

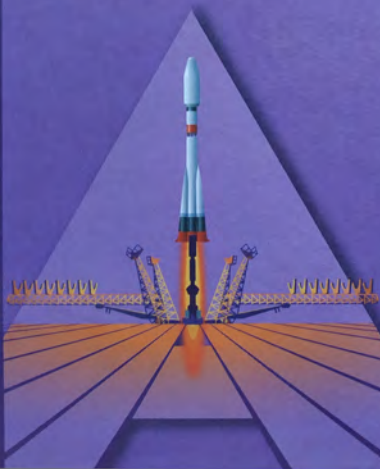
А. Г. Мордкович, П. В. Семенов,  
Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева

# АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

ЧАСТЬ 2

11  
КЛАСС



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
**БИНОМ**

А. Г. Мордкович  
П. В. Семенов  
Л. А. Александрова  
Е. Л. Мардахаева

**Математика:  
алгебра и начала  
математического  
анализа, геометрия.  
Алгебра и начала  
математического  
анализа**  
Базовый уровень

**11**

**КЛАСС**

**В двух частях**

**ЧАСТЬ 2**

**2-е издание, стереотипное**



**МОСКВА**  
**БИНОМ. Лаборатория знаний**  
**2021**

УДК 373:512  
ББК 22.14я72  
М79

**Авторы:** заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования, доктор педагогических наук, профессор Московского городского педагогического университета *А. Г. Мордкович*;  
почётный работник высшего профессионального образования РФ, доктор физико-математических наук, профессор отдела математического образования НИУ ВШЭ *П. В. Семенов*;  
отличник народного просвещения, учитель математики высшей категории *Л. А. Александрова*;  
кандидат педагогических наук, доцент, заведующая лабораторией математики издательства «БИНОМ. Лаборатория знаний» *Е. Л. Мардахаева*.

**М79 Мордкович, А. Г.** Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа : базовый уровень : 11 класс. В 2 ч. Ч. 2 / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева. — 2-е изд. стер. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2021. — 206, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-9963-6379-7 (Ч. 2)  
ISBN 978-5-9963-6380-3

Издание написано в соответствии с ФГОС и ПООП СОО. Изложение теоретического материала сопровождается подробным рассмотрением большого числа примеров, практические задания представлены на трёх уровнях сложности. В конце каждой главы представлены основные факты, вопросы и тест для самопроверки, дополнительные задачи и исторические сведения.

УДК 373:512  
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-9963-6379-7 (Ч. 2)  
ISBN 978-5-9963-6380-3

© ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2020  
© Оформление.  
ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2020  
Все права защищены



## Условные обозначения

**24.13.** Задачи базового уровня сложности

**24.14.** Задачи среднего уровня сложности

**24.15.** Задачи повышенного уровня сложности

**ИКТ** Материал может быть рассмотрен с помощью ИКТ-средств

Упражнения с общим заданием

**10.11**

**10.12**

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения примера



Балтийский федеральный университет  
им. Иммануила Канта.  
Калининград



- § 20. Понятие первообразной
- § 21. Правила интегрирования
- § 22. Понятие определённого интеграла. Формула Ньютона — Лейбница
- § 23. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла

## Глава 4

# Определённый интеграл

### § 20. Понятие первообразной

Вы, наверное, уже привыкли к тому, что в математике, как правило, для каждой операции имеется обратная операция. Есть возведение в квадрат ( $x^2$ ) и есть извлечение квадратного корня ( $\sqrt{x}$ ), есть синус ( $\sin x$ ) и есть арксинус ( $\arcsin x$ ), есть показательная функция ( $y = a^x$ ) и есть обратная ей логарифмическая функция ( $y = \log_a x$ ) и т. д. Для операции дифференцирования также имеется обратная операция — операция интегрирования. В чём состоит операция дифференцирования? Для данной функции  $y = f(x)$  находим её производную. Так, если  $f(x) = x^2$ , то  $f'(x) = 2x$ . В чём состоит обратная операция? Для данной функции  $y = f(x)$  находим ту функцию  $y = F(x)$ , производная  $F'(x)$  которой равна  $f(x)$ . Так, если  $f(x) = 2x$ , то  $F(x) = x^2$ .

**Пример 1** Найти функцию  $y = F(x)$ , для которой данная функция является производной:

а)  $y = x^2$ ; б)  $y = 3\sin x$ ; в)  $y = \sqrt{x}$ ; г)  $y = e^x + \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ).

**Решение.** а)  $F(x) = \frac{x^3}{3}$ , поскольку

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$$

б)  $F(x) = -3\cos x$ , поскольку

$$(-3\cos x)' = -3(\cos x)' = -3(-\sin x) = 3\sin x.$$



в)  $F(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$ , поскольку

$$\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right)' = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

г)  $F(x) = e^x + \ln x$ , поскольку

$$(e^x + \ln x)' = (e^x)' + (\ln x)' = e^x + \frac{1}{x}.$$

**Определение 1.** Функцию  $y = F(x)$  называют первообразной для функции  $y = f(x)$  на промежутке  $X$ , если для всех  $x \in X$  выполняется равенство  $F'(x) = f(x)$ .

Так, результаты решения примера 1 можно представить в виде таблицы:

| Функция                    | Её первообразная                               |
|----------------------------|--|
| а) $y = x^2$               | $y = \frac{x^3}{3}, x \in (-\infty; +\infty)$  |
| б) $y = 3\sin x$           | $y = -3\cos x, x \in (-\infty; +\infty)$       |
| в) $y = \sqrt{x}$          | $y = \frac{2x\sqrt{x}}{3}, x \in (0; +\infty)$ |
| г) $y = e^x + \frac{1}{x}$ | $y = e^x + \ln x, x \in (0; +\infty)$          |

Отметим, что функция  $y = \sqrt{x}$  на самом деле определена на луче  $[0; +\infty)$ , но концевые точки промежутков обычно не принимают во внимание при нахождении первообразных.

Нам очень пригодится таблица первообразных. В этой таблице каждая функция из столбца  $f(x)$  является производной для находящейся на той же строчке функции из столбца  $F(x)$ .

| $f(x)$                | $F(x)$                      | $f(x)$               | $F(x)$                  |
|-----------------------|-----------------------------|----------------------|-------------------------|
| 0                     | $C$                         | $\cos x$             | $\sin x$                |
| 1                     | $x$                         | $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $-\operatorname{ctg} x$ |
| $x^r$ ( $r \neq -1$ ) | $\frac{x^{r+1}}{r+1}$       | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x$   |
| $\frac{1}{x}$         | $\ln x, x \in (0; +\infty)$ | $e^x$                | $e^x$                   |
| $\sin x$              | $-\cos x$                   | $a^x$                | $\frac{a^x}{\ln a}$     |

На самом деле, у каждой функции из столбца  $f(x)$  таблицы не одна первообразная, а бесконечно много первообразных. Например, функция  $y = \sin x$  является первообразной для функции  $y = \cos x$ . А теперь смотрите:  $(\sin x + 5)' = \cos x$ ,  $(\sin x - 2,5)' = \cos x$  и вообще  $(\sin x + C)' = \cos x$ ; значит, любая функция вида  $y = \sin x + C$ ,  $C \in \mathbf{R}$ , является первообразной для функции  $y = \cos x$ . Имеет место следующая теорема (её доказывают в курсе высшей математики).

**Теорема.** Если  $y = F(x)$  — первообразная для функции  $y = f(x)$  на промежутке  $X$ , то у функции  $y = f(x)$  бесконечно много первообразных, и все они имеют вид  $y = F(x) + C$ , где  $C$  — любое действительное число.

**Определение 2.** Если функция  $y = f(x)$  имеет на множестве  $X$  первообразную  $y = F(x)$ , то множество всех первообразных, т. е. множество  $\{F(x) + C \mid C \in \mathbf{R}\}$ , называют **неопределённым интегралом** от функции  $y = f(x)$  и обозначают так:  $\int f(x)dx$  (читают: *неопределённый интеграл эф от икс дэ икс*).

**Пример 2** Найти: а)  $\int x^7 dx$ ; б)  $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$ .

**Решение.** В обоих случаях будем опираться на четвёртую строчку таблицы первообразных.



а) Первообразной для функции  $y = x^7$  является функция  $y = \frac{x^8}{8}$ ,  
значит,  $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + C$ .

б) Преобразуем заданную функцию:

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{-\frac{1}{4}}.$$

Значит,

$$F(x) = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}; \quad \int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$$

## Упражнения

**20.1.** Приведите пример хотя бы одной функции  $y = f(x)$ , если известна её производная:

а)  $f'(x) = \sin x$ ;

г)  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;

б)  $f'(x) = -\cos x$ ;

д)  $f'(x) = 2x + 1$ ;

в)  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ;

е)  $f'(x) = 3x^2 - x$ .

Установите, что функция  $y = F(x)$  является первообразной для функции  $y = f(x)$ .

**20.2.** а)  $F(x) = 2 + 3x^2$ ,  $f(x) = 6x$ ;

б)  $F(x) = x^3 - x^4$ ,  $f(x) = 3x^2 - 4x^3$ ;

в)  $F(x) = 2\sqrt{x} - 3x$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3$ ;

г)  $F(x) = 5x - 2x^4$ ,  $f(x) = 5 - 8x^3$ ;

д)  $F(x) = x^5 + x^2$ ,  $f(x) = 5x^4 + 2x$ ;

е)  $F(x) = \sqrt[3]{x} + x$ ,  $f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 1$ .

20.3. а)  $F(x) = 2 + \cos x$ ,  $f(x) = -\sin x$ ;

б)  $F(x) = 0,5 \operatorname{ctg} x$ ,  $f(x) = -\frac{1}{2 \sin^2 x}$ ;

в)  $F(x) = \sin 2x$ ,  $f(x) = 2 \cos 2x$ ;

г)  $F(x) = 1 - \sin x$ ,  $f(x) = -\cos x$ ;

д)  $F(x) = 3 \operatorname{tg} x$ ,  $f(x) = \frac{3}{\cos^2 x}$ ;

е)  $F(x) = 3 \cos \frac{x}{3}$ ,  $f(x) = -\sin \frac{x}{3}$ .

20.4. а)  $F(x) = e^{2x}$ ,  $f(x) = 2e^{2x}$ ;

б)  $F(x) = 3 \ln x$ ,  $f(x) = \frac{3}{x}$ ;

в)  $F(x) = 2^{x+1}$ ,  $f(x) = 2^{x+1} \ln 2$ ;

г)  $F(x) = \frac{1}{6} e^{6x}$ ,  $f(x) = e^{6x}$ ;

д)  $F(x) = \ln 5x$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;

е)  $F(x) = \frac{5^{2x-1}}{\ln 5}$ ,  $f(x) = 2 \cdot 5^{2x-1}$ .

20.5. Установите, что функция  $y = F(x)$  не является первообразной для функции  $y = f(x)$ :

а)  $F(x) = e^{3x}$ ,  $f(x) = e^{3x}$ ;

б)  $F(x) = \cos 4x$ ,  $f(x) = -4 \sin x$ ;

в)  $F(x) = \sqrt{2x+5}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+5}}$ ;

г)  $F(x) = 3^{x-2}$ ,  $f(x) = 3^x \ln 3$ ;

д)  $F(x) = \sin \frac{x}{2}$ ,  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ ;

е)  $F(x) = (1-x)^4$ ,  $f(x) = 4(1-x)^3$ .

Для данной функции найдите хотя бы одну первообразную.

20.6. а)  $y = \frac{2}{x^2}$ ;      в)  $y = \frac{1}{x}$ ;      д)  $y = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ ;

б)  $y = x^2$ ;      г)  $y = x^{-3}$ ;      е)  $y = 3\sqrt{x}$ .



20.7. а)  $y = x - 1$ ;      в)  $y = 4x^3$ ;      д)  $y = x\sqrt{x}$ ;  
 б)  $y = 2x$ ;      г)  $y = 3x^2$ ;      е)  $y = \sqrt[3]{x^2}$ .

20.8. а)  $y = \sin 2x$ ;      в)  $y = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$ ;      д)  $y = \operatorname{tg}^2 x$ ;  
 б)  $y = 1 - \cos x$ ;      г)  $y = \sin x \cos x$ ;      е)  $y = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ .

Для указанной функции  $y = f(x)$  найдите ту первообразную, график которой проходит через данную точку  $P$ .

20.9. а)  $y = -\frac{1}{x^2}$ ,  $P(-1; 1)$ ;      г)  $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $P(0,25; 2)$ ;  
 б)  $y = 6x^2$ ,  $P(-2; 3)$ ;      д)  $y = 4x^3$ ,  $P(1; -0,5)$ ;  
 в)  $y = e^x$ ,  $P(0; 2)$ ;      е)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $P(1; 1)$ .

20.10. а)  $y = 2\cos x$ ,  $P\left(-\frac{\pi}{6}; -2\right)$ ;      г)  $y = \sqrt{2}\sin x$ ,  $P\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$ ;  
 б)  $y = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $P\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$ ;      д)  $y = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}$ ,  $P\left(\frac{\pi}{3}; -1\right)$ ;  
 в)  $y = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ ,  $P\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$ ;      е)  $y = 4\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ ,  $P\left(\frac{2\pi}{3}; -3\right)$ .

Найдите неопределённый интеграл.

20.11. а)  $\int 1 dx$ ;      в)  $\int x^2 dx$ ;      д)  $\int \frac{1}{x} dx$ ;  
 б)  $\int x dx$ ;      г)  $\int x^3 dx$ ;      е)  $\int \sqrt{x} dx$ .

20.12. а)  $\int \sin x dx$ ;      в)  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$ ;      д)  $\int e^x dx$ ;  
 б)  $\int \cos x dx$ ;      г)  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$ ;      е)  $\int 10^x dx$ .

## Упражнения для повторения

20.13. а) Найдите точку максимума функции  $y = e^{16-4x}(x - 3)$ .  
 б) Найдите точку минимума функции  $y = e^{5x-35}(x + 7)$ .

**20.14.** Найдите значения параметра  $p$ , при которых функция  $y = x^3 - 3px^2 + 48x - 4$  имеет ровно одну стационарную точку.

**20.15.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанном отрезке:

а)  $y = x^3 + 15x^2 + 14$ ,  $[-10; 5]$ ;

б)  $y = e^{2x} - 4e^x + 5$ ,  $[0; 1]$ ;

в)  $y = 9 \operatorname{tg} x - 9x$ ,  $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right]$ ;

г)  $y = -x^3 + 12x^2 + 10$ ,  $[-1; 8]$ ;

д)  $y = e^{2x} - 6e^x - 3$ ,  $[0; 2 \ln 2]$ ;

е)  $y = 6x + 6 \operatorname{ctg} x + \pi$ ,  $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]$ .

**20.16.** а) В некотором городе проживают 250 000 человек, 15 % которых — дети и подростки в возрасте до 18 лет, остальные — взрослые. Среди взрослых 30 % — неработающее население (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых работает?

б) В школе 600 учащихся, 30 % которых — учащиеся начальной школы. Немецкий язык изучают 15 % учащихся 5—11-х классов. Сколько учащихся 5—11-х классов изучают немецкий язык?

## § 21. Правила интегрирования

Для отыскания первообразных, как и для отыскания производных, используются не только формулы (о них шла речь в предыдущем параграфе), но и правила. О них и пойдёт речь в настоящем параграфе.

**Теорема 1.** Если функции  $y = f(x)$ ,  $y = h(x)$  имеют на множестве  $X$  первообразные  $y = F(x)$ ,  $y = H(x)$  соответственно, то сумма  $y = F(x) + H(x)$  является первообразной для функции  $y = f(x) + h(x)$ .

**Доказательство.** Найдём производную функции  $y = F(x) + H(x)$ :

$$(F(x) + H(x))' = F'(x) + H'(x) = f(x) + h(x).$$

Значит, функция  $y = F(x) + H(x)$  является первообразной для функции  $y = f(x) + h(x)$ , что и требовалось доказать.



**Теорема 2.** Если функция  $y = f(x)$  имеет на множестве  $X$  первообразную  $y = F(x)$ , то для любого числа  $k$  функция  $y = kF(x)$  является первообразной для функции  $y = kf(x)$ .

**Доказательство.** Найдём производную функции  $y = kF(x)$ :

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x).$$

Значит, функция  $y = kF(x)$  является первообразной для функции  $y = kf(x)$ , что и требовалось доказать.

На практике эти две теоремы удобно использовать в виде двух правил.

**Правило 1.** Первообразная суммы равна сумме первообразных.

**Правило 2.** Постоянный множитель можно вынести за знак первообразной.

**Пример** Найти первообразную  $y = F(x)$  для функции

$$y = 2e^x - \frac{1}{3x} + \frac{5}{\cos^2 x} \quad (x > 0).$$

**Решение.** 1) Опираясь на таблицу первообразных из § 20, заключаем, что первообразной для  $e^x$  является  $e^x$ , первообразной для  $\frac{1}{x}$  является  $\ln x$ , первообразной для  $\frac{1}{\cos^2 x}$  является  $\operatorname{tg} x$ .

2) Руководствуясь правилом 2, заключаем, что первообразной для  $2e^x$  является  $2e^x$ , первообразной для  $\frac{1}{3x}$  является  $\frac{1}{3}\ln x$ , первообразной для  $\frac{5}{\cos^2 x}$  является  $5\operatorname{tg} x$ .

3) И наконец, согласно правилу 1 первообразной для  $2e^x - \frac{1}{3x} + \frac{5}{\cos^2 x}$  будет  $2e^x - \frac{1}{3}\ln x + 5\operatorname{tg} x$ .

**Ответ:**  $F(x) = 2e^x - \frac{1}{3}\ln x + 5\operatorname{tg} x$ .

А вот как выглядело бы решение этого примера, если бы требовалось найти не какую-то одну первообразную, а множество всех первообразных, т. е. неопределённый интеграл  $\int \left( 2e^x - \frac{1}{3x} 2e^x + \frac{5}{\cos^2 x} \right) dx$ :

$$\begin{aligned} \int \left( 2e^x - \frac{1}{3x} 2e^x + \frac{5}{\cos^2 x} \right) dx &= \int 2e^x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int \frac{5}{\cos^2 x} dx = \\ &= 2 \int e^x dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + 5 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2e^x - \frac{1}{3} \ln x + 5 \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Если функция  $y = f(x)$  имеет на множестве  $X$  первообразную  $y = F(x)$ , то функция  $y = \frac{1}{k} F(kx + m)$  является первообразной для функции  $y = f(kx + m)$ .

**Доказательство.** Найдём производную функции  $y = \frac{1}{k} F(kx + m)$ :

$$\left( \frac{1}{k} F(kx + m) \right)' = \frac{1}{k} (F(kx + m))' = \frac{1}{k} \cdot k F'(kx + m) = f(kx + m).$$

Значит, функция  $y = \frac{1}{k} F(kx + m)$  является первообразной для функции  $y = f(kx + m)$ , что и требовалось доказать.

Например, первообразной для  $\cos x$  является  $\sin x$ , значит, первообразной для  $\cos 2x$  будет  $\frac{1}{2} \sin 2x$ ; первообразной для  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$  будет  $-\frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$ ; первообразной для  $\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$  будет  $\frac{3}{2} \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$ .

А вот примеры использования теоремы 3 для вычисления неопределённого интеграла:

$$\begin{aligned} \int e^{3x} dx &= \frac{1}{3} e^{3x} + C; \quad \int e^{5-x} dx = -e^{5-x} + C; \\ \int (2x - 3)^5 dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x - 3)^6}{6} + C = \frac{(2x - 3)^6}{12} + C. \end{aligned}$$



## Упражнения

Найдите хотя бы одну первообразную для данной функции  $y = f(x)$ .

**21.1.** а)  $f(x) = x + 1$ ;      в)  $f(x) = 2x - 5$ ;      д)  $f(x) = \frac{x+2}{3}$ ;  
б)  $f(x) = x - 3$ ;      г)  $f(x) = -3x + 4$ ;      е)  $f(x) = \frac{4x-1}{6}$ .

**21.2.** а)  $f(x) = x^2 + 2x$ ;      г)  $f(x) = 3x^2 - 1$ ;  
б)  $f(x) = 8x - x^2$ ;      д)  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ ;  
в)  $f(x) = -2x^2 - 4$ ;      е)  $f(x) = -x^2 - 6x + 3$ .

**21.3.** а)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ ;      г)  $f(x) = 5x^9 + 4x$ ;  
б)  $f(x) = 4x^3 + 5x^4$ ;      д)  $f(x) = -9x^2 + 6x^5 - x$ ;  
в)  $f(x) = x^5 - 8x^7$ ;      е)  $f(x) = 15x^4 - 15x^2 + 1$ .

**21.4.** а)  $f(x) = x^{-3} + x^{\frac{2}{3}}$ ;      г)  $f(x) = 4x^{-5} - 3x^{-4}$ ;  
б)  $f(x) = x^{-2} - x^{\frac{1}{4}}$ ;      д)  $f(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 0,5x^{-0,5}$ ;  
в)  $f(x) = x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ ;      е)  $f(x) = 2,5x^{-1,5} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ .

**21.5.** а)  $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$ ;      г)  $f(x) = \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x}$ ;  
б)  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - x$ ;      д)  $f(x) = \sqrt{x} + x^{-2}$ ;  
в)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3}$ ;      е)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2x^{-1}$ .

**21.6.** а)  $f(x) = (x+4)^2$ ;      г)  $f(x) = (x-2)^3$ ;  
б)  $f(x) = -\frac{1}{(3x-2)^2}$ ;      д)  $f(x) = \frac{12}{(4x+7)^3}$ ;  
в)  $f(x) = \frac{6}{\sqrt{5-3x}}$ ;      е)  $f(x) = \frac{9}{2\sqrt{6x+1}}$ .



**21.7.** а)  $f(x) = \sin x - 3\cos x$ ; г)  $f(x) = -2\sin x + \cos x$ ;  
 б)  $f(x) = \sin 2x + \frac{2}{\sin^2 x}$ ; д)  $f(x) = \cos \frac{x}{3} - \frac{4}{\cos^2 x}$ ;  
 в)  $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ ; е)  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$ .

**21.8.** а)  $f(x) = e^x - x^{-1} (x > 0)$ ; г)  $f(x) = 10^x + \frac{3}{x} (x > 0)$ ;  
 б)  $f(x) = e^{-x} - x^{-1} (x > 0)$ ; д)  $f(x) = e^{2-3x} - 2x^{-1} (x > 0)$ ;  
 в)  $f(x) = 2^x - \frac{1}{2x} (x > 0)$ ; е)  $f(x) = e^{5x-4} + \frac{1}{5x} (x > 0)$ .

Для указанной функции найдите ту первообразную, график которой проходит через данную точку  $P$ .

**21.9.** а)  $y = 2x + 1, P(2; 3)$ ; г)  $y = 4x - 3, P(1; -5)$ ;  
 б)  $y = 3x^2 - x, P(0; 1)$ ; д)  $y = 6x^2 + 2x, P(1; 5)$ ;  
 в)  $y = \frac{1}{(x+2)^2}, P(-1; 2)$ ; е)  $y = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}, P(5; 4)$ .

**21.10.** а)  $y = \cos x - \sin x, P(0; -3)$ ;  
 б)  $y = \frac{1}{\cos^2 x} + \sin 3x, P\left(\frac{\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$ ;  
 в)  $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + 1, P(0; 3)$ ;  
 г)  $y = 2\sin x - \cos x, P\left(\frac{\pi}{2}; 8\right)$ ;  
 д)  $y = \frac{3}{\sin^2 x} - \cos \frac{x}{2}, P\left(\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3}\right)$ ;  
 е)  $y = \frac{1}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} - x, P(0; -2)$ .

**21.11.** Точка движется по координатной прямой. Ускорение движения точки задано формулой  $a(t) = 6(t+1)^2$ ,  $t$  — время движения. Найдите закон изменения скорости  $v = v(t)$  и закон движения  $s = s(t)$ , если  $v(1) = 10$ ,  $s(1) = 3$ .

**21.12.** Точка движется по координатной прямой со скоростью, заданной формулой  $v = v(t)$ . Найдите закон движения  $s = s(t)$ , если известны начальные условия  $(t_0, s_0)$ :

а)  $v = 2 + 6t, t_0 = 2, s_0 = 6$ ;

б)  $v = -\sin \frac{t}{3}, t_0 = \pi, s_0 = 4$ ;

в)  $v = 3\sqrt{t}, t_0 = 4, s_0 = 10$ ;

г)  $v = 3 + 4t, t_0 = 5, s_0 = 30$ ;

д)  $v = 2\cos 4t, t_0 = \frac{\pi}{24}, s_0 = 3,75$ ;

е)  $v = -\frac{2}{t^2}, t_0 = 0,25, s_0 = 5$ .

Найдите множество всех первообразных заданной функции.

**21.13.** а)  $y = (x - 3)^3$ ;

б)  $y = (x + 5)^4$ ;

в)  $y = (3x - 2)^2$ ;

г)  $y = (7 - 2x)^3$ ;

д)  $y = (8 - 0,2x)^4$ ;

е)  $y = (0,25x + 6)^7$ .

**21.14.** а)  $y = \sin(4x + 1)$ ;

б)  $y = 2\cos(7 - 2x)$ ;

в)  $y = -\frac{5}{\sin^2(5x + 2)}$ ;

г)  $y = \cos(5x - 3)$ ;

д)  $y = -3\sin(5 - 6x)$ ;

е)  $y = \frac{1}{3\cos^2\left(\frac{x}{3} - 1\right)}$ .

**21.15.** а)  $y = \frac{1}{(2x + 3)^2}$ ;

б)  $y = \frac{3}{2\sqrt{3x - 7}}$ ;

в)  $y = (1 - 6x)^{-\frac{1}{6}}$ ;

г)  $y = \frac{4}{(4x - 3)^3}$ ;

д)  $y = -\frac{5}{\sqrt[3]{5x + 2}}$ ;

е)  $y = (5 - 6x)^{\frac{3}{4}}$ .

