся в противофазе. Поэтому, вычитая значения абсцисс двух характеристик при одном и том же токе, можно построить эквивалентную характеристику $I(U)$, которая является вольт-амперной, неоднозначной по току (см. § 1.1).

Точка A характеристики $I(U)$ лежит на оси ординат и является точкой резонанса, так как здесь напряжения U_L и U_C взаимно компенсируются. Отсюда следует, что *в отличие от линейных цепей резонанс в рассматриваемой цепи можно получить изменением величины приложенного напряжения*. Это объясняется тем, что индуктивность нелинейного двухполюсника зависит от тока и, следовательно, изменяется при изменении напряжения на зажимах всей цепи. Так как нелинейность индуктивного двухполюсника связана с наличием ферромагнитного сердечника, рассматриваемое явление называют феррорезонансом напряжений.

Графическое построение, показанное на рис. 3.14, б, было проведено в предположении, что цепь обладает квазилинейными свойствами и в цепи нет активного сопротивления. Однако в действительности потери в цепи существуют, как существуют и высшие гармоники. Поэтому фактическая характеристика будет иметь вид, приведенный на рис. 3.14, в (кривая 2). На этой характеристике показано, что при изменении напряжения ток изменяется скачком (от точки a в точку b и от точки c в точку d), т. е. в цепи имеет место релейный эффект. Следует заметить, что изменения тока сопровождаются изменениями угла сдвига в цепи.

Аналогичные явления возникают и в цепи с последовательно соединенными нелинейным емкостным двухполюсником и линейной индуктивностью. Резонанс напряжений в такой цепи называют электрическим резонансом.

Аналогичные явления возникают и в цепи с последовательно соединенными нелинейным индуктивным двухполюсником и линейной емкостью. Резонанс токов в такой цепи называют магнитным резонансом.

Параллельное соединение. Резонанс токов. Рассмотрим схему, состоящую из двух параллельно соединенных нелинейных двухполюсников $HD_1(r)$ и $HD_2(C)$ (рис.

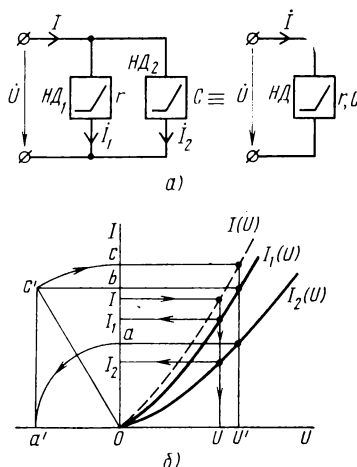


Рис. 3.15. Параллельное соединение двухполюсников r и C :

a — исходная и эквивалентная схемы; b — исходные и эквивалентная в. а. х.

3.15, а), вольт-амперные характеристики которых $I_1(U)$ и $I_2(U)$ приведены на рис. 3.15, б. Так как для цепи синусоидального тока по первому закону Кирхгофа $I = I_1 + I_2$ или $I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}$, то задаваясь некоторыми значениями приложенного напряжения, необходимо сложить геометрически полученные значения токов I_1 и I_2 для одного и того же напряжения и построить эквивалентную характеристику $I(U)$. Такое построение показано на рис. 3.15, б для одного значения напряжения U' . Вектор напряжения примем совпадающим с осью ординат, тогда ток I_1 (отрезок ob) совпадает, а ток I_2 (отрезок oa') опережает напряжение U на 90° . Полученный как геометрическая сумма отрезок oc' (ток I) необходимо повернуть до совпадения с осью ординат и получить точку пересечения этого тока с напряжением U' .

После того как эквивалентная характеристика $I(U)$ построена, можно по заданному току I определить входное напряжение U , а затем токи I_1 и I_2 .

Если же задано напряжение U , то строить эквивалентную характеристику не нужно, так как токи I_1 и I_2 можно определить сразу по исходным вольт-амперным характеристикам $I_1(U)$ и $I_2(U)$.

Аналогичные построения могут быть проведены, если в качестве исходных характеристик будут заданы зависимости $g_{ct}(U)$ и $b_{ct}(U)$.

Если задана цепь, состоящая из параллельно соединенных нелинейного индуктивного двухполюсника и линейной емкости (рис. 3.16, а), вольт-амперные характеристики которых $I_L(U)$ и $I_C(U)$ ($\alpha = \text{arctg } x_C$) пересекаются (рис. 3.16, б), то в цепи возникает *резонанс токов*.

Так как

$$I = |I_L - I_C|, \quad (3.17)$$

то эквивалентную характеристику $I(U)$ получаем вычитанием ординат исходных характеристик. Точка А, лежащая на оси абсцисс, является точкой резонанса, так как в этой точке токи I_L и I_C взаимно компенсируются. Отсюда следует, что *в нелинейной цепи при параллельном соединении можно добиться резонанса изменением величины приложенного напряжения*.

Из-за наличия в цепи потерь и высших гармоник, которыми мы пренебрегаем, фактическая характеристика цепи приобретает вид, показанный на рис. 3.16, в (кри-

вая 2). По своему характеру как кривая 1, так и кривая 2 (рис. 3.16, в) являются характеристиками, неоднозначными по напряжению (см. § 1.1), на которых можно получить скачки напряжения из точки a в точку b и из точки c в точку d (кривая 2, рис. 3.16, в). Однако для этого необходимо иметь источник питания, в котором регулируется ток, а не напряжение, т. е. питать цепь от источника тока. Если же на входе цепи стоит источник

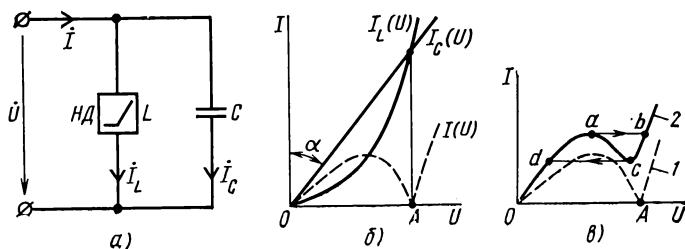


Рис. 3.16. Резонанс токов:

a — схема; b — исходные и эквивалентная в. а. х.; $в$ — в. а. х. цепи без учета r (1) и с учетом r (2)

напряжения, то эквивалентная характеристика (при изменении напряжения) получается плавной, без скачков.

Резонанс в такой цепи называют феррорезонансом токов в отличие от диэлектрического резонанса токов, когда параллельно соединяются нелинейный емкостный двухполюсник и линейная индуктивность.

Смешанное соединение. При смешанном соединении двухполюсников используют подход, применяемый для цепей с последовательным и параллельным соединением.

Пусть задана цепь, изображенная на рис. 3.17, a , двухполюсники которой $НД_1(r)$ и $НД_2(L)$ и линейная индуктивность L имеют исходные вольт-амперные характеристики соответственно $I_1(U_1)$, $I_2(U_2)$ и $I_3(U_2)$ (рис. 3.17, б).

Поскольку в параллельных ветвях находятся двухполюсник и линейный элемент одного характера, то промежуточную эквивалентную характеристику $(I_2+I_3)(U_2)$ строят так же, как для цепей постоянного тока. Это объясняется тем, что фазовые сдвиги между токами I_2 и I_3 в этом случае отсутствуют.

Суммарную же эквивалентную характеристику $I_1(U)$ получают геометрическим сложением абсцисс характеристик $I_1(U_1)$ и $(I_2+I_3)(U_2)$, так как теперь двухполюсники имеют разный характер (резистивный и индуктивный).

Если теперь на вход подать напряжение U , то по суммарной эквивалентной характеристике $I_1(U)$ можно определить ток I_1 ; затем по характеристикам $I_1(U_1)$ и

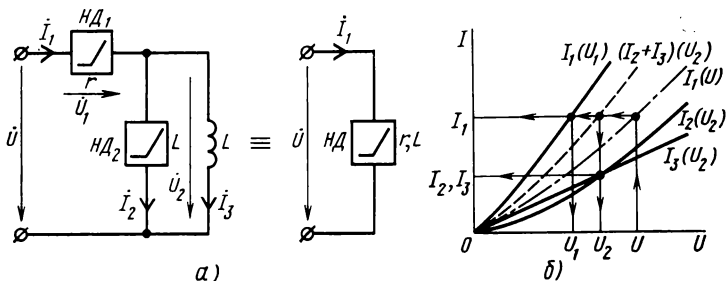


Рис. 3.17. Смешанное соединение двухполюсников:

а — исходная и эквивалентная схемы; б — исходные и эквивалентные в. а. х.

$(I_2+I_3)(U_2)$ — напряжения U_1 и U_2 ; после чего по характеристикам $I_2(U_2)$ и $I_3(U_2)$ — токи I_2 и I_3 , которые в данном случае получились равными.

Как и в цепях постоянного тока, применение при смешанном соединении зависимостей $Z_{ст}(I)$, $Z_{ст}(U)$ и т. п. нецелесообразно, поскольку графические построения при этом сильно усложняются.

§ 3.3. Нелинейная аппроксимация исходных характеристик квазилинейных цепей

Основные принципы аналитических методов расчета были изложены при рассмотрении цепей постоянного тока (см. § 1.5). Сказанное ранее справедливо и для квазилинейных цепей переменного тока, однако уравнения видоизменяются, что связано с необходимостью учитывать фазовые сдвиги.

Рассмотрим цепь (рис. 3.18, а), состоящую из двух последовательно включенных нелинейного двухполюсника HD (L) и линейного сопротивления r . Для двухполюсника задана вольт-амперная характеристика (кривая

2, рис. 3.18, б), которая достаточно точно может быть аппроксимирована на некотором интервале параболой второго порядка $I = aU_1^2$ (кривая 1, рис. 3.18, б).

Для модулей напряжений такой цепи запишем

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 = \frac{1}{a} I + r^2 I^2, \quad (3.18)$$

решив квадратное уравнение, определим ток как функцию напряжения и параметров цепи.

Если же в цепь (рис. 3.18, а) вместо сопротивления r включено, например, комплексное сопротивление $Z = r + jx_L$, то для составления уравнения используем известное тригонометрическое соотношение

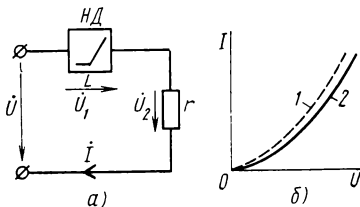


Рис. 3.18. Пример аппроксимации в. а. х.:

а — схема; б — исходная 2 и аппроксимирующая 1 в. а. х.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}: \\ U^2 &= U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos(90^\circ - \psi_2) = \\ &= I \left(Z^2 I + \frac{2Z}{\sqrt{a}} \sqrt{I} \sin \psi_2 + \frac{1}{a} \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$\psi_2 = \arctg \frac{x_L}{r}; \quad Z = \sqrt{r^2 + x_L^2}.$$

Если в качестве исходной характеристики (для цепи рис. 3.18, а) задана зависимость $x_{L_{\text{ст}}}(I)$, то она также может быть аппроксимирована в требуемом интервале некоторой функцией. Тогда ток найдем из уравнения

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 = [x_{L_{\text{ст}}}(I) I]^2 + (rI)^2. \quad (3.20)$$

§ 3.4. Расчет квазилинейных цепей методом компенсации

Метод компенсации применяют для расчета цепей переменного тока, если они обладают квазилинейными свойствами.

Рассмотрим нелинейный двухполюсник $HD(r)$, включенный последовательно с линейной индуктивностью L

(рис. 3.19, а), имеющий вольт-амперную характеристику, приведенную на рис. 3.19, б, и для рабочей точки, определяемой током I и напряжением U_1 , применим метод компенсации (см. § 1.2). Эквивалентная схема, параметры которой находятся из графических построений рис. 3.19, б, дает возможность составить линейное уравнение (рис. 3.19, в)

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 = (U_i + r_i I)^2 + (x_L I)^2, \quad (3.21)$$

из которого можно определить ток в цепи:

$$I = \frac{-r_i U_i + \sqrt{(r_i^2 + x_L^2) U^2 - x_L^2 U_i^2}}{r_i^2 + x_L^2}. \quad (3.22)$$

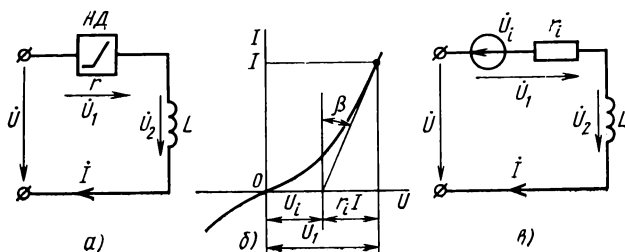


Рис. 3.19. Применение метода компенсации для расчета цепи с нелинейным двухполюсником:

а — исходная схема; б — графическое построение исходной в. а. х.; в — эквивалентная схема

Если нелинейный двухполюсник HD имеет индуктивный или емкостный характер и включен последовательно с линейным активным сопротивлением r , то ток в цепи

$$I = \frac{-x_i U_i + \sqrt{(r^2 + x_i^2) U^2 - r^2 U_i^2}}{r^2 + x_i^2}. \quad (3.23)$$

Квадратные уравнения (3.22), (3.23) являются как бы аналитическими вариантами метода эллипса.

Отметим, что фаза напряжения \dot{U}_i всегда совпадает с фазой составляющей $r_i \dot{I}$ (рис. 3.19, в) или $\pm j x_i \dot{I}$, т. е. определяется соотношением $\frac{\dot{I}}{I}$ или $\frac{\dot{I} \angle \pm 90^\circ}{I}$. Из рис. 3.19, б видно, что модули напряжений \dot{U}_i и $r_i \dot{I}$ склады-

ваются алгебраически, а это возможно только при одинаковых фазах. Если линейное сопротивление x_L (рис. 3.19, а) или r изменяется, то изменяется ток \dot{I} как по модулю, так и по фазе, что приводит к изменению фазы напряжения \dot{U}_i , которая, следовательно, может быть переменной и зависит от тока \dot{I} .

Как и в случае постоянного тока, этим методом можно пользоваться, если рабочий режим цепи в дальнейшем определяется такими значениями токов, которые не выходят за пределы приблизительно прямолинейного участка вольт-амперной характеристики двухполюсника.

§ 3.5 Графический и графо-аналитический расчет цепей по кривым мгновенных значений воздействий

Графический метод позволяет найти форму выходного сигнала (тока или напряжения на участке цепи) и применяется для цепи с одним нелинейным двухполюсником или несколькими двухполюсниками одного характера. Пусть для нелинейного двухполюсника $НД$ (r) (рис. 3.20) задана вольт-амперная характеристика для мгновенных значений.

Рассмотрим несколько видов вольт-амперных характеристик.

На рис. 3.21, а показана симметричная вольт-амперная характеристика с насыщением по току. Если приложенное напряжение синусоидально (рис. 3.21, в), то, как видно из рис. 3.21, б, график тока имеет несинусоидальную форму, и строят его следующим образом:

1) ось абсцисс графиков напряжения u и тока i разбивают на ряд отрезков (в данном случае $\pi/4$, $\pi/2$ и т. д.);

2) на графике напряжения находят значения мгновенных напряжений, соответствующих выбранным значениям углов, и переносят на вольт-амперную характеристику;

3) мгновенные значения тока, полученные на вольт-амперной характеристике, переносят на график тока до пересечения с одноименными координатами углов.

Отметим следующие особенности несинусоидального

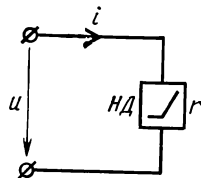
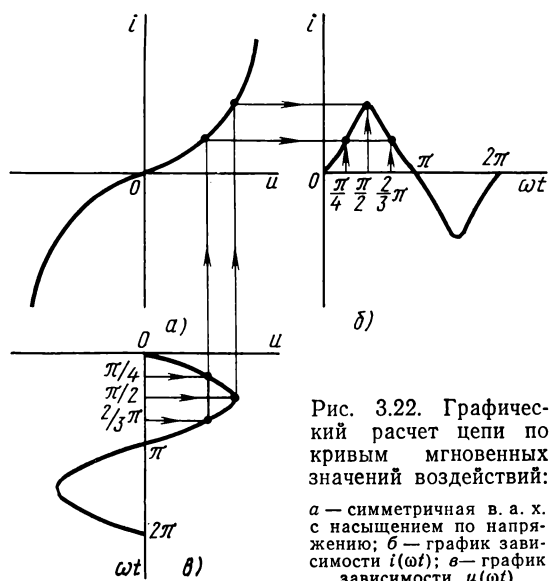
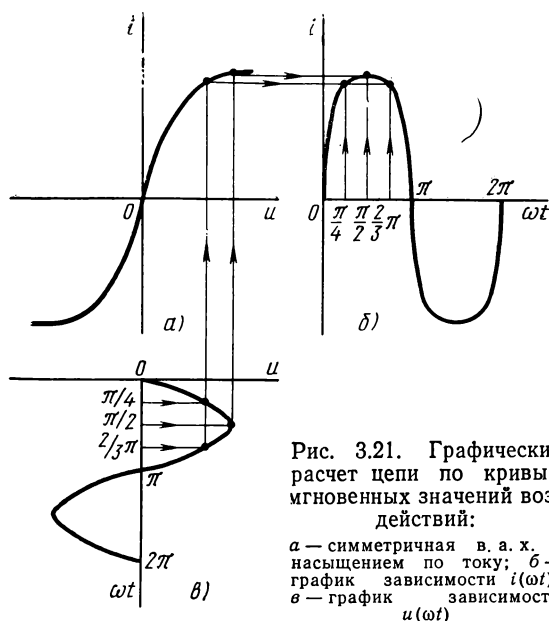


Рис. 3.20. Схема цепи с двухполюсником r



тока для симметричной вольт-амперной характеристики с насыщением по току:

- 1) ток содержит только нечетные гармоники;
- 2) форма кривой тока затуплена;
- 3) форма кривой тока зависит от амплитуды напряжения: чем больше амплитуда, тем более прямоугольную форму имеет кривая тока;
- 4) в зависимости от амплитуды напряжения изменяются амплитуды гармоник и их фазовые сдвиги.

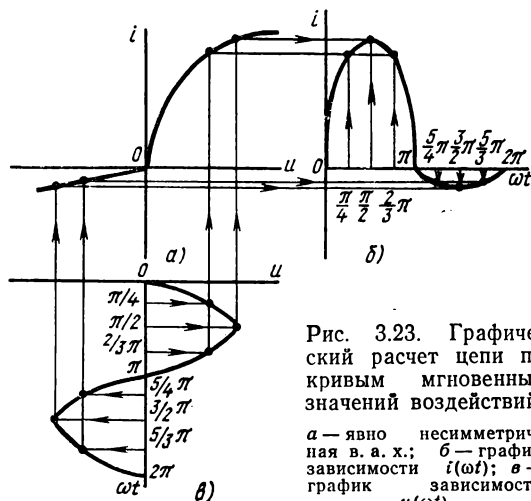


Рис. 3.23. Графический расчет цепи по кривым мгновенных значений воздействий:

a — явно несимметричная в. а. х.; *б* — график зависимости $i(\omega t)$; *в* — график зависимости $u(\omega t)$

На рис. 3.22 показано графическое построение кривой тока, если двухполюсник имеет симметричную вольт-амперную характеристику с насыщением по напряжению. В этом случае несинусоидальный ток имеет следующие особенности:

- 1) замечания 1 и 4 предыдущего случая справедливы и для данной характеристики;
- 2) форма кривой тока заострена;
- 3) форма кривой тока зависит от амплитуды напряжения: чем больше амплитуда, тем более острой становится форма кривой тока.

Если задана явно несимметричная вольт-амперная характеристика, как это показано на рис. 3.23, *a*, то, сохраняя особенности формы кривой тока в первом полу-периоде для характеристики с насыщением по току, не-

синусоидальный ток будет иметь все гармоники и постоянную составляющую.

На рис. 3.24, *а* приведена явно несимметричная вольт-амперная характеристика с зоной нечувствительности по напряжению. Несинусоидальный ток (рис. 3.24, *б*) имеет в своем составе постоянную составляющую, все гармоники и разрывы (за счет зоны нечувствительности).

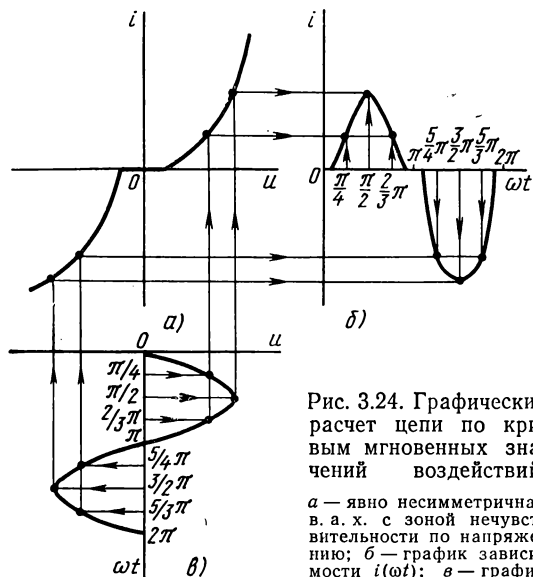


Рис. 3.24. Графический расчет цепи по кривым мгновенных значений воздействий:

а — явно несимметричная в. а. х. с зоной нечувствительности по напряжению; *б* — график зависимости $i(\omega t)$; *в* — график зависимости $u(\omega t)$

Подобным образом можно построить графически кривые тока для любого вида вольт-амперной характеристики как при синусоидальном, так и несинусоидальном приложенном напряжении.

Такие построения объединяют общим названием «Метод трех плоскостей».

Если в цепь включено несколько нелинейных резистивных двухполюсников или нелинейных двухполюсников и линейных сопротивлений, то предварительно необходимо построить эквивалентную характеристику.

Рассмотрим теперь нелинейный емкостный двухполюсник (рис. 3.25), у которого зависимость $Q(u)$ имеет гистерезисный характер (рис. 3.26, *а*). Построение графика $Q(t)$ отличается от ранее рассмотренных тем, что у

гистерезисной кривой имеются восходящая и нисходящая ветви, на которые надо переносить мгновенные значения напряжений соответствующих участков синусоиды: возрастающего и убывающего.

После того как график $Q(t)$ построен, необходимо продифференцировать графически эту кривую и получить, таким образом, зависимость $i(t)$.

Если вольт-амперная характеристика резистивного двухполюсника имеет гистерезисный характер, то, заменив на рис. 3.26, а координаты $Q(u)$ на координаты $i(u)$, на рис. 3.26, б получим зависимость $i(t)$. Так как в этом случае кривая $i(t)$ сдвинута относительно начала координат, то даже основная гармоника тока будет иметь фазовый сдвиг по отношению к напряжению.

Рассмотренный метод построения графика мгновенного значения искомой функции нельзя применить, если в

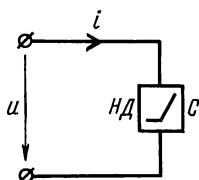


Рис. 3.25. Схема цепи с двухполюсником C

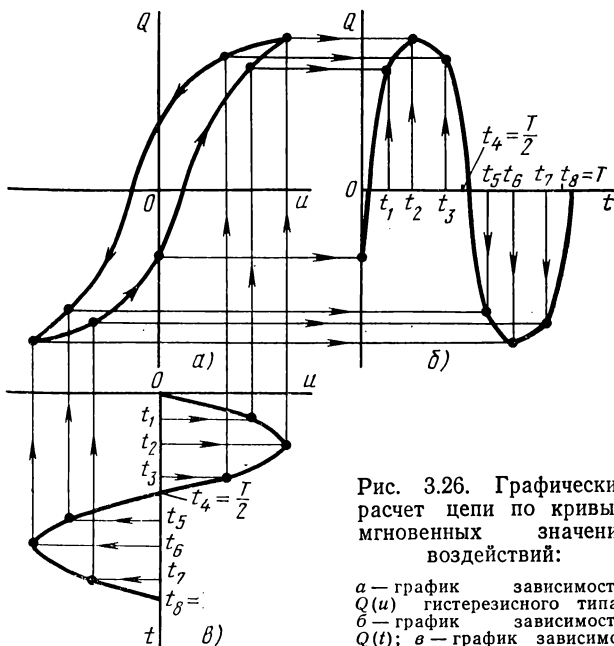


Рис. 3.26. Графический расчет цепи по кривым мгновенных значений воздействий:

а — график зависимости $Q(u)$ гистерезисного типа;
б — график зависимости $Q(t)$; в — график зависимости $u(t)$

цепи имеется несколько нелинейных двухполюсников разного характера, включенных последовательно или параллельно. Это объясняется тем, что исходные характеристики таких нелинейных двухполюсников задаются различными координатами: $i(u)$, $\Psi(i_L)$, $Q(u_C)$, что не дает возможности построить эквивалентную характеристику. В этом случае можно применить графо-аналити-

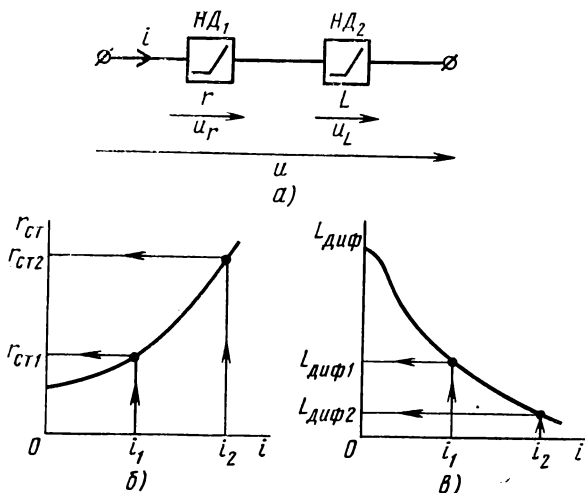


Рис. 3.27. Последовательное соединение двухполюсников r и L :

a — схема; b — график зависимости $r_{ct}(i)$; $в$ — график зависимости $L_{диф}(i)$

ческий метод, в котором используются соотношения (3.6) и (3.10).

Рассмотрим нелинейную цепь (рис. 3.27, a), которая состоит из включенных последовательно резистивного и индуктивного двухполюсников. Ток, проходящий в цепи, изменяется по синусоидальному закону $i = I_m \sin \omega t$. Тогда по второму закону Кирхгофа

$$u = u_r + u_L = r_{ct}(i) i + L_{диф}(i) \frac{di}{dt} = r_{ct}(i) I_m \sin \omega t + \omega L_{диф}(i) I_m \cos \omega t. \quad (3.24)$$

Оба нелинейных сомножителя (r_{ct} и $L_{диф}$) уравнения (3.24) зависят от тока, и эти зависимости могут

быть получены из исходных характеристик $i(u)$ и $\Psi(i_L)$. Если теперь задаваться значениями времени $t(t_1, t_2, \dots)$, то можно определить токи $i(i_1, i_2, \dots)$, а затем по значениям токов — активное статическое сопротивление $r_{ст}(r_{ст1}, r_{ст2}, \dots)$ (рис. 3.27, б) и дифференциальную индуктивность $L_{диф}(L_{диф1}, L_{диф2}, \dots)$ (рис. 3.27, в). Подставляя полученные данные в уравнение (3.24), можно определить мгновенные значения напряжения $u(u_1, u_2, \dots)$ и построить график $u(t)$.

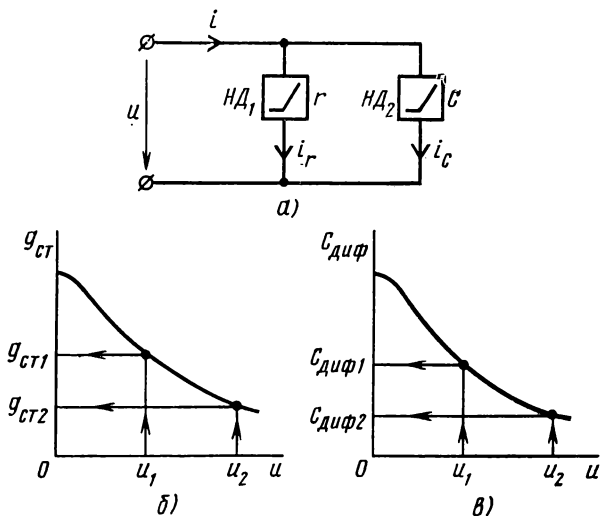


Рис. 3.28. Параллельное соединение двухполюсников r и C :

a — схема; $б$ — график зависимости $g_{ст}(u)$; $в$ — график зависимости $C_{диф}(u)$

Если нелинейная цепь представляет собой параллельно включенные резистивный и емкостный двухполюсники (рис. 3.28, a), то при синусоидальном напряжении $u = U_m \sin \omega t$, используя первый закон Кирхгофа, получим

$$i = i_r + i_c = g_{ст}(u)u + C_{диф}(u) \frac{du}{dt} = g_{ст}(u)U_m \sin \omega t + \omega C_{диф}(u)U_m \cos \omega t. \quad (3.25)$$

Оба нелинейных множителя ($g_{ст}$ и $C_{диф}$) уравнения (3.25) зависят от напряжения. Графики $g_{ст}$ и $C_{диф}$

могут быть получены из исходных характеристик $i(u)$ и $Q(u_c)$. Задаваясь значениями времени $t(t_1, t_2, \dots)$, можно определить напряжения $u(u_1, u_2, \dots)$, а затем по значениям напряжений — активную статическую проводимость $g_{ст}(g_{ст1}, g_{ст2}, \dots)$ (рис. 3.28, б) и дифференциальную емкость $C_{диф}(C_{диф1}, C_{диф2}, \dots)$ (рис. 3.28, в). Подставляя полученные данные в уравнение (3.25), можно определить мгновенные значения тока $i(i_1, i_2, \dots)$ и построить график $i(t)$.

Итак, нелинейная электрическая цепь позволяет преобразовать частотный состав (частотный спектр) сигнала с образованием новых частотных составляющих, отсутствовавших во входном сигнале. Характер же составляющих определяется видом нелинейности. Спектр выходного сигнала может быть найден разложением полученной кривой в гармонический ряд.

Заметим, что линейная электрическая цепь (линейный фильтр) может преобразовать сигнал только в смысле перераспределения его интенсивности и фазовых сдвигов отдельных частотных составляющих, уже имевшихся во входном сигнале (до практического полного подавления частот этих составляющих). Линейный фильтр используется для выделения нужной гармоники или группы гармоник, т.е. соответствующей части спектра выходного сигнала.

§ 3.6. Метод гармонического баланса

Этот метод является более точным, чем методы, основанные на квазилинейном подходе, так как позволяет учесть и некоторые гармонические составляющие.

Поскольку ток и падения напряжений в нелинейной цепи в общем случае несинусоидальны, можно представить ожидаемое решение в виде суммы гармоник, у которых неизвестными являются амплитуды и начальные фазы. Если подставить теперь эту сумму в нелинейное дифференциальное уравнение, записанное для данной искомой величины, то все члены, входящие в дифференциальное уравнение, будут представлены в виде суммы гармоник. Просуммируем справа и слева от знака равенства все коэффициенты при членах, содержащих $\sin n \omega t$, и приравняем эти суммы друг к другу. Проделаем ту же операцию и с коэффициентами при $\cos n \omega t$. Повторив эти операции для всех значений n , получим

систему из $2n$ алгебраических уравнений, которые и используются для определения неизвестных амплитуд и начальных фаз каждой гармоники. Такой метод называют методом гармонического баланса.

Точное решение задачи этим методом требует учета бесконечного множества гармоник. При решении же конкретных задач ограничивают число гармоник в ожидаемом решении (учитывают, как правило, одну-две); точный баланс гармоник при этом нарушается, и решение становится приближенным.

В качестве примера рассмотрим схему рис. 3.29, а с нелинейным двухполюсником $HD(r)$, симметричная вольт-амперная характеристика которого показана (в первом квадранте) на рис. 3.29, б.

Если на вход заданной цепи подано синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t$, то ток будет несинусоидальным. Однако основная гармоника тока существенно преобладает над высшими гармониками, поэтому будем искать решение в виде $i = I_{1m} \sin \omega t$.

Предположим, что вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника достаточно точно аппроксимируется на некотором интервале зависимостью $u_1 = ai^3$. Начальная фаза тока в данном случае равна нулю. Следовательно, неизвестный член уравнения — амплитудное значение тока первой гармоники I_{1m} .

По второму закону Кирхгофа

$$u = u_1 + u_2 = ai^3 + ri \quad (3.26)$$

или

$$\begin{aligned} U_m \sin \omega t &= aI_{1m}^3 \sin^3 \omega t + rI_{1m} \sin \omega t = aI_{1m}^3 \left(\frac{3}{4} \sin \omega t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right) + rI_{1m} \sin \omega t = \frac{3}{4} aI_{1m}^3 \sin \omega t - \\ &\quad - \frac{1}{4} aI_{1m}^3 \sin 3\omega t + rI_{1m} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Просуммируем коэффициенты при $\sin \omega t$ в левой и

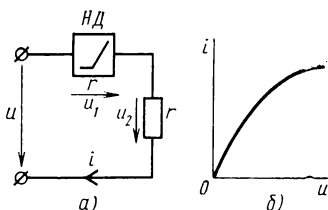


Рис. 3.29. Последовательное соединение двухполюсника r и линейного активного сопротивления:

а — схема; б — в. а. х. двухполюсника

правой частях уравнения (3.27) и приравняем коэффициенты при этой гармонике друг другу:

$$U_m = \frac{3}{4} a I_{1m}^3 + r I_{1m} \quad (3.28)$$

или

$$\frac{3}{4} a I_{1m}^3 + r I_{1m} - U_m = 0. \quad (3.29)$$

Решаем уравнение (3.29) по формулам Кардано или численными методами и определяем амплитуду тока I_{1m} .

Нетрудно заметить, что решение получится приближенным не только потому, что бесконечный тригонометрический ряд Фурье был ограничен одной гармоникой, но и вследствие неучета третьей гармоники, которая получилась в уравнении (3.27).

Если бы гармоника тока имела начальную фазу, то неизвестных членов уравнения было бы два, что привело бы к необходимости решать систему из двух уравнений.

В заключение отметим, что не для всякого вида аппроксимации и ограничения числа гармоник может быть получено решение. В этом случае необходимо или уменьшить число гармоник в решении, или задаться другим аппроксимирующим выражением.

§ 3.7. Метод сопряжения интервалов (для расчета цепей с резистивными двухполюсниками)

Известно, что нелинейная вольт-амперная характеристика может быть представлена одним аналитическим выражением, аппроксимирующим ее в необходимой для данной конкретной задачи области. Если при этом требуется определенная точность расчета, то такая аппроксимация обычно оказывается достаточно сложной, а аналитическое нахождение искомых зависимостей затруднено.

Можно составить также несколько аналитических выражений, справедливых на отдельных участках интересующей нас области. Этот метод называют методом сопряжения интервалов (методом припасовывания), так как решения для отдельных участ-

ков (интервалов) должны сопрягаться (припасовываться).

Фактически переход от одного участка к другому равносильно коммутации, так как в точке сопряжения меняются параметры двухполюсника.

Наиболее распространена замена нелинейных характеристик прямолинейными участками, так как при этом уравнения, относящиеся к отдельным участкам, будут линейными.

Рассмотрим цепь с нелинейным двухполюсником НД (r) (рис. 3.30, а), вольт-амперная характеристика $i(u_1)$ которого идеализированная (рис. 3.30, б): двухполюсник при одной полярности приложенного напряжения имеет сопротивление равное нулю, а при другой — бесконечности.

Если емкость C в цепи отсутствует, то эквивалентная вольт-амперная характеристика $i(u)$ (рис. 3.30, б) будет состоять из ветви с характеристикой $i_r(u_2)$ и ветви с характеристикой $i(u_1)$. Таким образом, при синусоидальном напряжении источника питания $u = U_m \sin \omega t$ ток в цепи ($i = i_r$), а следовательно, и напряжение u_2 можно рассмотреть на двух интервалах: от 0 до π и от π до 2π . На первом интервале ток в цепи i будет синусоидальным, на втором — равен нулю (пунктирные полусинусоиды на рис. 3.30, в). Если ток имеет хотя и пульсирующее, но всегда положительное значение, следовательно, имеет место выпрямление переменного тока. При этом конечное значение тока на первом интервале $i = I_m \sin \pi$ должно быть равно начальному значению тока на втором интервале $i = 0$; конечное значение тока на втором интервале $i = 0$ должно быть равно начальному значению тока на третьем интервале $i = I_m \sin 2\pi$ и т. д.

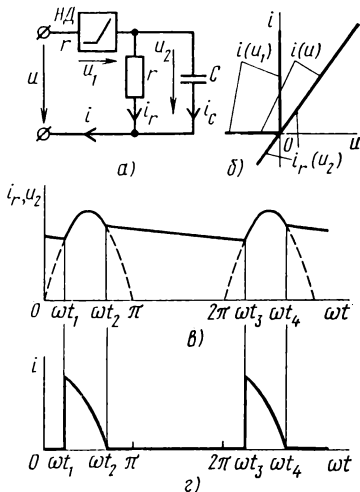


Рис. 3.30. Применение метода сопряжения интервалов для расчета цепи:

а — схема; б — в. а. х.; в — график зависимости $i_r(\omega t)$; г — график зависимости $i(\omega t)$

При данной форме несинусоидального тока разложение его в ряд Фурье будет содержать постоянную составляющую

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{U_m}{r} \sin \alpha d\alpha = \frac{1}{\pi} \frac{U_m}{r} \approx 0,318 I_m. \quad (3.30)$$

Как видно из уравнения (3.30), постоянная составляющая имеет небольшое значение, поэтому если необходимо ее повысить, параллельно активному сопротивлению r включают емкость C (рис. 3.30, а).

В этом случае в момент, когда положительное напряжение на входе цепи u превысит напряжение на емкости u_2 , емкость начинает заряжаться, и от источника потребляется ток $i = i_r + i_C$. После того как напряжение u достигает амплитудного значения, оно начинает падать и становится меньше напряжения u_2 . Емкость начинает разряжаться на сопротивление r , поддерживая ток i того же направления, что и было раньше. При этом $i_r = i_C$, а $i = 0$. Затем цикл повторяется.

Установившийся режим (сплошная кривая на рис. 3.30, в) будет состоять из интервалов времени: $\omega t_1 - \omega t_2$, $\omega t_2 - \omega t_3$, $\omega t_3 - \omega t_4$. Фактически этот режим состоит из двух чередующихся переходных процессов и является установившимся лишь в том смысле, что эти два процесса повторяются периодически без изменений. Такие установившиеся режимы называют квазистационарными.

Для решения задачи рассмотрим дифференциальные уравнения на соответствующих интервалах.

При $\omega t_1 \leq \omega t \leq \omega t_2$

$$\begin{aligned} u_2 &= U_m \sin \omega t; \\ i &= i_r + i_C = \frac{u_2}{r} + C \frac{du_2}{dt} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t + \omega C U_m \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.31)$$

После прохождения максимума по мере удаления от него возрастает скорость уменьшения мгновенного значения приложенного напряжения du/dt , напряжения u и u_2 сравниваются в момент времени $\omega t = \omega t_2$, и ток i становится равным нулю. Для этого момента времени уравнение (3.31) будет иметь вид

$$0 = \frac{U_m}{r} \sin \omega t_2 + \omega C U_m \cos \omega t_2, \quad (3.32)$$

откуда

$$-\omega C U_m \cos \omega t_2 = \frac{U_m}{r} \sin \omega t_2$$

и

$$\omega t_2 = -\operatorname{arctg}(\omega r C). \quad (3.33)$$

Ток через нелинейный двухполюсник (рис. 3.30, з) из уравнения (3.31) можно представить так:

$$i = \frac{U_m}{r} \sqrt{1 + (\omega r C)^2} \sin(\omega t_2 - \omega t). \quad (3.34)$$

При $\omega t_2 \leq \omega t \leq \omega t_3$ емкость разряжается по экспоненциальному закону

$$u_2 = A e^{-\frac{\omega t - \omega t_2}{\omega r C}}. \quad (3.35)$$

Постоянную A определяют из условия, что при $\omega t = \omega t_2$ $u_2 = U_m \sin \omega t_2$. Поэтому

$$u_2 = U_m \sin \omega t_2 e^{-\frac{\omega t - \omega t_2}{\omega r C}}. \quad (3.36)$$

При $\omega t = \omega t_3$ напряжение u_2 опять становится синусоидальным. Уравнение (3.36) для этого момента времени

$$U_m \sin \omega t_3 = U_m \sin \omega t_2 e^{-\frac{\omega t_3 - \omega t_2}{\omega r C}}$$

может быть преобразовано в уравнение

$$\sin \omega t_3 e^{\frac{\omega t_2}{\omega r C}} = \sin \omega t_2 e^{\frac{\omega t_3}{\omega r C}}, \quad (3.37)$$

откуда определяют момент времени ωt_3 . Очевидно, что $\omega t_3 = \omega t_1 + 2\pi$ и $\omega t_4 = \omega t_2 + 2\pi$.

Постоянная составляющая тока в активном сопротивлении

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} i d\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{U_m}{r} \sqrt{1 + (\omega r C)^2} [1 - \cos(\omega t_2 - \omega t_1)]. \quad (3.38)$$

§ 3.8. Магнитные цепи при переменном магнитном потоке

В предыдущих параграфах были рассмотрены методы расчета цепей с нелинейными индуктивными двухполюсниками. При этом в расчетах использовали или

вольт-амперные характеристики (при квазилинейном подходе), или зависимости потокосцепления самоиндукции от тока.

Конструктивно нелинейный индуктивный двухполюсник (рис. 3.31, а) представляет собой дроссель (дроссели) с ферромагнитным сердечником (рис. 3.31, б).

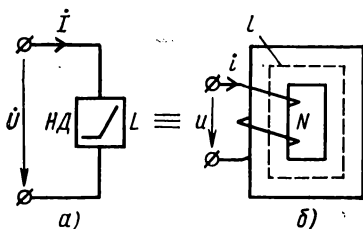
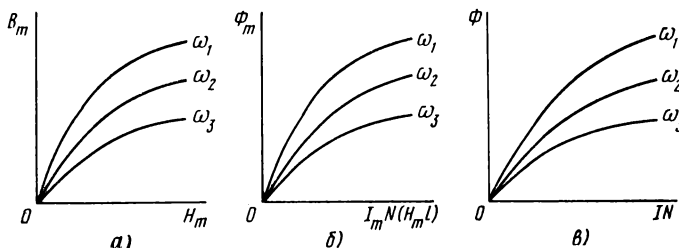


Рис. 3.31. Нелинейный индуктивный двухполюсник (а) и его магнитный аналог (б)

Рис. 3.32. Динамические кривые намагничивания $B_m(H_m)$ (а) и вебер-амперные характеристики $\Phi_m(I_m N)$ (б) и $\Phi(IN)$ (в) в зависимости от частоты ($\omega_3 > \omega_2 > \omega_1$)



Особенность цепей, рассматриваемых в данном параграфе, состоит в учете взаимосвязи между токами (напряжениями) в обмотках и потоками (индукциями) в сердечниках, т.е. здесь совместно анализируются электрическая и магнитная цепи.

С одной стороны, магнитный поток в сердечнике зависит от токов в обмотках, и поэтому при исследовании приходится в значительной мере пользоваться методами, разработанными для магнитных цепей при постоянном магнитном потоке (см. § 1.7). С другой стороны, токи в обмотках зависят от характера изменения магнитного потока. Все это значительно усложняет исследование. Поэтому при расчетах вводят ряд допущений (важнейшим из которых является квазилинейность), упрощающих рассмотрение явлений.

В соответствии с квазилинейным подходом предполагаем, что напряжение, ток и магнитный поток изменя-

ются по синусоидальному закону, а нелинейность учитывается в зависимостях между амплитудным (действующим) значением магнитного потока и амплитудным (действующим) значением м. д. с. (вебер-амперная характеристика).

Исходной характеристикой для получения зависимости $\Phi_m = f(I_m N)$ является *динамическая кривая намагничивания* $B_m = f(H_m)$. При одном и том же материале сердечника с изменением частоты динамические кривые изменяются. При увеличении частоты они располагаются ниже и становятся более пологими (рис. 3.32, а). Такая же закономерность наблюдается и для вебер-амперных характеристик (рис. 3.32, б). Следует заметить, что для расчетов чаще применяются вебер-амперные характеристики для действующих $\Phi = f(IN)$ (рис. 3.32, в), а не для амплитудных значений потоков и м. д. с.

Рассмотрим магнитную цепь, приведенную на рис. 3.31, б, и покажем, что магнитные параметры можно связать с электрическими, т. е. перейти от вебер-амперной характеристики $\Phi = f(IN)$ к вольт-амперной $I = f(U)$ и определить, таким образом, индуктивность эквивалентной электрической схемы рис. 3.31, а (статическую и дифференциальную). Если пренебречь явлением гистерезиса, вихревыми токами и потоками рассеяния, то

$$u = ri + d\Psi/dt, \quad (3.39)$$

где r — сопротивление обмотки.

Произведением ri также можно пренебречь, поскольку оно меньше $d\Psi/dt$. Тогда

$$u = d\Psi/dt. \quad (3.40)$$

Если напряжение, приложенное к обмотке, синусоидально $u = U_m \sin \omega t$, то уравнение (3.40) можно представить в следующем виде:

$$U_m \sin \omega t = N \frac{d\Phi_t}{dt}, \quad (3.41)$$

откуда, разделяя переменные, получим

$$\Phi_t = \frac{U_m}{N} \int \sin \omega t dt = -\frac{U_m}{\omega N} \cos \omega t = -\Phi_m \cos \omega t, \quad (3.42)$$

где N — число витков обмотки.

Таким образом, при сделанных допущениях величина магнитного потока в сердечнике определяется величиной

напряжения U_m , числом витков N и частотой ω и не зависит от вебер-амперной характеристики.

Из уравнения (3.42) следует уравнение

$$\Phi_m = \frac{U_m}{\omega N} = \frac{\sqrt{2}U}{2\pi f N} = \frac{U}{4,44fN}, \quad (3.43)$$

которое обычно записывают в виде зависимости напряжения от магнитного потока или магнитной индукции

$$U = 4,44fN\Phi_m = 4,44fNSB_m. \quad (3.44)$$

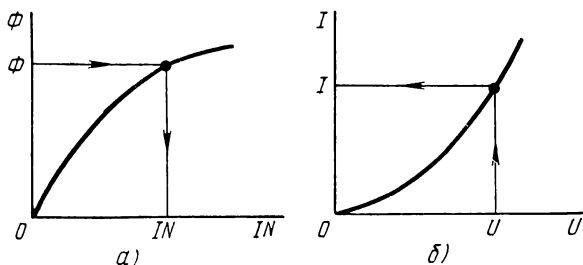


Рис. 3.33. Графический расчет магнитной цепи:

а — вебер-амперная характеристика $\Phi(IN)$; б — в. а. х. $I(U)$

Уравнение (3.44) дает возможность перейти от координаты Φ к координате U , а соотношение $I = IN/N$ — от координаты IN к координате I .

Таким образом, если необходимо найти ток в обмотке магнитной цепи (см. рис. 3.31, б), то возможны два пути решения этой задачи: с использованием вебер-амперной или вольт-амперной характеристик. В первом случае по уравнению (3.43) определяют значение магнитного потока Φ ($\Phi = \Phi_m / \sqrt{2}$), затем по вебер-амперной характеристике (рис. 3.33, а) — ток I ($I = IN/N$). Во втором случае необходимо перейти от вебер-амперной характеристики (рис. 3.33, а) к вольт-амперной (рис. 3.33, б), т. е. перейти от магнитной цепи (см. рис. 3.31, б) к эквивалентной электрической (см. рис. 3.31, а). Далее по заданному входному напряжению U определяют значение тока I (рис. 3.33, б).

Из уравнения (3.44) следует, что отличие магнитных цепей при постоянном магнитном потоке от магнитных цепей при переменном магнитном потоке в основном состоит в том, что в данном случае ток обмотки главным

образом зависит от геометрических размеров и материала магнитопровода. В магнитных цепях при постоянном магнитном потоке ток обмотки зависит только от сопротивления обмотки.

§ 3.9. Особенности цепей с диэлектриками

В предыдущих параграфах были рассмотрены методы расчета цепей с нелинейными двухполюсниками, и в частности с нелинейными емкостными двухполюсниками. При этом в расчетах использовали или вольт-амперные характеристики (при квазилинейном подходе), или зависимости заряда от напряжения.

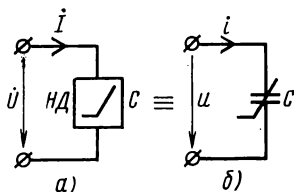


Рис. 3.34. Нелинейный емкостный двухполюсник (а) и его электрический аналог (б)

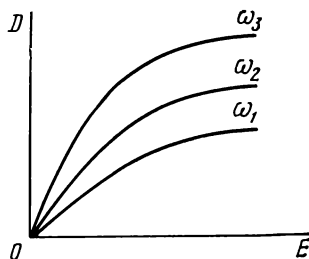


Рис. 3.35. Семейство характеристик $D(E)$ для разных частот

Конструктивно нелинейный емкостный двухполюсник (рис. 3.34, а) представляет собой конденсатор (конденсаторы) с нелинейным диэлектриком (рис. 3.34, б). В качестве диэлектрика используются, например, сегнетокерамические диэлектрики (вариконды).

Известно, что у нелинейного диэлектрика диэлектрическая проницаемость значительно меняется при изменении напряженности электрического поля, а реактивное сопротивление определяется состоянием диэлектрика. Для характеристики явления в диэлектрике необходимо рассмотреть зависимость *электрического смещения (электрической индукции)* от *напряженности электрического поля* $D=f(E)$, которая в общем случае изменяется при изменении частоты (рис. 3.35).

Если пренебречь сопротивлением утечки и диэлектрическими потерями конденсатора, то для перехода от электрического смещения D к проходящему через кон-

денсатор току I можно воспользоваться теоремой Гаусса

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q, \quad (3.45)$$

где S — поверхность; Q — заряд.

Для обычных источников питания с относительно низкими частотами можно полагать, что поток электрического смещения через наружные стенки диэлектрика и обкладки практически равен нулю (он должен учитываться в той мере и в той форме, в которой учитывается рассеяние в магнитной цепи). Аналогично тому, как ранее от уравнения (1.15) был совершен переход к уравнению (1.16), получим

$$DS = Q, \quad (3.46)$$

где S — поверхность одной обкладки.

В соответствии с квазилинейным рассмотрением

$$D_t = D_m \sin \omega t$$

и

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(SD_m \sin \omega t)}{dt}, \quad (3.47)$$

а действующее значение тока

$$I = k_1 f DS, \quad (3.48)$$

где k_1 — коэффициент, значение которого определяется тем, какие значения величин (амплитудные, средние или действующие) применены в исходных характеристиках.

Переход от напряженности электрического поля к электрическому напряжению также должен быть выполнен с учетом отмеченных обстоятельств, что достигается введением коэффициента k_2 :

$$U = k_2 \int_0^d \mathbf{E} d\mathbf{l} = k_2 E d, \quad (3.49)$$

где d — расстояние между электродами плоского конденсатора.

Таким образом, уравнения (3.48), (3.49) позволяют перейти от зависимости $D = f(E)$ к вольт-амперной характеристике $I = \varphi(U)$, подобно тому, как при рассмотрении магнитных цепей совершался переход от динамической кривой намагничивания к вебер-амперной, а затем к вольт-амперной характеристике.

§ 3.10. Расчет цепей с реактивными двухполюсниками методом сопряжения интервалов

Рассмотрим цепь с линейным сопротивлением и нелинейным индуктивным двухполюсником (рис. 3.36, а), имеющим идеализированную вебер-амперную характеристику (рис. 3.36, б). Магнитный поток в таком двухполюснике меняется от $+\Phi_{\max}$ до $-\Phi_{\max}$ и наоборот, т. е. магнитное состояние двухполюсника характеризуется только одним параметром $|\Phi_{\max}|$.

Особенность расчета в этом случае заключается в том, что состояние двухполюсника определяется не мгновенным значением подводимого к нему напряжения (как это имело место для двухполюсника со свойствами активного сопротив-

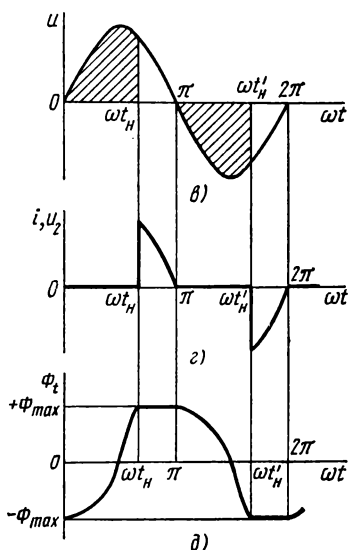
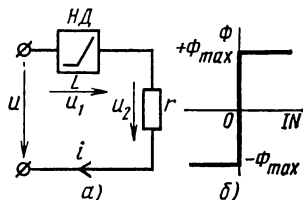


Рис. 3.36. Использование метода сопряжения интервалов для расчета цепи с нелинейным индуктивным двухполюсником и линейным активным сопротивлением:

а — схема; б — идеализированная вебер-амперная характеристика; в — график зависимости $u(\omega t)$; г — график зависимости $i(\omega t)$; д — график зависимости $\Phi_t(\omega t)$

ления, см. § 3.7), а величиной так называемого импульса напряжения. Действительно, так как $u_1 = N \frac{d\Phi_t}{dt}$, то, разделяя переменные, получаем

$$\Delta\Phi_t = \frac{1}{N} \int_{t_1}^{t_2} u_1 dt, \quad (3.50)$$

где $\Delta\Phi_t$ — приращение магнитного потока, определяемое импульсом напряжения за интервал времени t_1 — t_2 .

Если напряжение, приложенное к цепи, изменяется по синусоидальному закону $u = U_m \sin \omega t$, то в положительный полупериод этого напряжения сердечник начинает перемагничиваться, т. е. значение магнитного потока изменяется от $-\Phi_{\max}$ до $+\Phi_{\max}$. При этом индуктивное сопротивление двухполюсника равно бесконечности и напряжение $u_1 = u$. Ток в цепи равен нулю.

Чтобы изменить магнитное состояние двухполюсника на противоположное, нужно создать приращение потока

$$\Delta \Phi = 2\Phi_{\max}. \quad (3.51)$$

Требуемый для этого импульс напряжения (рис. 3.36, в) найдем по формуле

$$2\Phi_{\max} = \frac{1}{N} \int_0^{t_H} U_m \sin \omega t \, dt, \quad (3.52)$$

где t_H — момент времени, когда двухполюсник перемагнитится и его сопротивление станет равным нулю.

Если проинтегрировать уравнение (3.52), то

$$\cos \omega t_H = 1 - \frac{2\omega N \Phi_{\max}}{U_m}, \quad (3.53)$$

откуда можно определить угол начала импульса тока ωt_H :

$$\omega t_H = \arccos \left(\frac{U_m - 4\pi f N \Phi_{\max}}{U_m} \right). \quad (3.54)$$

Так как с момента времени ωt_H сопротивление двухполюсника становится равным нулю, то все приложенное к цепи напряжение компенсируется падением напряжения на линейном сопротивлении r , т. е. $u_2 = u$. Ток в цепи в этот промежуток времени (рис. 3.36, г)

$$i = \frac{u}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t. \quad (3.55)$$

После перехода входного напряжения через нуль двухполюсник снова перемагничивается, т. е. магнитный поток изменяется от $+\Phi_{\max}$ до $-\Phi_{\max}$. Сопротивление двухполюсника становится равным бесконечности, и ток прекращается. Таким образом, угол прекращения импульса тока равен π .

Из уравнения (3.54) видно, что угол ωt_H зависит от амплитуды приложенного напряжения U_m и максималь-

ного значения магнитного потока Φ_{\max} . Физически это объясняется тем, что амплитудное значение магнитного потока Φ_m зависит от напряжения U (3.43) и в то же время ограничивается величиной Φ_{\max} . В интервалах $\omega t_n - \pi$, $\omega t'_n - 2\pi$ и т. д. магнитный поток имеет постоянное значение (рис. 3.36, ∂), что означает равенство нулю производной магнитного потока по времени и, следовательно, равенство нулю напряжения u_1 . Отсюда вытекает, что условием возникновения тока в цепи является следующее неравенство:

$$|\Phi_{\max}| < \Phi_m. \quad (3.56)$$

Если же $|\Phi_{\max}| \geq \Phi_m$, то ограничения магнитного потока не происходит, и ток в цепи равен нулю при любом значении ωt .

Метод сопряжения интервалов может быть применен и к цепи с нелинейным емкостным двухполюсником. В этом случае состояние двухполюсника определяется уже не импульсом напряжения, а *импульсом тока*. Действительно, используя уравнение (3.46), можно определить ток

$$i = \frac{dQ}{dt} = S \frac{dD_t}{dt}, \quad (3.57)$$

откуда после разделения переменных получим

$$\Delta D_t = \frac{1}{S} \int_{t_1}^{t_2} i dt, \quad (3.58)$$

где ΔD_t — приращение электрического смещения, определяемое импульсом тока за интервал времени $t_1 - t_2$.

Будем полагать, что зависимость $D = f(E)$ имеет прямоугольный характер и электрическое смещение меняется от $+D_{\max}$ до $-D_{\max}$ и наоборот.

Чтобы изменить состояние двухполюсника на противоположное, нужно создать приращение электрического смещения

$$\Delta D = 2D_{\max}, \quad (3.59)$$

и требуемый импульс синусоидального тока определится соотношением

$$2D_{\max} = \frac{1}{S} \int_0^{t_n} I_m \sin \omega t dt, \quad (3.60)$$

где t_H — момент времени, когда двухполюсник скачкообразно меняет свое сопротивление.

Проинтегрировав уравнение (3.60), получим

$$\cos \omega t_H = 1 - \frac{2\omega SD_{\max}}{I_m}, \quad (3.61)$$

откуда определим угол ωt_H :

$$\omega t_H = \arccos \left(\frac{I_m - 4\pi f SD_{\max}}{I_m} \right). \quad (3.62)$$

Сравнение уравнений (3.54) и (3.62) подчеркивает аналогию расчета магнитных и диэлектрических цепей.

Достаточно простые соотношения для определения ωt_H (3.54), (3.62) и при $\omega t_H = 0, \pi, 2\pi, \dots$ получаются вследствие того, что для активной нагрузки ток и напряжение совпадают по фазе и переходят через нуль в один и тот же момент времени (см. рис. 3.36, в, г). Если же включить в цепь (рис. 3.37, а), например, активно-индуктивную нагрузку, то нелинейный двухполюсник $НД$ (L), имеющий идеализированную вебер-амперную характеристику (рис. 3.37, б), начинает перемещаться в те моменты времени, при которых ток в цепи i стано-

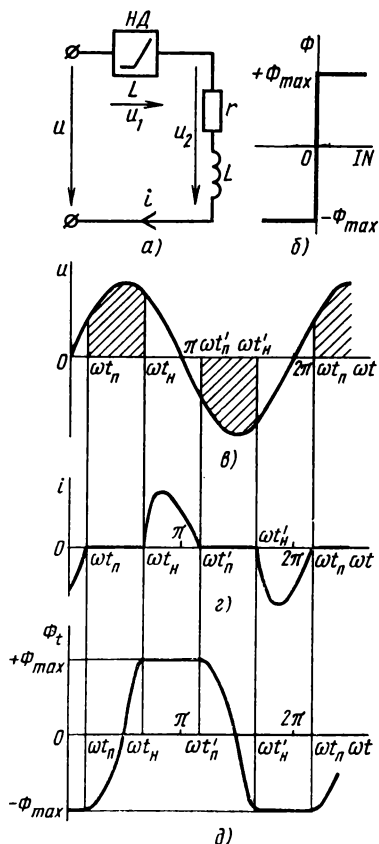


Рис. 3.37. Применение метода сопряжения интервалов для расчета цепи с нелинейным индуктивным двухполюсником и смешанной нагрузкой:

а — схема; б — идеализированная вебер-амперная характеристика; в — график зависимости $u(\omega t)$; г — график зависимости $i(\omega t)$; д — график зависимости $\Phi_t(\omega t)$

вится равным нулю. Эти моменты времени отличны от $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \dots$, так как в такой цепи ток и напряжение не совпадают по фазе.

Требуемый для перемagnичивания импульс напряжения в этом случае определяется уравнением (3.52), однако нижний предел интеграла будет равен ωt_{π} (рис. 3.37, в). Получившееся при интегрировании соотношение

$$\cos \omega t_{\pi} = \cos \omega t_{\pi} - \frac{2\omega N\Phi_{\max}}{U_m} \quad (3.63)$$

показывает, что, во-первых, углы начала и прекращения импульса тока в цепи зависят друг от друга и, во-вторых, уравнение (3.53) является частным случаем уравнения (3.63).

Так как в момент времени ωt_{π} происходит коммутация цепи (при нулевых начальных условиях), то для определения тока i необходимо рассмотреть переходный процесс, расчет которого дает известное соотношение для тока i :

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) + Ae^{-t/\tau}, \quad (3.64)$$

$$\text{где } I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{x_L}{r}; \quad \tau = L/r.$$

Постоянная интегрирования A может быть найдена из условия, что $i(\omega t_{\pi}) = 0$:

$$A = -I_m \sin(\omega t_{\pi} - \varphi) e^{\omega t_{\pi}/\omega\tau}. \quad (3.65)$$

Тогда из выражения для переходного тока

$$i = I_m \left[\sin(\omega t - \varphi) - \sin(\omega t_{\pi} - \varphi) e^{-\frac{\omega t - \omega t_{\pi}}{\omega\tau}} \right], \quad (3.66)$$

рассматриваемого в момент времени ωt_{π} , при котором ток равен нулю (рис. 3.37, в), можно получить второе уравнение, связывающее ωt_{π} и ωt_{π} :

$$\sin(\omega t_{\pi} - \varphi) e^{\omega t_{\pi}/\omega\tau} = \sin(\omega t_{\pi} - \varphi) e^{\omega t_{\pi}/\omega\tau}. \quad (3.67)$$

Совместное решение уравнений (3.63) и (3.67) дает возможность определить ωt_{π} и ωt_{π} .

Уравнение (3.67) аналогично по своей структуре уравнению (3.37). Это указывает на общность методов расчета двухполюсников различного характера, если принято допущение об идеализации их исходных характеристик.

Задачи

3.1. Нелинейный резистивный двухполюсник определяется вольт-амперной характеристикой для действующих значений, представленной в табл. 3.1. Определить мгновенное значение тока в цепи, если $u=50,9 \sin(\omega t - 90^\circ)$ В. Как изменится ток, если последовательно с нелинейным двухполюсником включить сопротивление $r=60$ Ом?

О т в е т. 1) $i=0,909 \sin(\omega t - 90^\circ)$ А; 2) $i=0,571 \sin(\omega t - 90^\circ)$ А.

3.2. К квазилинейной цепи, представляющей собой последовательное соединение нелинейного резистивного двухполюсника и конденсатора с емкостью $C=7,98$ мкФ, подведено напряжение $u=50,9 \sin 2512 t$ В. Определить мгновенное значение тока в цепи.

Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника приведена в табл. 3.1.

Т а б л и ц а 3.1

U	В	0	5	10	20	30	40	50
I	А	0	0,26	0,38	0,52	0,61	0,66	0,69

Решение. Для схемы (рис. 3.38, а) построим вольт-амперные характеристики нелинейного двухполюсника $I(U_r)$, емкости $I(U_C)$ и эквивалентную характеристику $I(U)$ (рис. 3.38, б). Для построения характеристики $I(U_C)$ необходимо определить сопротивление

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{2512 \cdot 7,98} = 50 \text{ Ом (tg } \alpha = x_C).$$

Точки части эквивалентной характеристики найдем следующим образом:

$$I_1 = 0,4 \text{ А, } U_1 = \sqrt{U_{r1}^2 + U_{C1}^2} = \sqrt{12,5^2 + 20^2} = 23,6 \text{ В;}$$

$$I_2 = 0,5 \text{ А, } U_2 = \sqrt{U_{r2}^2 + U_{C2}^2} = \sqrt{18,5^2 + 25^2} = 30,8 \text{ В;}$$

$$I_3 = 0,6 \text{ А, } U_3 = \sqrt{U_{r3}^2 + U_{C3}^2} = \sqrt{28,5^2 + 30^2} = 41,7 \text{ В.}$$

Напряжение питания $U = U_m / \sqrt{2} = 50,9 / \sqrt{2} = 36$ В перенесем на эквивалентную характеристику и найдем $I=0,55$ А, $U_r=23$ В и $U_C=27,5$ В. Угол $\varphi = \arctg \frac{U_C}{U_r} = \arctg \frac{27,5}{23} = \arctg 1,192 = 50^\circ$.

О т в е т. $i=0,775 \sin(2512t + 50^\circ)$ А.

3.3. Квазилинейная цепь, состоящая из последовательно соединенных сопротивления $Z = (625 + j 1080)$ Ом и нелинейного резистивного двухполюсника, вольт-амперная характеристика которого задана в табл. 3.2, подключена к источнику напряжения с действующим значением $U=100$ В. Определить действующее значение тока в цепи.

О т в е т. $I=54$ мА.

3.4. Вольт-амперные характеристики для действующих значений двух нелинейных двухполюсников, один из которых имеет резистив-

Таблица 3.2

U	В	10	20	30	40	45	50
I	мА	2	5	10,5	20	31,5	100

ный, а другой — емкостный характер, заданы в табл. 3.1 и 3.3 соответственно.

Таблица 3.3

U	В	0	10	20	25	30	35
I	А	0	0,025	0,1	0,165	0,3	0,6

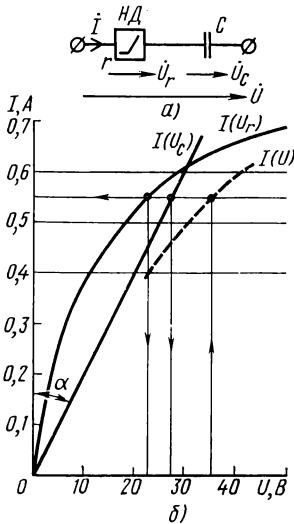


Рис. 3.38. К решению задачи 3.2:

а — схема; б — графический расчет

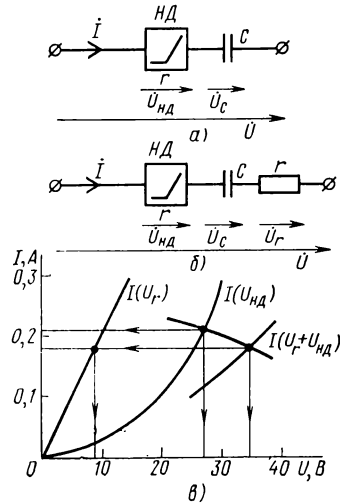


Рис. 3.39. К решению задачи 3.6:

а — схема; б — схема с дополнительным сопротивлением r ; в — графический расчет

Определить ток в цепи и падения напряжений на двухполюсниках, если напряжение питания $U=40$ В.

Ответ. $I=0,53$ А; $U_1=21$ В; $U_2=34$ В.

3.5. Два нелинейных двухполюсника, имеющих резистивный и индуктивный характер, соединены последовательно и определяются зависимостями $r_{ст}(I)$ и $x_{Lст}(I)$ (табл. 3.4). Чему равен ток в цепи и падения напряжений на двухполюсниках, если входное напряжение $U=60$ В?

Таблица 3.4

I	A	0	0,5	1	2	3	4	5
$r_{ст}$	Ом	20	20	21	24	30,5	41	54,5
$x_{L_{ст}}$	Ом	10	10	10,5	14	22,5	38	65

Ответ. $I=2,1$ А; $U_1=52$ В; $U_2=31$ В.

3.6. Нелинейный резистивный двухполюсник, вольт-амперная характеристика которого для действующих значений приведена в табл. 3.3, соединен последовательно с конденсатором, емкость которого $C=1,99$ мкФ. К цепи подведено напряжение $U=50$ В с частотой $f=400$ Гц. Определить ток в цепи и падения напряжений на двухполюснике и конденсаторе, применив для расчета метод эллипса. Как изменится ток и падения напряжений, если в заданную цепь включить дополнительно активное сопротивление r , равное 50 Ом?

Решение. Найдем условный ток короткого замыкания в цепи рис. 3.39, а:

$$I_k = U/x_C = 50/200 = 0,25 \text{ А}$$

$$\left(x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{2\pi \cdot 400 \cdot 1,99} = 200 \text{ Ом} \right)$$

и построим часть эллипса, имеющего полуоси $I_k=0,25$ А и $U=50$ В (рис. 3.39, в).

Точка пересечения характеристики $I(U_{нд})$ с эллипсом — решение задачи:

$$I = 0,21 \text{ А}; \quad U_{нд} = 27 \text{ В}; \quad U_C = \sqrt{U^2 - U_{нд}^2} = \sqrt{50^2 - 27^2} = 42 \text{ В}.$$

Если в заданную цепь включить дополнительно активное сопротивление $r=50$ Ом (рис. 3.39, б), то для расчета необходимо построить эквивалентную характеристику $I(U_r + U_{нд})$ и определить искомый ток и напряжения:

$$I = 0,18 \text{ А}; \quad U_r = 9 \text{ В}; \quad U_{нд} = 34,5 - 9 = 25,5 \text{ В};$$

$$U_C = \sqrt{U^2 - (U_r + U_{нд})^2} = \sqrt{50^2 - 34,5^2} = 36 \text{ В}.$$

Ответ. 1) $I=0,21$ А; $U_{нд}=27$ В; $U_C=42$ В; 2) $I=0,18$ А; $U_{нд}=25,5$ В; $U_C=36$ В; $U_r=9$ В.

3.7. Нелинейный индуктивный двухполюсник соединен последовательно с конденсатором, сопротивление которого $x_C=100$ Ом. Цепь обладает квазилинейными свойствами. Вольт-амперная характеристика двухполюсника приведена в табл. 3.3. При каком входном напряжении в цепи наступит резонанс напряжений?

Ответ. $U=30$ В.

3.8. Квазилинейная цепь представляет собой последовательное соединение активно-индуктивного нелинейного двухполюсника, характеристики которого приведены в табл. 3.5, и конденсатора с сопротивлением $x_C=110$ Ом.

Таблица 3.5

U	B	18	32	41	47	51	54
I	A	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
φ	—	70°	55°	44°	36°	30°	24°

При каком значении входного напряжения в цепи будет наблюдаться резонанс напряжений?

Решение. Так как условием резонанса напряжений является равенство

$$\omega_0 L_{\text{сг}} = 1/(\omega_0 C),$$

необходимо от исходной схемы (рис. 3.40, а) перейти к эквивалентной схеме (рис. 3.40, б) и построить характеристики $r_{\text{сг}}(I)$, $x_{L_{\text{сг}}}(I)$ и $x_C(I)$ нелинейных двухполюсников $НД_1$, $НД_2$ и емкости C . Точка пересечения характеристик $x_{L_{\text{сг}}}(I)$ и $x_C(I)$ является точкой резонанса напряжений.

Для построения характеристик $r_{\text{сг}}(I)$ и $x_{L_{\text{сг}}}(I)$ используем данные табл. 3.5 и, учитывая, что $\frac{U}{I} < \varphi = Z_{\text{сг}} < \varphi = r_{\text{сг}} + jx_{L_{\text{сг}}}$, получим:

$$Z_{\text{сг}1} < \varphi_1 = 180 < 70^\circ = (63,3 + j 169) \text{ Ом};$$

$$Z_{\text{сг}2} < \varphi_2 = 160 < 55^\circ = (91,2 + j 131) \text{ Ом};$$

$$Z_{\text{сг}3} < \varphi_3 = 137 < 44^\circ = (98,6 + j 96) \text{ Ом};$$

$$Z_{\text{сг}4} < \varphi_4 = 117,5 < 36^\circ = (94 + j 68,2) \text{ Ом};$$

$$Z_{\text{сг}5} < \varphi_5 = 102 < 30^\circ = (87,8 + j 51) \text{ Ом};$$

$$Z_{\text{сг}6} < \varphi_6 = 90 < 24^\circ = (81,8 + j 36) \text{ Ом}.$$

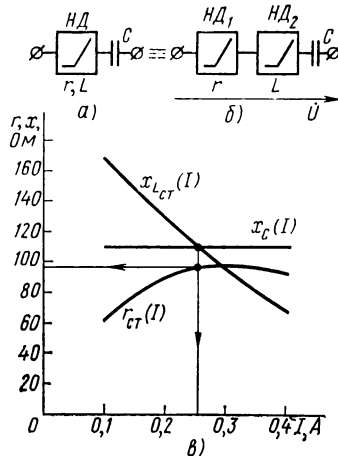
На рис. 3.40, в графически получаем, что точке резонанса соответствует ток $I = 0,255 \text{ А}$ и активное статическое сопротивление $r_{\text{сг}} = 97 \text{ Ом}$. Поэтому $U = r_{\text{сг}} I = 97 \cdot 0,255 = 24,73 \text{ В}$.

Ответ. $U = 24,73 \text{ В}$.

3.9. Активно-индуктивный нелинейный двухполюсник, характеристики которого заданы в табл. 3.5, соединен параллельно с конденсатором емкостью $C = 1,99 \text{ мкФ}$. Определить, при каком значении напряжения на зажимах цепи будет

Рис. 3.40. К решению задачи 3.8:

а — исходная схема; б — эквивалентная схема; в — графический расчет



иметь место резонанс токов и чему равен при этом ток источника. Частота $f=400$ Гц.

О т в е т. $U=47$ В; $I=0,324$ А.

3.10. Нелинейный индуктивный двухполюсник включен последовательно с активным сопротивлением $r=4$ Ом на источник с напряжением $U=12,8$ В. Вольт-амперная характеристика для действующих значений двухполюсника может быть аппроксимирована параболой второго порядка $I_{нд}=aU_{нд}^2$, где $a=0,02$ А/В². Определить аналитически ток в цепи. Каково должно быть новое значение входного напряжения, чтобы ток в цепи, где вместо активного сопротивления r включено комплексное сопротивление $\underline{Z}=(4-j3)$ Ом, не изменился?

О т в е т. $I=2$ А; $U=8,95$ В.

3.11. Определить параметры схемы замещения нелинейного резистивного двухполюсника, используя метод компенсации, если рабочая точка на вольт-амперной характеристике для действующих значений (табл. 3.3) имеет координаты $I=0,6$ А и $U=35$ В.

О т в е т. $U_i=25$ В; $r_i=16,7$ Ом.

3.12. Квазилинейная цепь представляет собой последовательное соединение нелинейного резистивного двухполюсника и конденсатора, сопротивление которого $x_C=50$ Ом. Определить мгновенное значение тока в цепи, если входное напряжение $u_{вх}=60\sqrt{2}\sin(\omega t+30^\circ)$ В. Расчет произвести аналитически, используя параметры схемы замещения двухполюсника, полученные при решении задачи 3.11.