**21.16.** а)  $y = 3e^{3x} + 1$ ;

б)  $y = e^{2-x} + \frac{1}{2x} \quad (x > 0)$ ;

в)  $y = 2^{4x+3} - \frac{1}{x} \quad (x > 0)$ ;

г)  $y = 0,25e^{0,5x} - 2$ ;

д)  $y = e^{1-2x} - \frac{3}{x} \quad (x > 0)$ ;

е)  $y = 3^{5x-2} + \frac{1}{5x} \quad (x > 0)$ .



Найдите неопределённый интеграл.

**21.17.** а)  $\int (x - 5) dx$ ;      в)  $\int (x^2 - 1) dx$ ;      д)  $\int (x^3 + 2x^2 + x) dx$ ;

б)  $\int (2x + 5) dx$ ;      г)  $\int (x^2 - x) dx$ ;      е)  $\int (3x^2 - 4x + 1) dx$ .

**21.18.** а)  $\int (\sin 3x + e^{-2x}) dx$ ;      г)  $\int \left( e^{1-2x} + 2 \cos \frac{x}{2} \right) dx$ ;

б)  $\int \left( \frac{1}{\cos^2 3x} - \frac{2}{x} \right) dx$ ;      д)  $\int \left( \frac{1}{x} + \frac{3}{\sin^2 6x} \right) dx$ ;

в)  $\int (\sqrt[3]{x} + x^{1.5}) dx$ ;      е)  $\int \left( \frac{2}{\sqrt{x}} - x^{-0.6} \right) dx$ .

**21.19.** а)  $\int x^3(1 - x^2) dx$ ;      г)  $\int x^2(x + 3) dx$ ;

б)  $\int 2 \sin x \cos x dx$ ;      д)  $\int (\cos^2 2x - \sin^2 2x) dx$ ;

в)  $\int \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1} dx$ ;      е)  $\int \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6} dx$ .

## Упражнения для повторения

**21.20.** Найдите вероятность того, что при одновременном бросании красного и синего игральных кубиков:

а) на красном кубике число выпавших очков будет на 2 меньше, чем на синем;

б) на синем кубике число выпавших очков будет на 1 или на 3 отличаться от числа очков на красном.

**21.21.** События  $A$  и  $B$  независимы. Их вероятности равны 0,7 и 0,9 соответственно. Найдите вероятности событий:

а)  $AB$ ;      б)  $A + B$ ;      в)  $\bar{A}B$ ;      г)  $A + \bar{B}$ .

**21.22.** Определите знак числа  $a$ , если:

а)  $a = \sin 2 \sin 4 \cos 6 \cos 8$ ;      б)  $a = \sin 10 \cos 12 \operatorname{tg} 13 \operatorname{ctg} 15$ .

**21.23.** Решите уравнение и найдите его корни на указанном промежутке:

а)  $14^{\sin x} = 7^{\cos x} \cdot 2^{\sin x}$ ,  $[-2, 5\pi; -1, 5\pi]$ ;

б)  $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{-\sin x}$ ,  $[-\pi; 2\pi]$ .

## § 22. Понятие определённого интеграла. Формула Ньютона — Лейбница

Главу 2, где речь шла об операции дифференцирования, мы начали с рассмотрения двух задач — физической (о мгновенной скорости неравномерного движения материальной точки по прямой) и геометрической (об угловом коэффициенте касательной к графику функции). Указанные две задачи привели нас к понятию производной (см. § 6). Этот параграф мы тоже начнём с рассмотрения двух задач (физической и геометрической), они приведут нас к понятию определённого интеграла.

**Задача 1 (о перемещении точки)** По прямой движется материальная точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой  $v = v(t)$ . Найти перемещение  $s$  точки за промежуток времени  $[a; b]$ .

**Решение.**

1) Разделим промежуток времени  $[a; b]$  на  $n$  равных частей:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

2) Будем считать, что в течение всего промежутка времени  $[t_k; t_{k+1}]$  скорость движения  $v_k$  была постоянной, например такой, как в момент времени  $t_k$ . Итак, мы считаем, что  $v_k = v(t_k)$ .

3) Приближённое значение перемещения  $s_k$  точки за промежуток времени от  $t_k$  до  $t_{k+1}$  выражается следующей формулой:

$$s_k \approx v(t_k) \Delta t_k.$$

4) Найдём приближённое значение перемещения  $s$ :

$$s \approx S_n,$$

где

$$S_n = s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_k + \dots + s_{n-1} = \\ = v(t_0)\Delta t_0 + v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + \dots + v(t_k)\Delta t_k + \dots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1}.$$

5) Приближённое равенство  $s \approx S_n$  будет тем точнее, чем больше  $n$ . Точное значение перемещения  $s$  равно пределу последовательности  $(S_n)$ :

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Прежде чем формулировать вторую задачу, введём понятие криволинейной трапеции. На рисунке 107, а изображена прямоугольная трапеция  $ABCD$ . Если её верхнее основание  $BC$  заменить кривой ли-



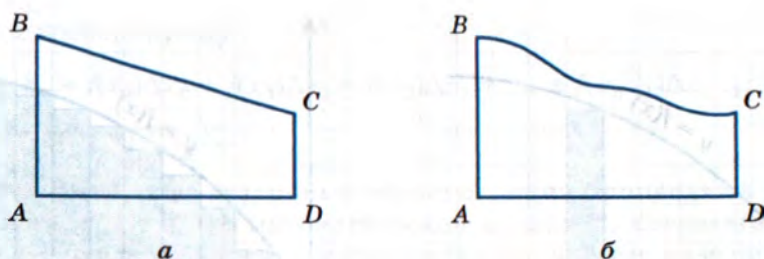


Рис. 107

нией (рис. 107, б), то получится плоская фигура, которую назовём *криволинейной трапецией*.

**Задача 2** (о вычислении площади криволинейной трапеции) В прямоугольной системе координат  $xOy$  расположена криволинейная трапеция, ограниченная осью  $Ox$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке  $[a; b]$  функции  $y = f(x)$  (рис. 108). Вычислить площадь этой криволинейной трапеции.

**Решение.** Разобьём отрезок  $[a; b]$  (основание криволинейной трапеции) на  $n$  равных частей; это разбиение осуществим с помощью точек  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}$ . Проведём через эти точки прямые, параллельные оси  $Oy$ . Тогда заданная криволинейная трапеция разобьётся на  $n$  частей, на  $n$  узеньких столбиков. Площадь всей трапеции равна сумме площадей столбиков.

Рассмотрим отдельно  $k$ -й столбик, т. е. криволинейную трапецию, основанием которой служит отрезок  $[x_k; x_{k+1}]$ . Заменим его прямо-

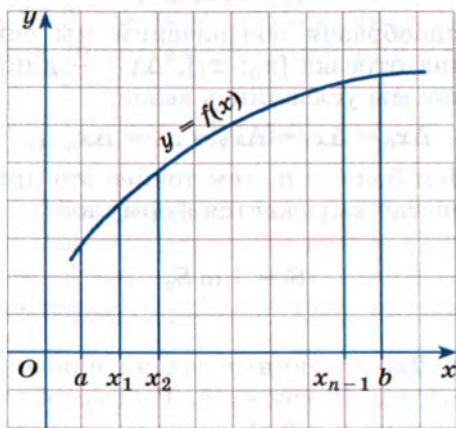


Рис. 108

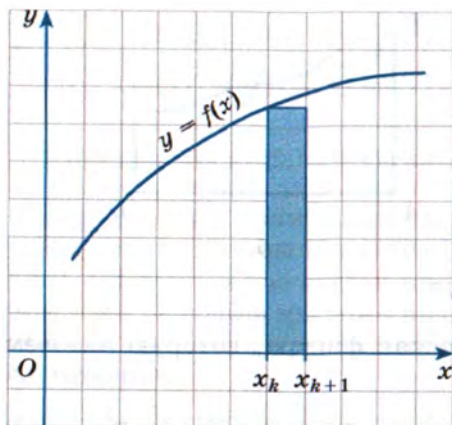


Рис. 109

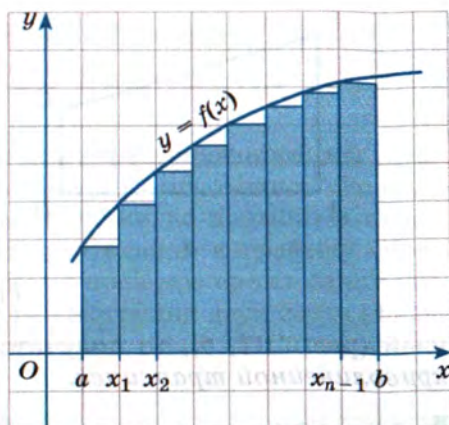


Рис. 110

угольником с тем же основанием и высотой, равной  $f(x_k)$  (рис. 109). Площадь прямоугольника равна  $f(x_k) \cdot \Delta x_k$ , где  $\Delta x_k$  — длина отрезка  $[x_k; x_{k+1}]$ ; естественно считать составленное произведение приближённым значением площади  $k$ -го столбика.

Сделав то же самое со всеми остальными столбиками, получим такой результат: площадь  $S$  заданной криволинейной трапеции приближённо равна площади  $S_n$  ступенчатой фигуры, составленной из  $n$  прямоугольников (рис. 110):

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_k)\Delta x_k + \dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Здесь ради единообразия обозначений мы считаем, что  $a = x_0$ ,  $b = x_n$ ;  $\Delta x_0$  — длина отрезка  $[x_0; x_1]$ ,  $\Delta x_1$  — длина отрезка  $[x_1; x_2]$  и т. д.; при этом, как мы условились выше,

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_{n-1}.$$

Итак,  $S \approx S_n$ . Чем больше  $n$ , тем точнее это приближённое равенство, а точное равенство выражается формулой

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Подведём итоги. Две различные задачи привели к одной и той же математической модели. Опишем её. Рассматривалась непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция  $y = f(x)$ ; далее мы делали следующее:

- 1) разбивали отрезок  $[a; b]$  на  $n$  равных частей;



2) составляли сумму

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1};$$

3) вычисляли  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

Многие задачи из различных областей знания приводят в процессе решения к такой же математической модели и, следовательно, к новому понятию. Значит, это математическое понятие надо специально изучить: ввести для него название, обозначение и научиться с ним работать.

Указанный предел называют **определённым интегралом** (более полное название: **определённый интеграл от функции  $y = f(x)$  по от-**

**резку  $[a; b]$** ) и обозначают так:  $\int_a^b f(x)dx$  (читают: *интеграл от а до б*

*эф от икс дэ икс*). Число  $a$  называют **нижним пределом интегрирования**, а число  $b$  — **верхним пределом интегрирования**. Про  $f(x)$  говорят так: «**подынтегральная функция**».

Вернёмся к задаче 1, где речь шла о перемещении  $s$  точки, движущейся по прямой со скоростью  $v = v(t)$ , за промежуток времени от  $t = a$  до  $t = b$ . Формула для отыскания  $s$  такова:

$$s = \int_a^b v(t)dt.$$

В этом состоит **физический смысл определённого интеграла**.

Вернёмся к задаче 2, где речь шла о вычислении площади  $S$  криволинейной трапеции. Формула для отыскания  $S$  такова:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

В этом состоит **геометрический смысл определённого интеграла**.

В § 20 мы ввели понятия первообразной и неопределённого интеграла, а в настоящем параграфе — понятие определённого интеграла. Неопределённый интеграл, определённый интеграл... Какая связь между этими понятиями? Оказывается, связь есть: оба понятия самым тесным образом связаны с понятием первообразной. Неопределённый интеграл от данной функции — это множество первообразных для данной функции. А что касается определённого интеграла, то справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и  $y = F(x)$  — первообразная для функции  $y = f(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Например, функция  $y = x^3$  — первообразная для функции  $y = 3x^2$ . Введём обозначение:  $F(x) = x^3$ . Тогда

$$\int_1^2 3x^2 dx = F(2) - F(1) = 2^3 - 1^3 = 7.$$

Формулу (1) называют *формулой Ньютона — Лейбница* в честь английского физика Исаака Ньютона (1643—1727) и немецкого философа Готфрида Лейбница (1646—1716), которые примерно около 1680 г. независимо друг от друга нашли взаимосвязь между неопределённым и определённым интегралами от непрерывных функций.

Строгое доказательство теоремы даётся в курсе высшей математики, мы же ограничимся физическим обоснованием. Мы говорили о том, что перемещение  $s$  точки, движущейся по прямой со скоростью  $v = v(t)$ , за промежуток времени от  $t = a$  до  $t = b$  вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b v(t) dt.$$

С другой стороны, перемещение  $s$  за промежуток времени от  $t = a$  до  $t = b$  выражается формулой  $s = s(b) - s(a)$ . В итоге получаем:

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a).$$

На практике вместо записи  $F(b) - F(a)$  используют запись  $F(x)|_a^b$ , её называют *двойной подстановкой* и, соответственно, переписывают формулу Ньютона — Лейбница в таком виде:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b. \quad (2)$$



**Пример 1** Вычислить определённый интеграл:

$$\text{а) } \int_0^2 x^3 dx; \quad \text{б) } \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx; \quad \text{в) } \int_2^3 2^x dx; \quad \text{г) } \int_{-1}^3 \sqrt{2x+3} dx.$$

**Решение.** Для каждого из указанных интегралов сначала находим первообразную для подынтегральной функции, а затем применяем формулу (2). Для отыскания первообразной в пунктах «а» — «в» воспользуемся таблицей первообразных из § 20.

а) Для функции  $y = x^3$  первообразной является функция  $y = \frac{x^4}{4}$ ;

$$\text{значит, } \int_0^2 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = \frac{1}{4}(2^4 - 0^4) = 4.$$

б) Для функции  $y = \frac{1}{\cos^2 x}$  первообразной является функция

$$y = \operatorname{tg} x; \text{ значит, } \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{3} \right) = 1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = 1 + \sqrt{3}.$$

в) Для функции  $y = 2^x$  первообразной является функция  $y = \frac{2^x}{\ln 2}$ ;

$$\text{значит, } \int_2^3 2^x dx = \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_2^3 = \frac{1}{\ln 2}(2^3 - 2^2) = \frac{4}{\ln 2}.$$

г) Для функции  $y = \sqrt{x}$ , т. е. для  $y = x^{\frac{1}{2}}$ , первообразной является

$$\text{функция } y = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}. \text{ Но у нас подынтегральная функ-}$$

ция не  $y = \sqrt{x}$ , а  $y = \sqrt{2x+3}$ . Придётся воспользоваться теоремой 3 из § 21, согласно которой если функция  $y = f(x)$  имеет первообразную  $y = F(x)$ , то для функции  $y = f(kx+m)$  первообразной является функ-

ция  $y = \frac{1}{k} F(kx+m)$ . Значит, для функции  $y = \sqrt{2x+3}$  первообраз-

ной будет функция  $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(2x+3)^3}$ , т. е.  $y = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+3)^3}$ . Теперь можно применить формулу Ньютона — Лейбница:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \sqrt{2x+3} dx &= \frac{1}{3} \sqrt{(2x+3)^3} \Big|_{-1}^3 = \frac{1}{3} (\sqrt{(2 \cdot 3 + 3)^3} - \sqrt{(2 \cdot (-1) + 3)^3}) = \\ &= \frac{1}{3} (\sqrt{9^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{1}{3} (27 - 1) = 8\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: а) 4; б)  $1 + \sqrt{3}$ ; в)  $\frac{4}{\ln 2}$ ; г)  $8\frac{2}{3}$ .

Опираясь на формулу Ньютона — Лейбница, получим три свойства определённого интеграла.

**Свойство 1.** Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

**Доказательство.** Если  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$ , а  $G(x)$  — первообразная для  $g(x)$ , то  $F(x) + G(x)$  — первообразная для  $f(x) + g(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= (F(x) + G(x)) \Big|_a^b = (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = \\ &= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

**Свойство 2.** Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$



**Доказательство.** Если  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$ , то  $kF(x)$  — первообразная для  $kf(x)$ . Значит,

$$\int_a^b kf(x)dx = kF(x)\Big|_a^b = k(F(b) - F(a)) = k \int_a^b f(x)dx.$$

**Пример 2** Вычислить  $\int_1^8 \left( \frac{3}{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 5 \right) dx$ .

**Решение.** Воспользуемся сначала свойством 1, а затем свойством 2:

$$\begin{aligned} \int_1^8 \left( \frac{3}{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 5 \right) dx &= \int_1^8 \frac{3}{x^2} dx + \int_1^8 2\sqrt[3]{x} dx - \int_1^8 5 dx = \\ &= 3 \int_1^8 x^{-2} dx + 2 \int_1^8 x^{\frac{1}{3}} dx - 5 \int_1^8 dx. \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\int_1^8 x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^8 = -(8^{-1} - 1^{-1}) = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}.$$

$$\int_1^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_1^8 = \frac{3}{4} \left( 8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}} \right) = \frac{3}{4} \left( (\sqrt[3]{8})^4 - 1 \right) = \frac{3}{4} (2^4 - 1) = \frac{3}{4} \cdot 15 = \frac{45}{4}.$$

$$\int_1^8 dx = x \Big|_1^8 = 8 - 1 = 7.$$

Окончательно получаем:

$$\int_1^8 \left( \frac{3}{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 5 \right) dx = 3 \cdot \frac{7}{8} + 2 \cdot \frac{45}{4} - 5 \cdot 7 = -9\frac{7}{8}.$$

**Свойство 3 (аддитивное свойство интеграла).** Если  $a < c < b$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**Доказательство.** Пусть  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \\ &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.\end{aligned}$$

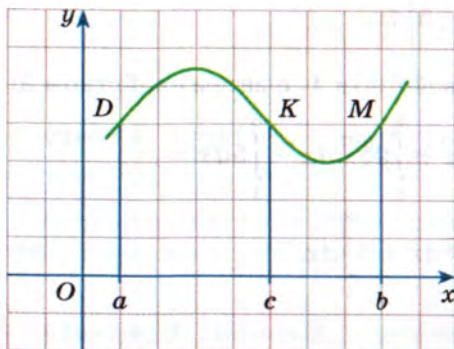


Рис. 111

Свойство 3 наглядно иллюстрирует рисунок 111. Смотрите: площадь  $S$  криволинейной трапеции  $aDMb$  равна сумме площадей  $S_1$  и  $S_2$  криволинейных трапеций  $aDKc$  и  $cKMb$ :  $S = S_1 + S_2$ . Но

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad S_1 = \int_a^c f(x) dx, \\ S_2 = \int_c^b f(x) dx.$$

**Пример 3\*** Вычислить  $\int_{-2}^e f(x) dx$ , если  $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$

**Решение.** На рисунке 112 представлен (схематически) график функции  $y = f(x)$ . Для вычисления заданного интеграла воспользуемся аддитивным свойством (кратко,  $\int_{-2}^e = \int_{-2}^1 + \int_1^e$ ):

$$\begin{aligned}\int_{-2}^e f(x) dx &= \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^e f(x) dx = \int_{-2}^1 e^{x-1} dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx = \\ &= e^{x-1} \Big|_{-2}^1 + \ln x \Big|_1^e = (e^0 - e^{-3}) + (\ln e - \ln 1) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{e^3}\right) + (1 - 0) = 2 - \frac{1}{e^3}.\end{aligned}$$

**Ответ:**  $2 - \frac{1}{e^3}$ .



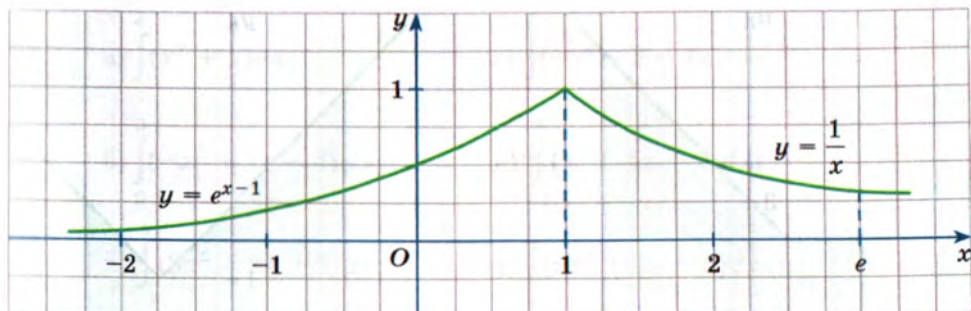


Рис. 112

## Упражнения

Для приближённого вычисления площадей криволинейных фигур применяют *метод палетки*. Палетка — это прозрачный лист с нанесённой на нём сеткой из единичных квадратов.

- 22.1.** Пусть палеткой является координатная плоскость с сеткой из квадратов размера  $1 \times 1$  с вершинами, координаты которых — целые числа.

а) Постройте криволинейную трапецию  $T$ , ограниченную параболой  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 3$ , и осью  $Ox$ .

б) Найдите число  $N_{\text{нижн}}$  квадратов, целиком содержащихся в  $T$ .

в) Найдите число  $N_{\text{верхн}}$  квадратов, имеющих с  $T$  общие внутренние точки.

г) Вычислите приближённое значение

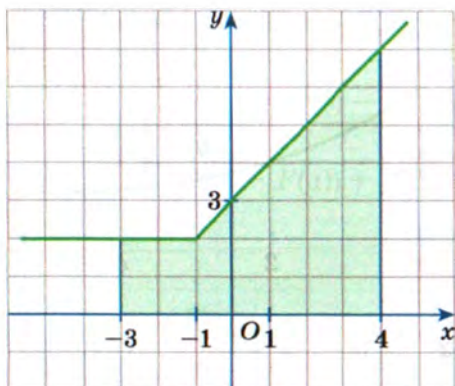
$$S_{\text{прибл}} = \frac{N_{\text{нижн}} + N_{\text{верхн}}}{2} \cdot S_{\text{квадр}}$$

площади трапеции  $T$ .

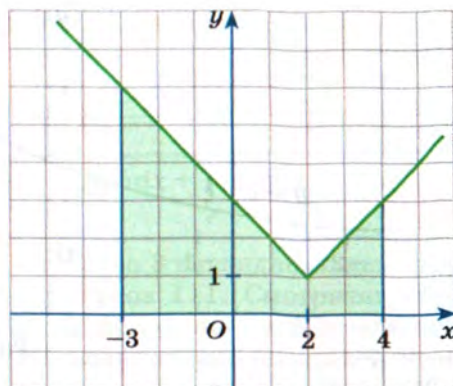
д) Вычислите точное значение  $S = \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3$  этой площади.

е) Найдите абсолютную погрешность  $|S - S_{\text{прибл}}|$  приближения.

- 22.2.** Выполните задания «а» — «е» из упражнения 22.1 для координатной плоскости с сеткой из квадратов размера  $0,5 \times 0,5$  с вершинами, координаты которых имеют вид  $\frac{n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .



a



б

Рис. 113

- 22.3.** Найдите площадь фигуры, изображённой на заданном рисунке:  
а) рис. 113, а; б) рис. 113, б.

Используя формулу Ньютона — Лейбница, вычислите определённый интеграл.

**22.4.** а)  $\int_2^4 x dx$ ;      в)  $\int_2^3 x^2 dx$ ;      д)  $\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ ;  
б)  $\int_{-1}^3 dx$ ;      г)  $\int_{-1}^2 x^3 dx$ ;      е)  $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ .

**22.5.** а)  $\int_1^2 x^{-4} dx$ ;      в)  $\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$ ;      д)  $\int_1^4 x^{-1.5} dx$ ;  
б)  $\int_3^4 x^{-3} dx$ ;      г)  $\int_3^5 \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$ ;      е)  $\int_1^8 x^{-\frac{2}{3}} dx$ .

**22.6.** а)  $\int_{-2}^5 (2x + 1) dx$ ;      в)  $\int_{-1}^3 (x - 1)^3 dx$ ;      д)  $\int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx$ ;  
б)  $\int_{-3}^3 (4x - 3) dx$ ;      г)  $\int_0^4 (x + 2)^2 dx$ ;      е)  $\int_2^4 (x^2 - 2) dx$ .