О т в е т. $i=1,27\sin(\omega t+78^\circ)$ А.

3.13. Вольт-амперная характеристика нелинейного резистивного двухполюсника задана в табл. 3.6.

Т а б л и ц а 3.6

u	В	0	5	10	20	30	40
i	А	0	0,15	0,23	0,3	0,32	0,33

Двухполюсник подключается к источнику с напряжением $u=40\sin\omega t$ В сначала непосредственно, а затем через линейное сопротивление $r=100$ Ом. В обоих случаях построить график тока в цепи.

Решение. Последовательность построений кривой тока, если задано напряжение источника питания, приведена в § 3.5.

На рис. 3.41 эта задача решена для конкретных числовых значений. Кривая тока построена для цепи с нелинейным двухполюсником.

Если в цепь включено также линейное сопротивление, то предварительно необходимо построить эквивалентную характеристику и использовать ее для графических построений.

3.14. Нелинейные резистивный и индуктивный двухполюсники включены последовательно. Зависимости $r_{ст}(i)$ и $L_{диф}(i)$ заданы табл. 3.7. Построить график $u(t)$, если по цепи проходит ток $i=4\sin 2512 t$ А.

Таблица 3.7

i	A	0	0,5	1	2	3	4	5
$r_{ст}$	Ом	20	20	21	24	30,5	41	54,5
$L_{диф}$	мГн	16,2	15,5	15,2	14	11	10	10

Решение. Воспользуемся подходом, изложенным в § 3.5 (см. рис. 3.27). Для построения зависимости $i(t)$ необходимо подставить в уравнение (3.24) соответствующие значения $r_{ст}$ и $L_{диф}$ (рис. 3.42, а), задаваясь значениями углов [рис. 3.42, б, кривая $i(t)$]. Результаты расчета сведены в табл. 3.8, а график построен на рис. 3.42, б.

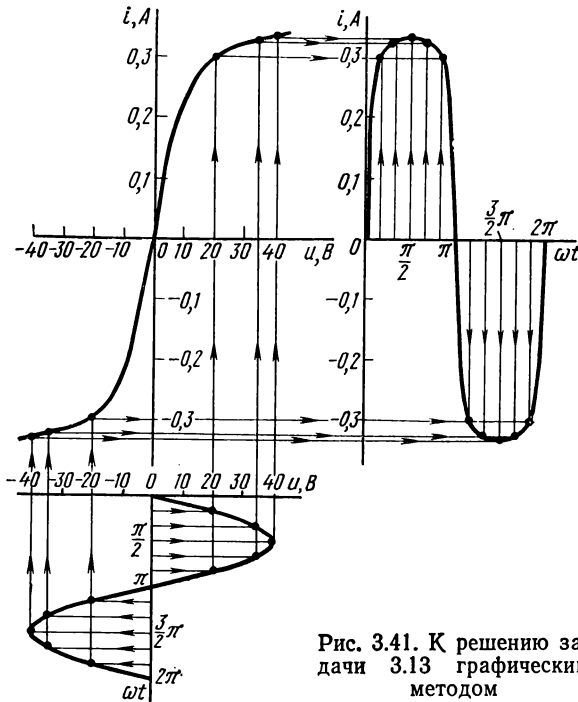


Рис. 3.41. К решению задачи 3.13 графическим методом

3.15. Вольт-амперная характеристика резистивного нелинейного двухполюсника аппроксимирована полиномом $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$. Определить ток в нелинейном двухполюснике, если напряжение на его зажимах $u = U_m \sin \omega t$.

Ответ. $i = \frac{2a_0 + a_2 U_m^2}{2} + a_1 U_m \sin \omega t + \frac{a_2 U_m^2}{2} \sin (2\omega t - 90^\circ)$.

Таблица 3.8

ωt , град	I , А	$r_{\text{сст}}$, Ом	$I_m \sin \omega t$, А	$L_{\text{диф}}$, мГн	$I_m \cos \omega t$, А	u_r , В	u_L , В	u , В
0	0	20	0	16,2	4	0	163	163
30	2	24	2	14	3,5	48	123	171
60	3,5	35	3,5	10	2	122,5	50,2	172,7
90	4	41	4	10	0	164	0	164
120	3,5	35	3,5	10	-2	122,5	-50,2	72,3
150	2	24	2	14	-3,5	48	-123	-75
180	0	20	0	16,2	-4	0	-163	-163
210	2	24	-2	14	-3,5	-48	-123	-171
240	3,5	35	-3,5	10	-2	-122,5	-50,2	-172,7
270	4	41	-4	10	0	-164	0	-164
300	3,5	35	-3,5	10	2	-122,5	50,2	-72,3
330	2	24	-2	14	3,5	-48	123	75
360	0	20	0	16,2	4	0	163	163

3.16. Индуктивная катушка с ферромагнитным сердечником и числом витков обмотки $N=400$ подключена к сети переменного тока напряжением 115 В и частотой $f=400$ Гц. Связь между магнитным потоком в сердечнике катушки и током в обмотке с достаточной точностью определяется уравнением $I=40 \Phi + 26 \cdot 10^9 \Phi^3$, где I выражен в амперах, Φ — в веберах. Пренебрегая потерями в меди обмотки и потоками рассеяния, определить действующее значение тока в обмотке.

Отв. $I=44,1$ мА.

3.17. Обмотка индуктивной катушки с числом витков $N=500$ намотана на кольцевой сердечник с внутренним диаметром $d_{\text{вт}}=2$ см и внешним диаметром $d_{\text{вн}}=2,8$ см. Толщина сердечника $b=0,8$ см, коэффициент заполнения сталью $k=0,85$. При подключении катушки к источнику переменного напряжения $U=36$ В с частотой $f=400$ Гц связь между напряженностью магнитного поля и индукцией в сердечнике выражается зависимостью $H=20 B + 90 B^3$, где H выражена в амперах на метр, B — в теслах. Пренебрегая рассеянием и активным сопротивлением обмотки, найти действующее значение тока в обмотке и эквивалентную статическую индуктивность катушки.

Решение. На рис. 3.43 показан чертеж сердечника, используя размеры которого проведем предварительные расчеты:

$$S = \frac{d_{\text{вн}} - d_{\text{вт}}}{2} b k = \frac{2,8 - 2}{2} 10^{-2} \cdot 0,8 \cdot 10^{-2} \cdot 0,85 = 0,275 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$l_{\text{ср}} = \frac{d_{\text{вн}} + d_{\text{вт}}}{2} = \frac{2,8 + 2}{2} 10^{-2} = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Найдем амплитудное и действующее значения индукции

$$B_m = \frac{U}{4,44 N f S} = \frac{36 \cdot 10^4}{4,44 \cdot 500 \cdot 400 \cdot 0,275} = 1,475 \text{ Тл}; \quad B = 1,045 \text{ Тл}.$$

Связь напряженности магнитного поля с индукцией задана аналитически:

$$H = 20B + 90B^3 = 20 \cdot 1,045 + 90 \cdot 1,045^3 = 123,4 \text{ А/м.}$$

Найдем ток в обмотке, воспользовавшись равенством $IN = Hl_{\text{ср}}$. Отсюда

$$I = \frac{Hl_{\text{ср}}}{N} = \frac{123,4 \cdot 2,4 \cdot 10^{-2}}{500} = 5,92 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

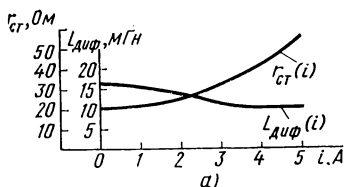


Рис. 3.42. К решению задачи 3.14 графо-аналитическим методом:

а — графики зависимостей $r_{\text{ст}}(i)$ и $L_{\text{диф}}(i)$; б — графики зависимостей $i(\omega t)$ и $u(\omega t)$

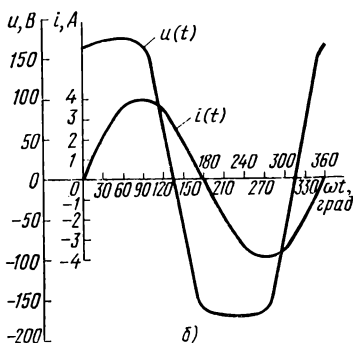
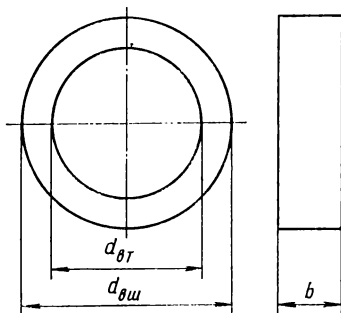


Рис. 3.43. К решению задачи 3.17. Геометрические размеры магнитопровода



Индуктивное статическое сопротивление и эквивалентная статическая индуктивность:

$$x_{L_{\text{ст}}} = \frac{U}{I} = \frac{36}{5,92} 10^3 = 6,08 \cdot 10^3 \text{ Ом;}$$

$$L_{\text{эст}} = \frac{x_{L_{\text{ст}}}}{\omega} = \frac{6,08 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 400} = 2,42 \text{ Гн.}$$

Ответ. $I = 5,92 \text{ мА}$; $L_{\text{эст}} = 2,42 \text{ Гн}$.

3.18. Зависимость статической емкости нелинейного конденсатора от напряжения на его зажимах можно описать выражением $C_{\text{ст}} = (20 \cdot 10^{-10}u + 10^{-8}) \text{ Ф}$. Определить ток в конденсаторе, если к нему приложено напряжение $u = (50 + 50 \sin 2500 t) \text{ В}$.

Ответ. $i = 0,02625 \sin(2500 t + 90^\circ) + 0,0125 \sin 5000 t, \text{ А}$.

3.19. Параллельно нелинейному конденсатору, между зарядом которого (в кулонах) и напряжением на обкладках (в вольтах) существует зависимость $Q = 4 \cdot 10^{-7} u + 3,2 \cdot 10^{-11} u^3$, включена индуктивная катушка с параметрами $L = 79,7 \text{ мГн}$ и $r = 40 \text{ Ом}$. Определить ток

в неразветвленной части цепи, если входное напряжение $u = 100 \sin 2512 t$ В.

Ответ. $i = 0,338 \sin (2512 t - 72^\circ 39') + 0,06 \sin (7536 t - 90^\circ)$, А.

3.20. На кольцевом сердечнике расположена обмотка с числом витков $N=500$. Определить максимальное значение индукции B_m и напряженности H_m в сердечнике при подключении катушки к источнику с напряжением $U=36$ В и частотой $f=400$ Гц, если при этом потребляется ток $I=120$ мА. Внешний диаметр сердечника

$d_{\text{вн}}=42$ мм, внутренний диаметр $d_{\text{вт}}=32$ мм, толщина $b=8$ мм и коэффициент заполнения сталью $k=0,85$.

Ответ. $B_m=1,2$ Тл; $H_m=732$ А/м.

3.21. Вольт-амперная характеристика индуктивной катушки со стальным сердечником при частоте $f=400$ Гц определяется уравнением $U=50 I-3 I^3$, где напряжение U измеряется в вольтах, а ток I — в амперах. Определить, при каком значении тока в цепи будет наблюдаться феррорезонанс напряжений, если последовательно с катушкой включить конденсатор емкостью $C=30$ мкФ. Потери в стали, обмотке и конденсаторе пренебрегаем.

Ответ. $I=3,5$ А.

3.22. Индуктивная катушка со стальным сердечником и конденсатор емкостью $C=1$ мкФ, соединенные параллельно, подключены к сети переменного тока с частотой $f=400$ Гц. Пренебрегая потерями в стали, обмотке катушки и конденсаторе, определить, при каком напряжении сети в цепи будет наблюдаться феррорезонанс токов, если между действующими значениями тока в обмотке катуш-

ки и магнитного потока в его сердечнике существует зависимость $I=150 \Phi+6 \cdot 10^9 \Phi^3$, где I — в амперах; Φ — в веберах. Обмотка катушки имеет 200 витков.

Ответ. $U=215$ В.

3.23. Вольт-амперная характеристика индуктивной катушки со стальным сердечником представлена в табл. 3.9.

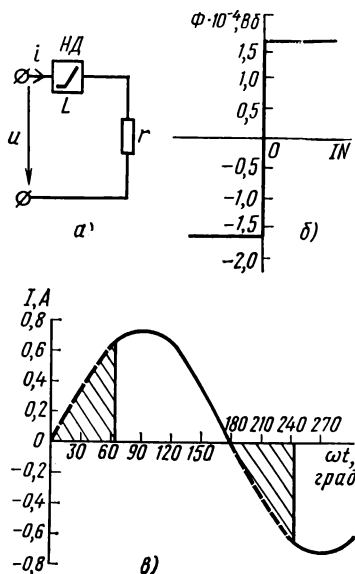


Рис. 3.44. К решению задачи 3.25:

а — схема; б — идеализированная вольт-амперная характеристика; в — графический расчет

Таблица 3.9

U	В	0	10	20	30	40	50	60	70
I	А	0	0,025	0,06	0,1	0,16	0,28	0,56	1,1

Активное сопротивление катушки можно принять $r=25$ Ом. При каком токе в цепи, представляющей собой последовательное соединение этой катушки и конденсатора $C=3,83$ мкФ, наступит феррорезонанс напряжений? Частота питающего напряжения $f=400$ Гц.

О т в е т. $I=0,56$ А.

3.24. Напряжение на входе цепи, представляющей собой последовательное соединение нелинейного резистивного двухполюсника, имеющего вентильную вольт-амперную характеристику, и активного сопротивления $r=500$ Ом, $u=100 \sin \omega t$ В. Определить постоянную составляющую тока и напряжения на сопротивлении r . Решить задачу в трех вариантах: 1) характеристика двухполюсника идеализированная ($r_{пр}=0$, $r_{обр}=\infty$); 2) характеристика двухполюсника кусочно-линейная ($r_{пр}=50$ Ом, $r_{обр}=\infty$); 3) характеристика двухполюсника кусочно-линейная ($r_{пр}=50$ Ом, $r_{обр}=5000$ Ом).

О т в е т. 1) $I_0=0,064$ А; $U_r=32$ В; 2) $I_0=0,058$ А; $U_r=29$ В; 3) $I_0=0,052$ А; $U_r=26$ В.

3.25. Определить момент начала импульса тока в цепи с последовательным соединением нелинейного индуктивного двухполюсника и активного сопротивления $r=400$ Ом, если вебер-амперная характеристика двухполюсника имеет прямоугольный вид с максимальными значениями $\pm \Phi_{\max}=1,62 \cdot 10^{-4}$ Вб. К цепи приложено напряжение $U=208$ В с частотой $f=400$ Гц. Число витков обмотки двухполюсника $N=200$. Построить график мгновенного значения тока и определить его среднее значение.

Решение. Так как в схеме (рис. 3.44, а) для индуктивного двухполюсника задана идеализированная вебер-амперная характеристика (рис. 3.44, б), воспользуемся уравнением (3.54) и найдем угол начала импульса тока:

$$\omega t_H = \arccos \left(\frac{293 - 4\pi \cdot 400 \cdot 200 \cdot 1,62 \cdot 10^{-4}}{293} \right) = 63^\circ 40'.$$

На рис. 3.44, в показано, что кривая тока представляет собой часть синусоиды от $63^\circ 40'$ до 180° и от $243^\circ 40'$ до 360° .

Заштрихованные части на рис. 3.44, б — импульсы напряжения. Среднее значение тока

$$\begin{aligned} I_{cp} &= \frac{2I_m}{T} \int_{T/5,63}^{T/2} \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} \left| -\cos \omega t \right|_{T/5,63}^{T/2} = \\ &= \frac{208 \sqrt{2}}{\pi \cdot 400} 1,443 = 0,336 \text{ А.} \end{aligned}$$

О т в е т. $\omega t_H=63^\circ 40'$; $I_{cp}=0,336$ А.

3.26. Чему должен быть равен ток, проходящий через нелинейный емкостный двухполюсник, чтобы обеспечить значение $\omega t_H=\pi/2$? Зависимость $D_{\max}=f(E)$ двухполюсника имеет прямоугольный вид с максимальными значениями $\pm D_{\max}=2,24 \cdot 10^{-2}$ Кл/м²; $S=2,5 \times 10^{-3}$ м². Частота источника питания $f=400$ Гц.

О т в е т. $I=0,2$ А.

ГЛАВА 4. УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ

§ 4.1. Особенности четырехполюсников на переменном токе и их исходные характеристики

Нелинейные четырехполюсники на переменном токе, так же как и двухполюсники, могут быть со свойствами *активного сопротивления* (резистивными), *реактивными* (индуктивными или емкостными) и *смешанными* (активно-реактивными). В общем случае вход и выход четырехполюсника описываются различными исходными характеристиками, которые по своему виду могут быть такими же, как это показано на рис. 1.3—1.7.

Если для расчета цепей с четырехполюсниками воспользоваться квазилинейным подходом, то семейства входных и выходных вольт-амперных характеристик будут иметь аналитические выражения, например, такого вида:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}, \omega_{\text{вх}}, \omega_{\text{вых}}); \\ I'_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}, \omega_{\text{вх}}, \omega_{\text{вых}}), \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

которые геометрически представляют собой четырехмерные гиперобъемы.

Положительные направления токов и напряжений для четырехполюсника при квазилинейном подходе показаны на рис. 4.1. Для мгновенных значений эти направления аналогичны.

Если частота источника входной и выходной цепи одинакова, то каждое из семейств будет геометрически соответствовать объему. Аналитические выражения при этом упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}, \omega); \\ I'_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}, \omega). \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Обычно на практике частоты источников \dot{E}_1 и \dot{E}_2 (рис. 4.2, а) остаются постоянными в процессе работы

(часто при этом $\omega_{вх} \ll \omega_{вых}$), что позволяет рассматривать семейства вольт-амперных характеристик на плоскости:

$$\left. \begin{aligned} I_{вх} &= f_1(U_{вх}, U_{вых}); \\ I'_{вых} &= f_2(U_{вх}, U_{вых}), \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

частным случаем которых (при $\omega = 0$) являются характеристики четырехполюсников на постоянном токе.

Система уравнений (4.3) представляет собой нелинейный вариант форм Y -параметров. Следовательно, ес-

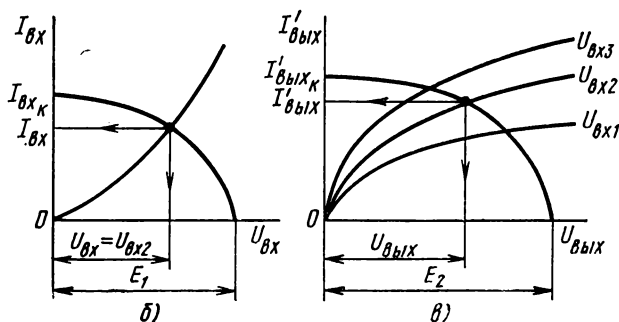
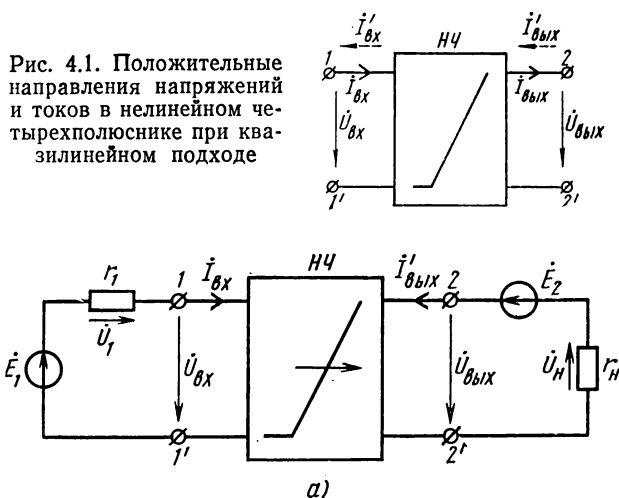


Рис. 4.2. Графический расчет цепи с направленным четырехполюсником:

а — схема; б — расчет входной цепи; в — расчет выходной цепи

ли возможна линеаризация этих характеристик, то аналитические выражения будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{\text{вх}} &= \underline{Y}_{11} \dot{U}_{\text{вх}} + \underline{Y}_{12} \dot{U}_{\text{вых}}; \\ \dot{I}_{\text{вых}} &= \underline{Y}_{21} \dot{U}_{\text{вх}} + \underline{Y}_{22} \dot{U}_{\text{вых}}. \end{aligned} \right\}$$

Исходными характеристиками для четырехполюсника могут быть также семейства зависимостей комплексных статических или дифференциальных сопротивлений или проводимостей либо безразмерных зависимостей (передаточных коэффициентов) от входных и выходных токов и напряжений. Семейств характеристик такого вида должно быть четыре, так же как и на постоянном токе.

Как и при расчете цепей с двухполюсниками на переменном токе, семейства исходных характеристик четырехполюсника не могут иметь универсальный характер (см. § 3.2). В дальнейшем будем полагать, что те исходные характеристики, которые будут применяться в расчетах, сняты в режиме, близком к ожидаемому, и что частоты источников входной и выходной цепей не изменяются.

Следует отметить, что если характер сопротивления \underline{Z}_1 и входного сопротивления четырехполюсника (см. рис. 4.2) одинаков, то расчет такой цепи ничем не отличается от расчета цепи на постоянном токе (см. гл. 2). То же относится и к выходной цепи четырехполюсника. В противном случае необходимо учитывать фазовые сдвиги между токами и напряжениями. В этом и состоит, как будет показано далее, особенность расчета цепей с четырехполюсниками на переменном токе.

§ 4.2. Графический расчет квазилинейных цепей с направленными четырехполюсниками

Рассмотрим цепь с направленным четырехполюсником $НЧ$ (рис. 4.2, *а*), у которого входное и выходное сопротивления имеют, например, реактивный характер. Для четырехполюсника известны входная вольт-амперная характеристика (рис. 4.2, *б*) и семейство выходных характеристик (рис. 4.2, *в*). Кроме того, известны э. д. с. источников \dot{E}_1 и \dot{E}_2 и сопротивления r_1 и r_n .

Расчет начинаем со входной цепи, для которой запишем уравнение для действующих значений:

$$E_1^2 = U_1^2 + U_{\text{вх}}^2 = (r I_{\text{вх}})^2 + U_{\text{вх}}^2, \quad (4.4)$$

введем входной условный ток короткого замыкания

$$I_{\text{вхк}} = E_1 / r_1 \quad (4.5)$$

и применим метод эллипса (см. § 3.2)

$$U_{\text{вх}}^2 / E_1^2 + I_{\text{вх}}^2 / I_{\text{вхк}}^2 = 1. \quad (4.6)$$

На рис. 4.2, б построен эллипс с полуосями E_1 и $I_{\text{вхк}}$, точка пересечения которого с вольт-амперной характеристикой определяет рабочий режим входной цепи, т. е. входной ток $I_{\text{вх}}$ и напряжение на входных зажимах четырехполюсника $U_{\text{вх}} = U_{\text{вх2}}$. Напряжение U_1 находим по закону Ома: $U_1 = r_1 I_{\text{вх}}$.

Для выходной цепи также можно применить метод эллипса:

$$E_2^2 = U_{\text{н}}^2 + U_{\text{вых}}^2 = (r_{\text{н}} I'_{\text{вых}})^2 + U_{\text{вых}}^2; \quad (4.7)$$

$$I_{\text{выхк}} = E_2 / r_{\text{н}}; \quad (4.8)$$

$$U_{\text{вых}}^2 / E_2^2 + I'^2_{\text{вых}} / I_{\text{выхк}}^2 = 1, \quad (4.9)$$

точка пересечения которого с одной из характеристик семейства (в данном случае с характеристикой $U_{\text{вх2}}$) (рис. 4.2, в) определяет выходной ток $I'_{\text{вых}}$ и выходное напряжение четырехполюсника $U_{\text{вых}}$. Напряжение на нагрузке $U_{\text{н}} = r_{\text{н}} I'_{\text{вых}}$.

Если в цепи вместо активных сопротивлений r_1 и $r_{\text{н}}$ включены комплексные сопротивления \underline{Z}_1 и $\underline{Z}_{\text{н}}$, то применяют метод, изложенный в § 3.2 («последовательное соединение»): поворот эллипсов вокруг центра или суммирование (вычитание) координат эллипса и линейной характеристики.

Иногда в выходной цепи требуется обеспечить не фиксированное значение тока, а некоторый его диапазон, например от $I'_{\text{вых1}}$ до $I'_{\text{вых3}}$ (рис. 4.3, а). Как видно из рисунка, требуемый диапазон выходного тока можно получить, если изменять входное напряжение четырехполюсника от $U_{\text{вх1}}$ до $U_{\text{вх3}}$. Этого можно достичь путем изменения модуля э. д. с. \dot{E}_1 или сопротивления r_1 (см. рис. 4.2, а). Рассмотрим оба случая.

На рис. 4.3, б показано, что, отложив на оси абсцисс значения $U_{\text{вх1}}$ и $U_{\text{вх3}}$, можно определить токи $I_{\text{вх1}}$ и $I_{\text{вх3}}$,

т. е. определить требуемый рабочий диапазон на входной характеристике. Если при этом считать, что сопротивление $r_1 = \text{const}$, а изменяется э. д. с. E_1 , то необходимо определить значения E'_1 и E''_1 или из уравнений эллипсов, подставив туда текущие координаты $U_{\text{вх1}}$, $I_{\text{вх1}}$ и $U_{\text{вх3}}$, $I_{\text{вх3}}$, или из уравнений для входной цепи четырехполюсника (см. рис. 4.2, а):

$$E'_1 = \sqrt{U_{\text{вх1}}^2 + (r_1 I_{\text{вх1}})^2}; \quad (4.10)$$

$$E''_1 = \sqrt{U_{\text{вх3}}^2 + (r_1 I_{\text{вх3}})^2}. \quad (4.11)$$

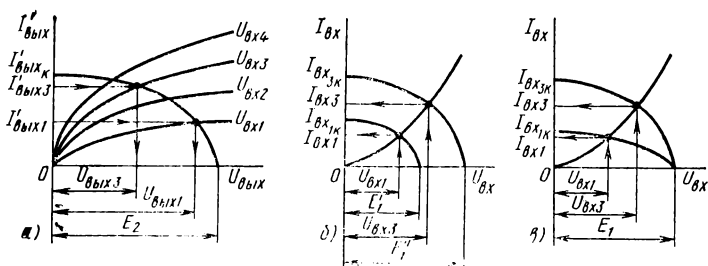


Рис. 4.3. Графический расчет цепи с направленным четырехполюсником:

а — в. а. х. выходной цепи; б — изменение E_1 при $r_1 = \text{const}$; в — изменение r_1 при $E_1 = \text{const}$

Если во входной цепи изменяется сопротивление r_1 при $E_1 = \text{const}$ (рис. 4.3, в), то, определив значения токов $I_{\text{вх1}}$ и $I_{\text{вх3}}$ по известным значениям напряжений $U_{\text{вх1}}$ и $U_{\text{вх3}}$, можно воспользоваться уравнениями эллипсов или уравнениями входной цепи четырехполюсника:

$$r'_1 = \frac{\sqrt{E_1^2 - U_{\text{вх1}}^2}}{I_{\text{вх1}}}; \quad (4.12)$$

$$r''_1 = \frac{\sqrt{E_1^2 - U_{\text{вх3}}^2}}{I_{\text{вх3}}}. \quad (4.13)$$

Требуемый диапазон выходного тока может быть получен не только за счет изменения E_1 и r_1 , но и путем изменения э. д. с. E_2 и сопротивления $r_{\text{н}}$ в выходной цепи (см. рис. 4.2, а).

§ 4.3. Расчет квазилинейных цепей с направленными четырехполюсниками методом компенсации

Рассмотрим цепь с направленным четырехполюсником НЧ (см. рис. 4.2, а), вход и выход которого имеют, например, реактивный характер и описываются зависимостями, представленными на рис. 4.4, а, б.

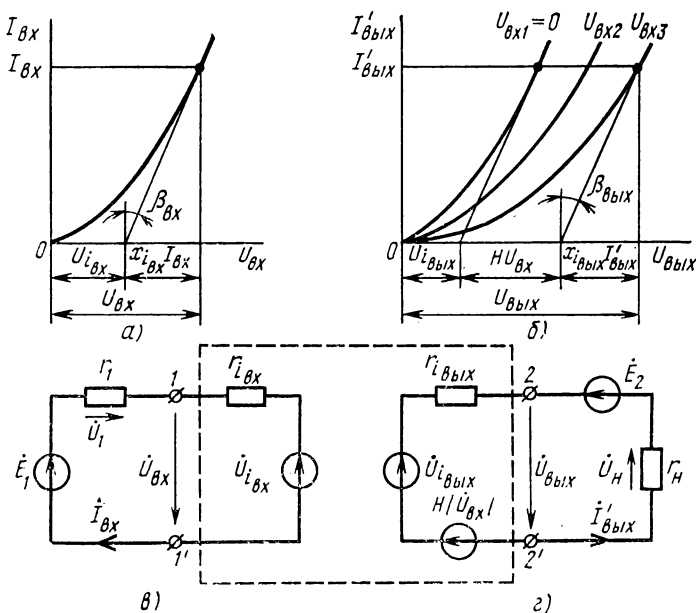


Рис. 4.4. Расчет цепи с направленным четырехполюсником методом компенсации:

а — входная в. а. х.; б — выходные в. а. х.; в — схема замещения входной цепи; г — схема замещения выходной цепи

Из входной характеристики четырехполюсника (рис. 4.4, а) уравнение входного напряжения, используя метод компенсации (см. § 1.2), запишем следующим образом:

$$U_{вх} = U_{и_{вх}} + x_{и_{вх}} I_{вх}. \quad (4.14)$$

Уравнение выходного напряжения получим из рис. 4.4, б:

$$U_{вых} = U_{и_{вых}} + HU_{вх} + x'_{и_{вых}} I'_{вых}, \quad (4.15)$$

где $H = \Delta U_{\text{вых}} / \Delta U_{\text{вх}}$ — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых выходных зажимах.

В соответствии с уравнениями (4.14) и (4.15) составим схему замещения четырехполюсника, а также всей цепи в целом, которая состоит из двух частей, относящихся к входу (рис. 4.4, в) и выходу (рис. 4.4, г). Из рассмотрения этих схем видно, что входная цепь влияет на выход через зависимый источник напряжения $\dot{H}|\dot{U}_{\text{вх}}|$, а выходная цепь на вход не влияет. Четырехполюсник, представленный данной схемой замещения, является направленным, однако в отличие от исходного (см. рис. 4.2, а) — линейным.

Отметим, что фаза напряжения $\dot{U}_{i_{\text{вых}}}$ и комплексного коэффициента \dot{H} всегда совпадает с фазой составляющей $\pm jx_{i_{\text{вых}}} \dot{I}'_{\text{вых}}$ (см. § 3.4), определяется соотношением

$$\frac{\dot{I}'_{\text{вых}}}{\dot{I}_{\text{вых}}} < \pm 90^\circ$$

и, следовательно, изменяется при изменении выходного тока $\dot{I}'_{\text{вых}}$. Сомножитель зависимого источника напряжения $|\dot{U}_{\text{вх}}|$ учитывается только по модулю и на фазу выходного напряжения $\dot{U}_{\text{вых}}$ не влияет. Это объясняется тем, что от фазы входного напряжения зависит фаза выходного тока $\dot{I}'_{\text{вых}}$, а значит влияние $\dot{U}_{\text{вх}}$ в выходной цепи уже учтено.

Из схемы рис. 4.4, в следует уравнение для входной цепи четырехполюсника в комплексной форме

$$\dot{E}_1 = \dot{U}_1 + \dot{U}_{\text{вх}} = r_1 \dot{I}_{\text{вх}} + \dot{U}_{i_{\text{вх}}} \pm jx_{i_{\text{вх}}} \dot{I}_{\text{вх}}, \quad (4.16)$$

и для модулей этих напряжений —

$$E_1^2 = U_1^2 + U_{\text{вх}}^2 = (r_1 I_{\text{вх}})^2 + (U_{i_{\text{вх}}} + x_{i_{\text{вх}}} I_{\text{вх}})^2. \quad (4.17)$$

Теперь найдем значения выходного тока

$$I_{\text{вх}} = \frac{-x_{i_{\text{вх}}} U_{i_{\text{вх}}} + \sqrt{(r_1^2 + x_{i_{\text{вх}}}^2) E_1^2 - r_1^2 U_{i_{\text{вх}}}^2}}{r_1^2 + x_{i_{\text{вх}}}^2} \quad (4.18)$$

и входного напряжения

$$U_{\text{вх}} = \frac{r_1^2 U_{i_{\text{вх}}} + x_{i_{\text{вх}}} \sqrt{(r_1^2 + x_{i_{\text{вх}}}^2) E_1^2 - r_1^2 U_{i_{\text{вх}}}^2}}{r_1^2 + x_{i_{\text{вх}}}^2}. \quad (4.19)$$

Из схемы рис. 4.4, а

$$\dot{E}_2 = \dot{U}_{\text{н}} + \dot{U}_{\text{вых}} = r_{\text{н}} \dot{I}'_{\text{вых}} + \dot{U}_{i_{\text{вых}}} + \dot{H} |\dot{U}_{\text{вх}}| \pm j x_{i_{\text{вых}}} \dot{I}'_{\text{вых}} \quad (4.20)$$

и

$$E_2^2 = U_{\text{н}}^2 + U_{\text{вых}}^2 = (r_{\text{н}} I'_{\text{вых}})^2 + (U_{i_{\text{вых}}} + HU_{\text{вх}} + x_{i_{\text{вых}}} I'_{\text{вых}})^2, \quad (4.21)$$

откуда найдем значение выходного тока

$$I'_{\text{вых}} = \frac{-x_{i_{\text{вых}}} (U_{i_{\text{вых}}} + HU_{\text{вх}}) + \sqrt{(r_{\text{н}}^2 + x_{i_{\text{вых}}}^2) E_2^2 - r_{\text{н}}^2 (U_{i_{\text{вых}}} + HU_{\text{вх}})^2}}{r_{\text{н}}^2 + x_{i_{\text{вых}}}^2}, \quad (4.22)$$

а затем напряжение на нагрузке

$$U_{\text{н}} = r_{\text{н}} \frac{-x_{i_{\text{вых}}} (U_{i_{\text{вых}}} + HU_{\text{вх}}) + \sqrt{(r_{\text{н}}^2 + x_{i_{\text{вых}}}^2) E_2^2 - r_{\text{н}}^2 (U_{i_{\text{вых}}} + HU_{\text{вх}})^2}}{r_{\text{н}}^2 + x_{i_{\text{вых}}}^2}. \quad (4.23)$$

Падение напряжения на сопротивлении r_1 и выходное напряжение четырехполюсника найдем соответственно как $U_1 = r_1 I_{\text{вх}}$ и $U_{\text{вых}} = \sqrt{E_2^2 - U_{\text{н}}^2}$ или из уравнения (4.15).

Если сопротивление нагрузки имеет активно-реактивный характер ($Z_{\text{н}} = r_{\text{н}} \pm j x_{\text{н}}$), то вместо выражений (4.22) и (4.23) имеем

$$I'_{\text{вых}} = \frac{-(x_{\text{н}} + x_{i_{\text{вых}}}) (U_{i_{\text{вых}}} + HU_{\text{вх}}) + \sqrt{[r_{\text{н}}^2 + (x_{\text{н}} + x_{i_{\text{вых}}})^2] E_2^2 - r_{\text{н}}^2 (U_{i_{\text{вых}}} + HU_{\text{вх}})^2}}{r_{\text{н}}^2 + (x_{\text{н}} + x_{i_{\text{вых}}})^2} \quad (4.24)$$

и

$$U_H = \sqrt{r_H^2 + x_H^2} \frac{(x_H + x_{i_{\text{ВЫХ}}})(U_{i_{\text{ВЫХ}}} + HU_{\text{ВХ}}) +}{r_H^2 + (x_H + x_{i_{\text{ВЫХ}}})^2} + \\ + \sqrt{[r_H^2 + (x_H + x_{i_{\text{ВЫХ}}})^2] E_2^2 - r_H^2 (U_{i_{\text{ВЫХ}}} + HU_{\text{ВХ}})^2} \\ \rightarrow \frac{r_H^2 + (x_H + x_{i_{\text{ВЫХ}}})^2}, \quad (4.25)$$

где x_H и $x_{i_{\text{ВЫХ}}}$ складываются, если оба эти сопротивления имеют индуктивный или емкостный характер, и вычитаются (из большего меньшее), если характер этих сопротивлений различный.

Аналитическое выражение (4.24) [как и (4.25)] может быть записано в виде обобщенной формулы

$$I'_{\text{ВЫХ}} = -b_{\text{ВЫХ}} M + \sqrt{y_{\text{ВЫХ}}^2 E_2^2 - g_{\text{ВЫХ}}^2 M^2}, \quad (4.26)$$

где

$$b_{\text{ВЫХ}} = \frac{x_H + x_{i_{\text{ВЫХ}}}}{r_H^2 + (x_H + x_{i_{\text{ВЫХ}}})^2}; \quad (4.27)$$

$$g_{\text{ВЫХ}} = \frac{r_H}{r_H^2 + (x_H + x_{i_{\text{ВЫХ}}})^2}; \quad (4.28)$$

$$y_{\text{ВЫХ}} = \frac{1}{\sqrt{r_H^2 + (x_H + x_{i_{\text{ВЫХ}}})^2}}; \quad (4.29)$$

$$M = U_{i_{\text{ВЫХ}}} + HU_{\text{ВХ}}. \quad (4.30)$$

Величины $b_{\text{ВЫХ}}$, $g_{\text{ВЫХ}}$ и $y_{\text{ВЫХ}}$ представляют собой соответственно реактивную, активную и полную проводимости выходной цепи и сразу могут быть определены из схемы рис. 4.4, з.