- 22.7.** а)  $\int_1^4 (x^2 + x) dx;$  г)  $\int_0^3 (-x^2 - 2x) dx;$   
 б)  $\int_0^3 (-x^2 + 3x - 4) dx;$  д)  $\int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 3) dx;$   
 в)  $\int_{-2}^3 (3x^2 - 2x + 1) dx;$  е)  $\int_1^3 (6x^2 + 4x - 3) dx.$
- 22.8.** а)  $\int_{-2}^3 (x^3 + x^2) dx;$  г)  $\int_{-2}^2 (x^3 - 6x) dx;$   
 б)  $\int_{-1}^1 (5x^4 + x^3) dx;$  д)  $\int_0^2 (-x^4 + 2x^2) dx;$   
 в)  $\int_1^3 (-4x^3 + 3x^2 - 2x + 1) dx;$  е)  $\int_0^4 (0,5x^3 - 9x^2 + 4x - 3) dx.$
- 22.9.** а)  $\int_0^1 (2x - 3)^2 dx;$  в)  $\int_1^2 (3x + 4)^3 dx;$  д)  $\int_1^3 (1 - 4x)^4 dx;$   
 б)  $\int_{-1}^2 (2x + 1)^2 dx;$  г)  $\int_0^2 (2x - 5)^4 dx;$  е)  $\int_0^3 (3 - 5x)^3 dx.$
- 22.10.** а)  $\int_3^4 \frac{1}{(x-2)^2} dx;$  в)  $\int_{-2}^{-1} \frac{3}{(1-2x)^2} dx;$  д)  $\int_0^1 \frac{8}{(2x+3)^3} dx;$   
 б)  $\int_{-1}^2 \frac{1}{(3-x)^2} dx;$  г)  $\int_0^3 \frac{4}{(3+4x)^2} dx;$  е)  $\int_0^1 \frac{12}{(4x+5)^4} dx.$
- 22.11.** а)  $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx;$  в)  $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[4]{3x+4}} dx;$  д)  $\int_{-2}^2 \frac{2}{\sqrt{5-2x}} dx;$   
 б)  $\int_{-7}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx;$  г)  $\int_0^3 \frac{1}{2\sqrt[4]{5x+1}} dx;$  е)  $\int_{-6}^0 \frac{6}{\sqrt{1-4x}} dx.$

**22.12.** а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx;$

в)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos 2x dx;$

д)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx;$

б)  $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx;$

г)  $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx;$

е)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx.$

**22.13.** а)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos \left( \frac{x}{3} - \frac{\pi}{12} \right) dx;$

г)  $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} 3 \sin \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right) dx;$

б)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\sin^2 \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right)} dx;$

д)  $\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{1}{2 \cos^2 \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} dx;$

в)  $-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x dx;$

е)  $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x - \cos^2 x) dx.$

**22.14.** а)  $\int_0^1 e^x dx;$

в)  $\int_1^2 2e^{2x-3} dx;$

д)  $\int_0^2 2^{2-x} dx;$

б)  $\int_{-1}^0 2e^x dx;$

г)  $\int_{0,5}^1 4e^{5-4x} dx;$

е)  $\int_{-1}^1 3^{x+1} dx.$

**22.15.** а)  $\int_1^e \frac{2}{x} dx;$

в)  $\int_3^4 \frac{1}{x-2} dx;$

д)  $\int_0^1 \frac{1}{5-4x} dx;$

б)  $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx;$

г)  $\int_0^2 \frac{3}{3-x} dx;$

е)  $\int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{1}{3x-1} dx.$



**22.16.** Точка движется по координатной прямой со скоростью  $v = v(t)$ , где  $t$  — время в с, а  $v$  — скорость в см/с. Найдите путь, пройденный точкой за 5 с от начала движения, если:

а)  $v(t) = 2t + 4$ ;

г)  $v(t) = 4t - 1$ ;

б)  $v(t) = 3t^2 - 2t + 1$ ;

д)  $v(t) = 2t^3 - 6t^2 - t$ ;

в)  $v(t) = \frac{1}{2\sqrt{4t+5}}$ ;

е)  $v(t) = \frac{4}{\sqrt{2t+6}}$ .

Используя аддитивное свойство определённого интеграла, вы-

числите  $\int_a^b f(x)dx$ .

**22.17.** а)  $f(x) = \begin{cases} x+1, & -2 \leq x \leq 0, \\ (x-1)^2, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$

б)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 6-x, & 2 < x \leq 6. \end{cases}$

**22.18.** а)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1-2x}, & -3,5 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{x+1}, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$

б)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9-x}, & 5 \leq x \leq 8, \\ \frac{2}{\sqrt[3]{x}}, & 8 < x \leq 27. \end{cases}$

**22.19.** а)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x}, & -\frac{\pi}{4} \leq x \leq 0, \\ 1 + \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{3}; \end{cases}$

б)  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{\sin^2 x} - 1, & \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

## Упражнения для повторения

**22.20.** Решите неравенство:

а)  $|x^2 - 4x| \cdot \log_2(x+3) \leq 4x - x^2$ ;

б)  $|x^2 - 2x| \cdot \log_{0,1}(x+4) \geq 2x - x^2$ .

**22.21.** Решите уравнение и найдите его корни, принадлежащие данному промежутку:

$$а) \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 2, \left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right];$$

$$б) \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)} = 2, (1; 10).$$

- 22.22.** а) Имеются два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, а второй — 14% меди. При этом масса второго сплава больше массы первого на 8 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава.  
 б) Имеются два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, а второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 300 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

## § 23. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла

Мы уже говорили о том, как вычислить площадь  $S$  криволинейной трапеции — фигуры, ограниченной в системе координат  $xOy$  осью  $Ox$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке  $[a; b]$  функции  $y = f(x)$  (рис. 114), для

этого используется формула  $S = \int_a^b f(x) dx$ .

Нетрудно получить формулу и для вычисления площади фигуры, ограниченной в системе координат  $xOy$  осью  $Ox$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) и графиком непрерывной и неположительной на отрезке  $[a; b]$  функции  $y = f(x)$  (рис. 115). Достаточно отобразить эту фигуру симметрично относительно оси абсцисс, тогда получим криволинейную трапецию с той же площадью, но ограниченной сверху графиком неотрицательной на отрезке  $[a; b]$  функции  $y = -f(x)$ . В этом случае площадь криволинейной трапеции вычисляется по форму-

ле  $S = \int_a^b (-f(x)) dx$ , т. е.  $S = -\int_a^b f(x) dx$ .



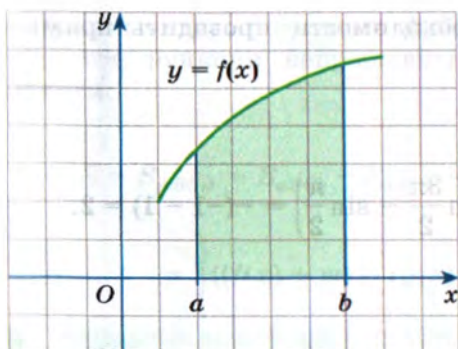


Рис. 114

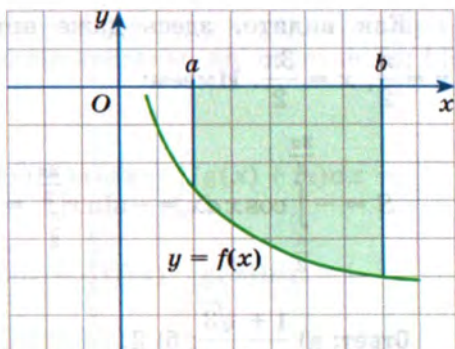


Рис. 115

**Пример 1** Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными прямыми и графиком заданной функции:

а)  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{2\pi}{3}$ ;

б)  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

**Решение.** а) Криволинейная трапеция изображена на рисунке 116. Имеем:

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} = -\left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6}\right) = -\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

б) Криволинейная трапеция изображена на рисунке 117.

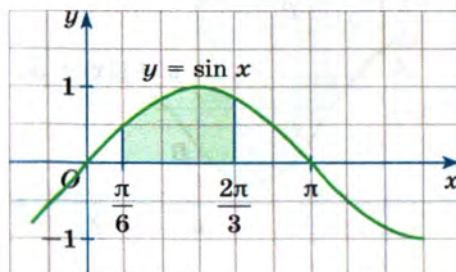


Рис. 116

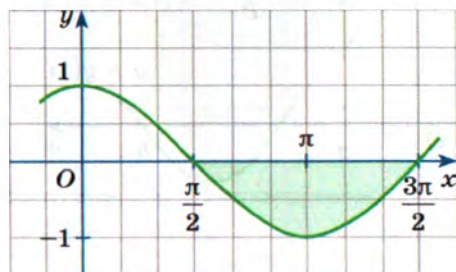


Рис. 117

Как видите, здесь даже нет необходимости проводить прямые  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$ . Имеем:

$$S = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = - \left( \sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right) = -(-1 - 1) = 2.$$

Ответ: а)  $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ ; б) 2.

С помощью определённого интеграла можно вычислять площади не только криволинейных трапеций типа тех, что представлены на рисунках 114 и 115. Рассмотрим фигуру  $P$ , ограниченную прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) и графиками непрерывных функций  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ , для которых на отрезке  $[a; b]$  выполняется неравенство  $g(x) \leq f(x)$  (рис. 118); фигуры такого вида также будем называть *криволинейными трапециями*. Чтобы вычислить площадь  $S$  такой фигуры, будем действовать следующим образом.

Выполним параллельный перенос фигуры  $P$  на  $m$  единиц вверх ( $m > 0$ ) так, чтобы фигура  $P$  оказалась расположенной в координатной плоскости *выше* оси абсцисс (рис. 119). Теперь она ограничена

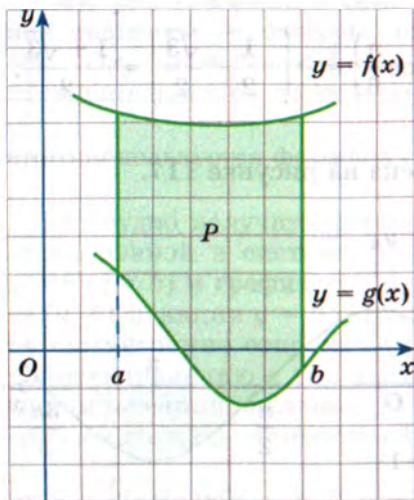


Рис. 118

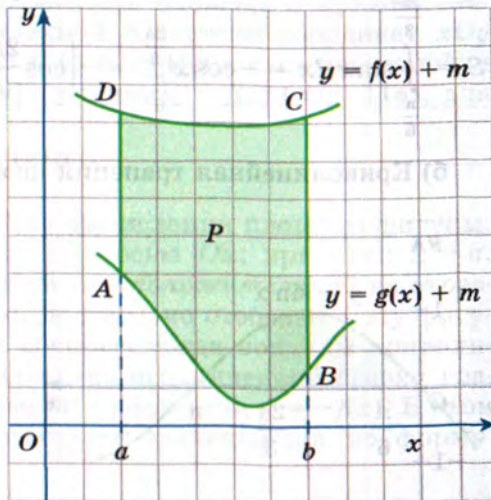


Рис. 119



сверху и снизу графиками функций  $y = f(x) + m$ ,  $y = g(x) + m$ , причём обе функции непрерывны и положительны на отрезке  $[a; b]$ . Имеем:

$$\begin{aligned} S &= S_{ABCD} = S_{aDcb} - S_{aABb} = \int_a^b (f(x) + m) dx - \int_a^b (g(x) + m) dx = \\ &= \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \end{aligned}$$

Итак, площадь  $S$  криволинейной трапеции, представленной на рисунке 118, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (1)$$

**Пример 2** Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \frac{1}{2x}$  и прямыми  $x = 1$ ,  $x = 4$ .

**Решение.** На рисунке 120 построены график функции  $y = \sqrt{x}$  (ветвь параболы) и график функции  $y = \frac{1}{2x}$  (ветвь гиперболы), проведены прямые  $x = 1$ ,  $x = 4$ . Речь идёт о вычислении площади  $S$  криволинейной трапеции, заштрихованной на рисунке 120.

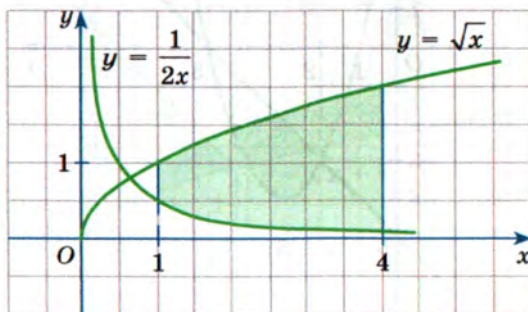


Рис. 120

Воспользуемся формулой (1):

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^4 \left( \sqrt{x} - \frac{1}{2x} \right) dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_1^4 - \frac{1}{2} \ln x \bigg|_1^4 = \\
 &= \frac{2}{3} \left( 4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 1) = \frac{2}{3} (8 - 1) - \frac{1}{2} (\ln 4 - 0) = \\
 &= \frac{14}{3} - \frac{\ln 4}{2} = \frac{14}{3} - \frac{2 \ln 2}{2} = \frac{14}{3} - \ln 2 = \frac{14 - 3 \ln 2}{3}.
 \end{aligned}$$

**Пример 3** Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = x^2 - 6x + 5$ ,  $y = x - 5$ .

**Решение.** Построим параболу — график функции  $y = x^2 - 6x + 5$ . Имеем:  $y = (x - 3)^2 - 4$ ; значит, вершиной параболы является точка  $(3; -4)$ . Обратим внимание на то, что  $x^2 - 6x + 5 = 0$  при  $x = 1$ ,  $x = 5$ , т. е. парабола проходит через точки  $(1; 0)$ ,  $(5; 0)$ . Парабола построена на рисунке 121. На том же рисунке проведена прямая  $y = x - 5$ . Парабола и прямая пересекаются в точках  $(2; -3)$  и  $(5; 0)$ . Речь идёт о вычислении площади  $S$  фигуры, заштрихованной на рисунке 121, эту фигуру называют *параболическим сегментом*.

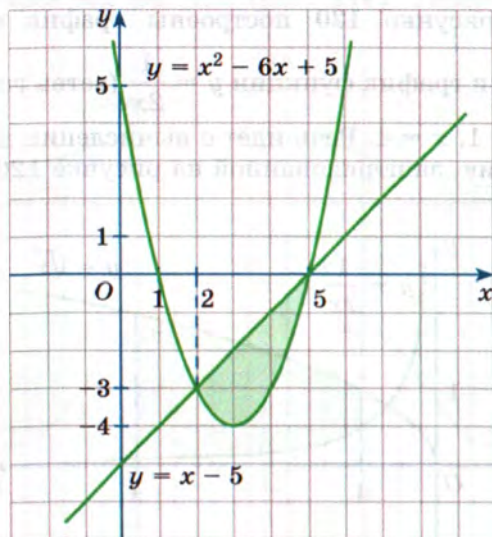


Рис. 121



Воспользуемся формулой (1):

$$\begin{aligned}
 S &= \int_2^5 ((5-x) - (x^2 - 6x + 5)) dx = \int_2^5 (5x - x^2) dx = 5 \int_2^5 x dx - \int_2^5 x^2 dx = \\
 &= 5 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_2^5 - \frac{x^3}{3} \Big|_2^5 = \frac{5}{2} (5^2 - 2^2) - \frac{1}{3} (5^3 - 2^3) = \frac{105}{2} - \frac{117}{3} = \\
 &= 52,5 - 39 = 13,5.
 \end{aligned}$$

**Пример 4\*** Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = \sqrt{x+4}$ ,  $y = |x| + 2$  и прямыми  $x = -4$ ,  $x = 5$  (рис. 122).

**Решение.** Площадь  $S$  фигуры, изображённой на рисунке 122, можно вычислить по формуле

$$S = \int_{-4}^5 (|x| + 2 - \sqrt{x+4}) dx.$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся аддитивным свойством (кратко,  $\int_{-4}^5 = \int_{-4}^0 + \int_0^5$ ). Дело в том, что на отрезке  $[-4; 0]$  выполняется равенство  $|x| = -x$ , а на отрезке  $[0; 5]$  — равенство  $|x| = x$ . Соответственно, вычисления проведём в два шага.

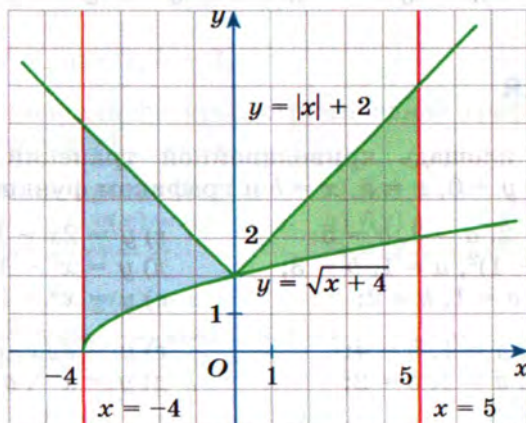


Рис. 122

1)

$$\begin{aligned}
 \int_{-4}^0 &= \int_{-4}^0 ((-x+2) - \sqrt{x+4}) dx = \left( -\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-4}^0 - \frac{(x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{-4}^0 = \\
 &= \left( 0 - \left( -\frac{(-4)^2}{2} + 2 \cdot (-4) \right) \right) - \frac{2}{3} \sqrt{(x+4)^3} \Big|_{-4}^0 = \\
 &= -(-8-8) - \frac{2}{3}(\sqrt{4^3} - \sqrt{0^3}) = 16 - \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{32}{3}.
 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 \int_0^5 &= \int_0^5 ((x+2) - \sqrt{x+4}) dx = \left( \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^5 - \frac{(x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^5 = \\
 &= \left( \left( \frac{5^2}{2} + 2 \cdot 5 \right) - 0 \right) - \frac{2}{3} \sqrt{(x+4)^3} \Big|_0^5 = \frac{25}{2} + 10 - \frac{2}{3}(\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3}) = \\
 &= \frac{45}{2} - \frac{2}{3}(27-8) = \frac{45}{2} - \frac{38}{3} = \frac{135-76}{6} = \frac{59}{6}.
 \end{aligned}$$

А теперь вычислим искомую площадь:

$$S = \frac{32}{3} + \frac{59}{6} = \frac{64+59}{6} = \frac{123}{6} = \frac{41}{2} = 20,5.$$

## Упражнения

Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  и графиком функции  $y = f(x)$ .

23.1.

а)  $y = x - 2$ ,  $a = 3$ ,  $b = 5$ ;

б)  $y = (x-1)^2$ ,  $a = 1$ ,  $b = 3$ ;

в)  $y = x^3$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ;

г)  $y = 2x - 1$ ,  $a = 2$ ,  $b = 3$ ;

д)  $y = x^2 - 1$ ,  $a = 2$ ,  $b = 4$ ;

е)  $y = x^3 + 1$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2$ .

ИКТ

23.2.

а)  $y = \sqrt{x}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 4$ ;

б)  $y = x^{-2}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ;

в)  $y = x^{\frac{2}{3}}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 8$ ;

г)  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $a = 2$ ,  $b = 3$ ;

д)  $y = x^{-3}$ ,  $a = 0,5$ ,  $b = 1$ ;

е)  $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 4$ .



23.3. а)  $y = \cos x$ ,  $a = 0$ ,  $b = \frac{\pi}{2}$ ;

б)  $y = \sin 2x$ ,  $a = \frac{\pi}{6}$ ,  $b = \frac{\pi}{3}$ ;

в)  $y = 1 + 2\cos 2x$ ,  $a = \frac{\pi}{12}$ ,  $b = \frac{\pi}{4}$ ;

г)  $y = \sin x$ ,  $a = \frac{\pi}{4}$ ,  $b = \frac{3\pi}{4}$ ;

д)  $y = \cos \frac{x}{2}$ ,  $a = \frac{\pi}{2}$ ,  $b = \pi$ ;

е)  $y = 1 - \frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}$ ,  $a = \frac{2\pi}{3}$ ,  $b = \pi$ .

23.4. а)  $y = e^x$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ;

б)  $y = 0,5^x$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ;

в)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 3$ ;

г)  $y = e^x$ ,  $a = -1$ ,  $b = 0$ ;

д)  $y = 2^x$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ ;

е)  $y = \frac{2}{x}$ ,  $a = 0,5$ ,  $b = 1$ .

ИКТ 23.5. а)  $y = e^{3x-3}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ;

б)  $y = \frac{1}{2(x-1)}$ ,  $a = 2$ ,  $b = 3$ ;

в)  $y = 10^{2x+2}$ ,  $a = -1$ ,  $b = 0$ ;

г)  $y = e^{2x+4}$ ,  $a = -2$ ,  $b = 0$ ;

д)  $y = \frac{1}{3(x+2)}$ ,  $a = -1$ ,  $b = 0$ ;

е)  $y = 0,1^{3-x}$ ,  $a = 2$ ,  $b = 3$ .

Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ .

ИКТ 23.6. а)  $f(x) = 4 - x^2$ ,  $g(x) = 0$ ;

г)  $f(x) = -x^2 + 6x$ ,  $g(x) = 0$ ;

б)  $f(x) = 9 - x^2$ ,  $g(x) = 4$ ;

д)  $f(x) = -x^2 + 4x$ ,  $g(x) = 3$ ;

в)  $f(x) = 2x^4$ ,  $g(x) = 2$ ;

е)  $f(x) = 0,5x^4$ ,  $g(x) = 0,5$ .

23.7. а)  $f(x) = 1 - x^2$ ,  $g(x) = x - 1$ ;

б)  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ,  $g(x) = x + 1$ ;

в)  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ,  $g(x) = 1 - x^2$ ;

г)  $f(x) = x^2 - 4$ ,  $g(x) = 2x - 1$ ;

д)  $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ ,  $g(x) = 1 - x$ ;

е)  $f(x) = (x - 3)^2$ ,  $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ .

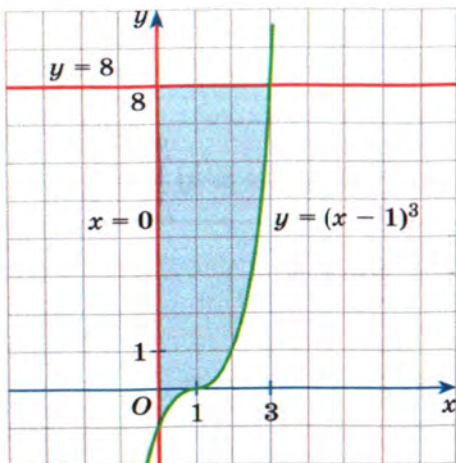


Рис. 123

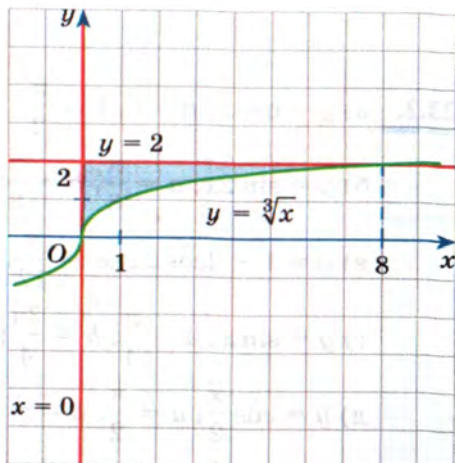


Рис. 124

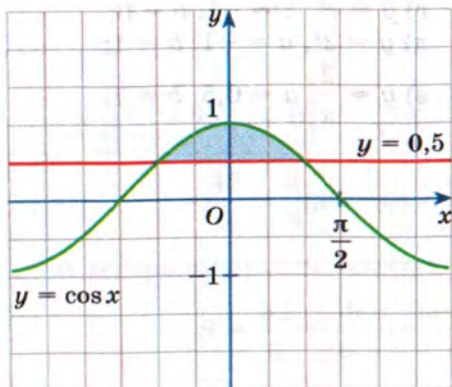


Рис. 125

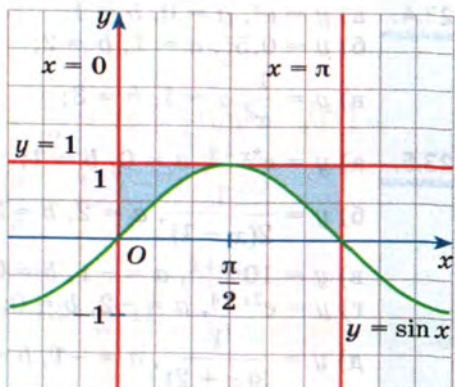


Рис. 126

**23.8.** Найдите площадь фигуры, изображённой на указанном рисунке:

- а) рис. 123;      в) рис. 125;      д) рис. 127;  
б) рис. 124;      г) рис. 126;      е) рис. 128.

Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ .

**23.9.** а)  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}$ ,  $-\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ ;

б)  $f(x) = 2\sin 2x$ ,  $g(x) = \sin 2x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ;



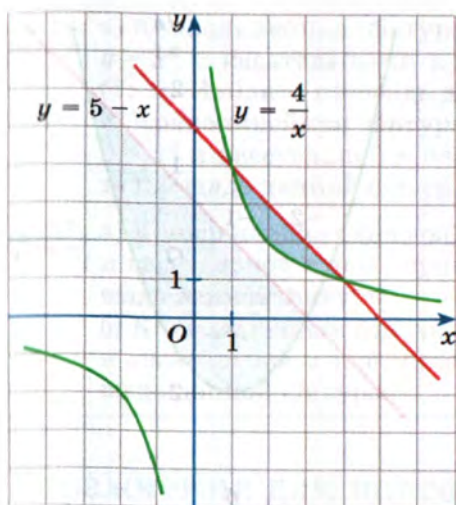


Рис. 127

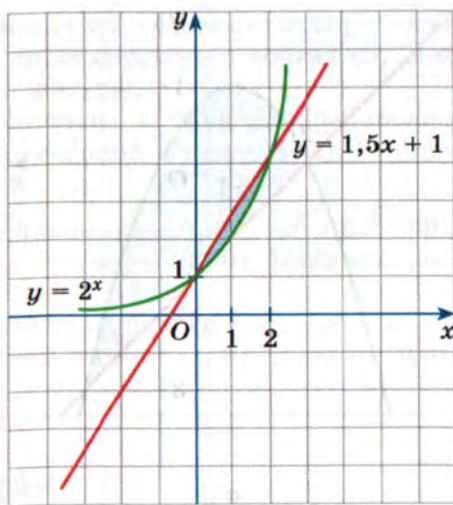


Рис. 128

в)  $f(x) = 2\cos x$ ,  $g(x) = -1$ ,  $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ ;

г)  $f(x) = 2\cos 2x$ ,  $g(x) = \cos 2x$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ .

**ИКТ 23.10.** а)  $f(x) = |x^2 - 4|$ ,  $g(x) = x + 2$ ;

б)  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ,  $g(x) = |x| - 1$ ;

в)  $f(x) = |x^2 - 2x|$ ,  $g(x) = x$ ;

г)  $f(x) = -\sqrt{x+4}$ ,  $g(x) = -|x+1| + 3$ .

**ИКТ 23.11.** В координатной плоскости задан квадрат  $ABCD$ , где  $A(0; 0)$ ,  $B(0; 1)$ ,  $C(1; 1)$ ,  $D(1; 0)$ , и график функции  $y = f(x)$ , где  $0 \leq x \leq 1$ . Найдите, в каком отношении график данной функции делит площадь квадрата, если:

а)  $f(x) = x$ ;

в)  $f(x) = x^2$ ;

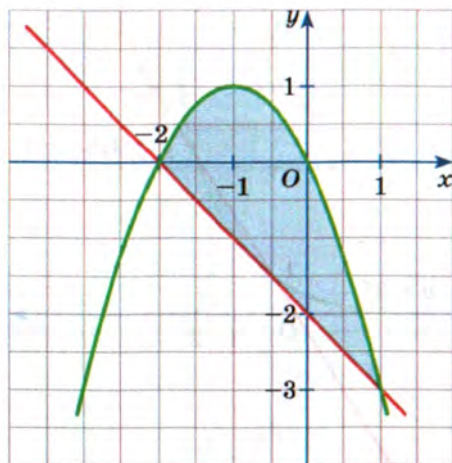
д)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ;

б)  $f(x) = 0,5x$ ;

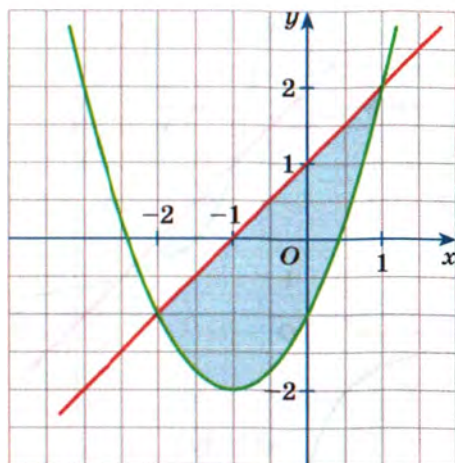
г)  $f(x) = x^3$ ;

е)  $f(x) = \sqrt{x}$ .

**23.12.** На рисунке 129 изображён параболический сегмент, ограниченный графиком квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$  и прямой  $y = kx + m$ . Задайте аналитически квадратичную функцию и прямую и найдите площадь сегмента.



a



б

Рис. 129

**23.13.** Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью абсцисс и сверху графиком функции  $y = f(x)$ :

a)  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ x^2 - 4x + 5, & 1 < x \leq 4; \end{cases}$

б)  $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{2}{x^2}, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$

в)  $f(x) = \begin{cases} 0,5^x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2x}, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$

г)  $f(x) = \begin{cases} x^3, & 1 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 8x + 20, & 2 < x \leq 4; \end{cases}$

д)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4}, & -3 \leq x \leq 0, \\ 2(x-1)^2, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$

е)  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{2}{x}, & 1 < x \leq e. \end{cases}$



**ИКТ 23.14.** а) Криволинейная фигура ограничена кубической параболой  $y = x^3$  и касательными к ней, проведёнными в точках  $(0; 0)$  и  $(1; 1)$ . Найдите площадь данной фигуры.

б) Криволинейная фигура ограничена кубической параболой  $y = x^3$  и касательной к ней, проведённой в точке  $(1; 1)$ . Найдите площадь данной фигуры.

**ИКТ 23.15.** а) Криволинейная фигура ограничена кривой  $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$  и касательной к ней, проведённой в точке  $(3; 0)$ . Найдите площадь данной фигуры.

б) Криволинейная фигура ограничена кривой  $y = x^3 - x^2 - x + 1$  и касательной к ней, проведённой в точке  $(1; 0)$ . Найдите площадь данной фигуры.

## Упражнения для повторения

**23.16.** Найдите значение выражения:

а)  $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ ;

б)  $\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$ .

**23.17.** Решите неравенство:

а)  $\log_{x-2}(8-x) < 0$ ;

б)  $\log_{3x}(x-6) > 0$ .

**23.18.** Найдите расстояние между двумя касательными, проведёнными к графику данной функции перпендикулярно оси ординат:

а)  $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x - \frac{1}{3}$ ;

б)  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ .

## Итак, в главе 4

Познакомились с понятиями первообразной и неопределённого интеграла.

Изучили правила и формулы отыскания первообразных.

Познакомились с понятием определённого интеграла, выяснили, в чём состоит его физический и геометрический смысл.

Научились вычислять определённый интеграл с помощью формулы Ньютона — Лейбница.

Изучили свойства определённого интеграла.

Узнали, что такое криволинейная трапеция и как с помощью определённого интеграла вычислить площадь криволинейной трапеции в декартовой прямоугольной системе координат.

## Вопросы

1. Сформулируйте определение первообразной для функции  $y = f(x)$ .
2. Сформулируйте правило нахождения первообразной суммы двух функций.
3. Приведите пример того, что первообразная произведения двух функций не равна произведению их первообразных.
4. Можно ли постоянный множитель выносить за знак первообразной?
5. Если функция  $y = F(x)$  является первообразной для функции  $y = f(x)$ , то как найти первообразную для функции  $y = f(kx + m)$ ?
6. Что называют неопределённым интегралом от функции  $y = f(x)$ ?
7. В чём состоит физический смысл определённого интеграла?
8. В чём состоит геометрический смысл определённого интеграла?
9. Запишите формулу Ньютона — Лейбница.
10. Чему равен определённый интеграл от линейной комбинации функций (линейная комбинация функций — это функция вида  $y = af(x) + bg(x) + ch(x)$ , где  $a, b, c$  — произвольные числовые коэффициенты).
11. В чём состоит аддитивное свойство определённого интеграла?
12. Какую плоскую фигуру называют криволинейной трапецией?



13. Как с помощью определённого интеграла вычислить площадь криволинейной трапеции в декартовой прямоугольной системе координат  $xOy$ ?

## Тест

1. Укажите функции, которые являются первообразными для функции  $y = x^2 - 4x$ .

а)  $y = 2x - 4$

в)  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4$

б)  $y = 3x^3 - 8x^2$

г)  $y = \frac{x^3 - 1}{3} - 2x^2$

2. Укажите функцию, которая является первообразной для функции  $y = 2\sin 2x$ .

а)  $y = \cos 2x - 1$

в)  $y = -4\cos 2x$

б)  $y = 2 - \cos 2x$

г)  $y = 1 - 2\cos 2x$

3. Укажите функцию  $y = F(x)$ , которая является первообразной для функции  $y = \sqrt{x}$ , если известно, что  $F(1) = 1$ .

а)  $F(x) = \frac{2x\sqrt{x} + 1}{3}$

в)  $F(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$

б)  $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}$

г)  $F(x) = \frac{3x\sqrt{x} - 1}{2}$

4. Точка движется по координатной прямой со скоростью, заданной формулой  $v = 4t - 3$ . Найдите закон движения  $s = s(t)$ , если известно, что в момент времени  $t = 3$  координата точки  $s = 7$ .

а)  $s = 2t^2 - 3t - 5$

в)  $s = 4t^2 - 3t - 20$

б)  $s = 2t^2 - 12$

г)  $s = 2t^2 - 3t - 2$

5. Найдите множество всех первообразных функции  $y = e^{2x-3} + \frac{1}{3x}$ .

а)  $y = e^{2x-3} + \ln 3x + C$

в)  $y = 2e^{2x-3} + 3\ln 3x + C$

б)  $y = \frac{1}{2}e^{2x-3} + \frac{1}{3}\ln x + C$

г)  $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{3}\ln x + C$

6. Вычислите:  $\int_{-1}^1 \left( x^3 - \frac{1}{x^2} + 1 \right) dx$ .



7. Установите соответствие между определённым интегралом и его значением.

A.  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx$

B.  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} \, dx$

B.  $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2 2x} \, dx$

1) 2

2) 1

3) 0

4) 0,25

8. Не производя вычислений, укажите интеграл с наименьшим значением.

а)  $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x+4} \, dx$

в)  $\int_1^3 \sqrt[3]{x+4} \, dx$

б)  $\int_1^2 \sqrt[3]{x+4} \, dx$

г)  $\int_2^3 \sqrt[3]{x+4} \, dx$

9. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $y = 3x^2 - 2x + 5$  и прямыми  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ .

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = x^3 + 3x^2$ ,  $y = \frac{4}{x^2}$  и прямыми  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

## Дополнительные задачи

Прямоугольник  $\Pi$  с вершинами в точках  $A(1; 0)$ ,  $B(1; 3)$ ,  $C(5; 3)$ ,  $D(5; 0)$  вращают на  $360^\circ$  вокруг оси  $Ox$  (рис. 130).

1. Какую кривую (фигуру, тело) образует при таком вращении:

а) точка  $B$ ;

б) точка  $C$ ;

в) точка  $(\sqrt{2}; 3)$ ;

г) отрезок  $AB$ ;

д) отрезок  $BC$ ;

е) прямоугольник  $\Pi$ ?

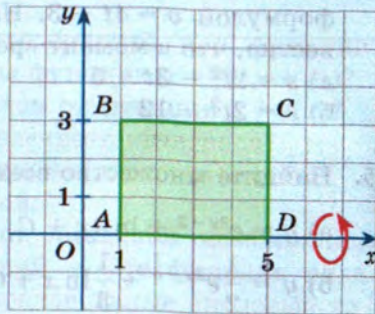


Рис. 130



2. Проверьте, что:
- а) радиус основания  $R$  цилиндра из задачи 1 «е» равен 3, а его высота  $H$  равна 4;
  - б) объём этого цилиндра равен  $36\pi$ ;
  - в) для каждого  $1 \leq x \leq 5$  отрезок  $[(x; 0), (x; 3)]$  образует круг;
  - г) радиус этого круга равен 3;
  - д) площадь круга из пунктов «а» и «б» находится по формуле  $S(x) = 9\pi$ ;
  - е)  $\int_1^5 S(x) dx = 36\pi$ , т. е. равен объёму цилиндра, вычисленному в пункте «б».

Прямоугольник  $\Pi$  с вершинами  $(0; 0)$ ,  $(0; R)$ ,  $(H; R)$ ,  $(H; 0)$  вращают на  $360^\circ$  вокруг оси  $Ox$ .

3. Опишите, какую кривую (какую фигуру) образует при таком вращении:
- а) точка  $(0; R)$ ;
  - б) точка  $(H; R)$ ;
  - в) отрезок с концами  $(0; 0)$ ,  $(0; R)$ ;
  - г) отрезок с концами  $(H; 0,5R)$ ,  $(H; 0)$ ;
  - д) прямоугольник  $\Pi$ ;
  - е) треугольник с вершинами  $(0; 0)$ ,  $(0; R)$ ,  $(H; 0)$ .
4. Проверьте, что:
- а) для каждого  $0 \leq x \leq H$  отрезок  $[(x; 0), (x; R)]$  образует круг;
  - б) радиус этого круга равен  $R$ ;
  - в) площадь этого круга находится по формуле  $S(x) = \pi R^2$ ;
  - г) интеграл  $\int_0^H S(x) dx$  равен  $V = \pi R^2 H$ , т. е. равен объёму цилиндра с высотой  $H$  и радиусом основания  $R$ ;
  - д) такой же ответ  $\pi R^2 H$  получится при вращении прямоугольника с вершинами  $(1; 0)$ ,  $(1; R)$ ,  $(H+1; R)$ ,  $(H+1; 0)$ ;
  - е) то же для прямоугольника с вершинами  $(a; 0)$ ,  $(a; R)$ ,  $(H+a; R)$ ,  $(H+a; 0)$ .

При вращении не прямоугольников, а более сложных фигур будут получаться и более сложные пространственные тела, *тела вращения*. Их объёмы вычисляют с помощью определённых интегралов.



Для этого используют следующую теорему.

**Теорема.** Объем  $V$  тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции  $\{(x; y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ , где функция  $y = f(x)$  непрерывна и неотрицательна на отрезке  $[a; b]$ ,

вычисляется по формуле  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

5. Полуокруг  $x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0$  в координатной плоскости  $xOy$  вращают на  $360^\circ$  вокруг оси  $Ox$  (рис. 131).

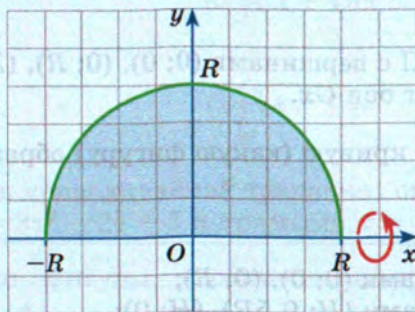


Рис. 131

Проверьте, что:

- точка  $(R; 0)$  остаётся на месте, а точка  $(0; R)$  описывает окружность;
- в результате вращения всего полуокруга получится шар радиусом  $R$ ;
- отрезок  $[(0; 0), (0; R)]$  опишет круг радиусом  $R$ ;

г) для  $-R \leq x \leq R$  и  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  применима теорема об объёме тела вращения;

д) площадь круга из пункта «в» находится по формуле  $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$ ;

е)  $\int_{-R}^R S(x) dx = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

Объём шара радиусом  $R$ :  $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$ .



6. Треугольник с вершинами  $O(0; 0)$ ,  $A(H; R)$ ,  $B(H; 0)$  вращают на  $360^\circ$  вокруг оси  $Ox$ . Найдите:

- а) площадь фигуры, образованной вращением отрезка  $AB$ ;
- б) площадь фигуры, образованной вращением отрезка  $[(0,5H; 0,5R), (0,5H; 0)]$ ;
- в) уравнение прямой  $OA$ ;
- г)  $a$ ,  $b$ ,  $f(x)$ , к которым в данном случае применима теорема об объёме тела вращения;

д)  $\pi \int_a^b f^2(x) dx$ ;

е) формулу объёма конуса с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$ .

7. Трапецию с вершинами  $O(0; 0)$ ,  $A(0; r)$ ,  $B(H; R)$ ,  $C(H; 0)$ ,  $R > r$  вращают на  $360^\circ$  вокруг оси  $Ox$ . Найдите:

- а) площадь фигуры, образованной вращением отрезка  $OA$ ;
- б) площадь фигуры, образованной вращением отрезка  $BC$ ;
- в) уравнение прямой  $AB$ ;
- г)  $a$ ,  $b$ ,  $f(x)$ , к которым в данном случае применима теорема об объёме тела вращения;

д)  $\pi \int_a^b f^2(x) dx$ ;

е) формулу объёма усечённого конуса.

8. Найдите объём тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции  $\{(x; y): -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$ , если:

а)  $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$       г)  $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0,5, \\ 3-3x, & 0,5 \leq x \leq 1; \end{cases}$

б)  $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$       д)  $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$

в)  $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$       е)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x}, & -1 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

9. Плоскую фигуру  $\{(x; y): x \geq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$  между осью  $Ox$  и ветвью параболы  $y = \sqrt{x}$  вращают вокруг  $Ox$ . Получается тело вращения, которое называется *параболоидом вращения* (рис. 132).

Найдите объём части этого тела вращения при:

- а)  $0 \leq x \leq 1$ ;      б)  $1 \leq x \leq 2$ ;      в)  $3 \leq x \leq 13$ ;
- б)  $0 \leq x \leq 2$ ;      г)  $1 \leq x \leq 11$ ;      е)  $x \in [1; 3] \cup [5; 15]$ .



10. Шар  $\{(x; y; z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  разрезали плоскостью  $x = a$  на две части (рис. 133).

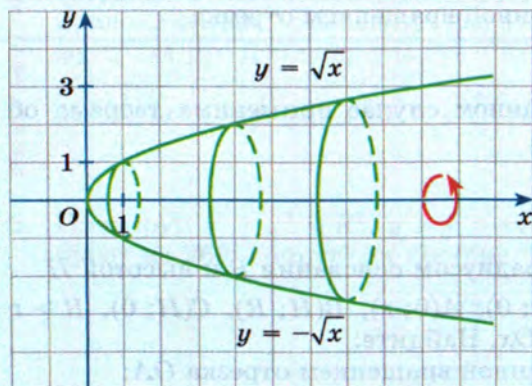


Рис. 132

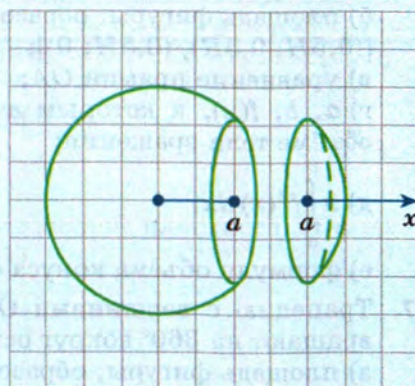


Рис. 133

Найдите отношение объёмов меньшей и большей частей при:

- а)  $a = 0$ ;      в)  $a = -\frac{1}{2}$ ;      д)  $a = \frac{2}{3}$ ;  
 б)  $a = \frac{1}{2}$ ;      г)  $a = \frac{1}{3}$ ;      е)  $a = \frac{1}{5}$ .



# Из истории математики

К сложным вещам подходят через простые, сложные конструкции составляют из более простых, к новому приходят на основе уже известного, общие выводы делают на основе элементарных частных случаев и т. п. Это общее положение, и математика тут не является исключением, а скорее наоборот, предоставляет множество самых разнообразных подтверждений: иррациональные числа приближают рациональными, бесконечные десятичные дроби — конечными, площади криволинейных фигур и объёмы пространственных тел приближают площадями многоугольников и объёмами многогранников, вместо перемещения точек и тел с переменной скоростью в первом приближении рассматривают равномерные движения, непрерывные процессы приближают дискретными и т. п.

В самых общих чертах процесс *дифференциации* соответствует разложению сложных и глобальных ситуаций на простые и локальные, а процесс *интеграции* действует в обратном направлении — он соединяет, объединяет, интегрирует простые ситуации в сложные.

Хотя сами термины *дифференциальное* и *интегральное* исчисления устойчиво появились в науке к XVIII в., но основные идеи активно использовались и ранее. Например, нахождение длины окружности и площади круга путём последовательных приближений многоугольниками детально изучалось ещё в школе пифагорейцев (V—III вв. до н. э.). Евдокс (IV в. до н. э.) разработал «метод исчерпываний». Архимед (III в. до н. э.) в ряде разнообразных задач «исчерпывал» сложные объекты более простыми, бесконечно малыми, «неделимыми» объектами, по существу используя интегральные суммы, аналогичные рассмотренным в этой главе. Идеи Архимеда получили распространение в странах Востока и исламского мира и, затем, в XI—XIV вв. вернулись в Европу.

Конец XVI — начало XVII в. было временем возрождения традиций Архимеда. На основе его идей для исследования сложных фигур и тел был разработан *метод неделимых*, о котором шла речь на с. 55 части 1 учебника.

Решающим историческим периодом для создания дифференциального и интегрального исчислений явилась последняя треть XVII в., а решающий вклад в это создание принадлежит Ньютону и Лейбницу.



В период между 1680-ми и 1690-ми гг. в ряде работ Лейбниц кратко, но достаточно полно изложил свои методы исследования функций и впервые явно стал использовать термин *дифференциальное исчисление*. На протяжении следующих трёх десятилетий и его терминология, и система обозначений стала доминирующей в европейских странах, за исключением Англии, где в основном придерживались и весьма яростно отстаивали подходы Ньютона к изучению *флюксий* и *флюент*.

Использование символа  $\int$  предложил Лейбниц, «вытянув» по вертикали букву «S» (от *summa* — суммирование, сумма). Слово «интеграл» ввёл И. Бернулли, а появилось оно в работе Я. Бернулли (1690 г.). Примерно с 1699 г. началась долгая и жаркая полемика, доходившая даже до размеров международной распри, между сторонниками Ньютона и Лейбница, а потом и между ними самими о приоритетах в создании математического анализа. Дело в том, что Ньютон пришёл к понятию определённого интеграла в 1670—1671 гг. в работе «Метод флюксий», которая была опубликована только в 1736 г. Результаты Ньютона были известны в Англии, часть из них — по переписке и учёным континентальной Европы; многие идеи и конструкции Ньютон использовал в других своих работах.

Знаменитая формула (1) (см. § 22 на с. 22), выражающая определённый интеграл через приращение первообразной, была названа *формулой Ньютона — Лейбница* лишь в конце XVIII в. в трактате С. Лакруа. В трудах же обоих учёных она отсутствует, но несомненно, что эта формула была ясна и Ньютону, и Лейбницу. Например, Ньютон в «Метод флюксий» писал: «Для получения должного значения площади, прилежащей к некоторой части абсциссы, эту площадь всегда следует брать равной разности значений  $z$ , соответствующей частям абсцисс, ограниченным началом и концом площади». Тот же результат независимо получил Лейбниц в 1675 г. и опубликовал его в 1686 г. в статье «О глубоко скрытой геометрии и анализе неделимых», в которой отчётливо выделена взаимная обратимость процессов дифференцирования и интегрирования. В XIX в. теория интегрирования стала одним из мощнейших инструментов исследования функций и одной, и многих переменных, нашедшим многочисленные применения в механике, физике, астрономии. К концу XIX в. эта теория приняла практически современную форму. Были разработаны и разнообразные обобщения: интегралы Стильбеса, Данжуа, Лебега и др. В XX в. методы интегрирования были перенесены уже на случай абстрактных пространств с мерой. Частным случаем этой теории стал подход А. Н. Колмогорова к аксиоматическому изложению основ тео-





Н. Н. Лузин

рии вероятностей. На рубеже XIX и XX вв. в теорию интегрирования заметный вклад внесли работы отечественных математиков Михаила Васильевича Остроградского (1801—1862), Пафнутия Львовича Чебышёва (1821—1894), Дмитрия Федоровича Егорова (1869—1931), Николая Николаевича Лузина (1883—1950) и др.





Санкт-Петербургский  
государственный университет.  
Санкт-Петербург

- § 24. Геометрические вероятности
- § 25. Нормальное распределение
- § 26. Нормальные и биномиальные распределения.  
Законы больших чисел



## Глава 5

# Непрерывные случайные величины

Случайную величину (с. в.), которая может принимать лишь конечное число значений, удобно задавать таблицей распределения. В её первой строке перечисляют значения с. в., а в ячейки второй строки вписывают соответствующие вероятности. Если, скажем, в первой строке стоит значение 1,8, то во второй строке под числом 1,8 указана вероятность того, что с. в. равна именно 1,8. Например:

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| 1    | 1,8  | 7,8  | 8,2  |
| 0,24 | 0,32 | 0,38 | 0,06 |

В 9-м и 10-м классах вы неоднократно работали с таблицами распределения с. в. Но такая математическая модель возможна, только если все значения с. в. можно тем или иным способом перечислить. В этих случаях говорят о *дискретных<sup>1</sup> случайных величинах*.

Но ничуть не реже, чем дискретные, а может быть, и чаще встречаются и *непрерывные случайные величины*. У них множества значений *несчётны*: нет никакой возможности перечислить или пересчитать (расположить в виде последовательности) все значения такой с. в. Типичные примеры несчётных числовых множеств — это невырожденные числовые промежутки:  $[0; 1]$ ,  $(-2; 3)$ ,  $[5; 17]$  и т. д., а типичные примеры непрерывных с. в. дают измерения геометрических и физических величин, таких как длина, площадь, объём, масса, температура, давление и т. п.

<sup>1</sup> От англ. *discrete* — разрозненный, раздельный, состоящий из отдельных элементов.

## § 24. Геометрические вероятности

**Пример 1** Какова вероятность того, что случайным образом выбранное число из отрезка  $[-6; 4]$  будет:

- а) положительным;
- б) неотрицательным;
- в) меньше 3;
- г) отличаться от концов отрезка не более чем на 1?

**Решение.** Используем рисунок 134.

Заданный отрезок  $[-6; 4]$  отметим штриховкой снизу, а в каждом из пунктов «а» — «г» штриховкой сверху отметим множества чисел, удовлетворяющих условию.

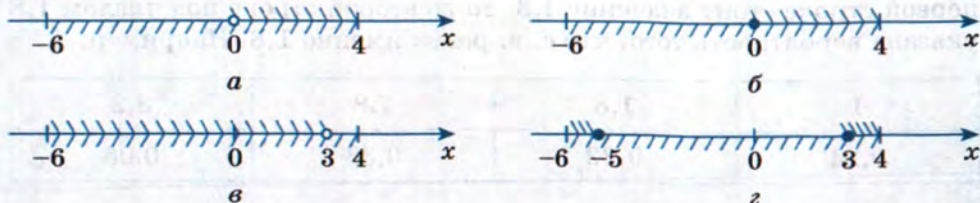


Рис. 134

Вероятности подсчитывают так. Длину множества с верхней штриховкой делят на длину всего отрезка  $[-6; 4]$  с нижней штриховкой. Получаем ответы:

- а)  $4 : 10 = 0,4$ ; б)  $4 : 10 = 0,4$ ; в)  $9 : 10 = 0,9$ ; г)  $2 : 10 = 0,2$ .

Обратите внимание: в пунктах «а» и «б» примера 1 верхней штриховкой отмечены промежутки  $(0; 4]$  и  $[0; 4]$ , которые отличаются на одну точку. Но их длины одинаковы, поэтому одинаковы и вероятности.

**Пример 2** Какова вероятность того, что случайным образом выбранное решение неравенства  $x^2 \leq 16$  окажется решением неравенства:

- а)  $x^2 \leq -1$ ; б)  $x^2 \leq 0$ ; в)  $x^2 \leq 4$ ; г)  $x^2 > 1$ ?

**Решение.** Действуем, как и в примере 1. Штриховкой снизу отмечаем множество решений неравенства  $x^2 \leq 16$ , т. е. отрезок  $[-4; 4]$  (рис. 135). В каждом из пунктов «а» — «г» штриховкой сверху отметим множества чисел, удовлетворяющих условию.