Во многих случаях значениями $U_{i_{\text{ВХ}}}$ и $U_{i_{\text{ВЫХ}}}$ можно пренебречь, и тогда большинство выражений, приведенных ранее, упрощаются.

Для расчета рассматриваемой цепи (рис. 4.4, в, з) можно также воспользоваться одной из общепринятых форм уравнений линейного активного четырехполюсника, например формой Y -параметров:

$$\left. \begin{aligned}
 i_{\text{BX}} &= \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{BX}}}} \dot{U}_{\text{BX}} - \\
 &- \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{BX}}}} \dot{U}_{i_{\text{BX}}} = \underline{Y}_{11} (\dot{U}_{\text{BX}} - \dot{U}_{i_{\text{BX}}}); \\
 i'_{\text{ВЫХ}} &= - \frac{\dot{H}}{\pm jx_{i_{\text{ВЫХ}}}} |\dot{U}_{\text{BX}}| + \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{ВЫХ}}}} \dot{U}_{\text{ВЫХ}} - \\
 &- \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{ВЫХ}}}} \dot{U}_{i_{\text{ВЫХ}}} = \underline{Y}_{21} |\dot{U}_{\text{BX}}| + \underline{Y}_{22} (\dot{U}_{\text{ВЫХ}} - \dot{U}_{i_{\text{ВЫХ}}}),
 \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

или для случая, когда $U_{i_{\text{BX}}} = 0$ и $U_{i_{\text{ВЫХ}}} = 0$,

$$\left. \begin{aligned}
 i_{\text{BX}} &= \underline{Y}_{11} \dot{U}_{\text{BX}}; \\
 i'_{\text{ВЫХ}} &= \underline{Y}_{21} |\dot{U}_{\text{BX}}| + \underline{Y}_{22} \dot{U}_{\text{ВЫХ}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

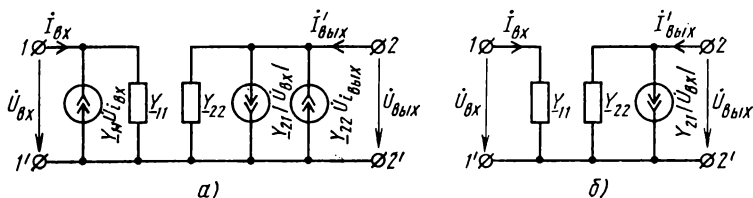


Рис. 4.5. Расчет цепи с направленным четырехполусником методом компенсации:

а — полная схема замещения четырехполусника (с Y -параметрами); б — схема замещения при условии $U_{i_{\text{BX}}} = 0$ и $U_{i_{\text{ВЫХ}}} = 0$

Схемы замещения четырехполусника, отвечающие уравнениям (4.31) и (4.32), приведены соответственно на рис. 4.5, а и б.

Аналогично можно получить систему уравнений в форме Z -параметров, H -параметров и т. д. Источники тока можно заменить источниками напряжения. Но всегда линеаризованный направленный четырехполусник с зависимыми источниками будет определяться тремя параметрами (например, H , $x_{i_{\text{BX}}}$ и $x_{i_{\text{ВЫХ}}}$).

§ 4.4. Графический расчет квазилинейных цепей с ненаправленными четырехполусниками

Если ненаправленный четырехполусник $НЧ$, вход и выход которого имеют, например, реактивный характер, включен в цепь (рис. 4.6), то для расчета такой цепи,

т. е. для определения токов $\dot{I}_{\text{вх}}$ и $\dot{I}'_{\text{вых}}$, можно применить графический метод (см. § 2.5).

В данном случае применяется та же последовательность графических построений, только вместо прямых

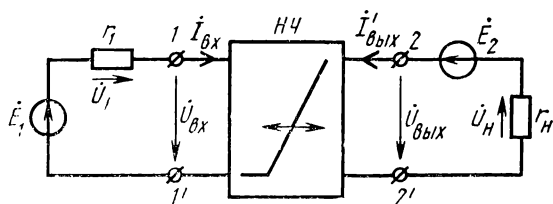


Рис. 4.6. Схема включения ненаправленного четырехполюсника в цепь

нагрузочных линий на рис. 2.11, *в* и *г* необходимо построить эллипсы с полуосями соответственно E_2 , $I'_{\text{вых}_K} = E_2/r_H$ и E_1 , $I_{\text{вх}_K} = E_1/r_1$.

§ 4.5. Расчет квазилинейных цепей с ненаправленными четырехполюсниками методом компенсации

Рассмотрим цепь с ненаправленным четырехполюсником НЧ (рис. 4.6), характеристики которого показаны на рис. 4.7, *а*, *б*. Пусть вход и выход этого четырехполюсника имеют реактивный характер.

Из входных характеристик четырехполюсника (рис. 4.7, *а*) при расчете цепи методом компенсации следует уравнение входного напряжения

$$U_{\text{вх}} = U_{i_{\text{вх}}} + H_{\text{вх}} U_{\text{вых}} + x_{i_{\text{вх}}} I_{\text{вх}}, \quad (4.33)$$

где $H_{\text{вх}} = \Delta U_{\text{вх}} / \Delta U_{\text{вых}}$ — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых входных зажимах.

Для выходного напряжения

$$U_{\text{вых}} = U_{i_{\text{вых}}} + H_{\text{вых}} U_{\text{вх}} + x_{i_{\text{вых}}} I'_{\text{вых}}, \quad (4.34)$$

где $H_{\text{вых}} = \Delta U_{\text{вых}} / \Delta U_{\text{вх}}$ — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых выходных зажимах.

Согласно уравнениям (4.33) и (4.34) можно составить схему замещения для четырехполюсника, а также для всей цепи в целом, состоящую из двух частей: входной (рис. 4.7, а) и выходной (рис. 4.7, з). Влияние выхода на вход и входа на выход осуществляется соответственно через зависимые источники напряжения $\dot{H}_{вх}|\dot{U}_{вых}|$ и $\dot{H}_{вых}|\dot{U}_{вх}|$. Четырехполюсник, представлен-

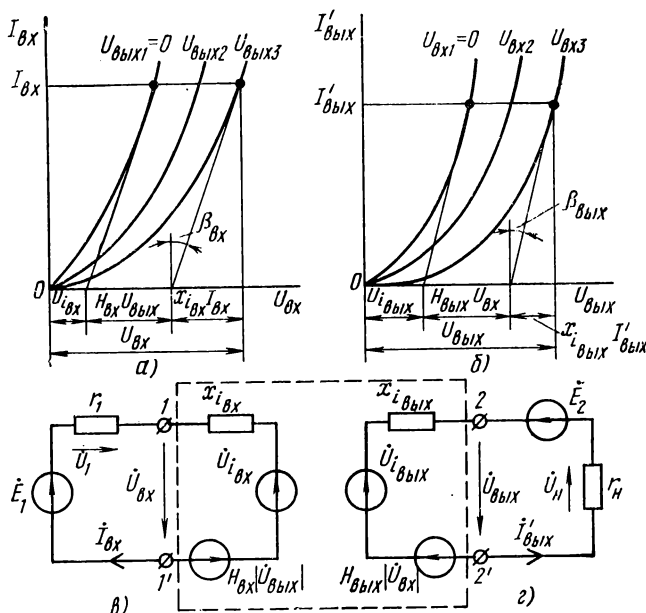


Рис. 4.7. Расчет цепи с ненаправленным четырехполюсником методом компенсации:

а — входные в. а. х.; б — выходные в. а. х.; в — схема замещения входной цепи; г — схема замещения выходной цепи

ный данной схемой замещения, является линейным в отличие от исходного (рис. 4.6).

Фаза напряжения $\dot{U}_{i_{вх}}$ и комплексного коэффициента $\dot{H}_{вх}$ всегда совпадает с фазой составляющей $\pm jx_{i_{вх}}\dot{I}_{вх}$, а напряжения $\dot{U}_{i_{вых}}$ и $\dot{H}_{вых}$ — с фазой составляющей $\pm jx_{i_{вых}}\dot{I}'_{вых}$. Таким образом, фазовые сдвиги для входной цепи определяются соотношением

$$\frac{\dot{I}_{вх} \angle \pm 90^\circ}{I_{вх}},$$

а для выходной цепи —

$$\frac{i''_{\text{вых}}}{i'_{\text{вых}}} < \pm 90^\circ.$$

Сомножители зависимых источников $|\dot{U}_{\text{вых}}|$ и $|\dot{U}_{\text{вх}}|$ учитываются только по модулю и на фазы напряжений $\dot{U}_{\text{вх}}$ и $\dot{U}_{\text{вых}}$ не влияют.

Из схем рис. 4.7, в и г получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= r_1 i_{\text{вх}} + \dot{U}_{i_{\text{вх}}} + \dot{H}_{\text{вх}} |\dot{U}_{\text{вых}}| \pm jx_{i_{\text{вх}}} i_{\text{вх}}; \\ \dot{E}_2 &= r_n i'_{\text{вых}} + \dot{U}_{i_{\text{вых}}} + \dot{H}_{\text{вых}} |\dot{U}_{\text{вх}}| \pm jx_{i_{\text{вых}}} i'_{\text{вых}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Если теперь записать комплексные величины уравнений (4.35) в алгебраической форме и разделить действительные и мнимые части, то получим систему, состоящую из четырех уравнений. Решая эту систему, например, по правилу Крамера, можно определить действительные и мнимые части входного и выходного токов, затем комплексные значения этих токов и далее — напряжения $\dot{U}_{\text{вх}}$, $\dot{U}_{\text{вых}}$, \dot{U}_1 и \dot{U}_n .

Из схем замещения рис. 4.7, в и г можно также получить любую общепринятую форму уравнений линейного активного четырехполюсника и использовать их для расчета, например, в форме Y -параметров:

$$\left. \begin{aligned} i_{\text{вх}} &= \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{вх}}}} \dot{U}_{\text{вх}} - \frac{\dot{H}_{\text{вх}}}{\pm jx_{i_{\text{вх}}}} |\dot{U}_{\text{вых}}| - \\ &- \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{вх}}}} \dot{U}_{i_{\text{вх}}} = \underline{Y}_{11} (\dot{U}_{\text{вх}} - \dot{U}_{i_{\text{вх}}}) + \underline{Y}_{12} |\dot{U}_{\text{вых}}|; \\ i'_{\text{вых}} &= -\frac{\dot{H}_{\text{вых}}}{\pm jx_{i_{\text{вых}}}} |\dot{U}_{\text{вх}}| + \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{вых}}}} \dot{U}_{\text{вых}} - \\ &- \frac{1}{\pm jx_{i_{\text{вых}}}} \dot{U}_{i_{\text{вых}}} = \underline{Y}_{21} |\dot{U}_{\text{вх}}| + \underline{Y}_{22} (\dot{U}_{\text{вых}} - \dot{U}_{i_{\text{вых}}}), \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

или для случая, когда $U_{i_{\text{вх}}} = 0$ и $U_{i_{\text{вых}}} = 0$,

$$\left. \begin{aligned} i_{\text{вх}} &= \underline{Y}_{11} \dot{U}_{\text{вх}} + \underline{Y}_{12} |\dot{U}_{\text{вых}}|; \\ i'_{\text{вых}} &= \underline{Y}_{21} |\dot{U}_{\text{вх}}| + \underline{Y}_{22} \dot{U}_{\text{вых}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Из уравнений (4.36) и (4.37) видно, что линейризованный ненаправленный четырехполюсник характеризуется четырьмя взаимно независимыми параметрами \underline{Y}_{11} , \underline{Y}_{12} , \underline{Y}_{21} и \underline{Y}_{22} ($H_{\text{вх}}$, $H_{\text{вых}}$, $x_{i\text{вх}}$ и $x_{i\text{вых}}$).

На рис. 4.8, а и б приведены П-образные схемы замещения, отвечающие уравнениям (4.36) и (4.37) соответственно.

В случае необходимости можно получить системы уравнений в форме Z -параметров, H -параметров и т. д.,

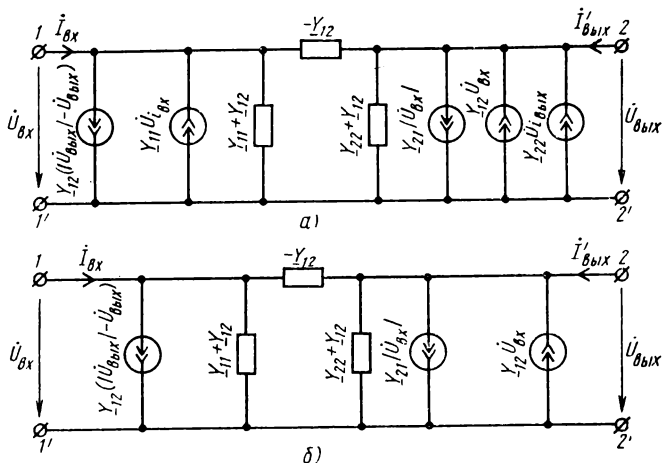


Рис. 4.8. Расчет цепи с ненаправленным четырехполюсником методом компенсации:

а — полная схема замещения четырехполюсника (с Y -параметрами);
б — схема замещения при условии $U_{i\text{вх}} = 0$ и $U_{i\text{вых}} = 0$

заменить П-образную схему замещения Т-образной, от источников тока перейти к источникам напряжения, но всегда линейризованный ненаправленный четырехполюсник с зависимыми источниками будет определяться четырьмя параметрами.

§ 4.6. Расчет цепей с направленными четырехполюсниками, имеющими идеализированные выходные характеристики

Как было указано в § 1.4, ток в цепи может иметь реальный характер, если дифференциальное сопротивление

соответствующих участков вольт-амперных характеристик отрицательно.

Рассмотрим вначале направленный четырехполюсник, входное и выходное сопротивления которого являются резистивными. Такой же характер имеет и нагрузка.

Для упрощения расчета можно применить метод пусковых характеристик, который служит для определения угла начала импульса тока и сочетается с методом припасовывания.

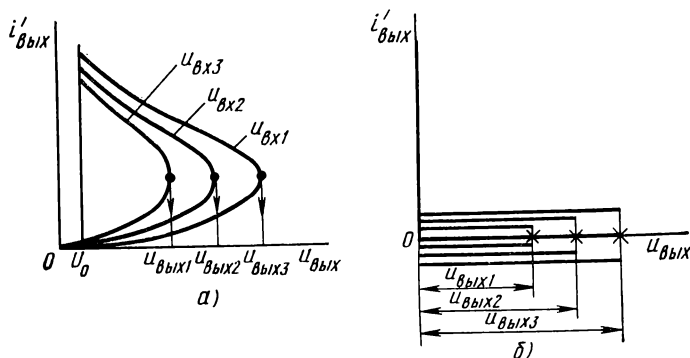


Рис. 4.9. Выходные в.а.х. четырехполюсника с отрицательным дифференциальным сопротивлением:

а — исходные; б — идеализированные

Суть метода пусковых характеристик заключается в том, что выходное сопротивление четырехполюсника до точки перегиба принимают равным бесконечности, а после точки перегиба — равным нулю, т. е. вместо семейства характеристик рис. 4.9, а рассматривают семейство идеализированных характеристик рис. 4.9, б. При необходимости всегда можно учесть то приблизительно постоянное по величине падение напряжения U_0 (рис. 4.9, а), которое возникает при прохождении в выходной цепи тока.

Графически пусковая характеристика может быть найдена из семейства выходных характеристик как зависимость $u_{bvx} = f_1(u_{bx})$ (рис. 4.10, а) или $u_{bvx} = f_2(i_{bx})$, где значения u_{bvx} соответствуют точкам перегиба, показанным на рис. 4.9, а: u_{bvx1} , u_{bvx2} , u_{bvx3} . Физический смысл пусковой характеристики можно определить как зависимость наименьших значений выходных напряже-

ний, при которых величина выходного сопротивления четырехполюсника изменяется от бесконечности до нуля, от величины сигнала (напряжения или тока) на входе.

Графически выходную цепь рассчитывают следующим образом.

Вначале строят пусковую характеристику (рис. 4.10, а), которую можно получить или экспериментальным путем, или, как было показано ранее, используя семейство выходных характеристик. Естественно, что вид

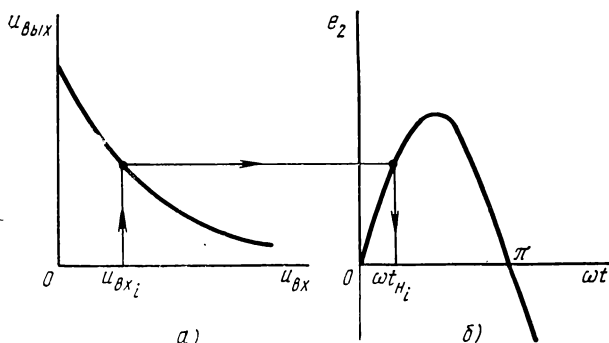


Рис. 4.10. Графическое определение угла начала импульса тока ($U_0=0$, нагрузка — r_H):

а — пусковая характеристика; б — график э. д. с.

пусковых характеристик может отличаться от кривой рис. 4.10, а. Он зависит от их положения относительно начала координат для реальных нелинейностей. Если теперь отложить на оси абсцисс значение входного напряжения $u_{\theta x_i}$ и перенести точку пересечения этого напряжения с пусковой характеристикой на синусоиду э. д. с. источника питания $e_2 = E_{2m} \sin \omega t$ (рис. 4.10, б), то можно определить угол начала импульса ωt_{H_i} , с которого в цепи начинает проходить ток. Угол прекращения тока в цепи ωt_H равен π , так как в этот момент э. д. с. e_2 равна нулю.

Таким образом, выходное напряжение четырехполюсника состоит из части синусоиды от 0 до ωt_{H_i} , а падение напряжения на сопротивлении нагрузки u_H и ток $i_{\text{вых}}$ имеют форму остальной части синусоиды, т. е. от ωt_{H_i} до π .

Если необходимо учесть напряжение U_0 , то графические построения проводят так, как это показано на рис. 4.11. В этом случае ωt_{π} не равно π , и напряжение на нагрузке u_n , а следовательно, и ток $i'_{\text{вых}}$ имеют форму, показанную на рис. 4.11, б заштрихованной частью. Осталь-

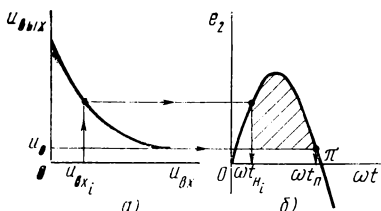


Рис. 4.11. Графическое определение углов начала и прекращения импульса тока ($U_0 \neq 0$, нагрузка — r_n):

а — пусковая характеристика; б — график э. д. с.

ная часть синусоиды — выходное напряжение четырехполюсника.

Зная форму несинусоидальных функций (см. рис. 4.10, б и 4.11, б), можно разложить кривые в ряд Фурье

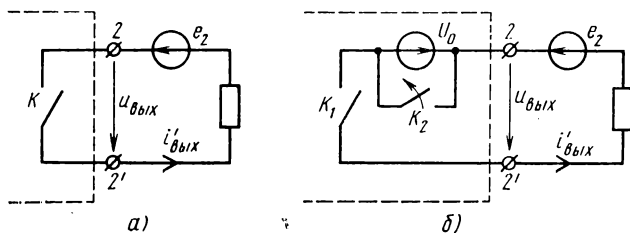


Рис. 4.12. Схемы замещения выходной цепи четырехполюсника:

а — при $U_0 = 0$; б — при наличии U_0

и определить средние значения функций, основную гармонику и т. д.

Для метода пусковых характеристик можно составить две схемы замещения (рис. 4.12, а, б). На первой схеме выходная часть четырехполюсника представлена в виде ключа K , который замыкается при ωt_{π_i} и размыкается при $\omega t_{\pi} = \pi$ ($U_0 = 0$), тем самым имитируя в определенные промежутки времени выходное сопротивление четырехполюсника, равное нулю или бесконечности. Если необходимо учесть напряжение U_0 , то в схему замещения должен быть введен источник э. д. с. U_0 и еще один

ключ K_2 , размыкающийся одновременно с замыканием ключа K_1 (рис. 4.12, б).

В аналитическом варианте метода пусковых характеристик необходимо аппроксимировать характеристику $u_{\text{вых}} = f(u_{\text{вх}})$ прямой линией (рис. 4.13). Если теперь записать уравнение прямой линии в виде

$$u_{\text{вх}} = U_{\text{вхmax}} - k u_{\text{вых}}, \quad (4.38)$$

где k — коэффициент, определяемый тангенсом угла наклона аппроксимирующей прямой α , то для неизменно-го по величине входного сигнала $u_{\text{вх}i}$, применяя метод припасовывания, угол начала импульса тока $\omega t_{\text{н}i}$ получим из уравнения

$$u_{\text{вх}i} = U_{\text{вхmax}} - k E_{2m} \sin \omega t_{\text{н}i}, \quad (4.39)$$

откуда

$$\omega t_{\text{н}i} = \arcsin \left(\frac{U_{\text{вхmax}} - u_{\text{вх}i}}{k E_{2m}} \right). \quad (4.40)$$

Если входным сигналом является ток, а не напряжение, то из уравнения прямой линии для этого случая ($i_{\text{вх}} = I_{\text{вхmax}} - k i_{\text{вых}}$) угол $\omega t_{\text{н}i}$ определим аналогично:

$$\omega t_{\text{н}i} = \arcsin \left(\frac{I_{\text{вхmax}} - i_{\text{вх}i}}{k E_{2m}} \right). \quad (4.41)$$

Угол прекращения импульса тока находим из условия

$$E_{2m} \sin \omega t_{\text{п}} = U_0, \quad (4.42)$$

откуда следует

$$\omega t_{\text{п}} = \arcsin \frac{U_0}{E_{2m}}. \quad (4.43)$$

Из уравнения (4.43) видно, что для случая $U_0 = 0$ функция \arcsin равна нулю, а $\omega t_{\text{п}} = \pi$.

Рассмотрим теперь цепь с направленным четырехполюсником, входное и выходное сопротивления которого имеют индуктивный характер, а нагрузка — активное сопротивление.

Если выходные вебер-амперные характеристики могут быть приняты прямоугольными (рис. 4.14), то для определения угла начала импульса тока можно применить способ, рассмотренный в § 3.10 применительно к реактивным двухполюсникам. Как будет показано, допущения при использовании идеализированных прямоуголь-

ных характеристик аналогичны допущениям при использовании метода пусковых характеристик.

При нулевом входном сигнале, применяя последовательность рассуждений § 3.10 [уравнения (3.50) — (3.54)], получим выражение

$$\omega t_{H0} = \arccos \left(\frac{E_{2m} - 4\pi f N_{\text{вых}} \Phi_{\text{max}}}{E_{2m}} \right). \quad (4.44)$$

Если на входе четырехполосника появится сигнал $u_{\text{вх}i}$, то это приведет к изменению магнитного состояния четырехполосника, который теперь будет перемагничи-

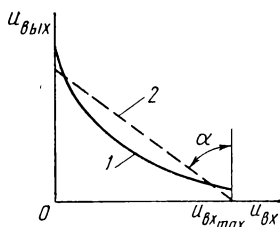


Рис. 4.13. Пусковая характеристика:

1 — исходный график; 2 — аппроксимирующая прямая

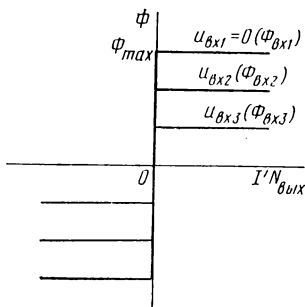


Рис. 4.14. Семейство идеализированных вейбер-амперных характеристик

ваться в пределах $\pm \Phi_{\text{max}i}$. В этом случае для изменения магнитного состояния выходной цепи четырехполосника на противоположное нужно создать несколько меньшее приращение потока:

$$\Delta \Phi_i = 2\Phi_{\text{max}i} = 2\Phi_{\text{max}} - \Phi_{\text{вх}i}, \quad (4.45)$$

откуда угол начала импульса тока

$$\omega t_{Hl} = \arccos \left[\frac{E_{2m} - 2\pi f N_{\text{вых}} (2\Phi_{\text{max}} - \Phi_{\text{вх}i})}{E_{2m}} \right]. \quad (4.46)$$

Величина $\Phi_{\text{вх}i}$ пропорциональна входному сигналу $u_{\text{вх}i}$.

Если входное и выходное сопротивления четырехполосника имеют емкостный характер, то по аналогии с уравнением (3.62) можно записать следующее соотношение для нулевого входного сигнала:

$$\omega t_{H0} = \arccos \left(\frac{I'_{\text{вых}m} - 4\pi f S D_{\text{max}}}{I'_{\text{вых}m}} \right). \quad (4.47)$$

При ненулевом входном сигнале

$$\omega t_{\Pi i} = \arccos \left[\frac{I'_{\text{вх}m} - 2\pi f S (2D_{\text{max}} - D_{\text{вх}i})}{I'_{\text{вх}m}} \right], \quad (4.48)$$

т. е. получаем выражение, аналогичное по структуре уравнению (4.46).

Выражения (4.46) и (4.48), в свою очередь, по структуре близки к выражениям (4.40) и (4.41). Поэтому можно сделать вывод, что рассмотренный метод, по существу, является вариантом метода пусковых характеристик. На основании соответствия указанных двух пар уравнений нетрудно убедиться, что и в случае реактивных четырехполюсников возможно применение графического варианта расчета, подобно выполненному на рис. 4.10. Разница состоит лишь в том, что здесь должны быть использованы косинусонды $\Phi_i = f_1(\omega t)$ и $D_i = f_2(\omega t)$ как интегральные кривые от синусоид в соответствии с выражениями (3.50) и (3.58). Пусковые характеристики в этих случаях представляют собой зависимости $\Phi = \varphi_1(u_{\text{вх}})$ и $D = \varphi_2(i_{\text{вх}})$ соответственно.

Во многих случаях параметры выбирают так, что в отсутствие входного сигнала соблюдается условие

$$\omega t_{\Pi 0} = \pi, \quad (4.49)$$

т. е. выходное сопротивление четырехполюсника при этом равно бесконечности, а ток — нулю.

Если подставить соотношение (4.49) в уравнение (4.44), то можно определить значение Φ_{max} , которое будет равно в данном случае амплитудному значению потока Φ_m :

$$\Phi_{\text{max}} = \Phi_m = \frac{E_{2m}}{2\pi f N_{\text{вх}}}. \quad (4.50)$$

Выражение (4.50) позволяет привести уравнение (4.46) к виду

$$\omega t_{\Pi i} = \arccos \left(\frac{\frac{1}{2\pi f N_{\text{вх}}} E_{2m} - \Phi_{\text{вх}i}}{\frac{1}{2\pi f N_{\text{вх}}} E_{2m}} \right). \quad (4.51)$$

Аналогичная подстановка (4.49) в уравнение (4.47) дает возможность преобразовать выражение (4.48):

$$\omega t_{\text{н}i} = \arccos \left(\frac{\frac{1}{2\pi f r_{\text{н}} S} E_{2m} - D_{\text{вх}i}}{\frac{1}{2\pi f r_{\text{н}} S} E_{2m}} \right), \quad (4.52)$$

где $E_{2m}/r_{\text{н}} = I'_{\text{вых}m}$.

Выражения (4.40), (4.41), (4.51) и (4.52) могут быть представлены в виде обобщенной формулы

$$\omega t_{\text{н}i} = \arccos F \left(\frac{M - X_{\text{вх}i}}{N E_{2m}} \right), \quad (4.53)$$

в которой F , M , N и $X_{\text{вх}i}$ представляют собой соответствующие члены исходных формул.

В заключение укажем, что величины $\Phi_{\text{вх}i}$ и $D_{\text{вх}i}$ легко привести к соответствующим значениям входных токов и напряжений. Так, при синусоидальном входном сигнале

$$\Phi_{\text{вх}i} = \frac{U_{\text{вх}im}}{\omega N_{\text{вх}}} \int_0^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{U_{\text{вх}im}}{\pi f N_{\text{вх}}}, \quad (4.54)$$

при постоянном сигнале

$$\Phi_{\text{вх}i} = \frac{U_{\text{вх}i}}{\omega N_{\text{вх}}} \int_0^{\pi} d\alpha = \frac{U_{\text{вх}i}}{2f N_{\text{вх}}}, \quad (4.55)$$

при линейном нарастающем сигнале

$$\Phi_{\text{вх}i} = \frac{U_{\text{вх}i}}{\omega^2 N_{\text{вх}}} \int_0^{\pi} \alpha d\alpha = \frac{U_{\text{вх}i}}{8f^2 N_{\text{вх}}}. \quad (4.56)$$

Полученные ранее соотношения для определения углов начала и прекращения импульса тока позволяют определить средние и действующие значения функций, основную гармонику и т. д.

Так, например, среднее значение выходного напряжения четырехполюсника для рис. 4.10, б

$$U_{\text{вых}i\text{ср}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega t_{\text{н}i}} E_{2m} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{E_{2m}}{\pi} (1 - \cos \omega t_{\text{н}i})$$

после замены $\cos \omega t_{\text{н}i}$ на $\sqrt{1 - \sin^2 \omega t_{\text{н}i}}$ и подстановки

вместо $\sin \omega t_{\text{н}i}$ его значения, найденного из уравнения (4.39), будет иметь вид

$$U_{\text{вых}i\text{ср}} = \frac{E_{2m}}{\pi} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{U_{\text{вх} \max} - u_{\text{вх}i}}{kE_{2m}} \right)^2} \right]. \quad (4.57)$$

Среднее значение напряжения на нагрузке находят аналогично

$$\begin{aligned} U_{\text{н}i\text{ср}} &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega t_{\text{н}i}}^{\pi} E_{2m} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{E_{2m}}{\pi} (1 + \cos \omega t_{\text{н}i}) = \\ &= \frac{E_{2m}}{\pi} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{U_{\text{вх} \max} - u_{\text{вх}i}}{kE_{2m}} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Получение безразрывных характеристик для схемы в целом [$u_{\text{вых}} = f(u_{\text{вх}})$ имеет плавный характер] позволяет линеаризовать их. Для цепей, содержащих четырехполюсники со скачкообразно меняющимися выходными параметрами, это возможно только при условии питания выходной части схемы от источника переменного напряжения (пилообразного, прямоугольного и синусоидального). Это явление называется *вибрационной линеаризацией*.

В заключение необходимо отметить, что для более сложных схем можно применять хорошо развитые методы анализа цепей с переменными периодически и скачкообразно меняющимися параметрами, если только идеализация на базе метода пусковых характеристик и сведение задачи к коммутирующему ключу в выходной части схемы (см. рис. 4.12, а, б) являются допустимыми.

Задачи

4.1. В квазилинейной цепи с нелинейным направленным четырехполюсником (см. рис. 4.2, а), вход и выход которого имеют емкостный характер, задано: $\vec{E}_1 = 4 \angle 30^\circ \text{ В}$, $r_1 = 125 \text{ Ом}$, $\vec{E}_2 = 100 \angle 0^\circ \text{ В}$, $\underline{Z}_\text{н} = r_\text{н} = 25 \text{ Ом}$, входная (табл. 4.1) и выходные (табл. 4.2) характеристики четырехполюсника.

Таблица 4.1

$U_{\text{вх}}$	В	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4
$I_{\text{вх}}$	мА	0	12,5	18,5	23,5	27	30	32	35

Таблица 4.2

$I'_{\text{ВЫХ}}, \text{ А}$	$I_{\text{ВХ}} = 10 \text{ мА}$	$I_{\text{ВХ}} = 20 \text{ мА}$	$I_{\text{ВХ}} = 30 \text{ мА}$
	$U_{\text{ВЫХ}}, \text{ В}$	$U_{\text{ВЫХ}}, \text{ В}$	$U_{\text{ВЫХ}}, \text{ В}$
0	0	0	0
1	15	21	31
2	24	34	47
3	30	44	60
4	35	52	70
5	40	60	80

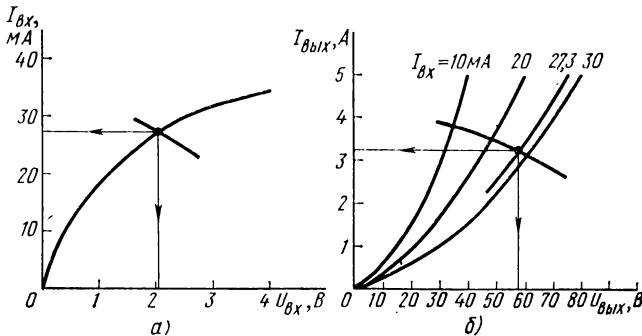


Рис. 4.15. К решению задачи 4.1:

а — графический расчет входной цепи; б — графический расчет выходной цепи

Определить $I_{\text{ВХ}}, U_{\text{ВХ}}, I'_{\text{ВЫХ}}, U_{\text{ВЫХ}}, \dot{U}_H$, используя метод эллипса. В каких пределах нужно менять э. д. с. E_1 , чтобы в выходной цепи получить изменение тока $I'_{\text{ВЫХ}}$ от 3,76 до 3,15 А?

Решение. Рассматривая входную цепь четырехполюсника, определим условный ток короткого замыкания

$$I_{\text{ВХК}} = E_1 / r_1 = 4 / 125 = 0,032 \text{ А}$$

и построим на входной характеристике (рис. 4.15, а) часть эллипса с полуосями 4 В и 32 мА. Из этого рисунка найдем $I_{\text{ВХ}} = 27,3 \text{ мА}$ и $U_{\text{ВХ}} = 2,05 \text{ В}$. Напряжение $U_1 = r_1 I_{\text{ВХ}} = 125 \cdot 0,0273 = 3,41 \text{ В}$.

Сдвиг фаз между э. д. с. \dot{E}_1 и входным током $\dot{I}_{\text{ВХ}}$

$$\varphi = \arctg \frac{U_{\text{ВХ}}}{U_1} = \arctg \frac{2,05}{3,41} = \arctg 0,6011 = 31^\circ.$$

Тогда

$$\dot{I}_{\text{ВХ}} = 0,0273 \angle 61^\circ \text{ А}; \quad \dot{U}_1 = 3,41 \angle 61^\circ \text{ В}; \quad \dot{U}_{\text{ВХ}} = 2,05 \angle -29^\circ \text{ В}.$$

Условный ток короткого замыкания выходной цепи четырехполюсника

$$I'_{\text{выхн}} = E_2 / r_{\text{н}} = 100 / 25 = 4 \text{ А.}$$

Построим на выходных характеристиках (рис. 4.15, б) часть эллипса с полуосями 100 В и 4 А, а также характеристику при $I_{\text{вх}} = 27,3 \text{ мА}$. Тогда $I'_{\text{вых}} = 3,25 \text{ А}$ и $U_{\text{вых}} = 57,5 \text{ В}$. Напряжение

$$U_{\text{н}} = r_{\text{н}} I'_{\text{вых}} = 25 \cdot 3,25 = 81,25 \text{ В.}$$

Сдвиг фаз между э. д. с. \dot{E}_2 и выходным током $\dot{I}'_{\text{вых}}$

$$\varphi = \arctg \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{н}}} = \arctg \frac{57,5}{81,25} = \arctg 0,695 \approx 35^\circ.$$

С учетом этого угла

$$\dot{I}'_{\text{вых}} = 3,25 \angle 35^\circ; \quad \dot{U}_{\text{вых}} = 57,5 \angle -55^\circ \text{ В}; \quad \dot{U}_{\text{н}} = 81,25 \angle 35^\circ \text{ В.}$$

Из выходных характеристик получаем, что для изменения выходного тока от 3,76 до 3,15 А необходимо изменять входной ток от 10 до 30 мА. При таких входных токах $\dot{U}'_{\text{вх}} = 0,375 \text{ В}$ и $\dot{U}''_{\text{вх}} = 2,5 \text{ В}$, $\dot{U}'_1 = 125 \cdot 0,01 = 1,25 \text{ В}$ и $\dot{U}_1'' = 125 \cdot 0,03 = 3,75 \text{ В}$.

Тогда

$$\dot{E}_1' = \sqrt{\dot{U}_{\text{вх}}'^2 + \dot{U}_1'^2} = \sqrt{0,375^2 + 1,25^2} = 1,31 \text{ В};$$

$$\dot{E}_2'' = \sqrt{\dot{U}_{\text{вх}}''^2 + \dot{U}_1''^2} = \sqrt{2,5^2 + 3,75^2} = 4,5 \text{ В.}$$

Отв. а) $\dot{I}_{\text{вх}} = 0,0273 \angle 61^\circ \text{ А}$; $\dot{U}_{\text{вх}} = 2,05 \angle -29^\circ \text{ В}$; $\dot{U}_1 = 3,41 \angle 61^\circ \text{ В}$; $\dot{I}'_{\text{вых}} = 3,25 \angle 35^\circ \text{ А}$; $\dot{U}_{\text{вых}} = 57,5 \angle -55^\circ \text{ В}$; $\dot{U}_{\text{н}} = 81,25 \angle 35^\circ \text{ В}$; б) от 1,31 до 4,5 В.