В пункте «а» сверху отмечать вообще нечего: множество решений неравенства  $x^2 \leq -1$  пусто. Событие «число окажется решением нера-



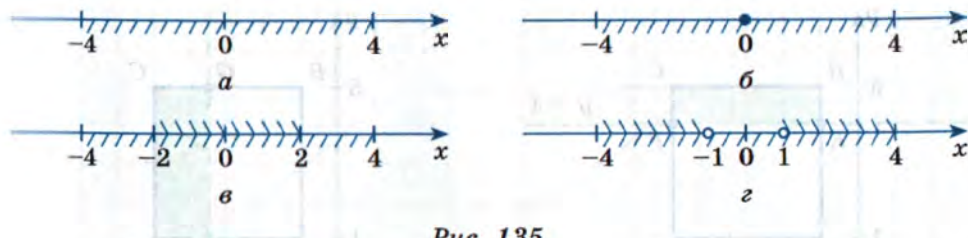


Рис. 135

венства  $x^2 \leq -1$  является невозможным событием и вероятность этого события равна 0.

В пункте «б» отмечено единственное решение  $x = 0$  неравенства  $x^2 \leq 0$ . Длина одноточечного множества равна нулю и вероятность равна 0, но в отличие от пункта «а», это событие не является невозможным.

В пункте «в» множество решений  $x^2 \leq 4$  — это отрезок  $[-2; 2]$ . Он по длине в 2 раза меньше всего отрезка и искомая вероятность равна 0,5.

В пункте «г» можно поступить так. Противоположное событие состоит в том, что  $x^2 \leq 1$ . Получаем отрезок  $[-1; 1]$ , это четверть всего отрезка. Значит, искомая вероятность равна  $1 - 0,25 = 0,75$ .

Весьма часто такого типа задачи формулируют не о случайном выборе точки из множества, а о расположении точки, наудачу брошенной в множество.

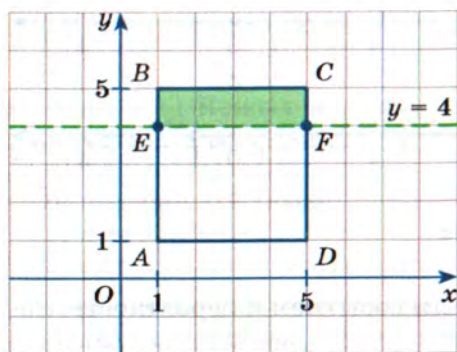
**Пример 3** Точку наудачу бросили в квадрат с вершинами  $A(1; 1)$ ,  $B(1; 5)$ ,  $C(5; 5)$ ,  $D(5; 1)$ . Какова вероятность того, что она окажется:

- выше прямой  $y = 4$ ;
- правее прямой  $x = 3,5$ ;
- выше прямой  $x + y = 9$ ;
- на прямой  $y = x + 1$ ?

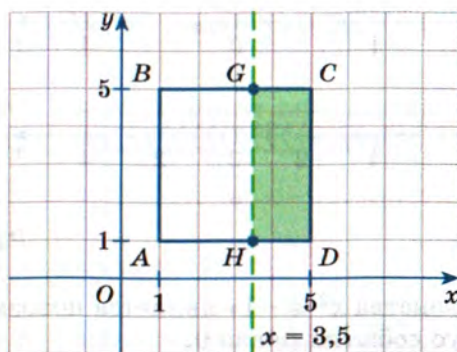
**Решение.** Действуем, как и в примерах 1 и 2, но штриховать будем только те множества, которые соответствуют условиям «а» — «г».

В пункте «а» получится прямоугольник  $EBCF$ , где  $E(1; 4)$ ,  $F(5; 4)$ , без стороны  $EF$  (рис. 136, а). От удаления одной стороны площадь не меняется и равна четверти площади всего квадрата  $ABCD$ . Искомая вероятность равна отношению площадей, т. е. равна 0,25.

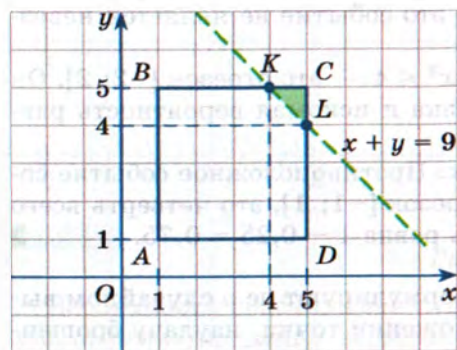
В пункте «б» получится прямоугольник  $GCDH$ , где  $G(3,5; 5)$ ,  $H(3,5; 1)$ , размером  $1,5 \cdot 4$  (рис. 136, б). Искомая вероятность равна отношению площадей, т. е. равна  $(1,5 \cdot 4) : (4 \cdot 4) = 3 : 8 = 0,375$ .



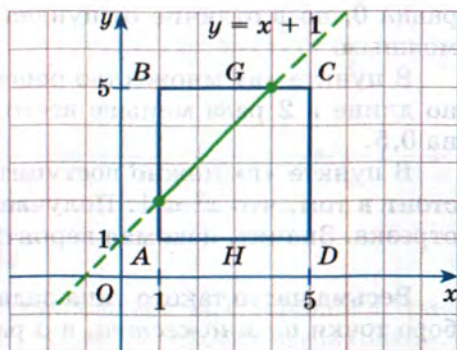
а



б



в



г

Рис. 136

В пункте «в» получится прямоугольный треугольник  $KCL$ , где  $K(4; 5)$ ,  $L(5; 4)$ , с катетами, равными 1 и 1 (рис. 136, в). Его площадь равна 0,5, а искомая вероятность  $0,5 : 16 = 1 : 32 = 0,03125$ .

В пункте «г» получится отрезок (рис. 137, г). Это множество, конечно, непустое, но площадь его равна нулю. Поэтому и вероятность попадания случайно брошенной точки на этот отрезок равна нулю. ■

Если от числовых или от плоских множеств перейти к пространственным телам, то длины или площади следует заменить объёмами.

**Пример 4** В отрезке  $[0; 1]$  наудачу последовательно выбирают три числа. Какова вероятность того, что их сумма больше 1?

**Решение.** Выбор трёх чисел  $x \in [0; 1]$ ,  $y \in [0; 1]$ ,  $z \in [0; 1]$  заменим на выбор точки  $(x; y; z)$  в единичном кубе  $Q$  с вершинами  $(0; 0; 0)$ ,



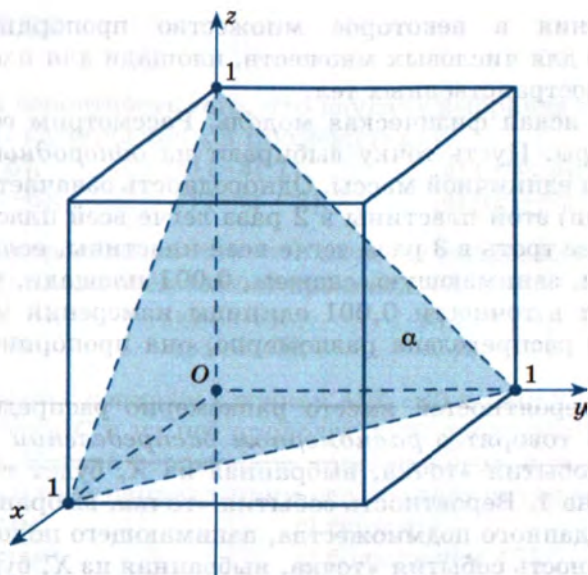


Рис. 137

$(0; 1; 0)$ ,  $(1; 0; 0)$ ,  $(1; 1; 0)$ ,  $(0; 0; 1)$ ,  $(0; 1; 1)$ ,  $(1; 0; 1)$ ,  $(1; 1; 1)$  (рис. 137). Объём куба равен 1.

Уравнение  $x + y + z = 1$  задаёт в координатном пространстве плоскость  $\alpha$ , проходящую через точки  $(1; 0; 0)$ ,  $(0; 1; 0)$ ,  $(0; 0; 1)$  (см. рис. 137). Ниже этой плоскости находятся точки  $(x; y; z)$ , для которых  $x + y + z < 1$ , а выше неё — те точки  $(x; y; z)$ , для которых  $x + y + z > 1$ . Нам нужен объём второго множества, но проще найти объём первого, ведь это треугольная пирамида, из вершины  $O$  которой перпендикулярно друг другу выходят три ребра единичной длины. Её объём равен  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$ , а объём «дополнительного» многогранника равен  $\frac{5}{6}$ . Поэтому искомая вероятность равна  $\frac{5}{6} : 1 = \frac{5}{6}$ .

В примерах 1—4 говорится о «случайном выборе» точки из множества или её «бросании наудачу» в множество. Интуитивно это означает, что никакая из частей множества не имеет никаких заведомых преимуществ перед остальными, вероятность попадания «одинаково», или, как говорят, *равномерно* распределена. А какова математическая модель такой «случайности»? Краткий ответ таков: вероят-

ность попадания в некоторое множество пропорциональна его мере — длине для числовых множеств, площади для плоских фигур, объёму для пространственных тел.

Имеется и ясная физическая модель. Рассмотрим её для случая плоской фигуры. Пусть точку выбирают из *однородной* металлической пластины единичной массы. Однородность означает, что половина (по площади) этой пластины в 2 раза легче всей пластины, любая (по площади) её треть в 3 раза легче всей пластины, если взять часть этой пластины, занимающую, скажем, 0,001 площади, то масса этой части составит в точности 0,001 единицы измерения массы и т. п. Кратко: масса распределена равномерно, она пропорциональна площади.

В теории вероятностей вместо равномерно распределённой единичной массы говорят о *равномерном распределении* вероятности. Вероятность события «точка, выбранная из  $X$ , будет точкой из  $X$ », очевидно, равна 1. Вероятность события «точка, выбранная из  $X$ , будет точкой из данного подмножества, занимающего половину  $X$ » равна 0,5. Вероятность события «точка, выбранная из  $X$ , будет точкой из данного подмножества, занимающего 0,2019 площади  $X$ » равна 0,2019 и т. п.

При равномерном распределении вероятность того, что точка, выбираемая из множества  $X$ , окажется точкой подмножества  $Y \subset X$ , равна отношению:

- длин  $l(Y) : l(X)$  для числовых множеств;
- площадей  $S(Y) : S(X)$  для плоских фигур;
- объёмов  $V(Y) : V(X)$  для пространственных тел.

На бытовом уровне равномерность распределения вероятности часто описывают так. Если на кусок хлеба  $X$  ровным (абсолютно!) слоем намазано масло, то вероятность попадания случайной точки в меньший кусок  $Y \subset X$  равна отношению  $m(Y) : m(X)$  масс масла, намазанного на куски, или же отношению  $S(Y) : S(X)$  площадей кусков. Равномерное распределение вероятности — это простейший пример *непрерывного распределения вероятности*. В более сложных случаях «масло намазано» уже не ровным слоем. Тогда геометрическая вероятность по-прежнему будет равна отношению  $m(Y) : m(X)$  масс, но это отношение может и не совпадать с отношением площадей: вычисление массы по заданной площади становится сложной математической задачей (см. § 23).



## Упражнения

- 24.1.** Какова вероятность того, что наудачу выбранная точка отрезка  $[-6; 4]$  окажется точкой промежутка:
- а)  $[-6; 5]$ ;                      в)  $(-3; 1)$ ;                      д)  $(-\infty; 3]$ ;  
б)  $[-7; -6]$ ;                      г)  $(-4; -2]$ ;                      е)  $[0; +\infty)$ ?
- 24.2.** Какова вероятность того, что наудачу выбранная точка отрезка  $[-2; 8]$  не окажется точкой промежутка:
- а)  $[-4; -3]$ ;                      в)  $(0; 3)$ ;                      д)  $(-\infty; 5]$ ;  
б)  $[-2; 9]$ ;                      г)  $(-1; 7]$ ;                      е)  $[0; +\infty)$ ?
- 24.3.** На отрезке с концами в точках  $A(0; -2)$  и  $B(0; 8)$  наудачу выбирают точку  $C$  и из неё проводят луч, проходящий через точку  $D(1; 0)$ . Какова вероятность того, что угол между лучом и положительным направлением оси ординат окажется:
- а) острым;                      г) тупым;  
б) прямым;                      д) больше чем  $45^\circ$ ;  
в) меньше чем  $135^\circ$ ;                      е) больше чем  $\pi - \arctg 0,1$ ?
- 24.4.** Какова вероятность того, что случайным образом выбранное решение неравенства  $x(x - 6) \leq 2x + 9$  окажется решением неравенства:
- а)  $x \geq 0$ ;                      в)  $|x - 1| \leq 1$ ;                      д)  $\sqrt{x - 5} \leq 2$ ;  
б)  $|x - 1| \leq 0$ ;                      г)  $x^3 > x$ ;                      е)  $\frac{1}{x} \leq 4$ ?
- 24.5.** В треугольнике с вершинами  $A(1; 0)$ ;  $B(3; 0)$ ;  $C(3; 6)$  наудачу выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется:
- а) левее оси ординат;  
б) выше оси абсцисс;  
в) левее прямой  $x = 2$ ;  
г) вершиной треугольника;  
д) ниже прямой  $y = 2$ ;  
е) выше прямой  $y = 2x - 2$ ?
- 24.6.** В прямоугольнике, ограниченном прямыми  $x = 1$ ,  $x = 5$ ,  $y = -2$ ,  $y = 3$ , наудачу выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется:
- а) на оси ординат;                      г) правее прямой  $x = 4$ ;  
б) на оси абсцисс;                      д) выше прямой  $y = x$ ;  
в) ниже оси абсцисс;                      е) ниже прямой  $x + y = 3$ ?

**24.7.** В прямоугольном треугольнике  $\triangle OAB$ , где  $O(0; 0)$ ,  $A(0; 3)$ ,  $B(4; 0)$ , наудачу выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется:

- а) в круге  $x^2 + y^2 \leq 25$ ;
- б) во второй координатной четверти;
- в) в треугольнике, образованном средними линиями  $\triangle OAB$ ;
- г) правее прямой  $x = 3$ ;
- д) ниже прямой  $y = 2$ ;
- е) левее прямой  $x = 3$  и ниже прямой  $y = 2$ ?

**24.8.** В прямоугольнике  $ABCD$  со сторонами  $AB = 2$ ,  $BC = 5$  наудачу выбирают точку. Найдите вероятность того, что она расположена:

- а) на границе прямоугольника;
- б) ближе к прямой  $AB$ , чем к прямой  $CD$ ;
- в) ближе к прямой  $BC$ , чем к прямой  $AD$ ;
- г) ближе к вершине  $A$ , чем к вершине  $C$ ;
- д) ближе к прямой  $AB$ , чем к прямой  $BC$ ;
- е) ближе к вершине  $A$ , чем к точке пересечения диагоналей.

**24.9.** В кубике Рубика  $3 \times 3$  наудачу выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется:

- а) вершиной кубика;
- б) внутри, т. е. не на поверхности кубика;
- в) на диагонали кубика;
- г) в одном из угловых кубиков  $1 \times 1$ ;
- д) в кубике  $1 \times 1$ , который не имеет общих точек с поверхностью куба  $3 \times 3$ ;
- е) в одном из кубиков  $1 \times 1$ , у которых ровно одна грань расположена на поверхности куба?

**24.10.** Наудачу выбирают точку из «снеговика» — трёх шаров, радиус нижнего из которых равен 3, радиус касающегося с ним внешним образом среднего шара равен 2, радиус верхнего шара, который касается внешним образом среднего, равен 1; центры шаров расположены на одной прямой. Какова вероятность того, что эта точка окажется:

- а) не точкой касания шаров;
- б) на поверхности «снеговика»;
- в) в верхнем шаре;
- г) в нижнем шаре;
- д) или в нижнем, или в среднем шаре;
- е) не в среднем шаре?



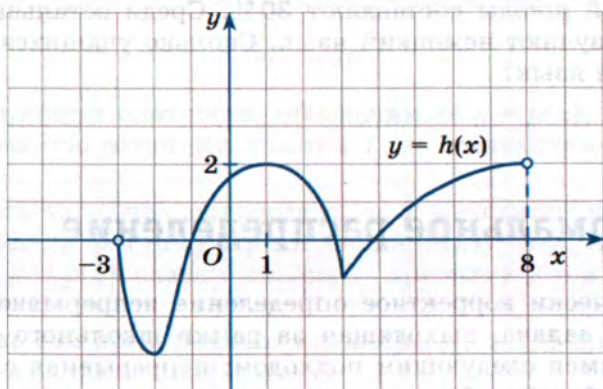
## Упражнения для повторения

**24.11.** На рисунке 138 изображён график дифференцируемой функции  $y = h(x)$ . Укажите значения  $x$ , при которых:

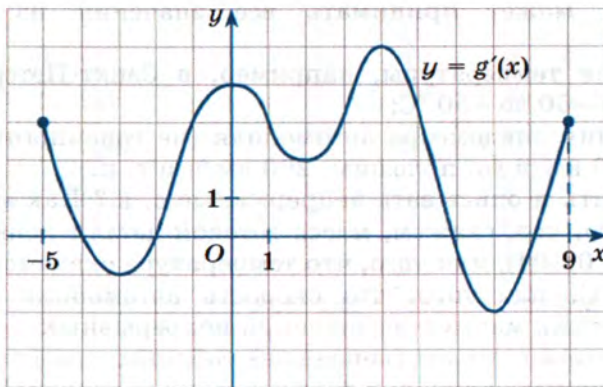
- а)  $h'(x) = 0$ ;                                  в)  $h'(x) > 0$ ;  
б)  $h'(x)$  — не существует;              г)  $h'(x) < 0$ .

**24.12.** На рисунке 139 изображён график производной функции  $y = g(x)$ . Укажите:

- а) промежутки возрастания и убывания функции  $y = g(x)$ ;  
б) точки максимума и минимума функции.



*Рис. 138*



*Рис. 139*

**24.13.** Найдите значение выражения:

- а)  $\frac{8\sin 23^\circ \cos 23^\circ}{\cos 24^\circ \cos 20^\circ - \sin 24^\circ \sin 20^\circ}$ ;  
б)  $\frac{\sin 100^\circ \cos 18^\circ - \cos 100^\circ \sin 18^\circ}{10 \cos 49^\circ \sin 49^\circ}$ .

- 24.14.** а) В областном центре проживают 250 000 человек. Среди них 15 % составляют дети и подростки в возрасте до 18 лет. Среди взрослых 30 % — не работающее население (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько человек взрослого населения работают?  
б) В гимназии обучается 600 школьников. Из них учащиеся начальной школы составляют 30 %. Среди остальных учащихся 15 % изучают немецкий язык. Сколько учащихся изучают немецкий язык?

## § 25. Нормальное распределение

Математически корректное определение непрерывной случайной величины — задача, выходящая за рамки школьного образования. Мы ограничимся следующим подходом: непрерывная с. в.  $T$  осуществляет случайный выбор числа (своего значения) из некоторого промежутка. Например,

— масса (в кг) готовой детали в соответствии со стандартами производства может принимать все значения из промежутка  $(0,49; 0,51)$ ;

— значения температуры, например, в Санкт-Петербурге могут колебаться от  $-50$  до  $+50$  °С;

— показания спидометра автомобиля (не гоночного) непрерывно меняются от 0 км/ч до, положим, 200 км/ч и т. п.

Как задавать и описывать непрерывные с. в.? Как вычислить вероятность того, что, скажем, масса готовой детали попадёт в промежуток  $(0,493; 0,504)$ , или того, что температура окажется в рамках от  $+10$  до  $+20$  °С, или того, что скорость автомобиля не превысит 120 км/ч? Так как множества значений непрерывных с. в. — это числовые промежутки, то ни (конечные) таблицы, ни (конечные) диаграммы для полного описания таких с. в. не подходят. Надо действовать иначе.



Поступают так. Фиксируют некоторую неотрицательную функцию, для которой площадь, заключённая между осью абсцисс и графиком этой функции, равна 1. Такую функцию называют *плотностью распределения* непрерывной случайной величины (рис. 140).

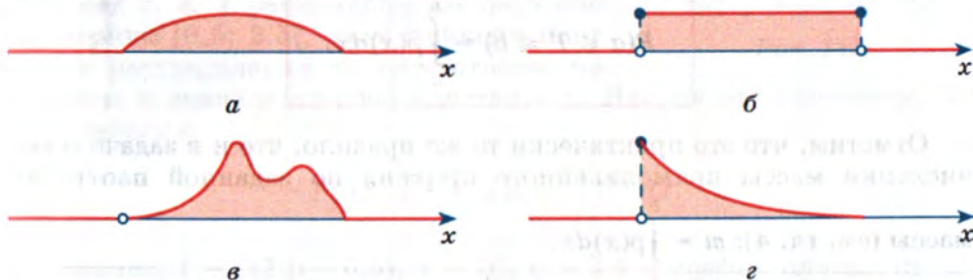


Рис. 140

Каждая функция плотности, обозначим её  $y = p(x)$ , задаёт непрерывную случайную величину, скажем  $T$ , по следующему правилу:

вероятность того, что значения с. в.  $T$  находятся между  $a$  и  $b$ , равна площади фигуры, ограниченной снизу осью  $Ox$ , сверху — графиком  $y = p(x)$ , слева и справа — прямыми  $x = a$  и  $x = b$ .

На рисунке 141 представлены иллюстрации этого правила для четырёх указанных выше плотностей.

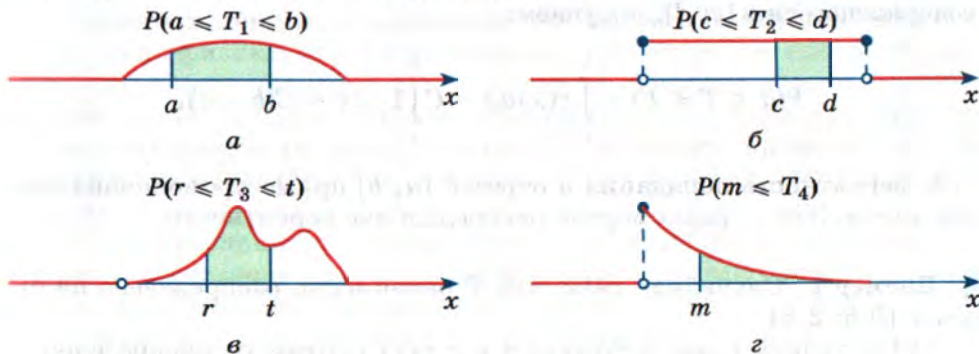


Рис. 141

Меняя границы  $a, b, c, d, r, t, m, \dots$ , получаем вероятности того, что четыре разные непрерывные с. в.  $T_1, T_2, T_3, T_4$  принимают значения в различных промежутках.

Напомним, что площадь криволинейной трапеции вычисляют с помощью определённого интеграла (см. гл. 4). Значит, приведённое выше правило можно записать формулой

$$P(a \leq T \leq b) = \int_a^b p(x) dx.$$

Отметим, что это практически то же правило, что и в задаче о вычислении массы прямолинейного стержня по заданной плотности массы (см. гл. 4):  $m = \int_a^b \rho(x) dx$ .

**Определение.** Вероятность того, что непрерывная случайная величина  $T$  принимает значения от  $a$  до  $b$ , равна результату интегрирования функции  $y = p(x)$  плотности этой с. в. в пределах от  $a$  до  $b$ .

С простейшим непрерывным распределением вероятности — равномерным — мы уже познакомились в предыдущем параграфе. Это случай «одинаковым слоем намазанного масла», т. е. случай, когда плотность  $y = p(x)$  равна константе  $C$  на отрезке, скажем,  $[c; d]$  и равна нулю вне этого отрезка. Смотрите, тогда для любого отрезка  $[a; b]$ , содержащегося в  $[c; d]$ , получаем:

$$P(a \leq T \leq b) = \int_a^b p(x) dx = C \int_a^b 1 \cdot dx = C(b - a),$$

т. е. вероятность попадания в отрезок  $[a; b]$  прямо пропорциональна его длине. Это — равномерное распределение вероятности.

**Пример 1** Случайная величина  $T$  равномерно распределена на отрезке  $[0,5; 2,5]$ .

а) Построить график функции  $y = p(x)$  плотности распределения с. в.  $T$ .

б) Найти вероятность  $P(1 \leq T \leq 1,9)$  того, что значения с. в.  $T$  попадут в отрезок  $[1; 1,9]$ .

в) Найти вероятность  $P(T \leq 2)$ .

г) Найти  $b$ , если известно, что  $P(0,7 \leq T \leq b) = 0,4$ .



**Решение.** а) Все значения с. в.  $T$  принадлежат отрезку  $[0,5; 2,5]$ . Поэтому событие  $0,5 \leq T \leq 2,5$  достоверно и его вероятность равна единице  $P(0,5 \leq T \leq 2,5) = 1$ . Так как с. в.  $T$  равномерно распределена на отрезке  $[0,5; 2,5]$ , то её функция плотности распределения на этом отрезке постоянна и равна некоторой константе  $C$ . Найдём эту константу. По определению

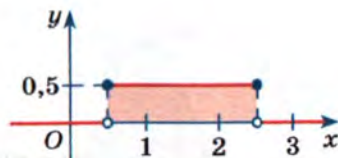


Рис. 142

$$P(0,5 \leq T \leq 2,5) = \int_{0,5}^{2,5} C \cdot dx.$$

Значит,  $1 = C(2,5 - 0,5)$ ,  $1 = 2C$ ,  $C = 0,5$  и график плотности выглядит так, как показано на рисунке 142.

$$б) P(1 \leq T \leq 1,9) = \int_1^{1,9} 0,5 \cdot dx = 0,5 \cdot (1,9 - 1) = 0,45. \text{ Можно дей-}$$

ствовать и без интегралов, а как в предыдущем параграфе: вероятность попадания в отрезок  $[1; 1,9]$  равна отношению длин соответствующих отрезков, т. е. равна  $(1,9 - 1) : (2,5 - 0,5) = 0,9 : 2 = 0,45$ .

в)  $P(T \leq 2) = P(0,5 \leq T \leq 2)$ , так как вне отрезка  $[0,5; 2,5]$  нет никакой площади, заключённой между осью  $Ox$  и графиком плотности. Поэтому  $P(T \leq 2) = 0,5 \cdot (2 - 0,5) = 0,75$ .

$$г) 0,4 = P(0,7 \leq T \leq b) = 0,5 \cdot (b - 0,7), \quad b = 0,7 + 0,4 \cdot 2, \quad b = 1,5.$$

В многочисленных приложениях математики (статистическая физика, радиофизика, обработка данных, экономическое прогнозирование, случайные процессы и т. д.) хорошо известны весьма разнообразные типы распределения непрерывных с. в.<sup>1</sup> Среди них одно заметно выделяется по своей значимости и частоте применений. Это *нормальное распределение*, а точнее — *нормальные распределения*. Разделяют стандартное и общее нормальные распределения.

Плотность стандартного нормального распределения — знаменитая «колоколообразная» кривая, которую часто называют *гауссовой кривой* в честь великого немецкого математика Карла Гаусса (рис. 143). Эта кривая — график весьма сложной функции  $y = \varphi(x)$ , где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

<sup>1</sup> Можно в любом поисковике набрать «типы непрерывных с. в.» или, например, см. <http://old.exponenta.ru/educat/class/courses/tv/theme0/5.asp#6>.

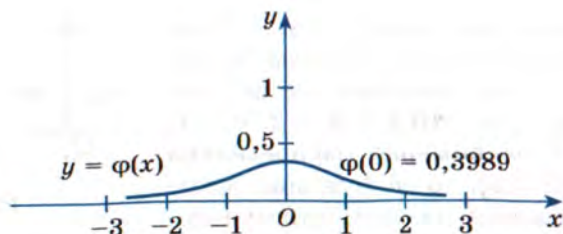


Рис. 143

Кривая стандартного нормального распределения<sup>1</sup> имеет единственную точку максимума; симметрична относительно оси ординат; площадь под графиком равна единице, она очень быстро убывает к оси абсцисс: если оценить площадь под гауссовой кривой на отрезке  $[-3; 3]$ , то получится более 0,99, т. е. более 99 % всей площади.

Физическая модель такова. Единичную массу нельзя равномерно «размазать» по всей числовой прямой. Всегда *плотность распределения* придётся делать разной. Гауссова кривая — пример такого распределения. Около нуля плотность распределения единичной массы (вероятности) наибольшая, а по мере удаления от нуля плотность массы довольно резко убывает. В урощённом варианте, если по числовой прямой «размазывается» 100 граммов чего-либо, то отрезок  $[-3; 3]$  «весит» более 99 граммов, а оба луча  $(-\infty; 3)$  и  $(3; +\infty)$  вместе «весят» очень мало, менее одного грамма.

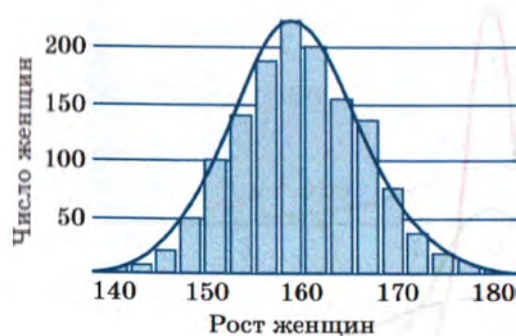
Кривая нормального распределения обладает многими удивительными свойствами. Отметим только некоторые из них. С числовой точки зрения поразительным является присутствие в её уравнении чисел  $\pi$  и  $e$  одновременно: казалось бы, что общего может быть у площади единичного круга и у основания натуральных логарифмов? Тем не менее нормальное распределение связывает вместе эти, казалось бы, совершенно разные по своей природе числа.

С точки зрения приложений нормальное распределение, несомненно, наиболее часто встречающееся распределение, естественно возникающее в разнообразных примерах обработки массовых явлений. Вот лишь небольшая часть из них.

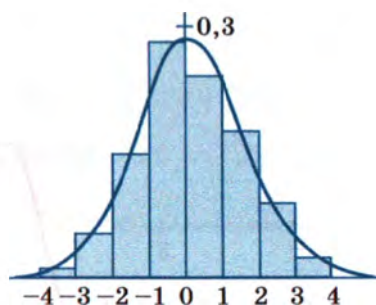
На рисунке 144, а показано распределение роста 1375 женщин. На рисунке 144, б — распределение 500 измерений боковой ошибки при стрельбе с самолёта: по оси абсцисс отложены величины

<sup>1</sup> Иногда, для краткости, говорят гауссиана.

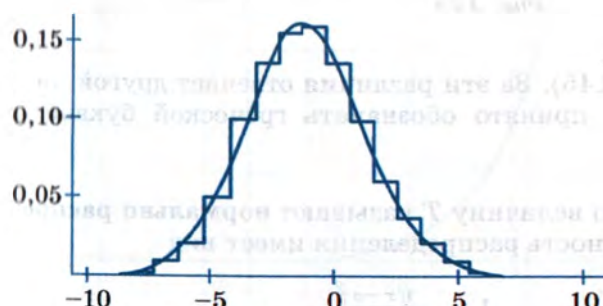




*a*



*б*



*в*



*г*

Рис. 144

ошибок («левее или правее» цели), а по оси ординат — частоты этих ошибок. На рисунке 144, *в* приведены результаты измерения размеров 12 000 бобов: по оси абсцисс откладывались величины отклонений от среднего размера бобов. На рисунке 144, *г* изображена *доска Гальтона* — специальное устройство, моделирующее возникновение нормального распределения. В нём сыплющиеся сверху одинаковые шарики распределяются по ходам между правильными шестиугольниками и в результате попадают на горизонтальную поверхность, образуя картинку, похожую на «подграфик» гауссовой кривой.

Мы видим, что непрерывные кривые, огибающие эти столбиковые диаграммы, в целом похожи на гауссову кривую, но есть два важных отличия. Во-первых, точка максимума может и не совпадать с  $x = 0$ , а быть, вообще говоря, произвольной точкой  $x = a$ . Во-вторых, «колокол» может быть различным, как высоким и узким, так и низким, но

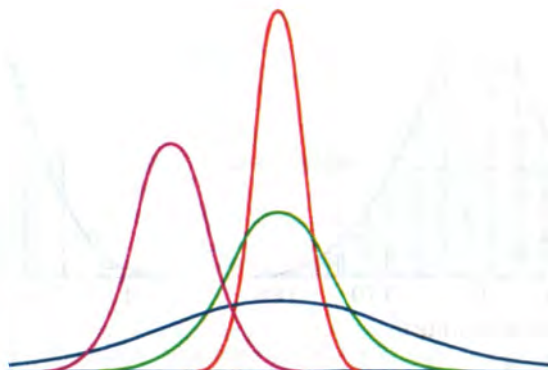


Рис. 145

более протяжённым (рис. 145). За эти различия отвечает другой числовой параметр, который принято обозначать греческой буквой  $\sigma$  («сигма»).

**Определение.** Случайную величину  $T$  называют **нормально распределённой**<sup>1</sup>, если её плотность распределения имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2};$$

$a$  и  $\sigma > 0$  — константы распределения.

Кратко пишут так:  $T \sim N(a, \sigma)$  и говорят, что случайная величина  $T$  имеет нормальный закон распределения (или нормально распределена) с параметрами  $a$  и  $\sigma > 0$ ; буква  $N$  — от слова *normal* — нормальное распределение.

При  $a = 0$ ,  $\sigma = 1$  получается стандартное (гауссово) нормальное распределение (рис. 146, а).

Кривая на рисунке 146, б получается из кривой, изображённой на рисунке 146, а, простыми геометрическими преобразованиями: по оси  $Ox$  — растяжением в  $\sigma$  раз и переносом на  $a$ , по оси  $Oy$  — сжатием в  $\sigma$  раз. Площадь под кривой нормального распределения равна 1, и она довольно кучно сосредоточена рядом с точкой  $x = a$  максимума: на отрезке  $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$  площадь под кривой превышает 0,99.

<sup>1</sup> Говорят также: с. в. с нормальным распределением, с нормальным законом распределения и т. п.



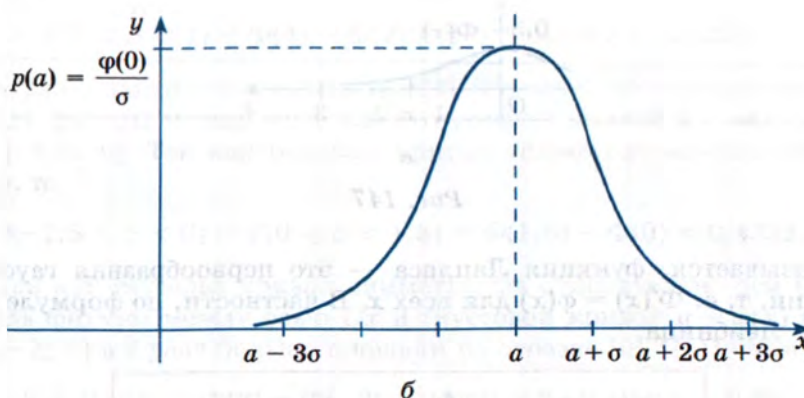
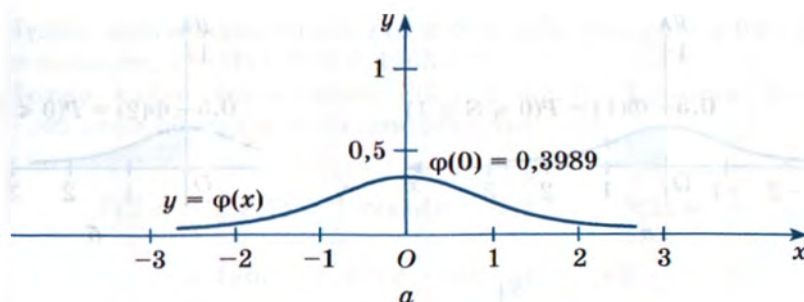


Рис. 146

Точные вычисления вероятностей  $P(c \leq T \leq d)$  того, что нормально распределённая с. в.  $T \sim N(a, \sigma)$  принимает значения от  $c$  до  $d$ , невозможны, так как невозможно точное вычисление интегралов гауссовой функции. Для вычислений используют таблицу приближённых значений специальной функции Лапласа<sup>1</sup>  $y = \Phi(x)$ . Эта таблица приведена в конце учебника в приложении.

**Определение.** Функцией Лапласа  $y = \Phi(x)$  называют функцию, которая каждому числу  $x > 0$  ставит в соответствие значение площади фигуры, заключённой между осью  $Ox$  и гауссовой кривой на отрезке от 0 до  $x$  (рис. 147). Эту функцию доопределяют для  $x = 0$  и  $x < 0$ , полагая соответственно  $\Phi(0) = 0$  и  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ .

<sup>1</sup> Названа в честь французского математика, физика и астронома Пьера-Симона Лапласа (1749—1827).

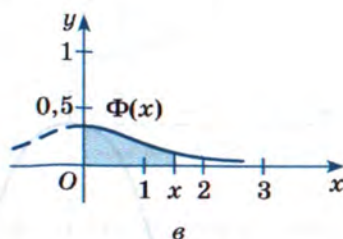
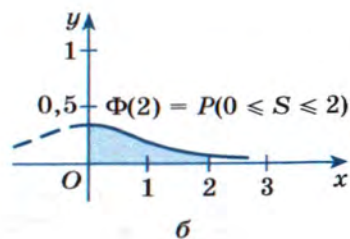
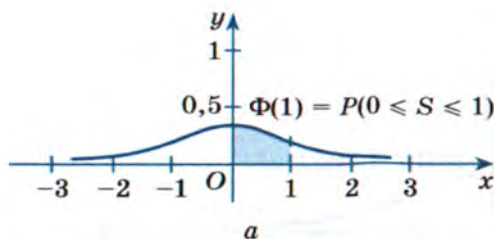


Рис. 147

Оказывается, функция Лапласа — это первообразная гауссовой функции, т. е.  $\Phi'(x) = \varphi(x)$  для всех  $x$ . В частности, по формуле Ньютона — Лейбница,

$$P(c \leq S \leq d) = \int_c^d \varphi(x) dx = \Phi(d) - \Phi(c)$$

для случайной величины  $S$  со стандартным нормальным распределением  $N(0; 1)$ .

Правую часть этого тождества и вычисляют с помощью таблицы приближённых значений. Обратите внимание: в нём задействованы результаты исследований сразу четырёх великих математиков: Ньютона, Лейбница, Лапласа и Гаусса.

**Пример 2** Используя таблицы функции Лапласа  $y = \Phi(x)$ , найти приближённые значения вероятности того, что случайная величина  $S$  со стандартным нормальным распределением примет значения:

- |                 |                 |                  |
|-----------------|-----------------|------------------|
| а) от 0 до 2;   | в) от 2 до 2,7; | д) от -1,5 до 0; |
| б) от 0 до 2,7; | г) от 2 до 4;   | е) от -3 до 3.   |

**Решение.** а) Нужно найти вероятность  $P(0 \leq S \leq 2)$ . Она равна  $\Phi(2) - \Phi(0) = \Phi(2)$ . По таблице находим, что  $\Phi(2) \approx 0,4772$ .



б) Нужно найти вероятность  $P(0 \leq S \leq 2,7)$ . Она равна  $\Phi(2,7)$ . По таблице находим, что  $\Phi(2,7) \approx 0,4965$ .

в) Нужно найти вероятность  $P(2 \leq S \leq 2,7)$ . Так как функция  $\Phi(x)$  — это первообразная функции  $\varphi(x)$ , то

$$P(2 \leq S \leq 2,7) = \int_2^{2,7} \varphi(x) dx = \Phi(2,7) - \Phi(2) \approx \\ \approx 0,4965 - 0,4772 = 0,0193 \approx 0,02.$$

г) Действуя, как в пункте «в», находим

$$P(2 \leq S \leq 4) = \Phi(4) - \Phi(2) \approx 0,5 - 0,4772 = 0,0228.$$

д) Нужно найти вероятность  $P(-1,5 \leq S \leq 0)$ . По определению это площадь фигуры между осью  $Ox$  и гауссовой кривой  $y = \varphi(x)$  на отрезке  $[-1,5; 0]$ . Так как гауссова кривая симметрична относительно оси  $Oy$ , то

$$P(-1,5 \leq S \leq 0) = P(0 \leq S \leq 1,5) = \Phi(1,5) - \Phi(0) \approx 0,4332.$$

е) Так как гауссова кривая симметрична относительно оси  $Oy$ , то площадь фигуры между осью  $Ox$  и гауссовой кривой  $y = \varphi(x)$  на отрезке  $[-3; 3]$  в 2 раза больше площади на отрезке  $[0; 3]$ . Поэтому

$$P(-3 \leq S \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0,49865 = 0,9973.$$

Обратите внимание: вероятность  $P(2 \leq S \leq 4)$  составляет менее 2,5 % всей единичной вероятности, это очень небольшая вероятность, а вероятность  $P(-3 \leq S \leq 3)$  составляет более 99,5 %, это очень большая вероятность: практически несомненно, что с. в.  $S$  принимает значения только из отрезка  $[-3; 3]$ .

**Пример 3** Используя таблицы функции Лапласа  $y = \Phi(x)$ , найти приближённые значения вероятности того, что случайная величина  $T$  с нормальным распределением  $N(4; 0,5)$  примет значения:

а) от 4 до 5; б) от 5 до 5,5; в) от 3 до 4,2; г) от 0 до 2,5.

**Решение.** Оказывается, с. в.  $T$  с нормальным распределением  $N(a; \sigma)$  может быть легко получена из с. в.  $S$  со стандартным нормальным распределением,  $S \sim N(0; 1)$ . А именно  $T \sim N(a; \sigma)$  в том, и только том случае, когда  $T = \sigma S + a$ .

Поэтому каждое двойное неравенство вида  $c \leq T \leq d$  заменяется равносильным двойным неравенством вида  $c' \leq S \leq d'$ , а вероятность

последнего вычисляется по таблицам функции  $\Phi(x)$ , как это сделано в примере 2. В нашем случае  $T = 0,5S + 4$ , где  $S \sim N(0; 1)$ .

а) Нужно найти вероятность  $P(4 \leq T \leq 4,6)$ . Неравенство  $4 \leq S \leq 4,6$  равносильно неравенствам

$$4 \leq 0,5S + 4 \leq 4,6; 0 \leq 0,5S \leq 0,6; 0 \leq S \leq 1,2.$$

Значит,  $P(4 \leq T \leq 4,6) = P(0 \leq S \leq 1,2) = \Phi(1,2) \approx 0,3849$ .

б)

$$\begin{aligned} P(5 \leq T \leq 5,5) &= P(5 \leq 0,5S + 4 \leq 5,5) = P(1 \leq 0,5S \leq 1,5) = \\ &= P(2 \leq S \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(2) \approx 0,49865 - 0,4772 = 0,021. \end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned} P(3 \leq T \leq 4,2) &= P(3 \leq 0,5S + 4 \leq 4,2) = P(-1 \leq 0,5S \leq 0,2) = \\ &= P(-2 \leq 0,5S \leq 0,4) = P(-2 \leq 0,5S \leq 0) + P(0 \leq 0,5S \leq 0,4) = \\ &= \Phi(2) + \Phi(0,4) \approx 0,4772 + 0,1554 = 0,6326. \end{aligned}$$

г)

$$\begin{aligned} P(0 \leq T \leq 2,5) &= P(0 \leq 0,5S + 4 \leq 2,5) = P(-4 \leq 0,5S \leq -1,5) = \\ &= P(-8 \leq S \leq -3) = \Phi(8) - \Phi(3) \approx 0, \end{aligned}$$

так как оба числа  $\Phi(8)$ ,  $\Phi(3)$  практически совпадают с 0,5.

В итоге плотность распределения с. в.  $T \sim N(4; 0,5)$  имеет точку максимума  $x = 4$  и практически вся сосредоточена в отрезке  $[2,5; 5,5] = [4 - 3 \cdot 0,5; 4 + 3 \cdot 0,5] = [a - 3\sigma; a + 3\sigma]$  (рис. 148); это так называемое правило «трёх сигм».

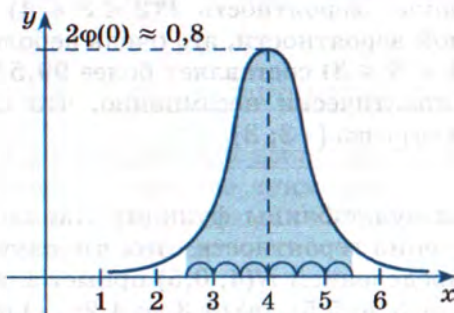


Рис. 148

В заключение отметим, что для случайной величины  $T \sim N(a; \sigma)$  числа  $a$  и  $\sigma$  — это её основные числовые характеристики. А именно математическое ожидание  $M(T)$  равно  $a$ , а дисперсия  $D(T)$  равна  $\sigma^2$ , т. е.  $\sigma = \sqrt{D(T)}$  — её среднее квадратическое отклонение.



## Упражнения

**25.1.** Случайная величина  $T$  равномерно распределена на отрезке  $[1; 3]$ . Найдите вероятность:

- а)  $P(0 \leq T \leq 4)$ ; г)  $P(2 \leq T \leq 3)$ ;  
 б)  $P(5 \leq T \leq 6)$ ; д)  $P(2,5 \leq T \leq 3)$ ;  
 в)  $P(1 \leq T \leq 2)$ ; е)  $P(0 \leq T \leq 1,1)$ .

**25.2.** Случайная величина  $R$  равномерно распределена на отрезке  $[-3; 2]$ . Найдите вероятность:

- а)  $P(-3 < R < 2)$ ; г)  $P(R < -1)$ ;  
 б)  $P(R = 0)$ ; д)  $P(-2 < R)$ ;  
 в)  $P(0 < R < 1)$ ; е)  $P(R^2 < 1)$ .

**25.3.** Случайная величина  $S$  равномерно распределена на отрезке  $[1; a]$ ,  $a > 1$ . Найдите все значения  $a$ , при которых:

- а)  $P(1 \leq S \leq 2) = 0,5$ ; г)  $P(1 \leq S \leq 2) = 0,999$ ;  
 б)  $P(1 \leq S \leq 2) = 0,25$ ; д)  $P(2 \leq S \leq 3) = 1$ ;  
 в)  $P(1 \leq S \leq 2) = 0,05$ ; е)  $P(2 \leq S \leq 3) = 0$ .

На рисунке 149 представлен график плотности  $y = p(x)$  распределения случайной величины  $T$ .

**25.4.** Найдите:

- а)  $p(2)$ ; г)  $p(2,5)$ ;  
 б)  $p(4)$ ; д)  $p(3,75)$ ;  
 в)  $p(3)$ ; е)  $p(2,01)$ .

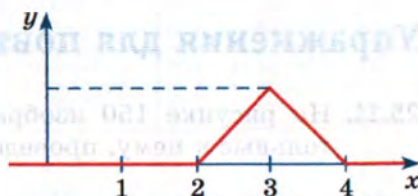


Рис. 149

**25.5.** Найдите:

- а)  $P(2 \leq T \leq 4)$ ; г)  $P(2 \leq T \leq 2,9)$ ;  
 б)  $P(T = 4)$ ; д)  $P(2 \leq T \leq 3,5)$ ;  
 в)  $P(2 \leq T \leq 3)$ ; е)  $P(2,3 \leq T \leq 3,4)$ .

Для выполнения упражнений **25.6—25.10** используйте таблицу значений функции Лапласа  $y = \Phi(x)$  (см. приложение).

**25.6.** Найдите:

- а)  $\Phi(0)$ ; в)  $\Phi(1)$ ; д)  $\Phi(2)$ ;  
 б)  $\Phi(0,5)$ ; г)  $\Phi(1,5)$ ; е)  $\Phi(2,5)$ .

**25.7.** Найдите:

- а)  $\Phi(0,12)$ ; в)  $\Phi(0,56)$ ; д)  $\Phi(1,78)$ ;  
 б)  $\Phi(-0,34)$ ; г)  $\Phi(-0,78)$ ; е)  $\Phi(-2,88)$ .

**25.8.** Вычислите, на сколько число  $\Phi(c)$  меньше числа  $\Phi(d)$ , если:

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| а) $c = 0,3, d = 1,3$ ;   | г) $c = -0,4, d = 1,4$ ;  |
| б) $c = 0,2, d = 2,2$ ;   | д) $c = -0,6, d = 1,55$ ; |
| в) $c = 0,08, d = 2,88$ ; | е) $c = -1,3, d = 2,4$ .  |

**25.9.** Для случайной величины  $S$  со стандартным нормальным распределением  $S \sim N(0; 1)$  найдите:

- |                            |                                  |
|----------------------------|----------------------------------|
| а) $P(0 \leq S \leq 1)$ ;  | г) $P(-1,5 \leq S \leq -0,5)$ ;  |
| б) $P(1 \leq S \leq 2)$ ;  | д) $P(-3 \leq S \leq 1,3)$ ;     |
| в) $P(-2 \leq S \leq 1)$ ; | е) $P(-0,11 \leq S \leq 0,22)$ . |

**25.10.** Найдите вероятности для нормально распределённой случайной величины:

- |  |
|--|
| а) $P(0 \leq T \leq 1), T \sim N(0; 2)$ ;        |
| б) $P(1 \leq T \leq 4), T \sim N(0; 2)$ ;        |
| в) $P(-1 \leq R \leq 6), R \sim N(3; 2)$ ;       |
| г) $P(1 \leq R \leq 7), R \sim N(3; 2)$ ;        |
| д) $P(-3 \leq Q \leq -2), Q \sim N(-2,5; 0,5)$ ; |
| е) $P(Q \leq -1,5), Q \sim N(-2,5; 0,5)$ .       |

## Упражнения для повторения

**25.11.** На рисунке 150 изображён график функции  $y = f(x)$  и касательные к нему, проведённые в точках  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

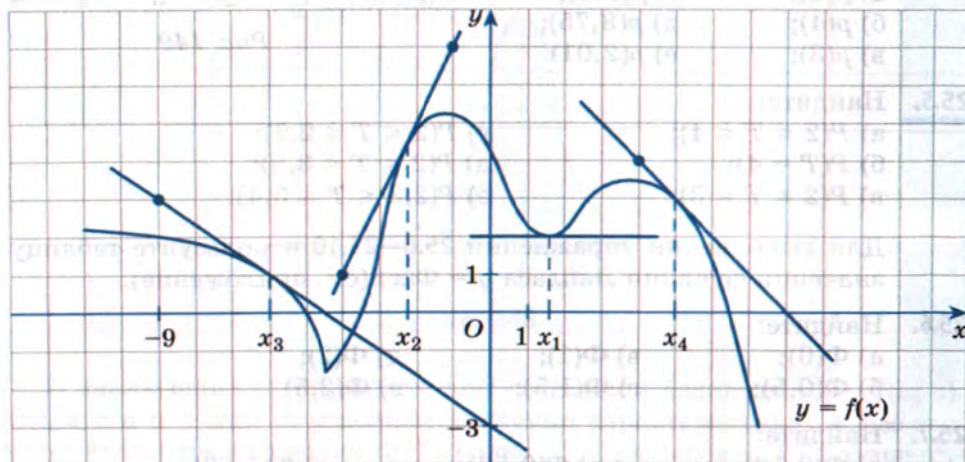


Рис. 150



Найдите:

- а) значение производной в точке  $x_1$ ;
- б) тангенс угла наклона касательной в точке  $x_2$ ;
- в) угловой коэффициент касательной в точке  $x_3$ ;
- г) угол наклона касательной в точке  $x_4$ .