4.2. Определить $\dot{I}_{\text{вх}}$, $\dot{U}_{\text{вх}}$, \dot{U}_1 , $\dot{I}'_{\text{вых}}$, $\dot{U}_{\text{вых}}$, $\dot{U}_{\text{н}}$, если вход и выход нелинейного направленного четырехполюсника (см. рис. 4.2, а) имеют резистивный характер, а параметры схемы такие же, как и в задаче 4.1.

Отв. $\dot{I}_{\text{вх}} = 0,0216 \angle 30^\circ \text{ А}$; $\dot{U}_{\text{вх}} = 1,3 \angle 30^\circ \text{ В}$; $\dot{U}_1 = 2,7 \angle 30^\circ \text{ В}$; $\dot{I}'_{\text{вых}} = 2,4 \angle 0^\circ \text{ А}$; $\dot{U}_{\text{вых}} = 40 \angle 0^\circ \text{ В}$; $\dot{U}_{\text{н}} = 60 \angle 0^\circ \text{ В}$.

4.3. Используя метод компенсации, определить параметры схемы замещения нелинейного направленного четырехполюсника (см. рис. 4.2, а), если рабочие точки на входной (табл. 4.3) и выходной (табл. 4.4) характеристиках четырехполюсника определяются значениями $I_{\text{вх}} = 5 \text{ мА}$, $U_{\text{вх}} = 4 \text{ В}$, $I'_{\text{вых}} = 2,5 \text{ А}$, $U_{\text{вых}} = 40 \text{ В}$. Вход четырехполюсника имеет емкостный, а выход — индуктивный характер.

Отв. $U_{\text{вх}} = 3 \text{ В}$; $x_{\text{твх}} = 200 \text{ Ом}$; $U_{\text{вых}} = 10 \text{ В}$; $x_{\text{твых}} = 4 \text{ Ом}$; $H = 5$.

4.4. В цепь, изображенную на рис. 4.2, а, включен нелинейный направленный четырехполюсник, схема замещения которого получена в задаче 4.3. Определить $I_{\text{вх}}$, $U_{\text{вх}}$, U_1 , $I'_{\text{вых}}$, $U_{\text{вых}}$, $U_{\text{н}}$, если $E_1 = 6 \text{ В}$, $r_1 = 600 \text{ Ом}$, $E_2 = 100 \text{ В}$, $Z_{\text{н}} = r_{\text{н}} = 25 \text{ Ом}$. Написать вы-

Т а б л и ц а 4.3

U_{BX}	В	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
I_{BX}	мА	0	0,05	0,2	0,4	0,75	1,25	2	3,1	5

Т а б л и ц а 4.4

$I'_{ВЫХ}, A$	$U_{BX}=0$	$U_{BX}=2 В$	$U_{BX}=4 В$
	$U_{ВЫХ}, В$	$U_{ВЫХ}, В$	$U_{ВЫХ}, В$
0	0	0	0
0,5	8	15	22,5
1	12,5	22	30
1,5	15,5	25,5	34,5
2	18	28	37,5
2,5	20	30	40

ражения мгновенных значений входного и выходного токов при условии, что $e_1=8,46 \sin(\omega t+45^\circ)$ В, а $e_2=141 \sin(\omega t-15^\circ)$ В.

О т в е т. $I_{BX}=6,825$ мА; $U_{BX}=4,365$ В; $U_1=4,095$ В; $I'_{ВЫХ}=3,54$ А
 $U_{ВЫХ}=46,6$ В; $U_H=88,5$ В; $i_{BX}=0,00963 \sin(\omega t+91^\circ 50')$ А; $i'_{ВЫХ}=$
 $=4,99 \sin(\omega t-42^\circ 40')$ А.

4.5. Для квазилинейной цепи (см. рис. 4.6) с нелинейным ненаправленным четырехполусником, вход и выход которого имеют резистивный характер, заданы следующие значения: $E_1=5$ В; $r_1=50$ Ом; $E_2=100$ В; $L_H=5,7$ мГн; $f=400$ Гц. Входные и выходные характеристики четырехполусника заданы соответственно в табл. 4.5 и 4.6.

Определить графически токи и напряжения цепи.

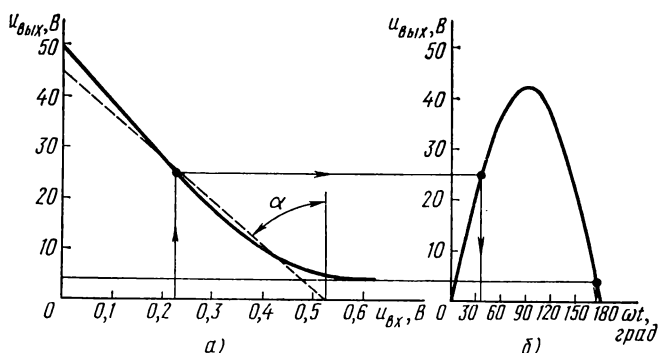
О т в е т. $I_{BX}=53$ мА; $U_{BX}=2,35$ В; $U_1=2,65$ В; $I'_{ВЫХ}=5,8$ А;
 $U_{ВЫХ}=56$ В; $U_H=83$ В.

Т а б л и ц а 4.5

I_{BX}, mA	$U_{ВЫХ}=20 В$	$U_{ВЫХ}=40 В$	$U_{ВЫХ}=60 В$
	$U_{BX}, В$	$U_{BX}, В$	$U_{BX}, В$
0	0	0	0
10	2	1,2	0,65
20	2,75	1,85	1,1
40	3,7	2,7	1,75
60	4,25	3,3	2,3
80	4,75	3,75	2,8
90	5	4	3

Таблица 4.6

$U_{\text{вых}}, \text{В}$	$U_{\text{вх}}=0$	$U_{\text{вх}}=1,5 \text{ В}$	$U_{\text{вх}}=3 \text{ В}$	$U_{\text{вх}}=4,5 \text{ В}$
	$i'_{\text{вых}}, \text{А}$	$i'_{\text{вых}}, \text{А}$	$i'_{\text{вых}}, \text{А}$	$i'_{\text{вых}}, \text{А}$
0	0	0	0	0
10	0,9	1,7	3	4,7
20	1,6	2,8	4,2	6
40	2,5	4,1	5,8	7,7
60	3,2	5	6,8	8,8
80	3,75	5,65	7,7	9,6
90	4	6	8	10

Рис. 4.16. К решению задачи 4.7. Графический расчет на характеристиках $u_{\text{вых}}(u_{\text{вх}})$ (а) и $u_{\text{вых}}(\omega t)$ (б)

4.6. Выходные характеристики нелинейного ненаправленного четырехполюсника (см. рис. 4.6) заданы в табл. 4.6. Определить параметры схемы замещения выходной цепи четырехполюсника, которая имеет резистивный характер, используя метод компенсации, если рабочая точка определяется следующими значениями: $i'_{\text{вых}}=7,7 \text{ А}$, $U_{\text{вых}}=80 \text{ В}$.

Ответ. $U_{i_{\text{вых}}}=-60 \text{ В}$; $r_{i_{\text{вых}}}=36 \text{ Ом}$; $H_{\text{вых}}=-48,66$.

4.7. Нелинейный направленный четырехполюсник (см. рис. 4.2, а) с отрицательным дифференциальным сопротивлением выходных характеристик имеет резистивный характер входа и выхода. Определить графически и аналитически углы начала и прекращения импульса тока в выходной цепи, если $e_2=42,5 \sin \omega t \text{ В}$, а падение напряжения на четырехполюснике при прохождении тока в выходной цепи $U_0=4 \text{ В}$. В момент начала импульса тока $u_{\text{вх}}=0,225 \text{ В}$. Зависимость $u_{\text{вых}}(u_{\text{вх}})$ представлена в табл. 4.7.

Т а б л и ц а 4.7

$u_{\text{вх}}$	В	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,55
$u_{\text{вых}}$	В	50	44	38	27,5	17,5	10	5,5	4,5

Решение. Применив графический метод (рис. 4.16, а, б), получим $\omega t_{\text{н}} = 36^\circ$ и $\omega t_{\text{п}} = 174^\circ$.

Аналитически углы начала и прекращения импульса тока можно найти из уравнений (4.40) и (4.43), если аппроксимировать характеристику $u_{\text{вых}}(u_{\text{вх}})$ прямой линией, как это показано на рис. 4.16, а.

Тогда

$$\omega t_{\text{н}} = \arcsin \left(\frac{0,525 - 0,225}{0,01168 \cdot 42,5} \right) = \arcsin 0,6064 = 37^\circ 20';$$

$$\omega t_{\text{п}} = \arcsin \frac{4}{42,5} = \arcsin 0,0944 = 174^\circ 35'.$$

О т в е т. Графически — $\omega t_{\text{н}} = 36^\circ$; $\omega t_{\text{п}} = 174^\circ$; аналитически — $\omega t_{\text{н}} = 37^\circ 20'$; $\omega t_{\text{п}} = 174^\circ 35'$.

ГЛАВА 5. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

§ 5.1. Общая характеристика переходных процессов в нелинейных цепях

Переходные процессы в цепях с нелинейными двух-полюсниками и четырехполюсниками описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, для которых нет общих методов решения (даже для цепей первого и второго порядка найдены аналитические решения только для некоторых частных случаев).

Очень существенно, что характер решения этих уравнений зависит в отличие от случая линейных уравнений от величин подводимых напряжений, а принцип наложения к нелинейным цепям неприменим.

Из сказанного следует, что для нелинейных цепей не существует стандартных сигналов, реакции на которые, например на единичную функцию $1(t)$ или импульсную функцию $\delta(t)$, полностью определили бы динамические свойства цепи. Понятий передаточной функции $H(\bar{p})$ и частотной характеристики $H(j\omega)$ в прежнем смысле здесь также не существует. В общем случае для определения свойств нелинейной цепи надо исследовать ее для всех ожидаемых при практическом использовании воздействий.

В то же время переходные процессы в нелинейных цепях намного разнообразнее, чем в цепях линейных, и соответствующие особенности используются для разработки различных электротехнических устройств, реализация которых в линейных цепях невозможна.

Далее кратко рассмотрен ряд наиболее распространенных методов исследования переходных процессов в нелинейных цепях, иллюстрируемых, как правило, одним и тем же простым примером.

Приводимые оценки рассматриваемых методов не следует считать категорическими, так как приемлемость того или иного метода расчета зависит, во-первых, от особенностей конкретной задачи и, во-вторых, от уровня вычислительной техники, которой располагает расчетчик.

В заключение отметим, что применительно к нелинейным цепям в отличие от цепей линейных ни один метод не может применяться формально, без предварительного уяснения физических процессов в схеме.

§ 5.2. Метод интегрируемой аппроксимации

Метод интегрируемой аппроксимации применяется в том случае, если удастся подобрать приближенное аналитическое выражение для нелинейности, которое в данной конкретной задаче приводит к дифференциальному уравнению, имеющему решение в аналитической форме. Это удастся редко и только для уравнений невысокого порядка.

В качестве примера рассмотрим расчет переходного процесса в схеме рис. 5.1, а, где постоянное напряжение включается на последовательно соединенные нелинейный двухполюсник $НД(r)$ и индуктивную катушку. Переходный процесс в цепи описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$u_L + u_r + u_{нд} = L \frac{di}{dt} + ri + f(i) = U. \quad (5.1)$$

Предположим, что характеристика $i=f(u_{нд})$ (рис. 5.1, б) может быть аппроксимирована на некотором интервале параболой второго порядка $i=au_{нд}^2$ или $u=u_{нд}=\sqrt{i/a}$. Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$L \frac{d}{dt} (au^2) + rau^2 + u = U \quad (5.2)$$

или

$$2Lau \frac{du}{dt} + rau^2 + u = U, \quad (5.3)$$

откуда после разделения переменных получим

$$\begin{aligned} t &= -2La \int_0^u \frac{u}{rau^2 + u - U} du = \\ &= \frac{L}{r} \left(\ln \frac{U}{U - ri - \sqrt{i/a}} + \frac{1}{\Delta} \ln \frac{2r\sqrt{ai} + 1 - \Delta}{2r\sqrt{ai} + 1 + \Delta} - \Delta \right), \quad (5.4) \end{aligned}$$

где $\Delta = \sqrt{4raU + 1}$; $\Lambda = \frac{1}{\Delta} \ln \frac{1 - \Delta}{1 + \Delta}$.

Полученная функция $t=f(i)$ не может быть представлена как явная функция $i=\varphi(t)$, поэтому для построения графика $i=\varphi(t)$ необходимо задаться несколькими значениями i и определить соответствующие значения t .

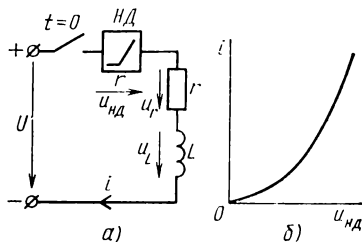


Рис. 5.1. Включение rL -цепи с нелинейным двухполусником: а — схема; б — в. а. х. двухполусника

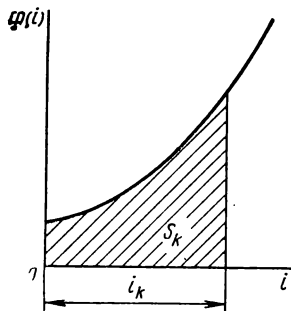


Рис. 5.2. Применение метода графического интегрирования для расчета цепи

§ 5.3. Метод графического интегрирования

Методы графического интегрирования достаточно трудоемки и пригодны для относительно простых случаев, например для расчета цепей, описываемых дифференциальными уравнениями с разделяемыми переменными, так как здесь становится возможным построение графика функции, кривая которого ограничивает площадь, пропорциональную соответствующему значению времени.

Рассмотрим применение этого метода для расчета цепи рис. 5.1, а.

Разделив переменные в уравнении (5.1)

$$dt = L \frac{1}{U - ri - f(i)} di \quad (5.5)$$

и проинтегрировав левую и правую части по соответствующим переменным, с учетом нулевых начальных условий получим

$$t = \int_0^t dt = \int_0^i \frac{L}{U - ri - f(i)} di. \quad (5.6)$$

Построив далее график зависимости

$$\varphi(i) = \frac{L}{U - ri - f(i)}, \quad (5.7)$$

по соответствующей площади (с учетом масштабов) найдем зависимость $t=f(i)$ либо $i=\varphi(t)$, как это показано для значения тока i_k на рис. 5.2.

§ 5.4. Метод фазовой плоскости

Обычно при исследовании переходных процессов в электрических цепях выясняют зависимости различных ее параметров от времени и в соответствии с этим при построении графиков по оси абсцисс откладывают время t , а по оси ординат — исследуемые параметры: ток, напряжение, величину заряда и т. д. Однако те же явления можно рассматривать в иной системе координат. Например, можно откладывать по оси абсцисс исследуемую величину (i, u, Q), а по оси ординат — скорость изменения этой величины во времени ($di/dt, du/dt, dQ/dt$).

Координатную плоскость, в которой по одной оси (обычно по оси абсцисс) откладывают исследуемую величину x , а по другой (обычно по оси ординат) — скорость изменения этой величины во времени $y=dx/dt$, называют ф а з о в о й п л о с к о с т ь ю. При таком подходе время не будет явно фигурировать на графике, но последний дает полную информацию о процессе.

Переходный процесс на фазовой плоскости изображается некоторой прямой или кривой, если он описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка. Для исследования цепей, описываемых уравнениями выше второго порядка, метод фазовой плоскости практически не пригоден.

Изменение состояния системы можно изображать движением некоторой точки на фазовой плоскости. Эту точку называют и з о б р а ж а ю щ е й или п р е д с т а в л я ю щ е й. Координаты изображающей точки x и y определяют ее положение на фазовой плоскости и характеризуют состояние процесса в рассматриваемый момент времени. С течением времени изображающая точка перемещается, описывая на фазовой плоскости линию, называемую ф а з о в о й т р а е к т о р и е й. Вид фазовой траектории зависит от схемы и параметров цепи.

В случае периодического процесса фазовая траектория представляет собой замкнутую кривую (для линейной цепи окружность или эллипс), описываемую изображающей точкой в течение каждого периода. Для непе-

риодического процесса фазовая траектория представляет собой незамкнутую кривую.

В верхней полуплоскости производная координаты $y > 0$, и, следовательно, изображающая точка может перемещаться только вправо — в направлении возрастающих значений x . В нижней полуплоскости $y < 0$, и изображающая точка может перемещаться только влево. Следовательно, изображающая точка всегда движется по фазовой траектории в направлении движения часовой стрелки. В зависимости от начальных условий получают различные фазовые траектории, которые никогда не пересекаются. Так как на оси абсцисс $dx/dt = 0$, фазовые траектории пересекают эту ось под прямым углом.

Семейство фазовых траекторий, изображающих процессы, возможные в данной цепи, называют **ф а з о в ы м** **п о р т р е т о м**. Фазовый портрет позволяет охватить всю совокупность движений в рассматриваемой системе, которые могут возникнуть при различных начальных условиях. Заключение о характере движений делают без предварительного отыскания аналитических выражений интегралов исходных уравнений даже и тогда (что очень важно), когда эти выражения не могут быть получены.

Точки фазовой плоскости, в которых одновременно $dx/dt = 0$ и $dy/dt = 0$, называют **о с о б ы м и** **т о ч к а м и**. Они соответствуют условиям равновесия (покоя) рассматриваемой цепи и могут быть устойчивыми или неустойчивыми.

Особую точку, через которую не проходит ни одна фазовая траектория и которую окружают замкнутые фазовые траектории, называют **ц е н т р о м**. Центр соответствует случаю безразличного равновесия.

Особая точка, которая является асимптотической для фазовых траекторий, называется **ф о к у с о м**. Фокус называют **у с т о й ч и в ы м**, если изображающая точка приближается к нему, и **н е у с т о й ч и в ы м**, — если удаляется.

Особую точку, через которую проходят фазовые траектории, называют **у з л о м**. Если движение по фазовой траектории направлено к узлу, то такой узел называют **у с т о й ч и в ы м**, если оно направлено от узла, — **н е у с т о й ч и в ы м**.

Для переходных процессов (колебательных, апериодических и т. п.) в линейных цепях первого и второго порядка имеются фазовые портреты, с которыми можно

сравнить получившийся фазовый портрет исследуемой цепи. Для некоторых нелинейных цепей также имеются фазовые портреты, однако число разновидностей таких цепей настолько велико, что создать для них фазовые портреты трудно.

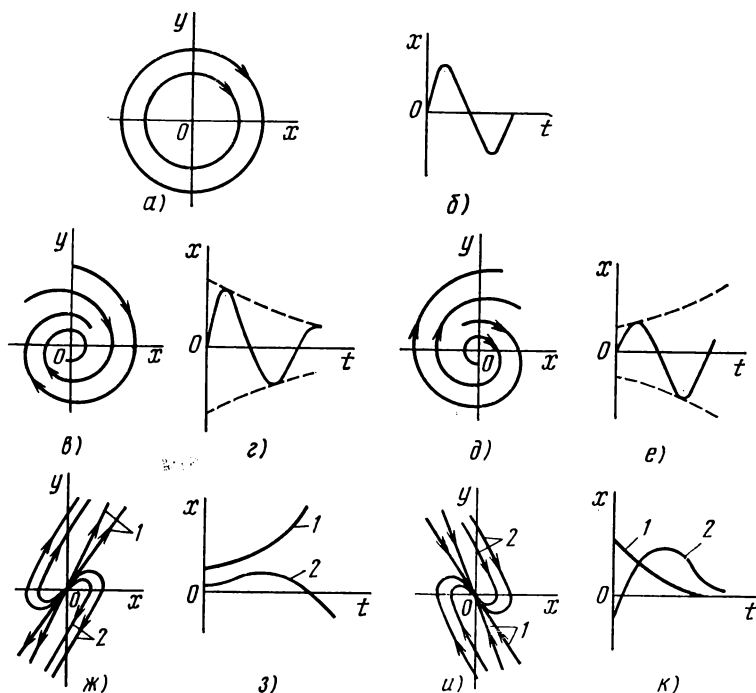


Рис. 5.3. Фазовые портреты и графики зависимостей $x(t)$ в линейных цепях (свободный режим):

$a, б$ — незатухающие колебания; $в, г$ — затухающие колебания; $д, е$ — нарастающие колебания; $ж, з$ — нарастающие аperiodические процессы; $и, к$ — затухающие аperiodические процессы

Фазовые портреты составляют, как правило, для цепей без источника питания, т. е. для свободного режима, однако в некоторых случаях можно получить фазовый портрет и с учетом принужденного режима.

Для построения графика зависимости $i(t)$ необходимо определить моменты времени, соответствующие точкам фазовой траектории. Промежуток времени Δt , в течение которого совершается переход от k -й точки (x_k ,

y_k) фазовой траектории к близкой к ней $(k+1)$ -й точке (x_{k+1}, y_{k+1}) , можно приближенно рассчитать следующим образом. Так как $y = dx/dt$, то

$$\Delta t = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{y} dx.$$

Обозначив $1/y = f(x)$, в соответствии с теоремой о среднем имеем

$$\Delta t = f(\xi) (x_{k+1} - x_k) = f(\xi) \Delta x \quad (x_k < \xi < x_{k+1}).$$

При небольшом интервале Δt и монотонном изменении y в этом интервале можно принять

$$f(\xi) \approx 1/y_{\text{ср}},$$

$$\text{где } y_{\text{ср}} = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}.$$

Тогда

$$\Delta t \approx \Delta x / y_{\text{ср}}.$$

На рис. 5.3 показаны некоторые фазовые портреты для линейных цепей (свободный режим) и особые точки, а также графики зависимостей $x = f(t)$ (для одной фазовой траектории), которые определяют соответствующие фазовые портреты.

Рассмотрим схему рис. 5.1, а и построим для нее фазовую траекторию переходного процесса (с учетом принужденного режима).

Представим дифференциальное уравнение (5.1) в виде

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} [U - ri - f(i)] \quad (5.8)$$

и, задавшись различными значениями i , найдем соответствующие значения di/dt (рис. 5.4). Полученный график свидетельствует об апериодическом нарастающем характере переходного процесса с установившимися значениями $di/dt = 0, i = I_y$.

Зависимость $i(t)$ можно получить из рис. 5.4, если

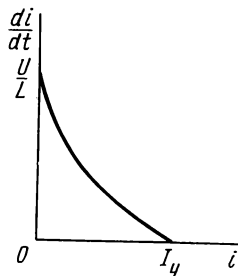
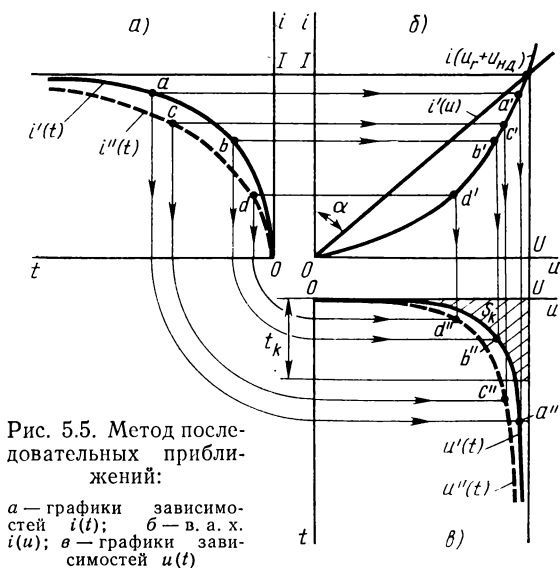


Рис. 5.4. Фазовая траектория переходного процесса в схеме рис. 5.1, а

разбить участок оси абсцисс от 0 до I_y на малые интервалы Δi , найти для этих интервалов $y_{\text{ср}} = (di/dt)_{\text{ср}}$ и определить соответствующие значения Δt .

§ 5.5. Метод последовательных приближений

Данный метод состоит в последовательном уточнении первоначально полученного тем или иным способом первого приближения, нахождение которого помимо гро-



мозкости операций составляет одну из основных трудностей метода.

Рассмотрим схему рис. 5.1, а, однако для удобства расчета заменим нелинейный двухполюсник $НД(r)$ и линейное сопротивление r эквивалентным нелинейным двухполюсником, воспользовавшись методом суммирования вольт-амперных характеристик (см. § 1.3). Характеристика эквивалентного двухполюсника $i(u_r + u_{нд})$ показана на рис. 5.5, б.

Дифференциальное уравнение такой цепи

$$u_L + u_{rнд} = L \frac{di}{dt} + f_1(i) = U \quad (5.9)$$

нелинейно, однако в данном случае можно в первом (грубом) приближении линеаризовать его, заменив кривую $i(u_r + u_{нд})$ прямой линией $i'(u)$ (рис. 5.5, б), которая проходит через начало координат и точку на характеристике $i(u_r + u_{нд})$, соответствующую установившемуся режиму. Так как при этом все сопротивления линейные, установившееся значение тока

$$I = \frac{U}{r_{\text{лст}}} = \frac{U}{r + r_{\text{ндст}}}, \quad (5.10)$$

где

$$r_{\text{лст}} = \text{tg } \alpha.$$

Дифференциальное уравнение, описывающее процесс в такой цепи, линейно

$$L \frac{di'}{dt} + r_{\text{лст}} i' = U \quad (5.11)$$

и, как известно, имеет решение

$$i' = I \left(1 - e^{-\frac{r_{\text{лст}}}{L} t} \right). \quad (5.12)$$

Построив график зависимости $i'(t)$ в линейной цепи (рис. 5.5, а), используем нелинейную характеристику $i(u_r + u_{нд})$ для того, чтобы найти точки кривой $u'(t)$. Графическое построение зависимости $u'(t)$ показано на рис. 5.5 для двух точек (а и б). Таким образом, проведен первый этап уточнения решения, поскольку для построения кривой $u'(t)$ используем не прямую линию $i'(u)$ (см. рис. 5.5, б), а исходную нелинейную характеристику $i(u_r + u_{нд})$.

График зависимости $u'(t)$ строят для дальнейшего уточнения решения, так как на основании (5.9)

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t (U - u) dt, \quad (5.13)$$

что позволяет, воспользовавшись методом графического интегрирования, найти произвольного момента времени t_k (рис. 5.5, в) соответствующий ток (с учетом масштабов)

$$i_k = S_k / L. \quad (5.14)$$

Задаваясь значениями времени t_1, t_2 и т. д., можно найти значения токов i_1, i_2 и т. д. и построить на рис.

5.5, а новую кривую $i''(t)$, более точно выражающую зависимость тока от времени, чем приближенная функция (5.12). По этой кривой и нелинейной характеристике $i(u_r + u_{нд})$ строят зависимость $u''(t)$, как это показано на рис. 5.5 для двух точек (с и d).

Далее опять задаются значениями времени и уточняют зависимость $i(t)$. Следует отметить, что этот метод требует проверки на сходимость.

§ 5.6. Метод сопряжения интервалов

Метод сопряжения интервалов рассматривался при расчете квазиустановившихся режимов в цепях переменного тока (см. § 3.6).

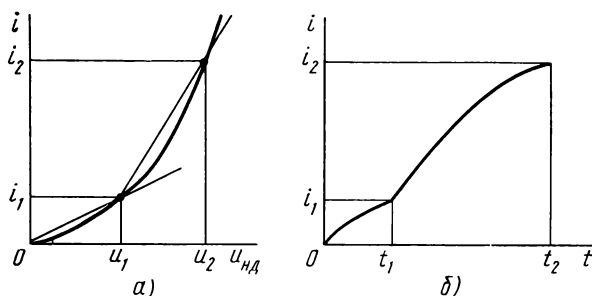


Рис. 5.6. Метод сопряжения интервалов:

а — кусочно-линейная аппроксимация в. а. х.; б — график зависимости $i(t)$

Напомним, что идея метода заключается в разбивке процесса на ряд следующих друг за другом интервалов, внутри которых переходный процесс может быть описан точно или приблизительно линейным или интегрируемым нелинейным дифференциальным уравнением. Постоянные интегрирования этих уравнений определяют по граничным условиям, исходя из требования непрерывности решения (эту операцию и называют сопряжением).

Метод сопряжения интервалов в принципе универсален, но для цепей высокого порядка и при длительно протекающем переходном процессе, а также при желании повысить точность расчета путем уменьшения выбираемых интервалов вычисления становятся громоздкими. При этом можно использовать цифровые вычислитель-

ные машины, однако в последнем случае обычно более удобен (по числу требуемых операций) описанный далее метод конечных приращений.

Рассмотрим метод сопряжения интервалов применительно к схеме рис. 5.1, а.

Разобьем вольт-амперную характеристику на участки, что удобнее всего сделать, применив кусочно-линейную аппроксимацию (рис. 5.6, а). Тогда:

для первого участка

$$i = (i_1/u_1)u = u/r_1; \quad (5.15)$$

$$r_1 = u_1/i_1; \quad (5.15)$$

$$u = r_1 i; \quad (5.16)$$

для второго участка

$$i = i_1 + \frac{i_2 - i_1}{u_2 - u_1} (u - u_1) = i_1 + \frac{u - u_1}{r_2};$$

$$r_2 = \frac{u_2 - u_1}{i_2 - i_1}; \quad (5.17)$$

$$u = r_2 i + u_1 (1 - r_2/r_1). \quad (5.18)$$

Используя полученные значения, вместо уравнения (5.1) получим два линейных уравнения:

для первого участка

$$r_1 i + r i + L \frac{di}{dt} = E = E_1 \begin{cases} 0 \leq i \leq i_1; \\ 0 \leq t \leq t_1; \end{cases} \quad (5.19)$$

для второго участка

$$r_2 i + r i + L \frac{di}{dt} = E - u_1 \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) = E_2 \begin{cases} i_1 \leq i \leq i_2; \\ t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases} \quad (5.20)$$

Решения дифференциальных уравнений для участков имеют вид:

$$i = \frac{E_1}{r_1 + r} + A_1 e^{-\frac{r_1 + r}{L} t}, \quad 0 \leq t \leq t_1; \quad (5.21)$$

$$i = \frac{E_2}{r_2 + r} + A_2 e^{-\frac{r_2 + r}{L} (t - t_1)}, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (5.22)$$

Постоянную интегрирования A_1 находим из условия, что при $t=0$ $i=0$, откуда

$$A_1 = -\frac{E_1}{r_1 + r}.$$

Тогда для первого участка

$$i = \frac{E_1}{r_1 + r} \left(1 - e^{-\frac{r_1 + r}{L} t} \right), \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (5.23)$$

Подстановка в полученное уравнение $i = i_1$ и $t = t_1$ дает

$$i_1 = \frac{E_1}{r_1 + r} \left(1 - e^{-\frac{r_1 + r}{L} t_1} \right), \quad (5.24)$$

откуда определим момент времени

$$t_1 = -\frac{L}{r_1 + r} \ln \left(1 - \frac{r_1 + r}{E_1} i_1 \right). \quad (5.25)$$

Постоянную интегрирования A_2 определяют из уравнения тока для второго участка. При $t = t_1$ $i = i_1$

$$A_2 = i_1 - \frac{E_2}{r_2 + r}.$$

Уравнение тока для второго участка

$$i = \frac{E_2}{r_2 + r} + \left(i_1 - \frac{E_2}{r_2 + r} \right) e^{-\frac{r_2 + r}{L} (t - t_1)}, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (5.26)$$

Момент времени t_2 находим из условия, что при $i = i_2$ $t = t_2$. Тогда

$$i_2 = \frac{E_2}{r_2 + r} + \left(i_1 - \frac{E_2}{r_2 + r} \right) e^{-\frac{r_2 + r}{L} (t_2 - t_1)}, \quad (5.27)$$

откуда определим момент времени t_2 :

$$t_2 = t_1 - \frac{L}{r_2 + r} \ln \left[1 + \frac{r_2 + r}{E_2} (i_1 - i_2) \right]. \quad (5.28)$$

По уравнениям для токов различных участков можно построить зависимость $i = \varphi(t)$, характер которой показан на рис. 5.6, б.

§ 5.7. Метод конечных приращений (последовательных интервалов)

Данный метод относится к наиболее общим методам (численного интегрирования), но для его применения требуется большая затрата труда. Рассматриваемый ин-

тервал времени разбивают на достаточно малые промежутки времени Δt (шаг интегрирования), и в соответствии с этим дифференциалы величин, входящие в уравнения, заменяют их конечными приращениями в течение этого промежутка времени. Вероятно, самый очевидный переход от некоторого этапа решения дифференциального уравнения к следующему состоит в применении ряда Тейлора. Так как ряд Тейлора является бесконечным, то для практического применения необходимо ограничиться некоторым числом его членов. Если первое опущенное слагаемое ряда Тейлора имеет порядок h^2 , то метод носит название метода Эйлера.

Точки, полученные численным решением дифференциального уравнения, можно нанести на график. При решении методом Эйлера экстраполяцию от каждой предыдущей точки к последующей производят, исходя из предположения, что решение в интервале между вычисленными точками — прямая линия. Для более точной экстраполяции используют кривую, определяемую алгебраическим уравнением, степень которого выше единицы. Это является основой метода, известного как метод Адамса, при котором допускается экстраполяция решения на большем интервале и с большей точностью, чем это возможно при использовании метода Эйлера. Зависимости, получающиеся при вычислениях, становятся сложнее.

Еще более точным является метод Рунге—Куты, так как погрешность этого метода на каждом шаге составляет величину порядка h^5 .

Численные методы решения дифференциальных уравнений (Эйлера, Адамса, Рунге—Куты) можно объединить под общим названием: метод конечных приращений или метод последовательных интервалов.

Рассмотрим схему рис. 5.1, а. Характеристика нелинейного двухполюсника, входящего в эту схему, показана на рис. 5.7, а.

Нелинейное дифференциальное уравнение (5.1) может быть представлено уравнением (5.8). Заменяя производную di/dt отношением конечных приращений, получим приближенное уравнение

$$\Delta i \approx \frac{1}{L} [U - ri - f(i)] \Delta t. \quad (5.29)$$

Разобьем время переходного процесса на ряд малых одинаковых интервалов Δt . Тогда для любого $(k+1)$ -го интервала $(k=0, 1, 2, \dots)$

$$\Delta i_{k+1} = i_{k+1} - i_k \approx \frac{1}{L} [U - ri_k - f(i_k)] \Delta t, \quad (5.30)$$

где i_k и i_{k+1} — мгновенные значения тока в начале и в конце рассматриваемого интервала времени.

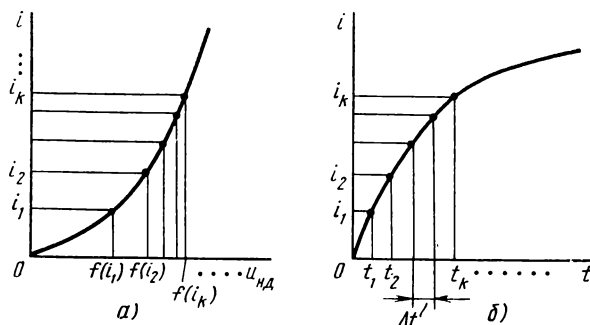


Рис. 5.7. Метод конечных приращений:

а — в. а. х.; б — график зависимости $i(t)$

Таким образом, можно шаг за шагом вычислить ряд мгновенных значений тока: по начальному значению тока i_0 определяют ток в конце первого интервала i_1 , по значению i_1 находят i_2 и т. д. (рис. 5.7, б).

Т а б л и ц а 5.1

$[k$	$t_k = k\Delta t$	i_k	ri_k	$f(i_k)$	$U - ri_k - f(i_k)$	Δi_{k+1}	$i_{k+1} = i_k + \Delta i_{k+1}$
0	0	$i_0 = 0$	0	0	U	Δi_1	$i_1 = \Delta i_1$
1	$t_1 = \Delta t$	i_1	ri_1	$f(i_1)$	$U - ri_1 - f(i_1)$	Δi_2	$i_2 = i_1 + \Delta i_2$
2	$t_2 = 2\Delta t$	i_2	ri_2	$f(i_2)$	$U - ri_2 - f(i_2)$	Δi_3	$i_3 = i_2 + \Delta i_3$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Расчет удобно вести в табличной форме, которая в зависимости от условий задачи может иметь разный вид. Например, для рассматриваемой задачи составлена табл. 5.1.

Результат решения получается тем точнее (см. рис. 5.7), чем меньше интервал времени Δt . Однако вследствие роста суммарного количества интервалов увеличивается общая погрешность расчета, так как происходит постоянное наращивание ошибки, и все последующие вычисления зависят от погрешностей, вносимых при расчетах предшествующих интервалов. В этом состоит основной недостаток указанного метода. Поэтому необходимо, уменьшая интервал времени Δt , применять специально разработанные приемы коррекции ошибок, что приводит к еще большему увеличению расчетных операций. Указанные интервалы могут быть выбраны весьма малыми, если использовать для расчета цифровые вычислительные машины.

§ 5.8. Метод пространства состояний

Как известно, для расчета переходных процессов в нелинейных цепях необходимо решать дифференциальные уравнения цепи, записанные на основании первого и второго законов Кирхгофа. Эти уравнения могут быть составлены как в классической форме, так и форме уравнений состояний.

Выбор переменных при записи уравнений Кирхгофа для нелинейных цепей имеет одну особенность. Если цепь включает в себя один или несколько нелинейных реактивных двухполюсников, то в качестве переменных иногда удобнее использовать потокосцепления и заряды, а не токи и напряжения, как в линейных цепях. Это объясняется тем, что характеристики нелинейных реактивных двухполюсников часто задаются в виде вебер-амперной или кулон-вольтной характеристик. Кроме того, если характеристики нелинейных двухполюсников содержат даже разрывы первого рода, потокосцепление и заряд не претерпевают скачков при работе на этих участках характеристики.

Порядок уравнения, описывающего нелинейную цепь, обычно совпадает с количеством реактивных линейных и нелинейных двухполюсников. Так, цепь с одним нелинейным реактивным двухполюсником (например, индуктив-

ным) описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$f_1(d\Psi/dt, \Psi, t) = 0. \quad (5.31)$$

Это уравнение необходимо дополнить вебер-амперной характеристикой двухполюсника

$$\Psi = \Psi(i), \quad (5.32)$$

которая может быть задана аналитически, графически или в виде таблицы.

Уравнение (5.31) может быть также записано в нормальной форме (форме уравнения состояния)

$$d\Psi/dt = f_2(\Psi, t). \quad (5.33)$$

Выбор той или иной формы записи нелинейного дифференциального уравнения определяется способом решения задачи. Так, в § 5.5 и 5.6 был использован классический метод расчета переходных процессов.

Проиллюстрируем теперь расчет переходного процесса в цепи первого порядка, описанного уравнениями состояния, с помощью численного интегрирования.

Рассмотрим цепь, содержащую нелинейный индуктивный двухполюсник и линейное сопротивление r , подключаемые к источнику напряжения U (рис. 5.8). Пусть задана вебер-амперная характеристика $\Psi = f_1(i)$ или $i = f_2(\Psi)$. Выбираем в качестве переменной состояния потокосцепление Ψ . Запишем уравнение состояния

$$d\Psi/dt = U - rf_2(\Psi). \quad (5.34)$$

Решение уравнения (5.34) имеет вид

$$\Psi = \Psi(0) + \int_0^t U dt - r \int_0^t f_2(\Psi) dt. \quad (5.35)$$

Будем решать уравнение (5.35) численно, полагая, что на шаге интегрирования T ток $i = f_2(\Psi)$ постоянен. Тогда для некоторого k -го шага интегрирования получим уравнение

$$\Psi[(k+1)T] = \Psi(kT) + UT - ri(kT)T, \quad (5.36)$$

где $i(kT) = f_2[\Psi(kT)]$.

Как видно из структуры уравнения (5.36), для решения исходного уравнения (5.34) используют метод конечных приращений (последовательных интервалов), который был рассмотрен в § 5.7.

Рассчитаем теперь переходный процесс в схеме рис. 5.1, а, где нелинейный резистивный двухполюсник задан вольт-амперной характеристикой, приведенной на рис. 5.1, б. Здесь в качестве переменной состояния можно выбрать ток i . Запишем уравнение состояния

$$\frac{di}{dt} = -\frac{r}{L} i + \frac{1}{L} U - \frac{1}{L} U_{\text{нд}}(i), \quad (5.37)$$

где $U_{\text{нд}}(i)$ — характеристика нелинейного двухполюсника.

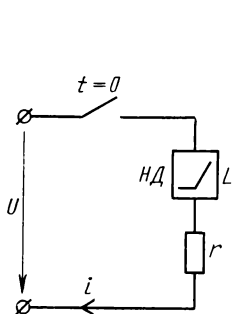


Рис. 5.8. Нелинейная цепь первого порядка

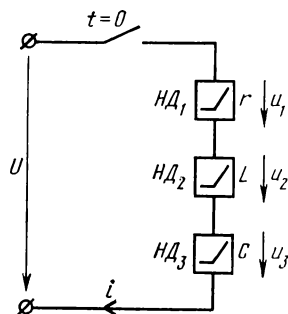


Рис. 5.9. Нелинейная цепь второго порядка

Решение уравнения (5.37) имеет вид

$$i = e^{-\frac{r}{L}t} i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} U d\tau - \frac{1}{L} \int_0^t e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} U_{\text{нд}}(i) d\tau, \quad (5.38)$$

где $i(0)$ — начальное условие.

Приняв то же допущение (постоянство напряжения на нелинейном двухполюснике на шаге интегрирования), получим расчетную формулу

$$i[(k+1)T] = e^{-\frac{r}{L}T} i(kT) + \frac{1}{L} \left(e^{-\frac{r}{L}T} - 1 \right) \left(-\frac{L}{r} \right) U - \frac{1}{L} \left(e^{-\frac{r}{L}T} - 1 \right) \left(-\frac{L}{r} \right) U_{\text{нд}}(kT). \quad (5.39)$$

Цепь второго порядка описывается двумя нелинейными дифференциальными уравнениями первого порядка или одним уравнением второго порядка. Пусть в схеме рис. 5.9 все три двухполюсника — нелинейные. Их характеристики описываются следующими зависимостями:

$$U_1 = f_1(i) \text{ или } i = f_2(U_1); \quad (5.40)$$

$$\Psi = f_3(i) \text{ или } i = f_4(\Psi); \quad (5.41)$$

$$Q = f_5(u_3) \text{ или } u_3 = f_6(Q). \quad (5.42)$$

Далее для этой цепи можно записать уравнения

$$dQ/dt = f_4(\Psi); \quad (5.43)$$

$$f_1(i) + d\Psi/dt + f_6(Q) = U. \quad (5.44)$$

Эта система может быть приведена к одному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка. Дифференцируя уравнение (5.44) (по правилу дифференцирования неявных функций) и подставляя в него (5.43), получим

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \left[\frac{\partial f_1}{\partial i} \frac{\partial f_4}{\partial \Psi} \right] \frac{d\Psi}{dt} + \frac{\partial f_6}{\partial Q} f_4(\Psi) = U. \quad (5.45)$$

Эта же система может быть записана в форме уравнений состояний

$$\left. \begin{aligned} dQ/dt &= f_4(\Psi); \\ d\Psi/dt &= -f_1[f_4(\Psi)] - f_6(Q) + U. \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

Цепь, содержащая n нелинейных реактивных двухполюсников, описывается в общем случае системой n нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Если переменные являются переменными состояния, то уравнения состояния цепи в матричной форме имеют вид

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{A}(\mathbf{X})\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{W}, \quad (5.47)$$

где \mathbf{X} — вектор состояния порядка n , включающий токи индуктивных двухполюсников и напряжения емкостных двухполюсников (или потокосцепления и заряды); $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ — матрица коэффициентов размером $n \times n$, элементы которой зависят от переменных состояния; \mathbf{B} — матрица постоянных коэффициентов размером $m \times n$ (m — число источников напряжения и тока); \mathbf{W} — вектор источников напряжения и тока.

§ 5.9. Методы усреднения

Методы усреднения основаны на не всегда возможном допущении, что параметр цепи в некотором интервале времени меняется незначительно, и поэтому он может быть принят для этого интервала постоянным, равным усредненному его значению. Эти методы являются частными и приближенными.

Примитивный вариант такого подхода был использован для нахождения первого приближения в § 5.5, где величина сопротивления нелинейного двухполюсника вначале была принята постоянной для всего времени протекания переходного процесса. Правда, это сопротивление определялось грубо, так как усреднилось оно только по начальному и конечному значениям.

Наиболее развиты эти методы применительно к цепям переменного и вообще периодически меняющегося тока, в которых какая-то координата цепи (огibaющая амплитуд синусоиды, постоянная составляющая) меняется медленно и в пределах периода может быть принята постоянной.

Случай медленного изменения огibaющей амплитуд позволяет применить вариант метода усреднения, называемый методом медленно меняющихся амплитуд. Математические операции метода сводятся к тому, что выражение огibaющей представляют в виде гармонического ряда, и уравнение цепи интегрируют в пределах периода. Тогда все гармонические члены дают нуль, и остается только достаточно простое приближенное решение, соответствующее постоянным членам и показывающее изменение амплитуды основной (первой) гармоники в переходном процессе (без учета составляющих).

Для цепи периодического тока с постоянной составляющей соответствующий вариант метода усреднения (метод медленно меняющейся постоянной составляющей) дает приближенное решение для закона изменения постоянной составляющей (без учета переменных составляющих).

Задачи

5.1. Нелинейный резистивный двухполюсник, вольт-амперная характеристика которого выражается уравнением $i = 0,0315 u^{3/2}$, включен последовательно с индуктивностью $L = 0,021$ Гн. Установить связь между напряжением на нелинейном двухполюснике и временем

при подключении этой цепи к источнику постоянного напряжения $U=16$ В. Задачу решить методом интегрируемой аппроксимации.

5.2. Нелинейный индуктивный двухполюсник, характеристика которого описывается уравнением $i=a\Psi^4$, где $a=625\cdot 10^4$, соединен последовательно с сопротивлением $r=50$ Ом. Определить закон изменения тока в цепи при включении ее на постоянное напряжение $U=12$ В. Задачу решить методом интегрируемой аппроксимации.

5.3. В цепи, представляющей собой последовательное соединение нелинейного двухполюсника и линейного сопротивления, ключ замыкается в момент времени $t=0$. Определить закон изменения тока в цепи, если $U=50$ В, $r=25$ Ом. Нелинейный двухполюсник имеет индуктивный характер, и зависимость потокоцепления от тока приведена в табл. 5.2. Задачу решить методом сопряжения интервалов.

Т а б л и ц а 5.2

i	A	0	0,2	0,5	0,7	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5
$\Psi \times 10^{-4}$	B6	0	0,45	1,05	1,45	1,6	1,8	1,88	1,95	1,99	2,0

5.4. Последовательно соединенные индуктивность $L=0,02$ Гн и нелинейный резистивный двухполюсник подключены к источнику постоянного напряжения $U=20$ В. В момент времени $t=0$ источник отключается, а цепь закорачивается. Определить закон изменения тока в индуктивности. Характеристика нелинейного двухполюсника задана в табл. 5.3. Задачу решить методом графического интегрирования.

Т а б л и ц а 5.3

u	B	0	5	10	20	30	40
i	A	0	0,15	0,23	0,3	0,32	0,33

5.5. Конденсатор, емкость которого $C=100$ мкФ, заряжен до напряжения $U=40$ В. Определить ток при разряде этого конденсатора на нелинейный резистивный двухполюсник, характеристика которого задана в табл. 5.4. Задачу решить методом последовательных приближений.

Т а б л и ц а 5.4

u	B	0	5	10	20	30	40
i	A	0	0,05	0,11	0,22	0,295	0,33

Решение. Линеаризуем вольт-амперную характеристику нелинейного двухполюсника так, как это показано на рис. 5.10, б, и найдем зависимость $u_{нд}(t) = u_r(t)$ для линейной цепи. Как известно, решение уравнения для rC -цепи в свободном режиме будет иметь вид

$$u_{r\text{св}} = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau},$$

где $r = 40/0,33 = 121,2$ Ом; $rC = 121,2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0,012$ с.

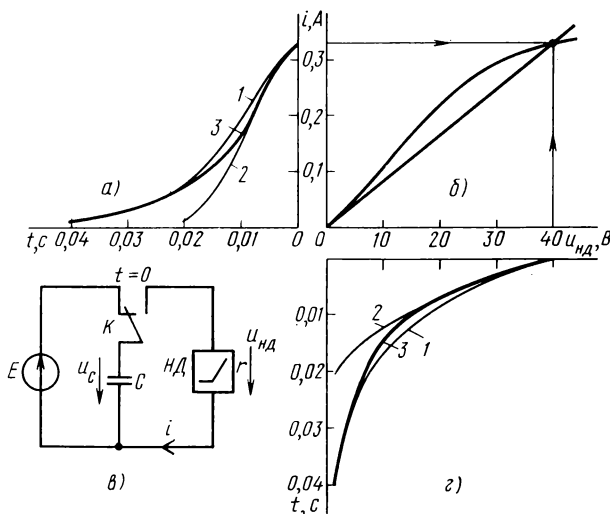


Рис. 5.10. К решению задачи 5.5:

а — графики зависимостей $i(t)$; б — в. а. х. и ее линеаризация; в — схема; г — графики зависимостей $u(t)$

Используя независимые начальные условия $u_c(0) = 40$ В и уравнение цепи $u_c + u_r = 0$, найдем (с учетом, что принужденная составляющая напряжения равна нулю)

$$u_r = -40e^{-83,3t} \text{ В},$$

или для удобства построений

$$u_r = 40e^{-83,3t} \text{ В}.$$

Построим напряжение $u_{нд}(t)$ на рис. 5.10, г (кривая 1) по данным табл. 5.5 (первое приближение).

Затем перенесем значения напряжения $u_{нд}(t)$ на вольт-амперную характеристику (рис 5.10, б) и получим первое приближение тока $i(t)$ (кривая 1, рис. 5.10, а).

Так как $u_c = u_{нд} = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$ (по абсолютной величине), можно

найти второе приближение напряжения $u_{нд}(t)$, если подсчитать площадь под кривой $i(t)$.

Таблица 5.5

$t, \text{с}$	Первое приближение		Второе приближение			Третье приближение		
	$u_{\text{нд}}', \text{В}$	$i, \text{А}$	$S, \text{мм}^2$	$u_{\text{нд}}', \text{В}$	$i, \text{А}$	$S, \text{мм}^2$	$u_{\text{нд}}', \text{В}$	$i, \text{А}$
0	40	0,33	0	40	0,33	0	40	0,33
0,005	26,5	0,275	600	25	0,265	590	25,3	0,27
0,01	17,5	0,195	1040	14	0,13	1011	14,7	0,165
0,015	11,5	0,125	1360	6	0,065	1200	10	0,11
0,02	7,5	0,08	1540	1,5	0,015	1320	7	0,075
0,03	3,3	0,033	—	—	—	—	3,3	0,033
0,04	1,5	0,015	—	—	—	—	1,5	0,015

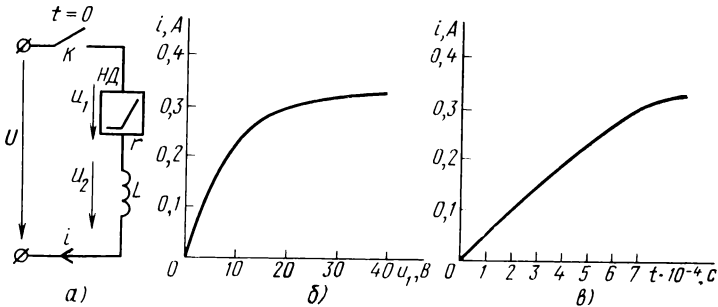


Рис. 5.11. К решению задачи 5.6:

а — схема; б — в. а. х.; в — график зависимости $i(t)$

Тогда с учетом ненулевых начальных условий

$$u_{\text{нд}}(t) = u_{\text{нд}}(0) - \frac{1}{C} mS = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{100 \cdot 10^{-6}} S = 25 \cdot 10^{-3} \text{ С, В,}$$

где m — масштаб по осям тока и времени.

По второму приближению напряжения (кривая 2, рис. 5.10, з) находим второе приближение тока (кривая 2, рис. 5.10, а), а затем третье приближение напряжения (кривая 3, рис. 5.10, з) и третье приближение тока (кривая 3, рис. 5.10, а). Результаты расчета приведены в табл. 5.5.

5.6. Последовательно соединенные индуктивность $L=0,08$ Гн и нелинейный резистивный двухполюсник, характеристика которого задана в табл. 5.3, включаются на постоянное напряжение $U=40$ В. Определить ток в цепи. Задачу решить методом последовательных интервалов.

Решение. В дифференциальном уравнении цепи (рис. 5.11, а)

$$L \frac{di}{dt} + u_i = U$$

заменим производную отношением конечных приращений и получим приближенное уравнение

$$\Delta i \approx \frac{U - u_i}{L} \Delta t.$$

Разобьем время переходного процесса на ряд малых одинаковых интервалов $\Delta t = 0,1$ мс. Тогда для любого (k -го) интервала

$$i_{k+1} = i_k + \Delta i_{k+1} = \frac{U - u_{1k}}{L} \Delta t.$$

Используя вольт-амперную характеристику нелинейного двухполюсника (рис. 5.11, б), проведем расчет и сведем его в табл. 5.6. Зависимость $i(t)$ показана на рис. 5.11, в.

Т а б л и ц а 5.6

№ интер- вала	t_k , мс	i_k , А	u_{1k} , В	$U - u_{1k}$, В	$\frac{U - u_{1k}}{L}$, В/Гн	Δi_{k+1} , А	i_{k+1} , А
0	0	0	0	40	500	0,05	0,05
1	0,1	0,05	1,5	38,5	481	0,0481	0,0981
2	0,2	0,0981	3	37	462	0,0462	0,1443
3	0,3	0,1443	4,75	35,25	440	0,044	0,1883
4	0,4	0,1883	7	33	412	0,0412	0,2295
5	0,5	0,2295	10	30	375	0,0375	0,267
6	0,6	0,267	14,5	25,5	320	0,032	0,299
7	0,7	0,299	20	20	250	0,025	0,324
8	0,8	0,324	35	5	62	0,0062	0,33
9	0,9	0,33	—	—	—	—	—

5.7. Нелинейный емкостный двухполюсник с характеристикой, представленной в табл. 5.7, соединен последовательно с сопротивлением $r = 200$ Ом.

Т а б л и ц а 5.7

u	В	0	20	40	60	80	100	120	130	140	150
$Q \cdot 10^{-2}$	Кл	0	0,15	0,3	0,5	0,7	1	1,5	1,9	2,45	3,1

Определить закон изменения напряжения на нелинейном двухполюснике при включении цепи на постоянное напряжение $U=150$ В. Задачу решить методом графического интегрирования.

5.8. В момент времени $t=0$ нелинейный емкостный двухполюсник, заряженный предварительно до напряжения $U=140$ В, замыкается на сопротивление $r=1000$ Ом. Определить ток в цепи. Характеристика нелинейного двухполюсника приведена в табл. 5.7. Задачу решить методом последовательных интервалов.

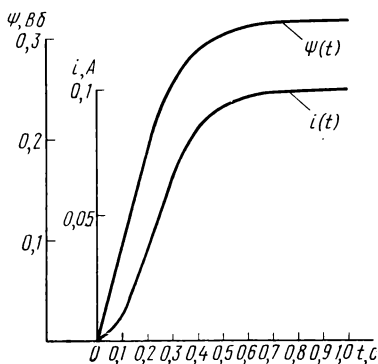


Рис. 5.12. К решению задачи 5.9. Графики зависимостей $\Psi(t)$ и $i(t)$

Расчетные значения зависимостей $\Psi(t)$ и $i(t)$ приведены в табл. 5.8, по результатам которой построены соответствующие графики на рис. 5.12.

5.9. Последовательно соединенные сопротивление $r=10$ Ом и нелинейный индуктивный двухполюсник включены на источник постоянного напряжения $U=1$ В. Определить ток в цепи, если характеристика нелинейного двухполюсника описывается уравнением $i=\Psi^2$. Задачу решить методом пространства состояний.

Решение. Схема цепи приведена на рис. 5.8 и описывается исходным уравнением (5.34), решение которого — уравнение (5.36).

Таблица 5.8

k	$t=kT, \text{ с}$	$\Psi(kT), \text{ Вб}$	$i(kT), \text{ А}$
0	0	0	0
1	0,1	0,1	0,01
2	0,2	0,19	0,036
3	0,3	0,254	0,0645
4	0,4	0,289	0,0835
5	0,5	0,305	0,093
6	0,6	0,312	0,097
7	0,7	0,315	0,0992
8	0,8	0,3158	0,0997
9	0,9	0,3161	0,0999
10	1,0	0,3162	0,09998

§ 6.1. Общие сведения

Задача синтеза линейных цепей сводится, как известно, к нахождению (реализации) такого четырехполюсника (в более частном случае — двухполюсника), передаточная функция которого (либо две или три его передаточные функции) соответствовала бы заданной. Напомним, что свойства четырехполюсника полностью определяются этой (или двумя, или тремя) передаточной функцией $H(\bar{p})$, либо однозначно связанными с нею амплитудно-фазовой характеристикой $H(j\omega)$, переходной функцией $h(t)$ или импульсной переходной функцией $h'(t)$. Варианты передаточных функций очень разнообразны, и задача синтеза пассивных линейных четырехполюсников сводится к нахождению обладающей заданной передаточной функцией схемы четырехполюсника, состоящей из резисторов, конденсаторов и дросселей (или только резисторов и конденсаторов, или только конденсаторов и дросселей) с определенными значениями их параметров.

Переходя к синтезу нелинейных четырехполюсников, напомним, что в общем случае здесь невозможно определить реакцию цепи на заданное воздействие по известной ее реакции на какое-либо иное известное воздействие, так как даже при заданной форме воздействия (например, синусоидальной неизменной частоты) реакция принципиально зависит от его величины и т. д. Отсюда следует важнейшая особенность, состоящая в том, что для достаточно полного отражения свойств нелинейного четырехполюсника нужно задать не имеющую в данном случае смысла передаточную функцию, а несколько конкретных видов воздействий с требуемыми на них реакциями, которые охватывали бы всю область ожидаемых в рабочем режиме сигналов.

Задача синтеза нелинейных цепей сводится к нахождению схемы четырехполюсника с соответствующим количеством линейных и, главное, нелинейных резисторов,

конденсаторов и дросселей с определенными нелинейными характеристиками. Число выпускаемых промышленностью стандартных нелинейных элементов непрерывно растет, но далеко не всегда может удовлетворить растущим требованиям. Отсюда следует еще одна специфическая особенность синтеза нелинейных цепей, связанная с их реализацией, — задача создания сложных нелинейных характеристик из более простых нелинейностей.

В заключение отметим, что при синтезе нелинейных цепей всегда приходится предварительно задаваться полной схемой цепи. Почти то же самое имеет место и при синтезе линейных цепей, поскольку выбор метода синтеза предопределяет если не полную конфигурацию цепи, то во всяком случае общий характер ее структуры (например, цепочечная безындуктивная и т. п.).

Далее при рассмотрении схем в большинстве случаев будем полагать, что сопротивление нагрузки на выходе четырехполюсника столь велико, что $i_H \approx 0$.

§ 6.2. Синтез вольт-амперной характеристики нелинейного двухполюсного элемента резистивного четырехполюсника гармоническим методом

Рассмотрим синтез нелинейного резистивного четырехполюсника (рис. 6.1, *a*) в установившемся режиме с помощью гармонического метода (метода тригонометрических формул).

Пусть на вход подается гармонический сигнал

$$u_{вх} = U_{m_{вх}} \cos \omega t, \quad (6.1)$$

где $U_{m_{вх}} = \text{const}$.

Условимся, что выходной сигнал при этом должен содержать только n -ю гармонику, а фазовый сдвиг не существен. Тогда, учитывая, что $i_1 = i_2$, получим

$$u_{вых} = r i_2 = r i_1 = U_{m_{вых}} \cos n \omega t. \quad (6.2)$$

Требуется найти вольт-амперную характеристику $i_{нд}(u_{нд}) = i_1(u_{нд})$ нелинейного резистивного двухполюсника, который обеспечит бы этот режим.

Вначале найдем эквивалентную вольт-амперную характеристику $i_1(u_{вх})$, которая является входной характеристикой ненагруженного четырехполюсника (рис. 6.1, *a*).

Представим пока еще неизвестную эквивалентную характеристику $i_1(u_{\text{вх}})$ в виде степенного ряда

$$i_1 = a_0 + a_1 u_{\text{вх}} + a_2 u_{\text{вх}}^2 + a_3 u_{\text{вх}}^3 + a_4 u_{\text{вх}}^4 + \dots \quad (6.3)$$

Выходной сигнал при этом

$$u_{\text{вых}} = r (a_0 + a_1 U_{m_{\text{вх}}} \cos \omega t + a_2 U_{m_{\text{вх}}}^2 \cos^2 \omega t + a_3 U_{m_{\text{вх}}}^3 \cos^3 \omega t + a_4 U_{m_{\text{вх}}}^4 \cos^4 \omega t + \dots), \quad (6.4)$$

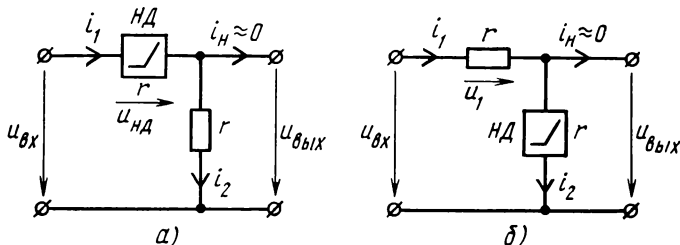


Рис. 6.1. Резистивный четырехполюсник с одной нелинейностью:

а — в горизонтальной ветви; б — в вертикальной ветви

что подтверждает возможность возникновения новых гармонических составляющих в цепи с нелинейным резистивным двухполюсником.

Пусть в поставленной задаче $n=2$, т. е. выходной сигнал содержит только вторую гармонику. Тогда выражение (6.4) принимает вид

$$U_{m_{\text{вых}}} \cos 2\omega t = ra_0 + ra_1 U_{m_{\text{вх}}} \cos \omega t + ra_2 U_{m_{\text{вх}}}^2 \cos^2 \omega t + ra_3 U_{m_{\text{вх}}}^3 \cos^3 \omega t + ra_4 U_{m_{\text{вх}}}^4 \cos^4 \omega t + \dots, \quad (6.5)$$

или

$$U_{m_{\text{вых}}} (2 \cos^2 \omega t - 1) = ra_0 + ra_2 U_{m_{\text{вх}}}^2 \cos^2 \omega t, \quad (6.6)$$

откуда

$$a_0 = -\frac{U_{m_{\text{вых}}}}{r}; \quad (6.7)$$

$$a_2 = \frac{2U_{m_{\text{вых}}}}{rU_{m_{\text{вх}}}^2}, \quad (6.8)$$

причем a_1 , a_3 и a_4 тождественно равны нулю.

Следовательно, эквивалентная вольт-амперная характеристика представляет собой квадратичную параболу вида

$$i_1 = -\frac{U_{\text{ВЫХ}}}{r} + \frac{2U_{\text{ВЫХ}}}{rU_{\text{ВХ}}^2} u_{\text{ВХ}}^2. \quad (6.9)$$

откуда легко найти искомую характеристику $i_{\text{нд}}(u_{\text{нд}})$ (см. § 1.3, рис. 6.2).

При точной реализации вольт-амперной характеристики выражением (6.6), а также при строго фиксированной амплитуде входного сигнала выходной сигнал будет содержать только вторую гармонику. При несоблюдении этих условий (а также при нестабильности частоты ω) на выходе должен быть поставлен соответствующий фильтр.

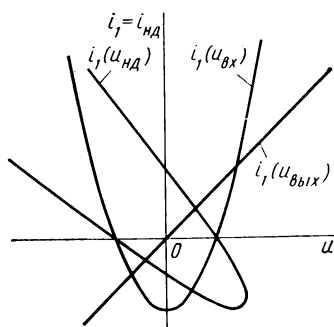


Рис. 6.2. Построение графиков зависимостей $i_1(u_{\text{вх}})$, $i_1(u_{\text{вых}})$, $i_1(u_{\text{нд}})$

Изложенная идея в принципе может быть использована и в более сложных задачах, требующих учета нескольких гармоник выходного сигнала с определенными фазовыми сдвигами, при более сложных входных воздей-

ствиях и т. д. Очевидно, что изложенная идея может быть использована и для синтеза реактивных четырехполюсников, но в установившемся режиме.

§ 6.3. Синтез вольт-амперной характеристики нелинейного двухполюсного элемента резистивного четырехполюсника методом трех плоскостей

Для применения метода трех плоскостей обратимся вначале к простейшей схеме Г-образного резистивного четырехполюсника, нелинейный элемент которого включен либо в горизонтальную (см. рис. 6.1, а), либо в вертикальную (см. рис. 6.1, б) ветвь. Будем полагать заданными аналитические зависимости или временные графики входного воздействия $u_{\text{вх}}(t)$ и реакции на выходе $u_{\text{вых}}(t)$, а также величину линейного сопротивления

r. Требуется найти вольт-амперную характеристику $i_{\text{нд}}(u_{\text{нд}})$ нелинейного резистивного двухполюсника *НД*.

Для схемы рис. 6.1, *б* падение напряжения на линейном сопротивлении *r*

$$ri_1(t) = u_{\text{вх}}(t) - u_{\text{вых}}(t). \quad (6.10)$$

Если теперь из соотношения $u_{\text{вых}}(t)$ найти обратную зависимость $t(u_{\text{вых}})$ и подставить ее в выражение (6.10) (исключив тем самым время *t*), то получим

$$ri_1(u_{\text{вых}}) = u_{\text{вх}}(u_{\text{вых}}) - u_{\text{вых}}. \quad (6.11)$$

Учитывая, что $u_{\text{вых}} = u_{\text{нд}}$, а $i_1 = i_2$, запишем расчетное выражение

$$ri_2(u_{\text{нд}}) = u_{\text{вх}}(u_{\text{вых}}) - u_{\text{вых}}, \quad (6.12)$$

которое отличается от искомой вольт-амперной характеристики $i_2(u_{\text{нд}})$ только масштабом, определяемым величиной линейного сопротивления *r*.

Соответствующие операции, очевидно, могут быть выполнены как аналитически, так и графически.

Рассмотрим графический вариант, полагая, что воздействие и реакция изображаются кривыми, представленными на рис. 6.3, *а, б*.

Входящую в расчетное выражение (6.12) зависимость $u_{\text{вх}}(u_{\text{вых}})$ иногда называют обратной характеристикой преобразования в отличие от характеристики преобразования четырехполюсника $u_{\text{вых}}(u_{\text{вх}})$. Зависимости $u_{\text{вх}}(u_{\text{вых}})$ легко найти показанными на рис. 6.3 построениями, весьма сходными с используемым при анализе нелинейных цепей способом определения реакции по заданному входному воздействию и вольт-амперной характеристике цепи (см. § 3.5).

Дальнейшие построения связаны с определением разности, стоящей в правой части выражения (6.12), и показаны на рис. 6.4. Величину $ri_2(u_{\text{нд}})$ здесь находят как разность обратной характеристики преобразования и биссектрисы угла (при равных масштабах обоих напряжений), которая в этом случае представляет собой характеристику $u_{\text{вых}}(u_{\text{вых}})$. Вольт-амперную характеристику нелинейного резистивного двухполюсника $i_2(u_{\text{нд}}) = i_2(u_{\text{вых}})$ находят просто изменением масштаба. Путь реализации таких характеристик рассмотрен далее (см. рис. 6.14).

Возвращаясь к схеме рис. 6.1, *а*, запишем выражение для падения напряжения на нелинейном двухполюснике *НД*

$$u_{\text{нд}}(t) = u_{\text{вх}}(t) - u_{\text{вых}}(t). \quad (6.13)$$

Подставляя, как и прежде, в это выражение $i(u_{\text{вых}})$, получим

$$u_{\text{нд}}(u_{\text{вых}}) = u_{\text{вх}}(u_{\text{вых}}) - u_{\text{вых}}. \quad (6.14)$$

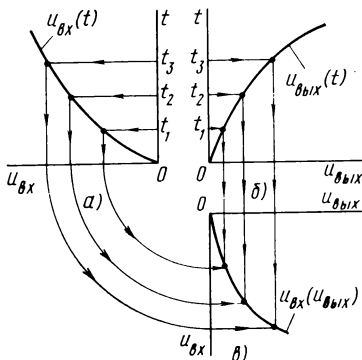


Рис. 6.3. Построение обратной характеристики преобразования четырехполюсника:

а — воздействие $u_{\text{вх}}(t)$; *б* — реакция $u_{\text{вых}}(t)$; *в* — обратная характеристика преобразования

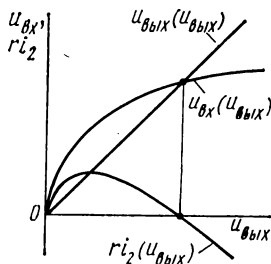


Рис. 6.4. Построение в. а. х. резистивного двухполюсника для схемы рис. 6.1, *б*

Учитывая, что $u_{\text{вых}} = ri_2$, а $i_2 = i_1$, найдем расчетное выражение

$$u_{\text{нд}}(ri_1) = u_{\text{вх}}(u_{\text{вых}}) - u_{\text{вых}}, \quad (6.15)$$

которое отличается от искомой ампер-вольтной характеристики $u_{\text{нд}}(i_1)$ только масштабом, определяемым величиной линейного сопротивления r .

Из равенства правых частей расчетных выражений (6.12) и (6.15) следует, что графические операции при их использовании будут одинаковыми, но если для схемы с нелинейностью в вертикальной ветви получается вольт-амперная характеристика, то для схемы с нелинейностью в горизонтальной ветви — обратная, т. е. ампер-вольтная характеристика. Поэтому при одинаковых характеристиках преобразования четырехполюсников, представленных

на рис. 6.1, кривые вольт-амперной и ампер-вольтной характеристики будут одинаковы.

Очевидно, что если необходимо учесть нагрузку четырехполюсника, то методика расчета не меняется. Однако для схемы рис. 6.1, б результат будет относиться к эквивалентной нелинейности, состоящей из параллельно соединенных нелинейного резистивного двухполюсника и нагрузочного сопротивления, причем последнее может быть и нелинейным. Поскольку сопротивление нагрузки

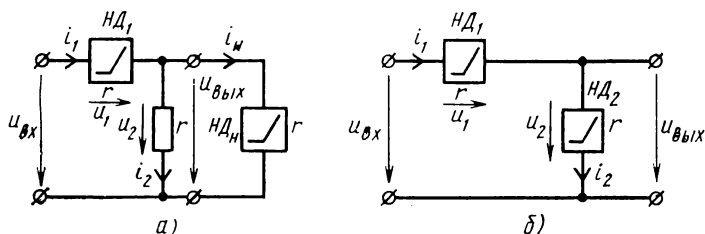


Рис. 6.5. Резистивный четырехполюсник с двумя нелинейностями:

а — исходная схема; б — эквивалентная схема

предполагается заданным, вольт-амперную характеристику нелинейного двухполюсника находят известными из анализа способами.

Если для схемы рис. 6.1, а сопротивление нагрузки будет линейным, то в расчеты просто нужно ввести эквивалентное линейное сопротивление, равное параллельно соединенным двум сопротивлениям: r и r_n . Если же нагрузка нелинейная (рис. 6.5, а), то получается несколько усложненный вариант четырехполюсника с двумя нелинейными двухполюсниками, так как параллельное соединение сопротивления r и двухполюсника нагрузки дает некоторый эквивалентный нелинейный двухполюсник HD_2 , который показан на схеме рис. 6.5, б.

Рассмотрим схему рис. 6.5, б. Будем полагать, что вольт-амперная или ампер-вольтная характеристики нелинейного двухполюсника HD_2 $i_2(u_2)$ или $u_2(i_2)$ заданы.

Падение напряжения на нелинейном двухполюснике HD_1

$$u_1(i_1) = u_1[i_2(u_2)],$$

так как $i_1 = i_2$. Тогда

$$u_{BX}(t) = u_1[i_2(u_2(t))] + u_{ВЫХ}(t). \quad (6.16)$$

Используя, как и ранее, обратную зависимость $i(u_{\text{вых}})$ и учитывая, что $u_2 = u_{\text{вых}}$, получим

$$u_1[i_2(u_2)] = u_{\text{вх}}(u_{\text{вых}}) - u_{\text{вых}}. \quad (6.17)$$

Очевидно, что зависимость $u_1[i_2(u_2)] = u_1(u_2)$ может быть найдена теми же графическими операциями, что и для выражения (6.15). Для определения искомой ампер-вольтовой характеристики $u_1(i_1)$ должна быть исключена переменная u_2 , что делается по заданной ампер-вольтовой характеристике нелинейного двухполюсника HD_2 дополнительными построениями, показанными на рис. 6.6.

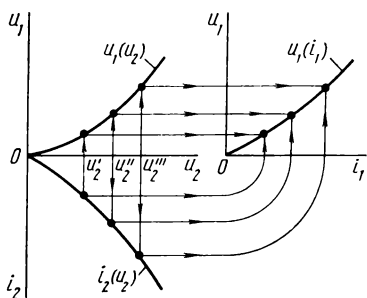


Рис. 6.6. Дополнительные построения для двух нелинейных резистивных двухполюсников:

Важно отметить, что четырехполюсник с двумя нелинейностями как самостоятельный вариант облегчает требования к виду нелинейности, поскольку «результатирующая» нелинейность формируется здесь как комбинация двух нелинейностей, каждая из которых поэтому может иметь более простой вид. Это подтверждается сопоставлением выражений (6.15) и (6.17), которые показы-

вают, что для схем рис. 6.1 изменением линейного сопротивления можно менять только масштаб нелинейной вольт-амперной характеристики, а для схем рис. 6.5 изменением вида произвольно выбираемой характеристики $u_2(i_2)$ можно менять и форму характеристики $u_1(i_1)$.

Очевидно, что рассмотренным в настоящем параграфе более общим методом может быть решена и задача предыдущего параграфа.

§ 6.4. Синтез вольт-амперной характеристики нелинейного резистивного двухполюсного элемента активно-реактивного четырехполюсника

Будем предполагать постановку задачи прежней, но вместо линейного сопротивления пусть схема содержит линейный реактивный элемент, например индуктивность L , как это показано на рис. 6.7.

Тогда падение напряжения на индуктивности

$$L \frac{di_1(t)}{dt} = u_{\text{вх}}(t) - u_{\text{вых}}(t), \quad (6.18)$$

откуда

$$Li_1(t) = \int_0^t u_{\text{вх}}(t) dt - \int_0^t u_{\text{вых}}(t) dt, \quad (6.19)$$

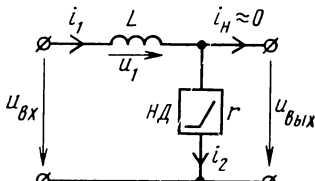
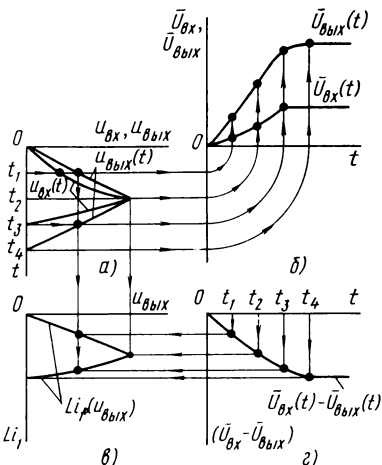


Рис. 6.7. Активно-реактивный четырехполюсник с нелинейным резистивным двухполюсником

Рис. 6.8. Построение в. а. х. нелинейного резистивного двухполюсника для схемы рис. 6.6:

а — воздействие $u_{\text{вх}}(t)$ и реакция $u_{\text{вых}}(t)$; б — графики зависимостей $\bar{U}_{\text{вх}}(t)$, $\bar{U}_{\text{вых}}(t)$; в — искомая в. а. х.; г — график зависимости $\bar{U}_{\text{вх}}(t) - \bar{U}_{\text{вых}}(t)$



что можно записать более кратко

$$Li_1(t) = \bar{U}_{\text{вх}}(t) - \bar{U}_{\text{вых}}(t), \quad (6.20)$$

где через $\bar{U}(t)$ выражены значения соответствующих интегралов для моментов времени t .

Если теперь, как и ранее, воспользуемся обратной зависимостью $t(u_{\text{вых}})$ и учтем, что $u_{\text{вых}}$ равно напряжению $u_{\text{нд}}$ на нелинейном двухполюснике, а $i_1 = i_2$, то получим выражение

$$Li_1(u_{\text{вых}}) = \bar{U}_{\text{вх}}(u_{\text{вых}}) - \bar{U}_{\text{вых}}(u_{\text{вых}}), \quad (6.21)$$

которое отличается от искомой вольт-амперной характеристики $i_2(u_{\text{нд}})$ только масштабом, определяемым величиной индуктивности L .

Обратим внимание на внешнее сходство соотношений (6.12) и (6.21). Последнее отличается только тем, что для получения входящих в правую часть слагаемых необходимо предварительно его проинтегрировать.

Соответствующие графические построения показаны на рис. 6.8, где вначале (рис. 6.8, а и б) построены графики $\overline{U}_{\text{вх}}(t)$ и $\overline{U}_{\text{вых}}(t)$, дающие значения интегралов входного и выходного сигналов, а также разность $[\overline{U}_{\text{вх}}(t) - \overline{U}_{\text{вых}}(t)]$ (рис. 6.8, в). Затем (рис. 6.8, г) из функции, соответствующей этой разности, исключено время t и согласно выражению (6.21) получена зависимость $Li_1(u_{\text{вых}})$. Искомую вольт-амперную характеристику нелинейного двухполюсника $i_2(u_{\text{нд}}) = i_1(u_{\text{вых}})$ находят простым изменением масштаба.

Введение реактивных элементов в схему существенно влияет на характер нелинейности, и довольно часто может облегчить требования к виду нелинейности двухполюсника по сравнению с чисто резистивным вариантом четырехполюсника.

§ 6.5. Синтез характеристик нелинейных реактивных двухполюсных элементов активно-реактивного четырехполюсника

Будем считать общую постановку задачи прежней, за исключением того, что схема будет содержать известный линейный резистор и нелинейный реактивный двухполюсник, соответствующую характеристику которого требуется определить. Напомним, что нелинейный емкостный двухполюсник обычно характеризуется зависимостью величины заряда или емкости от напряжения $Q(u_C)$ или $C(u_C)$, а нелинейный индуктивный двухполюсник — зависимостью потокосцепления или индуктивности от тока $\Psi(i_L)$ или $L(i_L)$, где как емкость, так и индуктивность могут быть статическими или дифференциальными.

Пусть схема имеет вид, представленный на рис. 6.9, а. Ток цепи равен скорости изменения величины заряда конденсатора Q во времени

$$i_2(t) = i_1(t) = \frac{dQ(t)}{dt}.$$

Отсюда

$$r \frac{dQ(t)}{dt} = u_{\text{вх}}(t) - u_{\text{вых}}(t), \quad (6.22)$$

что по структуре соответствует выражению (6.18).

Проинтегрировав выражение (6.22), получим

$$rQ(t) = \int_0^t u_{вх}(t) dt - \int_0^t u_{вых}(t) dt \quad (6.23)$$

или в более краткой форме

$$rQ(t) = \bar{U}_{вх}(t) - \bar{U}_{вых}(t). \quad (6.24)$$

Воспользовавшись обратной зависимостью $t(u_{вых})$ и учитывая, что $u_{вых}$ равно напряжению на двухполюснике $u_{нд}$, получим

$$rQ(u_{вых}) = \bar{U}_{вх}(u_{вых}) - \bar{U}_{вых}(u_{вых}). \quad (6.25)$$

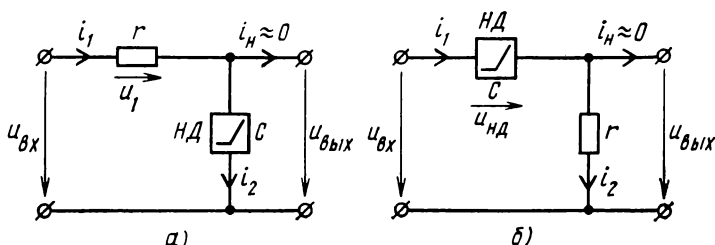


Рис. 6.9. Активно-реактивный четырехполюсник с нелинейным емкостным двухполюсником:

а — в вертикальной ветви; б — в горизонтальной ветви

Выражение (6.25) отличается от искомой вольт-кулонной характеристики $Q(u_{нд})$ только масштабом, определяемым величиной линейного сопротивления r .

Для графического решения этого уравнения нужно выполнить те же операции, что и при решении уравнения (6.21).

Если нужно охарактеризовать нелинейный двухполюсник вольт-фарадной характеристикой, то достаточно продифференцировать полученную зависимость

$$C_{диф}(u_c) = \frac{d}{du_c} [Q(u_c)].$$

Для схемы рис. 6.9, б необходимо найти обратную зависимость для напряжения на емкостном двухполюснике $t(u_{нд})$, что не представляет затруднений, поскольку

$$u_{нд}(t) = u_{вх}(t) - u_{вых}(t).$$

Тогда вольт-кулонная характеристика $Q(u_c)$ может быть найдена из следующего выражения

$$rQ(u_{нд}) = \overline{U}_{\text{вых}}(u_{нд}). \quad (6.26)$$

§ 6.6. Реализация синтезированных цепей

Приведенные примеры иллюстрируют идею синтеза, предполагающую схему нелинейной цепи заданной. Очевидно, что все операции здесь легко алгоритмизируются. При этом многообразные схемные варианты могут быть объединены в значительно меньшее количество вариантов алгоритмов.

Важной особенностью практического синтеза нелинейных цепей, как и цепей линейных, остается выбор оптимальной реализации.

Специфической трудностью здесь является изменение характера реакции при изменении амплитуды воздействия. Даже оставаясь в рамках только одного воздействия, можно встретиться с необходимостью просмотра вариантов схем с одной или несколькими нелинейностями резистивного варианта или варианта с реактивностями, причем реактивности можно выбирать линейными и нелинейными и т. д. При такой постановке задачи, т. е. при включении в нее и выбора схемы, обобщенная алгоритмизация уже значительно затруднена, если только не заменить ее каким-то направленным перебором схемных вариантов.

Как указывалось, реализация схемы Г-образного четырехполюсника с нелинейностями в обеих ветвях облегчает требования к характеру нелинейности по сравнению с вариантом одной нелинейности. Дальнейшее упрощение характера используемых нелинейностей может быть достигнуто применением либо усложненных вариантов четырехполюсников (мостовые и т. д.), либо каскадным соединением нескольких Г-образных четырехполюсников.

В последнем случае можно исходить из наиболее близкой к требуемой реальной нелинейности и на ее основе определить (методами анализа), какова должна быть форма входного сигнала на содержащем эту нелинейность четырехполюснике, чтобы выходной сигнал имел заданную форму. Рассматривая такой четырехполюсник как конечный каскад, получим, что найденная форма входного сигнала будет для предоконечного каскада вы-

ходной (входным сигналом по-прежнему является заданное воздействие для всего каскада). Затем операция повторяется, выясняются требования к третьему от конца четырехполюснику и так далее, пока синтезированный и заданный входные сигналы с требуемой точностью не совпадут.

Заметим, что в простейшем с точки зрения расчетных операций варианте формирования каскада предполагается применение нелинейных направленных четырехполюсников.

В общем случае это приводит к невозможности реализации каскада пассивными схемами, так как возникает необходимость в развязывающих цепях усилительных устройств.

Вообще, сложный характер нелинейностей с отрицательными и неоднозначными характеристиками резистивных, индуктивных и емкостных двухполюсников обычно требует применения активных схем.

Остановимся кратко на общей идее формирования сложных нелинейных двухполюсников, которые входят в состав рассмотренных четырехполюсников, из более простых двухполюсников. Рассмотрим эту задачу в резистивном варианте, т. е. применительно к формированию вольт-амперной характеристики $i(u)$.

Пусть заданная характеристика имеет вид, представленный на рис. 6.10, а. Аппроксимируем ее тремя сопрягающимися прямыми согласно рис. 6.10, б. Тогда соответствующий ей двухполюсник может быть в принципе реализован схемой рис. 6.10, в, состоящей из трех источников э. д. с., сопротивлений и диодов.

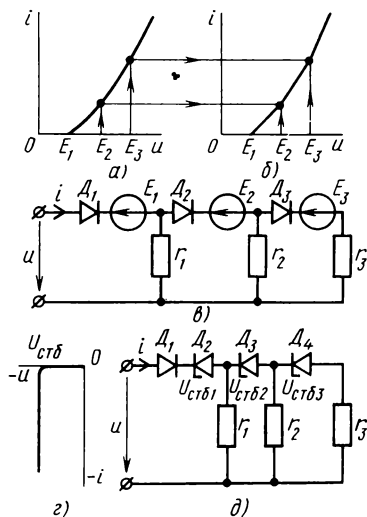


Рис. 6.10. К реализации сложных в. а. х. двухполюсников:

а — заданная в. а. х.; б — кусочно-линейная аппроксимация характеристики; в — реализация активной схемой; г — в. а. х. стабилизатора; д — реализация пассивной схемой

Действительно, при значениях напряжения в интервале от 0 до E_1 входной сигнал меньше напряжения источника E_1 , первый диод остается закрытым и ток $i=0$. При значении $u > E_1$ первый диод открывается, и в цепи возникает ток $i = \frac{u - E_1}{r_1}$. Когда напряжение u превышает величину E_2 , открывается второй диод. На интервале $E_2 < u < E_3$ ток $i = \frac{u - E_1}{r_1} + \frac{u - E_1 - E_2}{r_2}$. Очевидно, что для значений напряжений u , больших E_3 , ток $i = \frac{u - E_1}{r_1} + \frac{u - E_1 - E_2}{r_2} + \frac{u - E_1 - E_2 - E_3}{r_3}$. Соответствующим подбором сопротивлений можно обеспечить нужный наклон участков характеристики.

Заданная характеристика здесь сформирована на простейших нелинейностях в виде трех однотипных диодов, но схема содержит три источника энергии. Если же использовать специальные стабилитроны (опорные диоды), имеющие характеристику, показанную на рис. 6.10, з (здесь требуется три типа диодов с разными значениями напряжения стабилизации $U_{ст6}$), то заданная вольт-амперная характеристика может быть реализована пассивной схемой рис. 6.10, д.

В случае необходимости реализации нелинейных емкостных и индуктивных двухполюсников часто используют не нелинейные емкости и индуктивности, а резистивные двухполюсники типа рассмотренных ранее, включаемые через соответствующие активные фазосдвигающие схемы (четыреполюсники), некоторые из которых будут рассмотрены далее.

§ 6.7. Мутаторы, скалоры и ротаторы

Существуют четырехполюсники, которые, если нагрузить их нелинейным (или линейным) резистивным двухполюсником, на входе приобретают свойства нелинейной (или линейной) индуктивности или емкости. Их называют соответственно *Lr*- или *Cr*-м у т а т о р а м и. Используют также *LC*-мутаторы.

Если нужно изменить не характер нагрузки, а масштаб соответствующей нелинейной характеристики, то применяют четырехполюсники, называемые с к а л о р а м и.

Наконец, если нужно повернуть на нужный угол исходную вольт-амперную, вебер-амперную или кулон-вольтную характеристику, то используемые четырехполюсники называются р о т а т о р а м и.

Ознакомимся с общими принципами реализации мутаторов на примере Lr -мутаторов.

Для уяснения физических процессов в четырехполюсниках, выполняющих функции мутаторов, рассмотрим вначале так называемые E -преобразования, идея которых заключается в том, что если в некоторой схеме

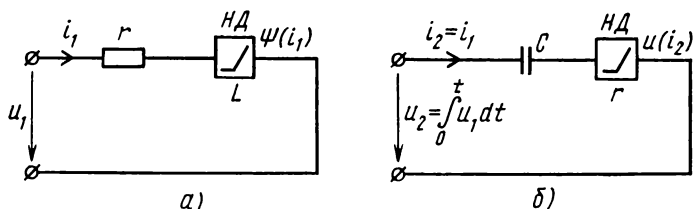


Рис. 6.11. К пояснению E -преобразований:

a — исходная схема; b — преобразованная схема

задана реакция на воздействие $u_1(t)$, то всегда можно найти иную измененную схему с сохраненным видом реакции, если соответственно изменению схемы изменить и входное воздействие, которое теперь будет иметь вид $u_2(t)$. Другими словами, должен быть преобразован источник сигнала, что и дало название методу.

В простейших случаях достаточно изменить масштаб, продифференцировать или проинтегрировать обе части уравнения, описывающего процессы в исходной цепи.

В качестве примера рассмотрим схему рис. 6.11, a , состоящую из источника напряжения $u_1(t)$ и последовательно соединенных линейного сопротивления r и нелинейного индуктивного двухполюсника с вебер-амперной характеристикой $\Psi(i_L)$. Поставим задачу замены нелинейного индуктивного двухполюсника нелинейным резистивным двухполюсником с сохранением характера изменения тока в цепи, т. е. должно иметь место условие

$$i_1(t) = i_2(t). \quad (6.27)$$

Составим уравнение исходной цепи

$$ri_1 + \frac{d\Psi(i_1)}{dt} = u_1. \quad (6.28)$$

Проинтегрировав (6.28), получим

$$r \int_0^t i_1 dt + \Psi(i_1) = \int_0^t u_1 dt. \quad (6.29)$$

Это новое уравнение можно рассматривать как уравнение цепи, имеющей источник напряжения

$$u_2 = \int_0^t u_1 dt \quad (6.30)$$

и содержащей последовательно соединенные линейную емкость $C = 1/r$ и нелинейный резистивный двухполюсник с ампер-вольтной характеристикой $u(i) = \Psi(i)$.

Представим уравнение (6.29) в виде

$$\frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt + u(i_2) = u_2, \quad (6.31)$$

что соответствует схеме рис. 6.11, б, характер изменений тока в которой аналогичен изменениям тока в исходной схеме в соответствии с условием (6.27).

В более простом случае, когда в исходной схеме $r = 0$, имеем

$$\frac{d\Psi(i_1)}{dt} = u_1; \quad (6.28a)$$

$$\Psi(i_1) = \int_0^t u_1 dt; \quad (6.29a)$$

$$u_2 = \int_0^t u_1 dt \quad (6.30a)$$

и

$$u(i_2) = u_2, \quad (6.31a)$$

что соответствует переходу от схемы рис. 6.12, а к схеме рис. 6.12, б.

Очевидно, что переход от исходного двухполюсника рис. 6.12, а к двухполюснику с аналогичными входными параметрами, но содержащему вместо нелинейного индуктивного двухполюсника нелинейный резистивный двухполюсник, можно получить, включив между входом и резистивным двухполюсником четырехполюсник, обеспечивающий преобразование входного напряжения по

закону (6.30а) при сохранении характера изменения входного тока, как это показано на рис. 6.12, в.

Такого рода четырехполюсники, позволяющие заменить линейный или нелинейный индуктивный двухполюсник на соответствующий резистивный двухполюсник, и являются *Lr*-мутаторами.

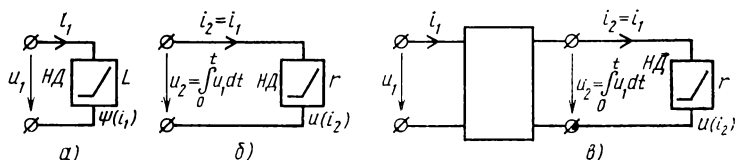


Рис. 6.12. К пояснению действия мутатора:

а — исходный двухполюсник; б — Е-преобразованный двухполюсник; в — эквивалентный исходному двухполюсник с мутатором

В соответствии с сформулированными условиями запишем систему уравнений *Lr*-мутатора в форме *B*-параметров*:

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{p} u_1; \\ i_2 &= i_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

что соответствует матричной записи

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{Bmatrix}. \quad (6.33)$$

Для формы *A*-параметров соответственно получим

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= p u_2; \\ i_1 &= i_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

и

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{Bmatrix}. \quad (6.35)$$

Мутаторы могут быть использованы не только для преобразования схемы в расчетном плане, но и реализованы физически.

* Здесь и далее *p* обозначает оператор дифференцирования, а *1/p* — оператор интегрирования.

Из уравнений (6.32) — (6.35) видно, что условие обратимости четырехполюсника ($A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$) в этом случае не выполняется. Это свидетельствует о том, что Lr -мутатор может быть реализован только активным четырехполюсником (с зависимыми источниками).

Схема замещения Lr -мутатора может быть составлена в различных вариантах. Так, на рис. 6.13, *а*, *б* представлена схема с двумя источниками, составленная на базе уравнений (6.32) в форме B -параметров. Здесь вход

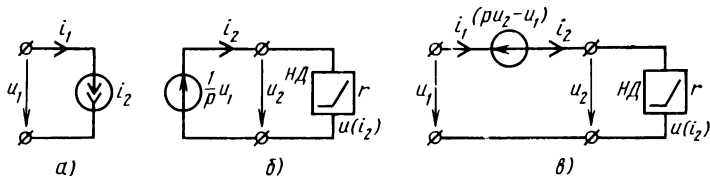


Рис 6.13. Схемы замещения Lr -мутатора:

а и *б* — для системы B -параметров; *в* — для системы A -параметров

и выход развязаны гальванически, причем выходное напряжение u_2 обеспечивается зависимым источником э. д. с., выдающим интеграл от входного напряжения u_1 , а прежняя величина и направление входного тока i_1 обеспечены зависимым источником тока во входной цепи, генерирующим ток i_2 .

На рис. 6.13, *в* изображена схема с одним источником, полученная на базе уравнений (6.34) в форме A -параметров. Здесь вход и выход связаны гальванически, а э. д. с. источника определяется величиной $(pu_2 - u_1)$, что требует дополнительной операции алгебраического суммирования при реализации этого источника.

Не останавливаясь на реализации скалоров, по существу представляющих собой усилители напряжения или тока, рассмотрим кратко принципы реализации ротаторов на примере r -ротатора, позволяющего повернуть на некоторый угол α вольт-амперную характеристику резистивного двухполюсника $i(u)$ и получить резистивный двухполюсник с требуемой характеристикой $i'(u')$, как это показано на рис. 6.14, *а* и *б*.

Учитывая, что поворот характеристики на некоторый угол в одном направлении эквивалентен повороту координатных осей в противоположном направлении, и используя известную из аналитической геометрии формулу

поворота осей (рис. 6.14, в), получим уравнения ротатора рис. 6.14, б (без учета масштабных коэффициентов по осям u и i):

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (\cos \alpha) u_2 - (\sin \alpha) i_2; \\ i_1 &= (\sin \alpha) u_2 + (\cos \alpha) i_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

Входная вольт-амперная характеристика такого четырехполюсника, нагруженного на резистивный двухполюсник,

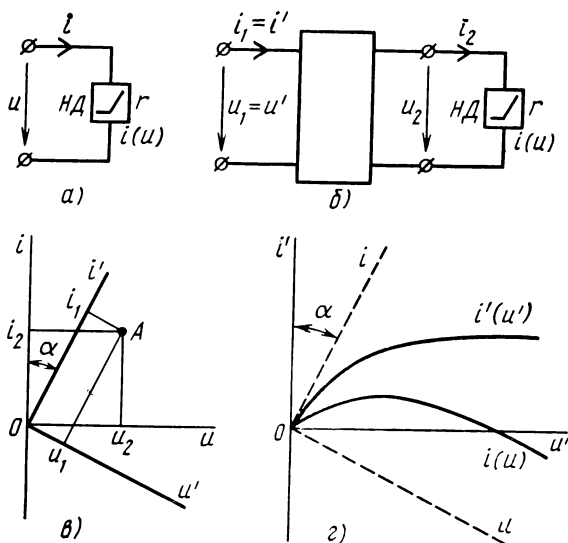


Рис. 6.14. К пояснению действия ротатора:

а — исходный резистивный двухполюсник; б — двухполюсник с повернутыми осями, содержащий ротатор, нагруженный на исходный двухполюсник; в — к формулам (6.38) и (6.39); г — получение неоднозначной характеристики из однозначной

люсник $i(u)$, и будет, очевидно, иметь требуемый вид $i'(u')$.

Уравнениям (6.36) соответствует матричная запись в форме A -параметров

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

Параметры T - или Π -образной схемы замещения могут быть получены из соотношения (6.37) путем использования формул соответствия между A -параметрами и параметрами указанных схем.

В теоретическом отношении роль мутаторов очень важна, поскольку они позволяют свести цепь с линейными и нелинейными r , L и C к цепи, содержащей только линейные и нелинейные r (либо только L или только C).

Отметим особую важность этого рода элементов для реализации сложного вида нелинейностей в твердотельных (интегральных) схемах. Рис. 6.14, *г* иллюстрирует, например, получение неоднозначной характеристики путем поворота однозначной характеристики (более просто получаемой в исходном состоянии) на угол α по часовой стрелке.

Техническая реализация схем замещения мутаторов, скалоров и ротаторов связана с разработкой полупроводниковых усилительных схем и выходит за рамки данного курса.

ГЛАВА 7. АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ ДЛЯ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

§ 7.1. Общие сведения

Изложенный материал имел своей основной целью ознакомить в общих чертах с существующими методами расчета установившихся и переходных процессов в нелинейных электрических цепях, а также в какой-то степени систематизировать эти методы, исходя из конфигурации схем и распространенных режимов работы нелинейностей. Поэтому изложение велось на достаточно простых примерах. В случаях же более сложных схем и особенно режимов работы (не сводимых в условиях конкретных задач к применению методов компенсации и пусковых характеристик), когда надо использовать сложные аппроксимации нелинейностей, применение современной вычислительной техники становится необходимым, особенно для задач синтеза нелинеаризуемых цепей.

В зависимости от конкретных задач здесь возможно использование как цифровых (ЦВМ), так и аналоговых (АВМ) вычислительных машин.

Нужно отметить, что зависящие от исследуемых схем структурные схемы АВМ составляют по особым правилам, и эти схемы не всегда являются подобными или дуальными исследуемым схемам в электрическом смысле. Другими словами, как и при исследовании на ЦВМ, здесь требуется предварительное программирование.

Можно полагать, что для расчета сложных схем, особенно при необходимости достаточно точно описать нелинейности, наиболее экономично применение смешанных вычислительных устройств, которые принято разделять на комбинированные, использующие сочетание различных вычислительных устройств (АВМ—ЦВМ) и их элементов в рамках решения одной задачи, и гибридные, в которых используются элементы с неразделимыми и цифровыми признаками. Конечной целью здесь, как и в других областях применения вычислительной техники, является разработка автоматизированного проектирова-

ния, т. е. в данном случае — автоматизированного анализа и синтеза нелинейных цепей, соответствующих наиболее распространенным схемам и режимам конкретных электротехнических устройств.

Решение этой проблемы должно включать следующие этапы:

1) дальнейшую систематизацию нелинейных цепей по видам схем и режимам работы (подсхемы);

2) систематизацию возникающих при этом вычислительных операций и выбор вычислительных средств, наиболее целесообразно выполняющих эти операции;

3) разработку подпрограмм, соответствующих отдельным подсхемам;

4) разработку операционной системы, позволяющей проектировщику составить и ввести в машину программу для данного конкретного случая, набранную из подпрограмм.

Поставленная конечная цель требует для своего осуществления большого объема памяти и высокого быстродействия.

В настоящее время какие-либо общие рекомендации отсутствуют, и приходится решать вопрос об использовании вычислительной техники в каждом отдельном случае, исходя из конкретных задач и имеющихся в распоряжении вычислительных устройств. Здесь можно лишь заметить, что в этих условиях не следует слишком увлекаться применением вычислительной техники, особенно цифровой, и перекладывать на ЦВМ все решение задачи — с начала и до конца. В принципе всегда возможны два подхода к исследованиям. В одном случае старательно готовятся исходные данные и определяется их математическая связь, чтобы иметь возможность получить численные результаты. Такие результаты обычно бывает трудно истолковать, так как между постановкой задачи и ее решением процесс идет формально. В другом случае предварительно по возможности глубоко разбираются в физике процессов, которые развиваются на легко контролируемые этапы. Это дает известную гарантию от ошибок, а само решение становится логической цепью отдельных результатов и гораздо легче может быть осмыслено и оценено качественно.

Применительно к использованию вычислительной техники это означает, что нужно максимально прорабатывать аналитические решения на основе изложенных ра-

нее методов, которые для сложных задач будут неизбежно охватывать только отдельные этапы. Однако между аналитическим и численным решением данного этапа имеется существенное различие. В результате аналитического решения исходная информация этапа преобразуется в компактную, обозримую форму, представляемую в виде ограниченной совокупности изученных функций. По своей природе аналитическое решение содержит в себе информацию о множестве подобных процессов в разнородных цепях не только электрических, но и магнитных и иных аналогах, отличающихся только значениями параметров. Такой результат может быть использован и в других случаях, а объем вычислений при этом также сокращается. Численное же решение этапа — формализованный процесс, дающий информацию только об одном конкретном (даже без вариаций) случае. К тому же численное преобразование также неизбежно приводит к искажению исходной информации, например, при замене дифференциальных уравнений разностными, итерациях, округлениях и т. д. Попытка добиться нужной точности уменьшением шага сетки приводит к увеличению числа неизвестных значений искомой функции, вследствие чего резко растет объем вычислений и накопление ошибок, которые необходимо корректировать.

Далее будут рассмотрены аналитические и численные решения установившихся и переходных процессов в нелинейных электрических цепях как постоянного, так и переменного тока с нелинейными двухполюсниками и четырехполюсниками, имеющими однозначные вольт-амперные характеристики. В этой главе существенно расширяются возможности расчета схем определенной конфигурации и сложности, так как среди них появляются также схемы, которые не рассматривались в предыдущих главах. К ним относятся, например, преобразование звезды в эквивалентный треугольник (и наоборот) на постоянном и переменном токе и расчет схемы с двумя узлами на переменном токе. Расчеты, связанные с такими преобразованиями, очень трудоемки, поэтому выполняют их с привлечением ЦВМ.

Как известно, программирование можно проводить различным образом и на различных языках (Фортран, Алгол, Кобол и др.), в том числе и с использованием стандартных программ, однако основой в каждом случае является алгоритмизация электротехнических уравнений.

Эта задача и выполнена в последующих разделах, причем рассматривались только те примеры, при решении которых наиболее полно проявляются преимущества вычислительной техники.

Все сказанное относилось непосредственно к исследованию электротехнических устройств, сводимому к аппарату теории электрических цепей. Однако эти соображения в полной мере могут быть отнесены и к исследованиям, требующим применения аппарата теории электромагнитного поля с учетом нелинейности сред. При этом в последнем случае также намечается четкая тенденция в развитии поэтапного аналитического рассмотрения с более широким, чем это принято в настоящее время, использованием самого общего подхода с позиций математической физики.

§ 7.2. Установившиеся режимы в цепях постоянного тока

Как известно, аналитические методы расчета электрических цепей ограничены возможностями точного решения нелинейных алгебраических уравнений.

Сложная нелинейная электрическая цепь с помощью аппроксимации исходных нелинейных характеристик (см. § 1.5) может быть описана системой нелинейных алгебраических уравнений, которую в общем виде можно представить так:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Для решения системы уравнений (7.1) можно использовать либо стандартную программу, либо специально разработанную. Поэтому одна из задач анализа сложной нелинейной цепи заключается в приведении уравнений, написанных по первому и второму закону Кирхгофа, к виду уравнений (7.1). Следует заметить, что применение методов численного решения нелинейных уравнений, например метода Ньютона, также позволяет непосредственно программировать для решения на ЦВМ систему уравнений (7.1).

Рассмотрим в качестве примера схему со смешанным соединением нелинейных двухполюсников (см. рис. 1.19, а).

Если аппроксимировать вольт-амперные (ампер-вольтные) характеристики [см. уравнения (1.8), (1.9)], то, используя законы Кирхгофа, можно записать

$$\left. \begin{aligned} U - U_1(I_1) - U_2(I_2) &= 0; \\ U_2(I_2) - rI_3 &= 0; \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

На основании аппроксимации зависимостей $r_{ст}(I)$ [см. уравнение (1.10)] получим

$$\left. \begin{aligned} U - r_{ст1}(I_1)I_1 - r_{ст2}(I_2)I_2 &= 0; \\ r_{ст2}(I_2)I_2 - rI_3 &= 0; \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Системы уравнений (7.2) и (7.3) являются частным случаем системы уравнений (7.1), где роль неизвестных x_1, x_2, x_3 выполняют токи I_1, I_2, I_3 , поэтому для решения уравнений (7.2) и (7.3) можно обратиться к стандартной программе.

Для цепи с двумя узлами (см. рис. 1.20, а) при аппроксимации вольт-амперных характеристик будем иметь следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} U &= E_1 - U_1(I_1); \\ U &= E_2 - U_2(I_2); \\ U &= -E_3 - U_3(I_3); \\ I_1 + I_2 + I_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Аппроксимация зависимостей $r_{ст}(I)$ приведет уравнения к виду:

$$\left. \begin{aligned} U &= E_1 - r_{ст1}(I_1)I_1; \\ U &= E_2 - r_{ст2}(I_2)I_2; \\ U &= -E_3 - r_{ст3}(I_3)I_3; \\ I_1 + I_2 + I_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Если теперь подставить второе уравнение системы (7.4) в третье и приравнять все три уравнения нулю, то получим новую систему уравнений, которая является

частным случаем уравнений (7.1). Такая же операция должна быть проведена и с уравнениями (7.5).

По данной методике могут быть составлены уравнения и для более сложных схем, включающих в себя большое

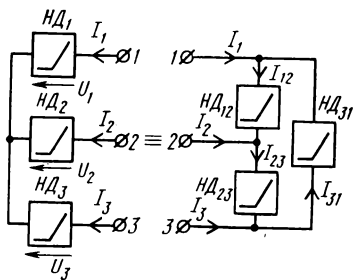


Рис. 7.1. Преобразование нелинейной звезды в эквивалентный треугольник (и наоборот) на постоянном токе

число нелинейных двухполюсников, источников и ветвей. Аналогично может быть решена и задача преобразования звезды в эквивалентный треугольник (и наоборот) (рис. 7.1). В этом случае по заданным характеристикам нелинейных двухполюсников HD_1 , HD_2 , HD_3 необходимо найти характеристики нелинейных двухполюсников HD_{12} , HD_{23} , HD_{31} . Напомним условие эквивалентности обеих схем: токи I_1 , I_2 , I_3 и напряжения U_{12} ,

U_{23} , U_{31} звезды и треугольника должны быть равны между собой.

При аппроксимации вольт-амперных характеристик имеем:

для звезды

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= U_1(I_1) - U_2(I_2); \\ U_{23} &= U_2(I_2) - U_3(I_3); \\ U_{31} &= U_3(I_3) - U_1(I_1); \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

для треугольника

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= U_{12}(I_{12}); \\ U_{23} &= U_{23}(I_{23}); \\ U_{31} &= U_{31}(I_{31}). \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Кроме того, для схемы треугольника на основании первого закона Кирхгофа имеем

$$\left. \begin{aligned} I_1 - I_{12} + I_{31} &= 0; \\ I_2 - I_{23} + I_{12} &= 0; \\ I_3 - I_{31} + I_{23} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Совместное решение уравнений (7.6) — (7.8) позволяет решить поставленную задачу преобразования относи-

тельно неизвестных, которыми являются $I_1, I_2, I_3, I_{12}, I_{23}, I_{31}$. Так, если звезда преобразуется в эквивалентный треугольник, то система уравнений (7.6) задана, и необходимо правые части этой системы подставить в уравнения (7.7):

$$\left. \begin{aligned} U_1(I_1) - U_2(I_2) - U_{12}(I_{12}) &= 0; \\ U_2(I_2) - U_3(I_3) - U_{23}(I_{23}) &= 0; \\ U_3(I_3) - U_1(I_1) - U_{31}(I_{31}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Решая систему уравнений (7.9) совместно с уравнениями (7.8), находим неизвестные $I_{12}, I_{23}, I_{31}, I_1, I_2, I_3$.

В случае преобразования треугольника в эквивалентную звезду заданной является система уравнений (7.7), правые части которой подставляют в уравнения (7.6):

$$\left. \begin{aligned} U_{12}(I_{12}) - U_1(I_1) + U_2(I_2) &= 0; \\ U_{23}(I_{23}) - U_2(I_2) + U_3(I_3) &= 0; \\ U_{31}(I_{31}) - U_3(I_3) + U_1(I_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Совместное решение уравнений (7.10) и (7.8) дает возможность определить неизвестные $I_1, I_2, I_3, I_{12}, I_{23}, I_{31}$.

Одноразовое решение уравнений (7.9), (7.8) и (7.10), (7.8) дает возможность определить одно значение неизвестных токов. Если теперь с некоторым шагом в заданном диапазоне изменять напряжения U_{12}, U_{23}, U_{31} и многократно (в цикле) решать исходные уравнения, получатся искомые вольт-амперные характеристики нелинейных двухполюсников $HD_{12}, HD_{23}, HD_{31}$ (по известным характеристикам двухполюсников HD_1, HD_2, HD_3) или вольт-амперные характеристики нелинейных двухполюсников HD_1, HD_2, HD_3 (по известным характеристикам двухполюсников $HD_{12}, HD_{23}, HD_{31}$).

Аналогично составляют систему уравнений, если заданными являются зависимости $r_{ст}(I)$. В этом случае уравнения (7.6) и (7.7) соответственно примут вид:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= r_{ст1}(I_1) I_1 - r_{ст2}(I_2) I_2; \\ U_{23} &= r_{ст2}(I_2) I_2 - r_{ст3}(I_3) I_3; \\ U_{31} &= r_{ст3}(I_3) I_3 - r_{ст1}(I_1) I_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

и

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= r_{ст12}(I_{12}); \\ U_{23} &= r_{ст23}(I_{23}); \\ U_{31} &= r_{ст31}(I_{31}). \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Совместное решение уравнений (7.11), (7.12) и (7.8) даст возможность осуществить требуемые преобразования.

Для нелинейного четырехполюсника в форме, например, A -параметров можно записать и решить следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} U_1 - A_{11}(U_1)U_2 - A_{12}(U_1)I_2 &= 0; \\ I_1 - A_{21}(I_1)U_2 - A_{22}(I_1)I_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Зависимости коэффициентов A от первичных тока и напряжения могут быть, как известно, определены экспериментально из опытов холостого хода и короткого замыкания.

§ 7.3. Установившиеся режимы в цепях переменного тока

В общем случае нелинейный двухполюсник при квазилинейном рассмотрении описывается двумя характеристиками: $I(U)$ и $\varphi(I)$ или $\varphi(U)$, которые необходимо каким-то образом учитывать при составлении уравнений по законам Кирхгофа.

В этом случае для решения задачи предпочтительными становятся зависимости $r_{\text{ст}}(I)$ или $r_{\text{ст}}(U)$, $x_{L_{\text{ст}}}(I)$ или $x_{L_{\text{ст}}}(U)$ и $x_{C_{\text{ст}}}(I)$ или $x_{C_{\text{ст}}}(U)$. Нелинейные двухполюсники, отвечающие этим характеристикам, являются резистивными (см. рис. 3.1, a), индуктивными (см. рис. 3.1, b) и емкостными (см. рис. 3.1, $в$).

Рассмотрим в качестве примера схему цепи со смешанным соединением нелинейных двухполюсников (см. рис. 3.17). Для этой цепи на основании законов Кирхгофа можно записать в комплексной форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= r_{\text{ст}1}(I_1)\dot{I}_1 + jx_{L_{\text{ст}}}(I_2)\dot{I}_2; \\ \dot{U} &= r_{\text{ст}1}(I_1)\dot{I}_1 + jx_L\dot{I}_3; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_3. \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Если теперь представить комплексные значения напряжений и токов в виде действительных и мнимых частей ($\dot{U} = U_a + jU_p$ и $I = I_a + jI_p$), то система уравнений (7.14) может быть преобразована к виду

$$\left. \begin{aligned}
 U_a + jU_p &= r_{\text{сг1}}(I_1)(I_{1a} + jI_{1p}) + jx_{L_{\text{сг}}} \times \\
 &\quad \times (I_2)(I_{2a} + jI_{2p}); \\
 U_a + jU_p &= r_{\text{сг1}}(I_1)(I_{1a} + jI_{1p}) + \\
 &\quad + jx_L(I_{3a} + jI_{3p}); \\
 I_{1a} + jI_{1p} &= I_{2a} + jI_{2p} + I_{3a} + jI_{3p}.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Число неизвестных для данной (и любой другой) схемы составляет $3n$ (n — искомые токи), так как необходимо определить действительные, мнимые и действующие значения токов: I_{1a} , I_{1p} , I_1 , I_{2a} , I_{2p} , I_2 , I_{3a} , I_{3p} , I_3 . Шесть уравнений можно получить из системы (7.15), разделив действительные и мнимые части, а остальные три — из соотношения $I^2 = I_a^2 + I_p^2$.

Таким образом, окончательно решение заданной схемы цепи, представленной на рис. 3.17, получим, если рассмотрим совместно следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 U_a - r_{\text{сг1}}(I_1)I_{1a} + x_{L_{\text{сг}}}(I_2)I_{2p} &= 0; \\
 U_a - r_{\text{сг1}}(I_1)I_{1a} + x_L I_{3p} &= 0; \\
 U_p - r_{\text{сг1}}(I_1)I_{1p} - x_{L_{\text{сг}}}(I_2)I_{2a} &= 0; \\
 U_p - r_{\text{сг1}}(I_1)I_{1p} - x_L I_{3a} &= 0; \\
 I_{1a} - I_{2a} - I_{3a} &= 0; \\
 I_{1p} - I_{2p} - I_{3p} &= 0; \\
 I_1^2 - I_{1a}^2 - I_{1p}^2 &= 0; \\
 I_2^2 - I_{2a}^2 - I_{2p}^2 &= 0; \\
 I_3^2 - I_{3a}^2 - I_{3p}^2 &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

Как видно, система уравнений (7.16) является частным случаем системы (7.1).

Аналогично можно составить систему уравнений для схемы с двумя узлами (рис. 7.2):

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{U} &= \dot{E}_1 - r_{\text{сг1}}(I_1)\dot{I}_1 - jx_{L_{\text{сг2}}}(I_1)\dot{I}_1; \\
 \dot{U} &= \dot{E}_2 - r_{\text{сг3}}(I_2)\dot{I}_2 + jx_{\text{сг4}}(I_2)\dot{I}_2; \\
 \dot{U} &= \dot{E}_3 - jx_{L_{\text{сг5}}}(I_3)\dot{I}_3 + jx_{\text{сг6}}(I_3)\dot{I}_3; \\
 \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Подставим правую часть второго уравнения вместо левой части третьего уравнения, разделим действительные и мнимые части, добавим недостающие три уравнения вида $I^2 = I_a^2 + I_p^2$ и получим окончательно

$$\left. \begin{aligned} U_a - E_{1a} + r_{CT1}(I_1)I_{1a} - x_{L_{CT2}}(I_1)I_{1p} &= 0; \\ E_{2a} - r_{CT3}(I_2)I_{2a} - x_{C_{CT4}}(I_2)I_{2p} - E_{3a} - \\ &- x_{L_{CT5}}(I_3)I_{3p} + x_{C_{CT6}}(I_3)I_{3p} = 0; \\ U_p - E_{1p} + r_{CT1}(I_1)I_{1p} + x_{L_{CT2}}(I_1)I_{1a} &= 0; \\ E_{2p} - r_{CT3}(I_2)I_{2p} + x_{C_{CT4}}(I_2)I_{2a} - E_{3p} + \\ &+ x_{L_{CT5}}(I_3)I_{3a} - x_{C_{CT6}}(I_3)I_{3a} = 0; \\ I_{1a} + I_{2a} + I_{3a} &= 0; \\ I_{1p} + I_{2p} + I_{3p} &= 0; \\ I_1^2 - I_{1a}^2 - I_{1p}^2 &= 0; \\ I_2^2 - I_{2a}^2 - I_{2p}^2 &= 0; \\ I_3^2 - I_{3a}^2 - I_{3p}^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

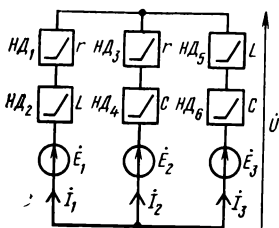


Рис. 7.2. Нелинейная цепь с двумя узлами на переменном токе

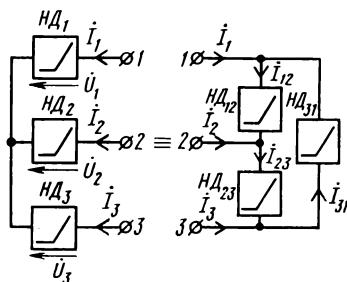


Рис. 7.3. Преобразование нелинейной звезды в эквивалентный треугольник (и наоборот) на переменном токе

Рассмотренная методика в принципе может быть применена к схеме нелинейной электрической цепи любой сложности. С ее помощью можно осуществлять преобразование звезды в эквивалентный треугольник (и наоборот) (рис. 7.3). Для упрощения схемы рис. 7.3 в каждую из ее ветвей включим по одному нелинейному двухполюснику, однако будем полагать, что в общем случае

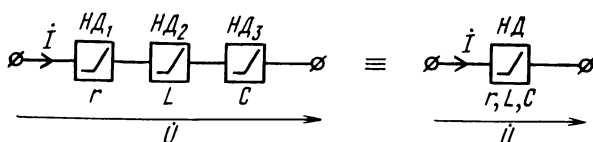


Рис. 7.4. Исходная и эквивалентная ветви звезды и треугольника, представленных на рис. 7.3

каждый из этих двухполюсников состоит из трех, как это показано на рис. 7.4. Тогда система уравнений для схемы рис. 7.3 будет иметь следующий вид:

для звезды

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{12} &= [r_{\text{сг1}}(I_1) + jx_{L_{\text{сг1}}}(I_1) - jx_{C_{\text{сг1}}} \times \\ &\quad \times (I_1)] \dot{I}_1 - [r_{\text{сг2}}(I_2) + jx_{L_{\text{сг2}}}(I_2) - \\ &\quad - jx_{C_{\text{сг2}}}(I_2)] \dot{I}_2; \\ \dot{U}_{23} &= [r_{\text{сг2}}(I_2) + jx_{L_{\text{сг2}}}(I_2) - \\ &\quad - jx_{C_{\text{сг2}}}(I_2)] \dot{I}_2 - [r_{\text{сг3}}(I_3) + jx_{L_{\text{сг3}}}(I_3) - \\ &\quad - jx_{C_{\text{сг3}}}(I_3)] \dot{I}_3; \\ \dot{U}_{31} &= [r_{\text{сг3}}(I_3) + jx_{L_{\text{сг3}}}(I_3) - \\ &\quad - jx_{C_{\text{сг3}}}(I_3)] \dot{I}_3 - [r_{\text{сг1}}(I_1) + jx_{L_{\text{сг1}}}(I_1) - \\ &\quad - jx_{C_{\text{сг1}}}(I_1)] \dot{I}_1; \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

для треугольника

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{12} &= [r_{\text{сг12}}(I_{12}) + jx_{L_{\text{сг12}}}(I_{12}) - jx_{C_{\text{сг12}}}(I_{12})] \dot{I}_{12}; \\ \dot{U}_{23} &= [r_{\text{сг23}}(I_{23}) + jx_{L_{\text{сг23}}}(I_{23}) - jx_{C_{\text{сг23}}}(I_{23})] \dot{I}_{23}; \\ \dot{U}_{31} &= [r_{\text{сг31}}(I_{31}) + jx_{L_{\text{сг31}}}(I_{31}) - jx_{C_{\text{сг31}}}(I_{31})] \dot{I}_{31}; \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_{12} - \dot{I}_{31}; \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_{23} - \dot{I}_{12}; \\ \dot{I}_3 &= \dot{I}_{31} - \dot{I}_{23}. \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

Покажем, как осуществляется преобразование, например, треугольника в эквивалентную звезду. Исходными данными для такого преобразования являются зависимости $r_{\text{ст}12}(I_{12})$, $x_{L_{\text{ст}12}}(I_{12})$, $x_{C_{\text{ст}12}}(I_{12})$, $r_{\text{ст}23}(I_{23})$, $x_{L_{\text{ст}23}}(I_{23})$, $x_{C_{\text{ст}23}}(I_{23})$, $r_{\text{ст}31}(I_{31})$, $x_{L_{\text{ст}31}}(I_{31})$, $x_{C_{\text{ст}31}}(I_{31})$ и напряжения \dot{U}_{12} , \dot{U}_{23} , \dot{U}_{31} , которые необходимо менять с некоторым шагом в определенном диапазоне, чтобы получить искомые характеристики $r_{\text{ст}1}(I_1)$, $x_{L_{\text{ст}1}}(I_1)$, $x_{C_{\text{ст}1}}(I_1)$, $r_{\text{ст}2}(I_2)$, $x_{L_{\text{ст}2}}(I_2)$, $x_{C_{\text{ст}2}}(I_2)$, $r_{\text{ст}3}(I_3)$, $x_{L_{\text{ст}3}}(I_3)$, $x_{C_{\text{ст}3}}(I_3)$.

Найдем прежде всего токи I_{12} , I_{23} , I_{31} . Для этого представим комплексные напряжения и токи уравнений (7.20) в виде действительной и мнимой частей и разделим их. Тогда

$$\left. \begin{aligned} U_{12a} - r_{\text{ст}12}(I_{12}) I_{12a} + x_{L_{\text{ст}12}}(I_{12}) I_{12p} - \\ - x_{C_{\text{ст}12}}(I_{12}) I_{12p} &= 0; \\ U_{23a} - r_{\text{ст}23}(I_{23}) I_{23a} + x_{L_{\text{ст}23}}(I_{23}) I_{23p} - \\ - x_{C_{\text{ст}23}}(I_{23}) I_{23p} &= 0; \\ U_{31a} - r_{\text{ст}31}(I_{31}) I_{31a} + x_{L_{\text{ст}31}}(I_{31}) I_{31p} - \\ - x_{C_{\text{ст}31}}(I_{31}) I_{31p} &= 0; \\ U_{12p} - r_{\text{ст}12}(I_{12}) I_{12p} - x_{L_{\text{ст}12}}(I_{12}) I_{12a} + \\ + x_{C_{\text{ст}12}}(I_{12}) I_{12a} &= 0; \\ U_{23p} - r_{\text{ст}23}(I_{23}) I_{23p} - x_{L_{\text{ст}23}}(I_{23}) I_{23a} + \\ + x_{C_{\text{ст}23}}(I_{23}) I_{23a} &= 0; \\ U_{31p} - r_{\text{ст}31}(I_{31}) I_{31p} - x_{L_{\text{ст}31}}(I_{31}) I_{31a} + \\ + x_{C_{\text{ст}31}}(I_{31}) I_{31a} &= 0; \\ I_{12}^2 - I_{12a}^2 - I_{12p}^2 &= 0; \\ I_{23}^2 - I_{23a}^2 - I_{23p}^2 &= 0; \\ I_{31}^2 - I_{31a}^2 - I_{31p}^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Решая систему (7.22), находим токи I_{12} , I_{12a} , I_{12p} , I_{23} , I_{23a} , I_{23p} , I_{31} , I_{31a} , I_{31p} , а подставляя действительные и мнимые значения этих токов в уравнения (7.21), определим значения токов \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , \dot{I}_3 (в алгебраической форме).

Если теперь в уравнениях (7.19) разделить действительные и мнимые части напряжений \dot{U}_{12} , \dot{U}_{23} , \dot{U}_{31} и токов \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , \dot{I}_3 , то получим систему из шести уравнений, позволяющую определить искомые зависимости:

$$\begin{aligned} r_{ст1}(I_1), x_{ст1}(I_1) &= x_{L_{ст1}}(I_1) - x_{C_{ст1}}(I_1), \quad r_{ст2}(I_2), x_{ст2}(I_2) = \\ &= x_{L_{ст2}}(I_2) - x_{C_{ст2}}(I_2), \quad r_{ст3}(I_3), x_{ст3}(I_3) = x_{L_{ст3}}(I_3) - \\ &- x_{C_{ст3}}(I_3). \end{aligned}$$

Как видно, искомые характеристики получены не в полном объеме, так как зависимости $x_{ст1}(I_1)$, $x_{ст2}(I_2)$ и $x_{ст3}(I_3)$ являются эквивалентными и из них невозможно выделить $x_{L_{ст1}}(I_1)$, $x_{C_{ст1}}(I_1)$ и др. Однако это не имеет существенного значения, так как реактивные двухполюсники, включенные последовательно (или параллельно), оказывают на цепь суммарное влияние.

Таким образом, для преобразования треугольника в эквивалентную звезду (и наоборот) необходимо совместное решение 18 уравнений. Ранее было показано, что для расчета схемы с двумя узлами, состоящей из трех ветвей, нужно совместно решить 9 уравнений. Это свидетельствует о том, что без применения вычислительной техники анализ таких задач практически невозможен. Далее в качестве примера представлена структурная схема программы преобразования нелинейного треугольника в эквивалентную нелинейную звезду (см. Приложение).

Если рассмотреть теперь нелинейный четырехполюсник, то в квазилинейном режиме для него можно записать следующие уравнения в форме A -параметров:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 - \dot{A}_{11}(U_1)\dot{U}_2 - \dot{A}_{12}(U_1)\dot{I}_2 &= 0; \\ \dot{I}_1 - \dot{A}_{21}(I_1)\dot{U}_2 - \dot{A}_{22}(I_1)\dot{I}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Разделим действительные и мнимые части комплексных коэффициентов четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{11}(U_1) &= A_{11a}(U_1) + jA_{11p}(U_1); \\ \dot{A}_{12}(U_1) &= A_{12a}(U_1) + jA_{12p}(U_1); \\ \dot{A}_{21}(I_1) &= A_{21a}(I_1) + jA_{21p}(I_1); \\ \dot{A}_{22}(I_1) &= A_{22a}(I_1) + jA_{22p}(I_1). \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

Подставим уравнения (7.24) в систему уравнений (7.23). Тогда

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 - [A_{11a}(U_1) + jA_{11p}(U_1)] \dot{U}_2 - \\ - [A_{12a}(U_1) + jA_{12p}(U_1)] \dot{I}_2 = 0; \\ \dot{I}_1 - [A_{21a}(I_1) + jA_{21p}(I_1)] \dot{U}_2 - \\ - [A_{22a}(I_1) + jA_{22p}(I_1)] \dot{I}_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

Из этих уравнений можно получить отдельно уравнения для действительных и мнимых частей:

$$\left. \begin{aligned} U_{1a} - A_{11a}(U_1)U_{2a} + A_{11p}(U_1)U_{2p} - A_{12a}(U_1)I_{2a} + \\ + A_{12p}(U_1)I_{2p} = 0; \\ I_{1a} - A_{21a}(I_1)U_{2a} + A_{21p}(I_1)U_{2p} - A_{22a}(I_1)I_{2a} + \\ + A_{22p}(I_1)I_{2p} = 0; \\ U_{1p} - A_{11p}(U_1)U_{2a} - A_{11a}(U_1)U_{2p} - A_{12p}(U_1)I_{2a} - \\ - A_{12a}(U_1)I_{2p} = 0; \\ I_{1p} - A_{21p}(I_1)U_{2a} - A_{21a}(I_1)U_{2p} - A_{22p}(I_1)I_{2a} - \\ - A_{22a}(I_1)I_{2p} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

Если теперь добавить к уравнениям (7.26) уравнения, связывающие действующие значения вторичных токов и напряжений с их действительными и мнимыми частями:

$$\left. \begin{aligned} U_2^2 - U_{2a}^2 - U_{2p}^2 = 0; \\ I_2^2 - I_{2a}^2 - I_{2p}^2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

то совместное решение уравнений (7.26) и (7.27) даст возможность определить неизвестные U_{2a} , U_{2p} , U_2 , I_{2a} , I_{2p} , I_2 .

Покажем теперь, что при расчете нелинейных цепей по мгновенным значениям, т. е. с учетом формы сигналов, исследования соответствующей цепи во многих случаях может облегчить схема алгоритмов, которую составляют непосредственно по написанным на основании законов Кирхгофа уравнениям без приведения их к одному уравнению соответствующего порядка и без записи в форме уравнений состояния.

Так, для последовательной цепи рис. 7.5, *a* запишем

$$u_r(i) + \frac{d\Psi(i)}{dt} + \frac{1}{C_{\text{диф}}(Q)} \int_0^t idt = u. \quad (7.28)$$

Если задан закон изменения тока i в цепи и имеется полная информация о всех нелинейных двухполусниках, то закон изменения напряжения на отдельных элементах и общее напряжение могут быть найдены путем выполнения операций, представленных на схеме рис. 7.5, б и логически следующих из приведенного уравнения

Схему рис. 7.5, б можно рассматривать как графическое представление одного из вариантов математического алгоритма решения уравнения (7.28) и как математический алгоритм процессов обработки сигналов, происходящих при заданных условиях в исходной схеме рис. 7.5, а. В последнем случае схему рис. 7.5, б можно рассматривать как другой вариант реализации того же алгоритма процессов, но реализуемого с разделением нелинейных и интегродифференциальных операций, в то время как в исходной схеме оба эти вида операций физически осуществляются в нелинейных элементах схемы одновременно.

Реализация схемы рис. 7.5, б может быть осуществлена с помощью аналоговой вычислительной техники, но в то же время эта схема содержит четкий алгоритм решения, легко переводимый на требуемый алгоритмический язык и позволяющий использовать ЦВМ. В простейшем случае этот алгоритм может быть применен для графического или графо-аналитического решения.

Схема параллельного соединения (дуальная рассмотренной) дана на рис. 7.6, а, а ее уравнение может быть представлено в виде

$$i_r(u) + \frac{1}{L_{\text{диф}}(\Psi)} \int_0^t u dt + \frac{dQ(u)}{dt} = i. \quad (7.29)$$

При заданном законе изменения подводимого напряжения ток в цепи может быть найден, в частности, с по-

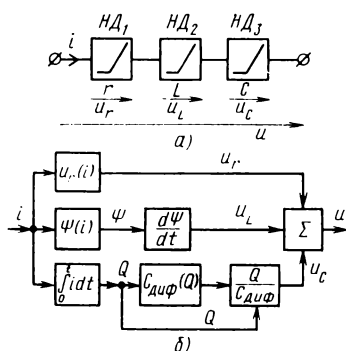


Рис. 7.5. К составлению математического алгоритма обработки сигналов в последовательной цепи:

а — схема цепи; б — схема алгоритма

мощью математического алгоритма, представленного на рис. 7.6, б.

Нетрудно заметить, что рассматриваемый прием не может претендовать на универсальность, так как встречаются случаи, когда на одном из отдельно взятых элементов схемы оказываются не заданными ни закон изменения напряжения, ни закон изменения тока. Однако обычно при исследовании и разработке конкретных технических устройств необходимые данные (чаще всего в

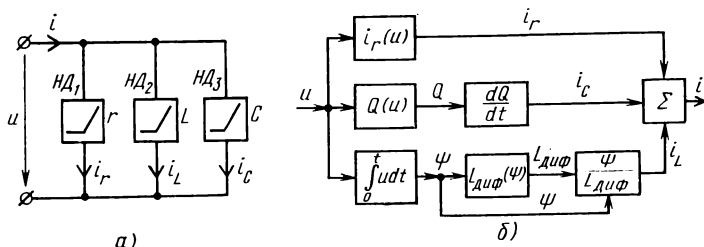


Рис. 7.6. К составлению математического алгоритма обработки сигналов в параллельной цепи:

а — схема цепи; б — схема алгоритма

отношении расположенного на выходе элемента) имеют-ся или могут быть заданы, и рассматриваемый прием оказывается эффективным и для разветвленных схем с параллельно-последовательными участками.

Отметим, что сложность конфигурации подлежащих анализу электронно-полупроводниковых схем и особенно число входящих в них и подлежащих совместному рассмотрению нелинейных элементов зачастую сильно преувеличивается. В действительности даже в пределах одного конструктивного или функционального блока при предварительном учете его фактического режима работы обычно можно, во-первых, выделить несколько развязанных между собой участков электрической цепи, во-вторых, линеаризовать значительную часть нелинейностей, в-третьих, объединить несколько нелинейностей в одну эквивалентную нелинейность, зачастую более простого вида.

§ 7.4. Переходные процессы

Переходные процессы в нелинейных цепях находят, как правило, численным интегрированием, для которого

наиболее приспособлен метод конечных приращений (см. § 5.7) и тот же метод в комбинации с методом пространства состояний (см. § 5.8).

Алгоритмизация электротехнического уравнения (5.1), описывающего процесс, происходящий в схеме рис. 5.1, *а*, была проведена ранее методом конечных приращений и привела к уравнению (5.30). Это уравнение, а также табл. 5.1 рекомендовались для расчета, который в принципе можно провести без применения вычислительной техники. Однако интервал времени Δt (шаг интегрирования) при таком расчете не может быть выбран малым, так как при этом значительно возрастет трудоемкость расчета. Основой для программирования остаются уравнение (5.30) и табл. 5.1.

Рассмотрим теперь алгоритм численного интегрирования уравнений состояния на базе метода Эйлера. Запишем решение уравнений состояния, приняв за момент коммутации начальный момент очередного шага интегрирования $t = kT$:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}(t-kT)} \mathbf{X}(kT) + e^{\mathbf{A}(t-kT)} \int_{kT}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{W}(\tau) d\tau, \quad (7.30)$$

где T — шаг интегрирования.

Вычислим значения переменных в $t = (k+1)T$, приняв вектор э. д. с. постоянным на интервале $kT \leq t \leq (k+1)T$ и равным $\mathbf{W}(kT)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}[(k+1)T] &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{X}(kT) + \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{E}) \mathbf{B}\mathbf{W}(kT) = \\ &= \mathbf{H}\mathbf{X}(kT) + \mathbf{G}\mathbf{W}(kT). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Матрицы \mathbf{H} и \mathbf{G} при постоянном шаге интегрирования достаточно вычислить один раз. В методе Эйлера $e^{\mathbf{A}T}$ раскладывают в степенной ряд и учитывают только первые два члена, т. е.

$$e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{E} + \mathbf{A}T. \quad (7.32)$$

Тогда

$$\mathbf{H} = \mathbf{E} + \mathbf{A}T; \quad (7.33)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}T. \quad (7.34)$$

Несколько более сложным является расчет на базе метода трапеций, согласно которому решение уравнений состояния ищем в виде

$$\mathbf{X}[(k+1)T] = \mathbf{X}[kT] + \frac{T}{2} \{\dot{\mathbf{X}}[(k+1)T] + \dot{\mathbf{X}}(kT)\}, \quad (7.35)$$

где $\dot{\mathbf{X}}[(k+1)T]$ и $\dot{\mathbf{X}}(kT)$ — производные в моменты времени $t = (k+1)T$ и $t = kT$.

Подставляя значения этих производных из уравнений состояния в уравнение (7.35), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{X}[(k+1)T] = & \left(\mathbf{E} - \frac{T}{2}\mathbf{A}\right)^{-1} \left(\mathbf{E} + \frac{T}{2}\mathbf{A}\right) \mathbf{X}(kT) + \\ & + \left(\mathbf{E} - \frac{T}{2}\mathbf{A}\right) \mathbf{B}T \frac{\mathbf{W}(kT) + \mathbf{W}[(k+1)T]}{2}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

По сравнению с методом Эйлера метод трапеций дает более высокую точность (при одинаковом шаге интегрирования), но программа вычислений усложняется из-за дополнительной операции обращения матрицы $\left(\mathbf{E} - \frac{T}{2}\mathbf{A}\right)$ и необходимости вычисления $\mathbf{W}[(k+1)T]$.

Еще более высокую точность, как указывалось в § 5.7, обеспечивает метод Рунге — Кутты.

Алгоритмизация исходного уравнения (5.34) для нелинейной цепи (см. рис. 5.8) была проведена ранее уравнением (5.36), которым и необходимо пользоваться при расчете этой цепи на ЦВМ.

Схема нелинейной цепи (см. рис. 5.1), имеющей исходное уравнение (5.37), алгоритмизирована уравнением (5.39).

§ 7.5. Синтез цепей

Синтез нелинеаризуемых электрических цепей, как следует из гл. 6, относится к группе задач, требующих выполнения нестандартных последовательностей операций, характерных для данного конкретного случая синтеза.

Не рассматривая всей проблемы машинного синтеза нелинейных цепей в целом, поскольку доведение программ технической реализации синтезируемых цепей относится уже к области автоматизированного проектирования устройств, остановимся на самой характерной части таких программ — на определении характеристик нелинейного элемента, обеспечивающего в выбранной схеме заданную конкретную реакцию $u_{\text{вых}}(t)$ при заданном входном воздействии $u_{\text{вх}}(t)$. Как указывалось, вследст-

ние зависимости реакции от амплитуды сигнала здесь приходится задавать несколько взаимно связанных пар ожидаемых воздействий и требуемых выходных реакций, соответствующих предполагаемому диапазону рабочих сигналов синтезируемого нелинейного четырехполюсника. Это обстоятельство, приводящее к необходимости многократных расчетов по одному и тому же алгоритму, и делает рассмотренные методы синтеза приемлемыми только при условии использования вычислительной техники.

Остановимся подробнее на последовательности операций (логическом алгоритме) при синтезе схем рис. 6.1, б, 6.6 и 6.8, а. По ходу пояснения графо-аналитических методов решения этих задач подчеркивалось сходство требуемых операций для решения разных вариантов.

Так, для одного нелинейного резистивного двухполюсника исходное соотношение (6.10) было приведено к уравнению (6.12). Для линейной индуктивности в горизонтальной ветви имеют место соответственно исходное соотношение (6.18) и уравнение (6.21), а для нелинейного емкостного двухполюсника в вертикальной ветви — соотношения (6.22) и (6.25).

Для всех трех случаев необходимы следующие однотипные операции:

- 1) на основании второго закона Кирхгофа составляется уравнение с правой частью вида $u_{вх}(t) - u_{вых}(t)$ [см. уравнение (6.10)]. При этом, если в цепи имеется реактивный элемент, то в правой части выполняют интегрирование по времени [см. уравнения (6.19) и (6.23)];

- 2) совершают переход от переменной t к переменной $u_{вых}$, т. е. уравнение приводят к параметрическому виду [см. уравнения (6.12), (6.21) и (6.25)];

- 3) получают разность в правых частях уравнений (6.12), (6.21) и (6.25);

- 4) восстанавливают масштаб искомых характеристик путем деления на постоянный множитель левой части уравнений (6.12), (6.21) и (6.25).

Эта последовательность операций легко может быть представлена на соответствующем алгоритмическом языке.

Нетрудно убедиться из материала предыдущих параграфов, что эти же операции составляют основу вычис-

лений и в других вариантах Г-образных четырехполюсников, если при этом сохраняется порядок уравнения. Здесь лишь появляются некоторые дополнительные несложные операции, легко включаемые в рассмотренный логический алгоритм и расширяющие его возможности путем введения условных переходов («если...»), подобных замечаниям к первой операции.

Разработка подобных алгоритмов для исследования электрических цепей может дать еще более важные для практики результаты при условии разработки систем автоматизированной оптимизации параметров схемы, облегчающих нахождение варианта с нелинейной характеристикой, приближающейся к требуемой или располагаемой. В этом случае можно ожидать получения принципиально новых схемотехнических решений даже известных технических задач.

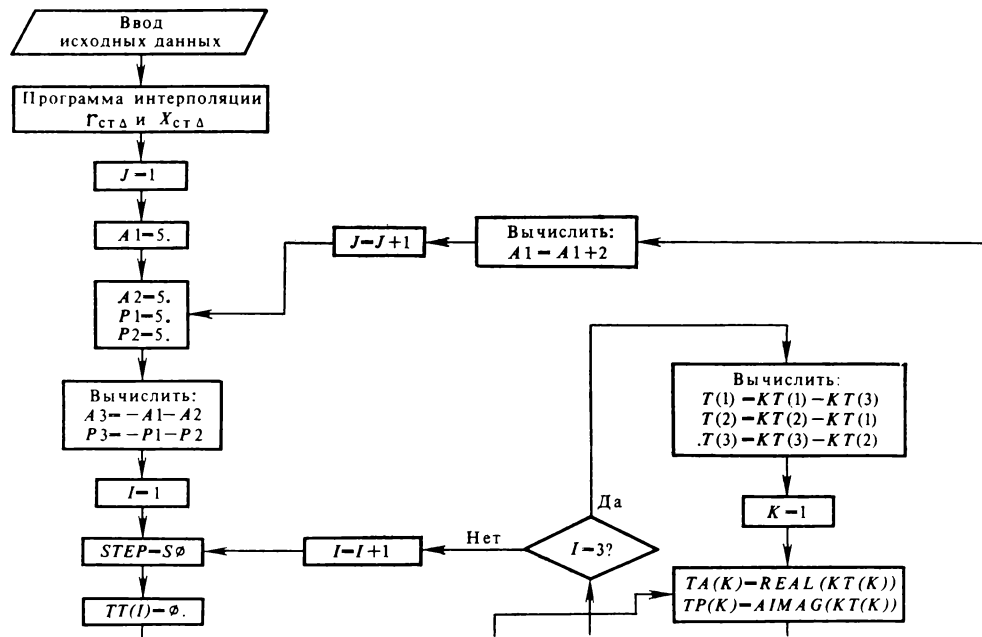
Литература

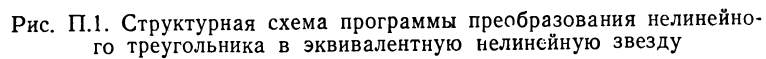
1. Атабеков Г. И., Тимофеев А. Б., Хухриков С. С. Теоретические основы электротехники. Ч. 2 и 3. М., 1979.
2. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 2. М.—Л., 1966.
3. Теоретические основы электротехники. Т. 2/Под ред. П. А. Ионкина. М., 1976.
4. Основы инженерной электрофизики. Ч. 2/Под ред. П. А. Ионкина. М., 1972.
5. Основы теории цепей/Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Негушил А. В. и др. М., 1975.
6. Жуховицкий Б. Я., Негневицкий И. Б. Теоретические основы электротехники. Т. 2. М., 1972.
7. Бессонов Л. А. Нелинейные электрические цепи. М., 1977.
8. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей: Нелинейные цепи. М., 1977.
9. Кушнир В. Ф., Ферсман Б. А. Теория нелинейных электрических цепей. М., 1977.
10. Андреев В. С. Теория нелинейных электрических цепей. М., 1972.
11. Моругин Л. А., Бартенев Л. С., Кабанов Д. А. Вопросы синтеза нелинейных импульсных устройств. М., 1972.
12. Филиппов Е. Нелинейная электротехника. М., 1976.
13. Хьюз В. Нелинейные электрические цепи. М., 1967.
14. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. М., 1962.
15. Колосов С. П., Калмыков И. В., Нефедова В. И. Элементы автоматики. М., 1970.

Приложение

Исходными данными для расчета (рис. П.1) являются:

1. Таблица значений $r_{ст12}(I)$, $r_{ст23}(I)$, $r_{ст31}(I)$, $x_{L_{ст12}}(I)$, $x_{L_{ст23}}(I)$, $x_{L_{ст31}}(I)$, $x_{C_{ст12}}(I)$, $x_{C_{ст23}}(I)$ и $x_{C_{ст31}}(I)$.
2. Начальный шаг вычислений $S \emptyset$.
3. Коэффициент дробления шага DS .
4. Требуемое число точек для таблицы значений $r_{ст1}(I)$, $r_{ст2}(I)$, $r_{ст3}(I)$, $x_{ст1}(I)$, $x_{ст2}(I)$ и $x_{ст3}(I)$.
5. Допустимая невязка при решении системы нелинейных уравнений EPS .





Оглавление

	Стр.
<i>Предисловие</i>	3
<i>Введение</i>	5
<i>Глава 1. Установившиеся режимы в цепях постоянного тока с нелинейными двухполюсниками</i>	7
§ 1.1. Исходные характеристики двухполюсников и их классификация	7
§ 1.2. Упрощение и линеаризация вольт-амперных характеристик двухполюсников. Метод компенсации. Идеализация характеристик	12
§ 1.3. Графический расчет цепей с двухполюсниками методом эквивалентных характеристик и методом пересечения	16
§ 1.4. Релейный эффект в цепи с двухполюсником с отрицательным дифференциальным сопротивлением	24
§ 1.5. Нелинейная аппроксимация исходных характеристик	26
§ 1.6. Расчет цепей с двухполюсниками методом компенсации	28
§ 1.7. Магнитные цепи при постоянном магнитном потоке	29
<i>Глава 2. Установившиеся режимы в цепях постоянного тока с нелинейными четырехполюсниками</i>	50
§ 2.1. Исходные характеристики четырехполюсников и их систематизация	50
§ 2.2. Графический расчет цепей с направленными четырехполюсниками	53
§ 2.3. Графический расчет цепей с направленными четырехполюсниками и обратными связями	56
§ 2.4. Расчет цепей с направленными четырехполюсниками методом компенсации	59
§ 2.5. Графический расчет цепей с ненаправленными четырехполюсниками	63
§ 2.6. Расчет цепей с ненаправленными четырехполюсниками методом компенсации	65
<i>Глава 3. Установившиеся режимы в цепях переменного тока с нелинейными двухполюсниками</i>	75
§ 3.1. Особенности двухполюсников, работающих на переменном токе, их исходные характеристики и классификация	75
§ 3.2. Графический расчет квазилинейных цепей методом эквивалентных характеристик и методом эллипса	81
§ 3.3. Нелинейная аппроксимация исходных характеристик квазилинейных цепей	92

	Стр.
§ 3.4. Расчет квазилинейных цепей методом компенсации	93
§ 3.5. Графический и графо-аналитический расчет цепей по кривым мгновенных значений воздействий	95
§ 3.6. Метод гармонического баланса	102
§ 3.7. Метод сопряжения интервалов (для расчета цепей с резистивными двухполюсниками)	104
§ 3.8. Магнитные цепи при переменном магнитном потоке	107
§ 3.9. Особенности цепей с диэлектриками	111
§ 3.10. Расчет цепей с реактивными двухполюсниками методом сопряжения интервалов	113
<i>Глава 4. Установившиеся режимы в цепях переменного тока с нелинейными четырехполюсниками</i>	128
§ 4.1. Особенности четырехполюсников на переменном токе и их исходные характеристики	128
§ 4.2. Графический расчет квазилинейных цепей с направленными четырехполюсниками	130
§ 4.3. Расчет квазилинейных цепей с направленными четырехполюсниками методом компенсации	133
§ 4.4. Графический расчет квазилинейных цепей с ненаправленными четырехполюсниками	137
§ 4.5. Расчет квазилинейных цепей с ненаправленными четырехполюсниками методом компенсации	138
§ 4.6. Расчет цепей с направленными четырехполюсниками, имеющими идеализированные выходные характеристики	141
<i>Глава 5. Переходные процессы в нелинейных цепях</i>	155
§ 5.1. Общая характеристика переходных процессов в нелинейных цепях	155
§ 5.2. Метод интегрируемой аппроксимации	156
§ 5.3. Метод графического интегрирования	157
§ 5.4. Метод фазовой плоскости	158
§ 5.5. Метод последовательных приближений	162
§ 5.6. Метод сопряжения интервалов	164
§ 5.7. Метод конечных приращений (последовательных интервалов)	166
§ 5.8. Метод пространства состояний	169
§ 5.9. Методы усреднения	173
<i>Глава 6. Методы синтеза и схемной реализации нелинейных цепей</i>	179
§ 6.1. Общие сведения	179
§ 6.2. Синтез вольт-амперной характеристики нелинейного двухполюсного элемента резистивного четырехполюсника гармоническим методом	180
§ 6.3. Синтез вольт-амперной характеристики нелинейного двухполюсного элемента резистивного четырехполюсника методом трех плоскостей	182
§ 6.4. Синтез вольт-амперной характеристики нелинейного резистивного двухполюсного элемента активно-реактивного четырехполюсника	186

	Стр.
§ 6.5. Синтез характеристик нелинейных реактивных двух- полюсных элементов активно-реактивного четырех- полюсника	188
§ 6.6. Реализация синтезированных цепей	190
§ 6.7. Мутаторы, скалоры и ротаторы	192
Глава 7. Алгоритмизация электротехнических уравнений и применение вычислительной техники для расчета нелинейных цепей	199
§ 7.1. Общие сведения	199
§ 7.2. Установившиеся режимы в цепях постоянного тока	202
§ 7.3. Установившиеся режимы в цепях переменного тока	206
§ 7.4. Переходные процессы	214
§ 7.5. Синтез цепей	216
<i>Литература</i>	<i>219</i>
<i>Приложение</i>	<i>219</i>

**Колосов Сергей Петрович,
Сидоров Юрий Алексеевич**

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ И ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Редактор И. Г. Волкова, Художественный редактор Т. М. Скворцова, Художник В. М. Боровков, Технический редактор Л. А. Муравьева, Корректор Р. К. Косинова

ИБ № 2966

Изд. № ЭР-276. Сдано в набор 16.09.80. Подписано в печать 26.01.81. Формат 84×108¹/₃₂. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 11,76 усл. печ. л. 12,08 усл. кр.-отт. 11,31 уч.-изд. л. Тираж 10 000 экз. Зак. № 511. Цена 40 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Владимирская типография «Союзполиграфпрома»
при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7

40 коп.



Москва «Высшая школа» 1981