**25.12.** На рисунке 151 изображён график производной функции  $y = g'(x)$ .

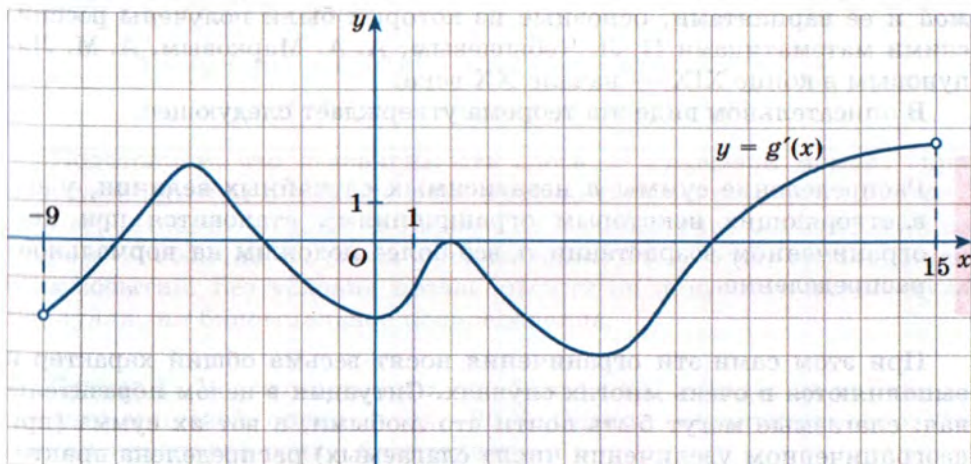


Рис. 151

С помощью графика найдите значения  $x$ , в которых касательная к графику функции  $y = g(x)$  параллельна прямой:

- а)  $y = 3$ ;
- б)  $y = -2$ ;
- в)  $y = 2x + 5$ ;
- г)  $y = -x + 1$ .

**25.13.** Найдите значение выражения:

- а)  $15 \cdot 6^{2\log_6 4} + \log_3 54 - \log_3 2$ ;
- б)  $\log_{12} 3 + \log_{12} 48 - 10 \cdot 5^{3\log_5 2}$ ;
- в)  $4 \cdot 10^{\frac{2}{\log_5 10}} + \frac{\log_2 81}{\log_2 3}$ ;
- г)  $5 \cdot 3^{\frac{2}{\lg 3}} - \frac{\log_{0.5} 100}{\log_{0.5} 0.1}$ .

## § 26. Нормальные и биномиальные распределения. Законы больших чисел

Распространённость нормальных распределений среди всех других распределений обосновывается *центральной предельной теоремой* и её вариантами, основные из которых были получены российскими математиками П. Л. Чебышёвым, А. А. Марковым, А. М. Ляпуновым в конце XIX — начале XX века.

В описательном виде эта теорема утверждает следующее.

Распределение суммы  $n$  независимых случайных величин, удовлетворяющих некоторым ограничениям<sup>1</sup>, становится при неограниченном возрастании  $n$  всё более похожим на нормальное распределение.

При этом сами эти ограничения носят весьма общий характер и выполняются в очень многих случаях. Ситуация в целом поразительная: слагаемые могут быть почти что любыми, а вот их сумма (при неограниченном увеличении числа слагаемых) распределена практически по нормальному закону. Данный факт также является иллюстрацией справедливости *закона больших чисел*.

Мы ограничимся одним частным, но весьма важным случаем применимости центральной предельной теоремы. А именно, схемой Бернулли и биномиальным распределением вероятности.

Напомним, что схема Бернулли (или испытания Бернулли) — это серия из нескольких независимых повторений одного и того же испытания с двумя исходами «успех» и «неудача». Вероятность наступления ровно  $k$  «успехов» в  $n$  испытаниях Бернулли находится по формуле

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где  $p$  и  $q = 1 - p$  — вероятности соответственно «успеха» и «неудачи» в одном испытании.

Вероятности  $P_n(k)$  распределены по *биномиальному* закону распределения. А именно число  $k$  «успехов» принимает значения  $0, 1, 2, \dots, n$  со следующими вероятностями:

<sup>1</sup> Например, условиям Ляпунова.



|                    |       |                   |     |                     |     |                       |       |
|--------------------|-------|-------------------|-----|---------------------|-----|-----------------------|-------|
| Число<br>«успехов» | 0     | 1                 | ... | $k$                 | ... | $n - 1$               | $n$   |
| Вероятность        | $q^n$ | $C_n^1 p q^{n-1}$ | ... | $C_n^k p^k q^{n-k}$ | ... | $C_n^{n-1} p^{n-1} q$ | $p^n$ |

Это распределение вероятности называют биномиальным, потому что числа из второй строки этой таблицы соответственно равны слагаемым в бинOME Ньютона:

$$1 = (q + p)^n = C_n^0 q^n p^0 + C_n^1 q^{n-1} p^1 + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \dots + C_n^k q^{n-k} p^k + \dots + C_n^{n-1} q^1 p^{n-1} + C_n^n q^0 p^n.$$

Подчеркнём, что независимость здесь — ключевой момент: при последовательном и независимом проведении, скажем, двух испытаний вероятность того, что в первом из них наступит событие  $A$ , а во втором — событие  $B$ , равна произведению  $P(A) \cdot P(B)$  вероятностей этих событий. Без условия независимости не получатся ни формула Бернулли, ни биномиальное распределение.

**Пример 1** Вероятность того, что биатлонист попадёт на рубеже во все пять мишеней, оценивается в 80 %. Оценить вероятность того, что в индивидуальной гонке<sup>1</sup> биатлонист:

- ни разу не промахнётся;
- промахнётся только на одном рубеже;
- промахнётся на половине рубежей;
- не промахнётся только на одном рубеже.

**Решение.** В данном случае  $n = 4$  — число рубежей,  $p = 0,8$  — вероятность «успеха», т. е. вероятность попадания во все мишени на рубеже,  $q = 0,2$  — вероятность «неудачи».

а) Здесь  $k = 4$  и по формуле Бернулли получаем:

$$P_n(k) = P_4(4) = C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^0 = p^4 = 0,8^4 = 0,4096; \text{ примерно } 41 \%.$$

б) Промахнуться только на одном рубеже — это значит, что в четырёх повторениях мы имеем три «успеха» и одну «неудачу». Значит,

$$P_n(k) = P_4(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q^1 = 4 p^3 q = 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096.$$

Ответ совпал с ответом из пункта «а», но это случайность: такими оказались числовые данные.

<sup>1</sup> В этой гонке четыре стрелковых рубежа.

в) В этом случае имеем 2 «успеха» и 2 «неудачи», значит,

$$P_n(k) = P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = 6(pq)^2 = 6 \cdot 0,16^2 = 0,1536.$$

г)  $P_n(k) = P_4(1) = C_4^1 \cdot p^1 \cdot q^3 = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,0256.$

Абсолютная точность ответа, который даёт формула Бернулли, есть её несомненное достоинство. Но, к сожалению, ответ получается крайне сложным для практического применения. Представь-

те, что предстоит вычислить, скажем,  $\frac{20!}{11! \cdot 9!} \cdot 0,23^{11} \cdot 0,77^9$  или

$$\frac{100!}{27! \cdot 73!} \cdot 0,7^{27} \cdot 0,3^{73}.$$

Значит, для реальных приложений при больших  $n$  необходимы способы *приближённых вычислений* в формуле Бернулли. Такие способы есть и, пожалуй, основной из них как раз и связан с гауссовой функцией  $y = \varphi(x)$  и функцией Лапласа  $y = \Phi(x)$ , которые появились в науке (XVIII век) как ответ на вопрос о приближённых вычислениях в формуле Бернулли.

Для серии из  $n$  испытаний Бернулли обозначим  $k_1$  число «успехов» в первом испытании,  $k_2$  — число «успехов» во втором испытании, ...,  $k_n$  — число «успехов» в последнем испытании. Тогда сумма  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  — это общее число  $k$  «успехов» во всей серии. Каждое из слагаемых  $k_1, k_2, \dots, k_n$  — это дискретная случайная величина, принимающая значение 0 или 1. Таблицы распределения у всех слагаемых одинаковы:

|                 |     |     |
|-----------------|-----|-----|
| Число «успехов» | 0   | 1   |
| Вероятность     | $q$ | $p$ |

У всех слагаемых одно и то же математическое ожидание, равное  $p$ , и одна и та же дисперсия, равная  $pq$ , а у их суммы  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  математическое ожидание и дисперсия равны, соответственно  $np$  и  $npq$ . Оказывается, что для независимых слагаемых  $k_1, k_2, \dots, k_n$  выполнены ограничения из центральной предельной теоремы. Значит, по этой теореме распределение суммы  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  при неограниченном возрастании  $n$  приближается к нормальному закону.



Для чисел  $a < b$  вероятность  $P_n(a \leq k \leq b)$  того, что количество  $k$  «успехов» в  $n$  испытаниях Бернулли не меньше  $a$  и не больше  $b$ , вычисляют по формуле

$$P_n(a \leq k \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Напомним, что  $y = \Phi(x)$  — функция Лапласа, таблицу значений которой можно найти в приложении. Вопрос о том, начиная с каких именно  $n$  это приближение даёт приемлемую точность, весьма сложен. Обычно ограничиваются рекомендацией о проверке справедливости неравенства  $npq > 10$ . В частности, при  $p = 0,5 = q$  оно равносильно неравенству  $n > 40$ , а при  $p = 0,2$ ;  $q = 0,8$  — неравенству  $n > 62,5$ . Коротко: приемлемая точность приближения достигается при нескольких десятках, сотнях (или тысячах) повторений испытания.

**Пример 2** Политика поддерживает в среднем 60 % населения. Какова вероятность того, что из 600 случайно опрошенных людей этого политика поддерживают:

- а) от 360 до 380 человек; б) не более 350 человек?

**Решение.** Проводят  $n = 600$  повторений одного и того же опыта — получение ответа «да» или «нет» на вопрос о поддержке политика. Предполагается, что это независимые повторения и схема Бернулли тут применима. По условию  $p = 0,6$ ,  $q = 0,4$ , т. е.  $np = 360$ ,  $npq = 144 > 10$ ,  $\sqrt{npq} = 12$ .

- а) Здесь  $a = 360$ ,  $b = 380$  и

$$P_{600}(360 \leq k \leq 380) \approx \Phi\left(\frac{380 - 360}{12}\right) - \Phi(0) \approx \Phi(1,67) \approx 0,4525.$$

б) Здесь указана только оценка сверху  $k \leq 350$ ,  $b = 350$ . В качестве нижней границы всегда можно взять  $a = 0$  и рассмотреть вероятность  $P_{600}(0 \leq k \leq 350)$ . Она приближённо равна

$$\Phi\left(\frac{350 - 360}{12}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 360}{12}\right) \approx \Phi(-0,83) - \Phi(-30).$$

Но в таблице для функции Лапласа  $y = \Phi(x)$  нет отрицательных значений  $x$ . Как быть? Напомним, что функцию Лапласа  $y = \Phi(x)$  для отрицательных аргументов доопределяют по нечётности, т. е.  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$  (см. § 25).

Получаем

$$P_{600}(0 \leq k \leq 350) \approx \Phi(-0,83) - \Phi(-30) = \Phi(30) - \Phi(0,83) \approx \\ \approx 0,5 - 0,2967 = 0,2033.$$

**Пример 3** Вероятность рождения мальчика примем равной 50 %. Найти вероятность того, что среди 400 новорождённых будет:

- а) ровно 200 мальчиков;
- б) ровно 205 мальчиков.

**Решение.** Во-первых, и без вычислений ясно, что вероятность наступления точного равенства крайне невелика. Во-вторых, если приравнять  $P_{400}(k = 200) = P_{400}(200 \leq k \leq 200)$  и попытаться применить

формулу  $P_n(a \leq k \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$ , то в правой части

приближённого равенства получится 0, так как  $b = a$ . В-третьих, необходимо отметить, что для вероятностей  $P_n(k = d)$  есть способ подсчёта, основанный на таблице значений гауссовой функции  $y = \phi(x)$ , а не функции  $y = \Phi(x)$ . Мы его рассматривать не будем, а покажем, как можно обойтись только функцией  $y = \Phi(x)$ , вводя так называемую *поправку на непрерывность*.

Для целого числа  $d$  вероятность  $P_n(k = d)$  того, что количество  $k$  «успехов» в  $n$  испытаниях Бернулли равно  $d$ , вычисляют по формуле

$$P_n(k = d) \approx \Phi\left(\frac{d + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{d - 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

- а) По этой формуле получаем

$$P_{400}(k = 200) \approx \Phi\left(\frac{200 + 0,5 - 200}{10}\right) - \Phi\left(\frac{200 - 0,5 - 200}{10}\right) = \\ = 2\Phi(0,05) = 2 \cdot 0,0199 \approx 0,04.$$

- б) Ещё раз используем ту же формулу:

$$P_{400}(k = 205) \approx \Phi\left(\frac{205,5 - 200}{10}\right) - \Phi\left(\frac{204,5 - 200}{10}\right) = \\ = \Phi(0,55) - \Phi(0,45) \approx 0,2088 - 0,1736 \approx 0,0252.$$

Следствиями центральной предельной теоремы (теорем) являются различные варианты закона больших чисел. В учебниках для 9—10-х классов мы уже рассказывали о явлении *статистической*



устойчивости. Оно заключается в практическом совпадении теоретического и статистического определений вероятности случайного события.

Допустим, что имеется возможность неограниченно повторять некоторое испытание и наблюдать наступление (или ненаступление) события  $A$ , вероятность  $P(A)$  которого нам неизвестна, а известные нам теоретические сведения никак не дают ответа. Как найти  $P(A)$ ? Рассмотрим наше испытание как испытание Бернулли, а его повторения — как схему Бернулли. «Успех» — наступление события  $A$ , вероятность  $p$  «успеха» равна  $P(A)$ . Проведём  $n = 10, 20, 30, \dots, 100, \dots$

повторений и всякий раз будем вычислять частоту  $\frac{k}{n}$  наступления события  $A$ , т. е. частоту наступления «успеха». Закон больших чисел гарантирует нам, что чем больше будет проведено повторений, тем точнее будет приближение  $\frac{k}{n} \approx p$ : вероятность заметной ошибки в этом приближении стремится к нулю с ростом  $n$ .

**Закон больших чисел (в форме Бернулли).** При неограниченном увеличении  $n$  частота  $\frac{k}{n}$  наступления «успеха» в  $n$  испытаниях Бернулли практически совпадает с вероятностью  $p$  «успеха» в одном испытании.

Для обоснования закона больших чисел (ЗБЧ) используем формулы приближённых вычислений с помощью функции Лапласа  $y = \Phi(x)$ .

Оценим вероятность того, что отклонение  $\left| \frac{k}{n} - p \right|$  окажется не больше

некоторого фиксированного числа  $t > 0$ . Неравенство  $\left| \frac{k}{n} - p \right| < t$  заменим равносильным ему двойным неравенством  $-tn \leq k - np \leq tn$  или  $np - tn \leq k \leq np + tn$ . Имеем

$$\begin{aligned} P_n \left( \left| \frac{k}{n} - p \right| \leq t \right) &= P_n(np - tn \leq k \leq np + tn) \approx \\ &\approx 2\Phi \left( \frac{tn}{\sqrt{npq}} \right) = 2\Phi \left( \frac{t}{\sqrt{pq}} \cdot \sqrt{n} \right). \end{aligned}$$

В произведении  $\frac{t}{\sqrt{pq}} \cdot \sqrt{n}$  сомножитель  $\frac{t}{\sqrt{pq}}$  постоянен, а сомножитель  $\sqrt{n}$  неограниченно возрастает. Значит, возрастает само произведение, и как только оно станет больше, скажем, 3, то значение  $2\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{pq}} \cdot \sqrt{n}\right)$  превысит 0,997. А если  $\frac{t}{\sqrt{pq}} \cdot \sqrt{n}$  станет больше 5, то значение  $2\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{pq}} \cdot \sqrt{n}\right)$  превысит 0,999999. Значит, событие « $\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq t$ » становится практически достоверным при неограниченном увеличении  $n$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq t\right) = 1$ .

**Пример 4** Насколько большим должно быть число  $n$  повторений испытания Бернулли для того, чтобы с вероятностью более 95 % можно было бы утверждать, что погрешность приближения  $\frac{k}{n} \approx p$  не превышает 0,05, если вероятность  $p$  «успеха» равна 0,2?

**Решение.** По условию  $\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq 0,05$  или  $|k - np| \leq 0,05n$ , т. е. число  $k$  «успехов» должно находиться в пределах от  $np - 0,05n$  до  $np + 0,05n$ . Вероятность этого события находим приближённо, с учётом  $p = 0,2$ ,  $q = 0,8$ ,  $\sqrt{pq} = 0,4$ :

$$\begin{aligned} P_n(np - 0,05n \leq k \leq np + 0,05n) &\approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{0,05n}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{0,05n}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0,05n}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right). \end{aligned}$$

По условию требуется, чтобы  $2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right) \geq 0,95$ ,  $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right) \geq 0,475$ . По таблице в приложении находим, что  $0,475 \approx \Phi(1,96)$ . Так как функция  $\Phi$  возрастает, то получаем

$$\frac{\sqrt{n}}{8} \geq 1,96, \quad \sqrt{n} \geq 15,68, \quad n \geq 245,8624.$$

**Ответ:** не менее 245 повторений.



Для реальных приложений абсолютная точность ответа в предыдущем примере представляется излишней. Вполне можно было бы сказать, что следует провести не менее 250 или даже 300 повторений.

Закон больших чисел является основой для *выборочного метода*, необходимого в различных социологических и статистических исследованиях. Например, для того чтобы оценить реальный рейтинг телеканала, вовсе не нужно опрашивать всех владельцев телевизоров (их десятки миллионов). При допустимой вероятности ошибки в несколько процентов можно сделать такой опрос лишь *выборочно*, для достаточно большого числа независимо опрашиваемых респондентов. Оказывается, для этого вполне достаточно взять выборку примерно в две тысячи человек.

Великий русский математик Пафнутий Львович Чебышёв доказал, что закон больших чисел имеет место не только для числа «успехов» в испытаниях Бернулли, но и, в значительно более общем виде, для последовательностей случайных величин. Открытие П. Л. Чебышёва основано на замечательном неравенстве, носящем его имя. Это неравенство верно для любой случайной величины  $S$ , у которой есть математическое ожидание  $M(S)$  и дисперсия  $D(S)$ . Оно оценивает вероятность отклонения  $|S - M(S)|$  случайной величины  $S$  от своего математического ожидания  $M(S)$  через величину дисперсии  $D(S)$ .

### Неравенство Чебышёва

$$P(|S - M(S)| \leq t) \geq 1 - \frac{D(S)}{t^2}$$

Например, если  $t = 3\sigma = 3\sqrt{D}$ , то  $P(|S - M(S)| \leq 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{9}$ .

Получается, что с вероятностью не менее чем 88,8 % совершенно произвольная с. в., а не только число «успехов», отклоняется от своего математического ожидания не более чем на  $3\sigma$  (так называемое правило «трёх сигм»).

ЗБЧ (в форме Чебышёва) обосновывает хорошо известное экспериментальное правило «среднего». Например, пусть нужно измерить какой-то числовой показатель физического объекта. Его измеряют в первый раз, получают  $S_1$ . Затем в тех же условиях независимо измеряют его во второй раз, получают  $S_2$  и т. д. Каждый раз возможны погрешности и результаты  $S_1, S_2, S_3, \dots$  измерений несколько отличаются друг от друга. Но если взять их среднее арифметическое

$\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$ , то по ЗВЧ результат получится более надёжным: с ростом  $n$  практически несомненно, что отклонение  $\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$  от истинного значения  $M$  не превысит заданной точности  $t$ .

## Упражнения

- На столе стоят одинаковые по виду коробки. Среди них 5 пустых, 3 с призом и 2 с сюрпризом.
- 26.1.** Наудачу выбирают две коробки. Какова вероятность того, что:
- они пустые;
  - они обе не пустые;
  - одна из них пустая, а другая нет;
  - одна из них пустая, а другая — с сюрпризом;
  - они обе с призом;
  - в них нет сюрприза?
- 26.2.** Наудачу выбирают три коробки. Какова вероятность того, что:
- все они пустые;
  - все они не пустые;
  - одна из них пустая, одна с призом и одна с сюрпризом;
  - две из них пустые, а одна с призом;
  - одна пустая и две с сюрпризом;
  - в них нет сюрприза?
- 26.3.** В каждом из пунктов «а» — «е» определите значения  $n$ ,  $k$ ,  $p$ ,  $q$  и по формуле Бернулли выпишите (без вычислений) выражение для вероятности появления ровно:
- 6 «орлов» при 16 бросаниях монеты;
  - 4 «решек» при 24 бросаниях монеты;
  - 99 нечётных чисел при 199 независимых выборах целых чисел от 0 до 9;
  - 50 чисел, кратных трём, при 500 независимых выборах целых чисел от 0 до 9;
  - 170 «неудач» при опросе 700 человек, произвольно называющих день недели, если считать «удачными» днями субботу и воскресенье;
  - 573 «удачных» из 735 бросаний кубика; «удачей» считаем выпадение 5 или 6 очков.



**26.4.** В приведённых формулах для подсчёта по формуле Бернулли есть пропуски (отмечены знаком ?). Заполните эти пропуски, если известно, что «успех» не менее вероятен, чем «неудача»:

а)  $P_{60}(?) = C_7^6 \cdot 0,4^? \cdot ?^?$ ;

г)  $P_{100}(10) = C_7^? \cdot 0,9^? \cdot ?^?$ ;

б)  $P_7(?) = C_{34}^? \cdot 0,7^? \cdot ?^{28}$ ;

д)  $P_7(?) = C_{33}^? \cdot ?^? \cdot 0,4^{22}$ ;

в)  $P_7(5) = C_7^? \cdot 0,5^{55}$ ;

е)  $P_{50}(?) = C_7^{45} \cdot 0,6^? \cdot ?^?$ .

После успешного прохождения первого уровня компьютерной игры на мониторе запускается лотерейный барабан, в котором 2 белых и 8 чёрных одинаковых по размеру шаров. Если выпадает белый шар, то игрок переходит сразу на третий уровень и это — «успех». Если выпадает чёрный шар, то игрок переходит на второй уровень и это — «неудача». Требуется применить

формулу  $P_n(a \leq k \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$  для нахождения вероятности того, что число  $k$  «успехов» не менее чем  $a$  и не более чем  $b$ .

**26.5.** Найдите:

а) вероятность  $p$  «успеха»;

б) вероятность  $q$  «неудачи»;

в) среднее  $np$  для  $n = 10\,000$  повторений;

г) среднее квадратическое  $\sqrt{npq}$ ;

д) границы  $a$  и  $b$  при отклонении  $k$  от  $np$  не более чем на 40;

е) вероятность  $P_n(a \leq k \leq b)$ .

**26.6.** Для  $n = 2500$  повторений найдите:

а) среднее  $np$ ;

б) среднее квадратическое  $\sqrt{npq}$ ;

в) вероятность  $P_n(k \leq 700)$ ;

г) вероятность  $P_n(k \leq 250)$ ;

д) вероятность  $P_n(500 \leq k)$ ;

е) вероятность  $P_n(450 \leq k \leq 550)$ .

Вероятность рождения мальчика примем равной 50 %.

**26.7.** Найдите вероятность того, что девочек среди 10 000 новорождённых будет:

а) не более 4000;

г) от 4900 до 5000;

б) не более 5000;

д) от 4950 до 5050;

в) не более 6000;

е) от 4800 до 5100.

**26.8.** Найдите вероятность того, что мальчиков среди 100 новорождённых будет ровно:

- а) 50;                      в) 51;                      д) 52;  
б) 53;                      г) 60;                      е) 45.

В каждом из 150 контейнеров лежат 10 одинаковых по виду коробок, в 4 из которых — синие новогодние шары, а 6 — красные. Из каждого контейнера наудачу выбирают одну коробку.

**26.9.** Найдите вероятность того, что в 150 выбранных контейнерах синих шаров будет:

- а) меньше 40;                      в) не больше 60;                      д) от 54 до 66;  
б) меньше 80;                      г) не меньше 60;                      е) от 48 до 72.

**26.10.** По формуле  $P_n(k = d) \approx \Phi\left(\frac{d + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{d - 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$  най-

дите вероятность того, что в 150 выбранных контейнерах синих шаров будет ровно:

- а) 6;                      в) 136;                      д) 64;  
б) 36;                      г) 60;                      е) 52.

## Упражнения для повторения

**26.11.** Найдите точки экстремума функции:

- а)  $y = 0,2x^5 + 4x^3 - 13x$ ;                      г)  $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 11$ ;  
б)  $y = e^{5-x}(x^2 - 8x + 8)$ ;                      д)  $y = e^{x-1}(x^2 - 3x + 3)$ ;  
в)  $y = x^2 - 3x + 3\ln(x + 1)$ ;                      е)  $y = x^2 + 5x + 14\ln(3 - x)$ .

**26.12.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанном отрезке:

- а)  $y = (10 - x)e^{x-9}$ ,  $[8; 10]$ ;  
б)  $y = 4x - \ln(x + 2)^4$ ,  $[-1; 0]$ ;  
в)  $y = \cos 3x - 3x + \pi$ ,  $\left[-\frac{\pi}{3}; 0\right]$ ;  
г)  $y = (x + 3)e^{2-x}$ ,  $[-3; 2]$ ;  
д)  $y = \ln(x + 4)^3 - 3x$ ,  $(-4; 0]$ ;  
е)  $y = 4x - \sin 4x + 1$ ,  $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ .



**ИКТ 26.13.** а) Постройте график функции

$$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2.$$

б) Найдите значения  $a$ , при которых уравнение

$$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 = a$$

имеет ровно три корня.

**26.14.** а) Среднее квадратическое  $q$  трёх чисел  $x, y, z$  вычисляется по

формуле  $q = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}$ . Найдите среднее квадратическое,

если  $x = 12, y = 64, z = 9$ .

б) Среднее геометрическое  $g$  чисел  $k, l, m$  вычисляется по формуле  $g = \sqrt[3]{klm}$ . Найдите среднее геометрическое, если  $k = 12,$

$l = 63, m = 98$ .

## Итак, в главе 5

Познакомились с *непрерывными случайными величинами*. Значения непрерывной случайной величины заполняют целиком некоторый числовой промежуток. Все значения непрерывной с. в. невозможно каким-либо образом перечислить, это основное различие между непрерывными и дискретными с. в. Непрерывные случайные величины естественно возникают в задачах о случайном выборе точки из числового множества, из плоской фигуры, из пространственного тела. В простейших случаях, с которыми мы познакомились в § 24, значения непрерывных с. в. распределены *равномерно*, т. е. распределены с одинаковой *плотностью* по множеству, по фигуре или телу. В физике в таких случаях чаще говорят об однородном стержне, пластине, шаре и т. п. Но встречаются и неравномерно распределённые непрерывные случайные величины. Важнейший пример — *нормально распределённые* случайные величины. Об их значимости в теории вероятностей и приложениях в практических задачах рассказано в последнем параграфе главы.

Познакомились с новыми понятиями теории вероятностей:

- *плотность* распределения случайной величины;
- *гауссова* функция и её график, «колоколообразная» *гауссова* кривая;
- случайная величина со *стандартным нормальным* распределением;
- случайная величина с *общим нормальным* распределением;
- *функция Лапласа*, которая является первообразной гауссовой функции;
- *таблица значений* функции Лапласа;
- *центральная предельная* теорема и её применения для биномиальных распределений;
- *закон больших чисел* в форме Бернулли и основанный на нём *выборочный метод*;
- *неравенство Чебышёва* и правило «*трёх сигм*».

Узнали новые обозначения:

$P(a \leq T \leq b)$  — для вероятности того, что с. в.  $T$  принимает значения из отрезка  $[a; b]$ ;

$y = p(x)$  — для плотности распределения случайной величины;

$y = \varphi(x)$  и  $y = \Phi(x)$  — для гауссовой функции и функции Лапласа;

$N(0; 1)$  и  $N(a; \sigma)$  — для стандартного и общего нормального распределений.



Узнали новые факты и формулы:

$$P(a \leq T \leq b) = \int_a^b p(x)dx \text{ для вычисления вероятности через плот-}$$

ность распределения, в частности площадь под графиком любой функции плотности равна 1;

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi'(x) = \varphi(x), \quad \Phi(0) = 0 \text{ для гауссовой функции и}$$

функции Лапласа;

соотношение  $T = \sigma S + a$  устанавливает связь между с. в.  $T \sim N(a; \sigma)$  с общим нормальным распределением и с. в.  $S \sim N(0; 1)$  со стандартным нормальным распределением;

$$P_n(a \leq k \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right) \text{ и}$$

$$P_n(k = d) \approx \Phi\left(\frac{d + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{d - 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

для использования функции Лапласа при приближённых вычислениях биномиальных распределений;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq t\right) = 1 \text{ для закона больших чисел в форме Бер-}$$

нулли;

$$\text{неравенство Чебышёва } P(|S - M(S)| \leq t) \geq 1 - \frac{D(S)}{t^2}, \text{ оценивающее}$$

вероятность отклонения с. в. от своего математического ожидания через дисперсию этой с. в.;

в частности, с вероятностью не менее чем 88,8% произвольная с. в. отклоняется от своего математического ожидания не более чем на  $3\sigma = 3\sqrt{D(S)}$ .

## Вопросы

1. Сформулируйте правило подсчёта вероятностей для выбора точки из числового множества.
2. Сформулируйте правило подсчёта вероятностей для выбора точки из плоской фигуры.



3. Приведите пример события, которое возможно, но его вероятность равна нулю.
4. Приведите пример события, вероятность которого равна 1, но которое не достоверно.
5. Опишите физическую модель равномерного распределения вероятности.
6. Опишите свойства функции плотности непрерывной случайной величины.
7. Как по графику функции плотности определить вероятность попадания значения непрерывной с. в. в отрезок  $[c; d]$ ?
8. Нарисуйте эскиз гауссовой кривой (кривой плотности стандартного нормального распределения).
9. Опишите свойства гауссовой функции.
10. Нарисуйте эскиз кривых плотности нормальных распределений  $N(0; 2)$ ,  $N(1; 2)$ ,  $N(-2; 1)$ .
11. Приведите формулу Бернулли для подсчёта вероятностей числа «успехов».
12. По какой причине приходится использовать приближённые вычисления при подсчётах по формуле Бернулли?
13. Приведите несколько примеров данных, распределение которых может быть приближено кривой нормального распределения.
14. Опишите, как устроена доска Гальтона. Что она демонстрирует?
15. Вероятность какого события обозначается  $P_n(a \leq k \leq b)$ ?
16. Запишите формулу, выражающую  $P_n(a \leq k \leq b)$  через функцию Лапласа  $y = \Phi(x)$ .
17. К какому числу приближаются значения  $\Phi(x)$  при неограниченном возрастании  $x$ ?
18. Объясните, почему функция Лапласа является возрастающей.
19. В чём состоит явление статистической устойчивости?
20. Сформулируйте закон больших чисел в форме Бернулли.
21. Чему равны математическое ожидание и дисперсия числа успехов в  $n$  испытаниях Бернулли?
22. Запишите неравенство Чебышёва для произвольной случайной величины.

## Тест

1. Какова вероятность того, что наудачу выбранная точка отрезка  $[-5; 15]$  окажется точкой промежутка  $(-4; 4)$ ?  
 а) 0,8                      б) 0,2                      в) 0,4                      г) 0,6



2. Какова вероятность того, что случайным образом выбранное решение неравенства  $x^2 \leq 64$  окажется решением неравенства  $|x - 3| \leq 2$ ?

а)  $\frac{5}{8}$       б)  $\frac{1}{2}$       в)  $\frac{3}{16}$       г)  $\frac{1}{4}$

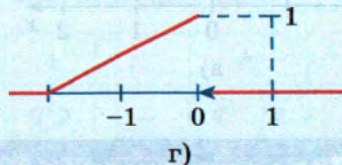
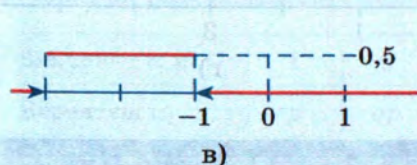
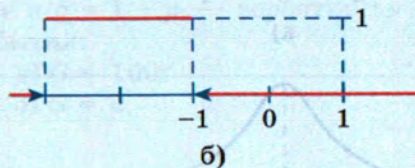
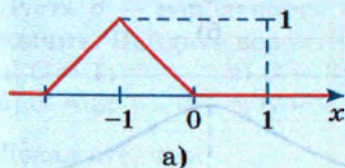
3. Общий центр двух concentric circles радиусом 1 и 2 лежит на оси  $Ox$ . Какова вероятность того, что случайным образом выбранная точка большего круга окажется выше оси  $Ox$  и вне меньшего круга?

а)  $\frac{3}{8}$       б)  $\frac{1}{4}$       в)  $\frac{3}{4}$       г)  $\frac{1}{2}$

4. В кубике Рубика  $3 \times 3$  наудачу выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется в одном из кубиков  $1 \times 1$ , у которых ровно одна грань расположена на поверхности куба?

а)  $\frac{8}{27}$       б)  $\frac{2}{9}$       в)  $\frac{8}{9}$       г)  $\frac{4}{27}$

5. Случайная величина  $T$  равномерно распределена на отрезке  $[-3; -1]$ . На каком из рисунков изображён верный эскиз графика её плотности?



6. Случайная величина  $R$  равномерно распределена на отрезке  $[-1; 3]$ . Найдите вероятность того, что её значение окажется между 0,5 и 2.

а)  $\frac{1}{4}$       б)  $\frac{3}{4}$       в)  $\frac{1}{2}$       г)  $\frac{3}{8}$

7. Вероятность «успеха» в одном испытании равна 0,2. Какова вероятность того, что при трёх повторениях испытания «успех» наступит ровно в одном случае?

а) 0,384      б) 0,096      в) 0,008      г) 0,25



8. Укажите ответ, в котором верно заполнены пропуски в формуле Бернулли  $P_7(?) = C_{33}^? \cdot ?^? \cdot 0,4^{22}$ , если известно, что «успех» более вероятен, чем «неудача».

а)  $P_{33}(11) = C_{44}^{11} \cdot 0,6^{11} \cdot 0,4^{22}$

б)  $P_{33}(11) = C_{33}^{11} \cdot 0,6^{11} \cdot 0,4^{22}$

в)  $P_{33}(22) = C_{33}^{22} \cdot 0,6^{11} \cdot 0,4^{22}$

г)  $P_{33}(22) = C_{33}^{11} \cdot 0,6^{22} \cdot 0,4^{22}$

9. Укажите неверное неравенство для значений функции  $y = \Phi(x)$  Лапласа.

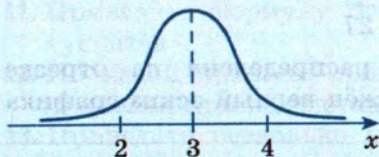
а)  $\Phi(0,11) < \Phi(0,12)$

в)  $\Phi(-3) > \Phi(-2)$

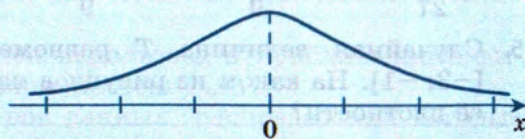
б)  $\Phi(1) \geq \Phi(-2)$

г)  $\Phi(5) < 0,5$

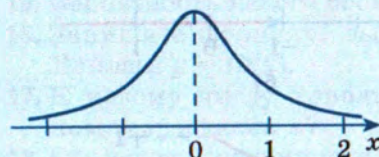
10. Случайная величина  $T$  имеет нормальное распределение  $N(3; 1)$ . На каком из рисунков изображён верный эскиз графика её плотности?



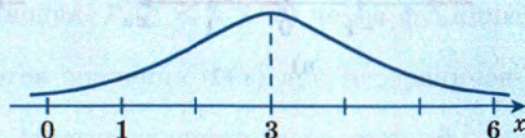
а)



б)



в)



г)

## Дополнительные задачи

Встречаются случайные величины, множество значений которых бесконечно и *дискретно*, т. е. состоит из отдельно расположенных точек. Например, множества  $N$  и  $Z$  бесконечны и дискретны. Случайные величины с такими множествами значений являются *дискретными* с. в., как и с. в. с конечными множествами значений. Пожалуй, одной из самых распространённых с. в. такого типа является случайная величина «количество испытаний Бернулли до первого успеха».



1. Монету подбрасывают до первого выпадения «орла». Какова вероятность того, что потребуется:
- а) одно бросание;
  - б) два бросания;
  - в) одно или два бросания;
  - г) три бросания;
  - д) четыре бросания;
  - е) более четырёх бросаний?

2. Игральный кубик подбрасывают до первого выпадения шести очков. Какова вероятность того, что потребуется:
- а) одно бросание;
  - б) два бросания;
  - в) три бросания;
  - г) не три бросания;
  - д) два или три бросания;
  - е) более трёх бросаний?

Проводят повторения испытания Бернулли с исходами У («успех») и Н («неудача»). После первого появления «успеха» испытания прекращают. Значение случайной величины  $G$  в таком случае равно номеру последнего испытания.

3. Укажите значение  $G$  на наборах результатов:
- а) Н, У;
  - б) Н, Н, У;
  - в) Н, Н, Н, У;
  - г) У;
  - д) У, Н;
  - е) Н, Н, У, У, Н.
4. Пусть  $p$  — вероятность «успеха» и  $q = 1 - p$  — вероятность «неудачи». Найдите вероятность события:
- а)  $G = 1$ ;
  - б)  $G = 2$ ;
  - в)  $G = 3$ ;
  - г)  $G = 4$ ;
  - д)  $G = 100$ ;
  - е)  $G = k$ .
5. Докажите, что:
- а) таблица распределения значений с. в.  $G$  выглядит так:

|                    |     |      |        |        |     |            |     |
|--------------------|-----|------|--------|--------|-----|------------|-----|
| Значения с. в. $G$ | 1   | 2    | 3      | 4      | ... | $k$        | ... |
| Вероятность        | $p$ | $qp$ | $q^2p$ | $q^3p$ | ... | $q^{k-1}p$ | ... |

- б) сумма  $1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} + \dots$  бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна  $p^{-1}$ ;
- в) сумма вероятностей во второй строке таблицы действительно равна 1.

**Определение.** Распределение вероятности из таблицы упражнения 5 «а» называют *геометрическим*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Геометрия здесь почти ни при чём: название распределения связано с использованием в нём геометрической прогрессии.



6. Для с. в.  $G$  «бросания монеты до первого выпадения орла»:
- укажите вероятности «успеха» и «неудачи»;
  - вычислите вероятность события « $G = 3$ »;
  - вычислите вероятность события « $G = 5$ »;
  - составьте таблицу распределения;
  - проверьте, что сумма вероятностей во второй строке таблицы действительно равна 1;
  - найдите наименьшее значение  $k$ , при котором вероятность события « $G = k$ » меньше 0,001.
7. Из набора домино берут одну доминошку. Если это не «дубль», то её возвращают обратно и снова берут одну доминошку. Если это «дубль», то повторения прекращают. Для с. в.  $G$  «выбор до первого появления дубля»:
- укажите вероятность «успеха» и вероятность «неудачи»;
  - вычислите вероятность события « $G = 2$ »;
  - вычислите вероятность события « $G = 3$ »;
  - составьте таблицу распределения;
  - проверьте, что сумма вероятностей во второй строке таблицы действительно равна 1;
  - найдите наименьшее значение  $k$ , при котором вероятность события « $G = k$ » меньше 0,01.
8. Вероятность попадания в мишень у стрелка считается равной 0,9 и неизменной в сериях выстрелов. Для с. в.  $G$  «выстрелы до первого промаха»:
- укажите вероятности «успеха» и «неудачи»;
  - вычислите вероятность события « $G = 3$ »;
  - вычислите вероятность события « $G = 4$ »;
  - составьте таблицу распределения;
  - проверьте, что сумма вероятностей во второй строке таблицы действительно равна 1;
  - найдите наименьшее значение  $k$ , при котором вероятность события « $G = k$ » меньше 0,05.
9. По таблице геометрического распределения (см. упражнение 5 «а») найдите выражение для вероятности:
- |                  |                 |                               |
|------------------|-----------------|-------------------------------|
| а) $P(G = 3)$ ;  | в) $P(G < 3)$ ; | д) $P(G \text{ — нечётно})$ ; |
| б) $P(G = 36)$ ; | г) $P(G > 4)$ ; | е) $P(G \text{ — чётно})$ .   |
10. Проверьте, что для с. в.  $G$  с геометрическим законом распределения:
- математическое ожидание  $M(G)$  равно

$$p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + 5q^4p + \dots;$$



б)

$$p + qp + q^2p + q^3p + q^4p + \dots = p(1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = \\ = p \frac{1}{1-q} = 1;$$

в)

$$0 + qp + q^2p + q^3p + q^4p + \dots = qp(1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = \\ = qp \frac{1}{1-q} = q;$$

г)

$$0 + 0 + q^2p + q^3p + q^4p + \dots = q^2p(1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = \\ = q^2p \frac{1}{1-q} = q^2 \text{ и т. д.};$$

д) если сложить левые части равенств из пунктов «б» — «г» и т. д., то получится  $p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + 5q^4p + \dots$ ;

$$\text{е) } M(G) = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$



## Из истории математики

Упоминание о геометрических вероятностях имеется в одной из рукописей Ньютона (ок. 1665 г.). Первый опубликованный текст относится к 1692 г., когда перевод на английский язык книги Христиана Гюйгенса (1629—1695) «О расчётах в азартных играх» был дополнен задачей о случайном расположении параллелепипеда на плоскости.

Николай I Бернулли (1687—1759), племянник Якоба и Иоганна Бернулли, в работе «Опыт применения искусства предположений к правовым вопросам» (1709 г.) в терминах смертности  $n$  человек исследовал случайные величины, равномерно распределённые на отрезке.

Одним из первых непрерывные распределения в связи с геометрическими вероятностями регулярно стал рассматривать Томас Симпсон (1710—1761).

В нескольких работах Жоржа-Луи Бюффона (1707—1788) рассматривались задачи о бросаниях иглы (или монеты) на плоскость, разделённую параллельными прямыми (или квадратами), и нахождения вероятности того, что при случайном бросании появится пересечение с одной из этих параллельных прямых. При обосновании своих гипотез происхождения планет Бюффон так же использовал вероятностные методы. Стоит отметить, что основной труд Бюффона «Естественная история» поражает грандиозностью: 44 огромных тома.

В учебнике 1846 г. Виктора Яковлевича Буняковского (1804—1889) задачи на геометрические вероятности выделены в отдельную главу. Жозеф-Луи Бертран (1822—1900) в книге «Исчисление вероятностей» (1899 г.) обосновал необходимость построения точных математических моделей при вычислении геометрических вероятностей.

К середине XX в. после появления работ Андрея Николаевича Колмогорова (1903—1987) геометрические вероятности стали частью общей теории меры.

Гауссова кривая, как и функция Лапласа, возникли в математике примерно за 100 лет до основных работ Гаусса и Лапласа по теории вероятностей. Появились функции типа  $y = e^{-x^2}$  практически сразу после базового трактата Якоба Бернулли (1654—1705) «Искусство предположений», напечатанного в 1713 г., в котором, собственно, и была приведена теорема Бернулли — первый из законов больших чисел (сам результат он получил около 1690 г.).





В. Я. Буняковский



Ж.-Л. Бертран

Появление функций экспоненциального типа в вычислении вероятностей связывают с работами Николая Бернулли (1687—1759), хотя первые общие результаты о приближениях  $P_n(k)$  для случая  $y = q = 0,5$  с помощью функции  $\Phi$  получил в цикле своих работ, начиная с 1718 г., француз Абрахам де Муавр (1667—1754), проживший почти всю жизнь в Англии (Муавр был гугенотом). Даниил Бернулли (1700—1782), сын И. Бернулли, опубликовал аналогичные результаты в трактате «Приложение меры случая к случайным последовательностям естественных событий» (1770 г.). Позже, в несколько других терминах их передоказал в своей «Аналитической теории вероятностей» (1812 г.) французский академик Пьер-Симон Лаплас (1749—1827). Теоремы о приближённых вычислениях вероятностей в схеме Бернулли теперь называют теоремами Муавра — Лапласа. Лаплас специально отметил необходимость предположения о равновозможности исходов в классическом определении вероятности. Принято считать, что работами Лапласа завершился первый, «классический» век активного развития теории вероятностей.

Нормальный закон распределения получил примерно к этому же времени широкое применение в теории случайных ошибок, построенной в основном в работах 1809 и 1821 гг. «короля математиков» Карла Фридриха Гаусса (1777—1855). При любом реальном измерении какой-либо величины имеются ошибки, связанные с раз-



личными случайными факторами. Вопрос о том, как их избежать, а точнее, как их учесть для получения наиболее точного итогового результата волновал многих учёных. Замена набора  $n$  результатов измерения одной и той же величины на среднее арифметическое этих результатов неоднократно предлагалась на протяжении истории развития науки. Вот, к примеру, цитата из Гаусса: «...среднее арифметическое из всех наблюдавшихся значений окажется наиболее вероятным значением, если и не абсолютно точно, то по крайней мере очень близко к этому». Разумеется, Гаусс использовал и кривую, ныне носящую его имя.

В России одними из первых серьёзных работ по вероятности были работы Николая Ивановича Лобачевского (1829, 1842 гг.). Вполне вероятно, что к своим идеям о неевклидовых геометриях он подошёл именно на основе исследования ошибок измерений углов треугольника «Земля — Солнце — Сириус»<sup>1</sup>. В своих работах Лобачевский сформулировал задачи о распределении сумм независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение вероятностей.

Значимость и существенность понятия *случайная величина* принято связывать с Петербургской математической школой: П. Л. Чебышёвым (1821—1894) и его последователями А. А. Марковым (1856—1922) и А. М. Ляпуновым (1857—1918). В их работах доказаны многочисленные версии закона больших чисел для разных классов случайных величин, так называемые *центральные предельные теоремы*. В частности, ими было доказано, что при сложении большого числа произвольных независимых случайных величин с одинаковыми математическими ожиданиями получаются распределения, приближённо совпадающие с одним и тем же *нормальным распределением*.

К началу XX в. случайные величины стали активно использоваться в физике, например в работах австрийца Людвиг Больцмана (1844—1906) и американца Джозайи Гиббса (1839—1903), основателей статистической физики, механики и молекулярно-кинетической теории.

Строгое математическое определение *случайной величины* как определённого типа числовой функции на множестве всех исходов испытания появилось одновременно с аксиоматикой теории вероятностей, предложенной великим советским математиком А. Н. Колмогоровым в 1933 г. Её созданию предшествовали и в заметной степени

<sup>1</sup> Кстати, аналогично Гаусс измерял углы «больших» треугольников с вершинами в вершинах далеко отстоящих гор.





К. Ф. Гаусс



П. Л. Чебышёв

способствовали книги «Исчисление вероятностей» (1912) французского учёного Анри Пуанкаре (1854—1912) и «Теория вероятностей» (1927 г.) советского математика Сергея Натановича Бернштейна (1880—1968).

За последнее столетие случайные величины стали рабочим, и зачастую одним из основных технических инструментов исследований в физике микромира, теории наследственности, анализе принятия решений, теории информации, случайных процессах и т. д.



Казанский федеральный университет.  
Казань



- § 27. Равносильность уравнений
- § 28. Решение уравнений с одной переменной
- § 29. Решение систем уравнений
- § 30. Решение неравенств с одной переменной
- § 31. Уравнения и неравенства с параметрами
- § 32. Уравнения, неравенства и функции в задачах о среднем арифметическом



## Глава 6

# Уравнения и неравенства

Уравнения, неравенства, системы уравнений, системы неравенств — всё это вы изучали, начиная с 7-го класса. В этой главе, завершающей школьный курс математики, мы снова возвращаемся к решению уравнений и неравенств: вспомним главное, сделаем необходимые обобщения и дополнения, решим новые примеры.

### § 27. Равносильность уравнений

В этом параграфе речь пойдёт о принципиальных вопросах, связанных с решением уравнений и неравенств с одной переменной: что такое равносильные уравнения, какие преобразования переводят уравнение в равносильное ему, а какие нет; когда и как надо делать проверку найденных корней.

**Определение 1.** Уравнения  $f(x) = g(x)$  и  $p(x) = h(x)$  называют равносильными, если множества их корней совпадают.

Например, уравнения  $x^2 - 9 = 0$ ,  $(4x - 12)(5x + 15) = 0$  равносильны, оба они имеют по два корня: 3 и -3 (у обоих уравнений одно и то же множество корней  $\{-3; 3\}$ ). Равносильны и уравнения  $\sqrt{x} + 5 = 0$ ,  $\sin x = -10$ , оба они не имеют корней (множество корней пусто).

**Определение 2.** Областью определения уравнения  $f(x) = g(x)$  называют множество тех значений переменной  $x$ , при которых одновременно имеют смысл (определены) выражения  $f(x)$  и  $g(x)$ .

Часто используют другой термин: *область допустимых значений переменной (ОДЗ)*.

Решение уравнений, встречающихся в школьном курсе математики, основано на шести теоремах о равносильности (все они в той или иной мере вам известны, встречались в учебниках для 8—10-х классов).

**Теорема 1.** Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

**Теорема 2.** Если обе части уравнения возвести в одну и ту же *нечётную* степень, то получится уравнение, равносильное данному.

**Теорема 3.** Если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то показательное уравнение  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$  равносильно уравнению  $f(x) = g(x)$ .

В теоремах 1—3 нет никаких ограничений на обе части уравнений. Использование этих теорем не приводит к появлению посторонних корней. А вот в следующих трёх теоремах дополнительные ограничения имеются. Без их учёта равносильность не гарантирована, значит, могут появиться посторонние корни и обязательна проверка всех найденных корней.

**Теорема 4.** Если обе части уравнения  $f(x) = g(x)$  умножить на одно и то же отличное от нуля число или на одно и то же выражение  $h(x)$ , которое:

а) имеет смысл всюду в области определения уравнения  $f(x) = g(x)$ ;

б) нигде в этой области не обращается в 0,  
то получится уравнение  $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ , равносильное данному.

**Теорема 5.** Если обе части уравнения  $f(x) = g(x)$  неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же *чётную* степень получится уравнение, равносильное данному.

**Теорема 6.** Если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  и  $f(x) > 0$ ,  $g(x) > 0$  для всех допустимых значений  $x$ , то логарифмическое уравнение  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  равносильно уравнению  $f(x) = g(x)$ .



Приведём примеры, разъясняющие смысл теорем 4—6.

1) Уравнение  $x - 2 = 5$  имеет один корень:  $x = 7$ . Умножив обе части уравнения на  $x - 3$ , получим уравнение  $(x - 3)(x - 2) = 5(x - 3)$ . У этого уравнения два корня: 7 и 3, появился посторонний (для исходного уравнения) корень 3. Откуда он взялся? В теореме 4 содержится требование: выражение, на которое мы умножаем обе части уравнения, не должно в области определения исходного уравнения обращаться в 0. Мы же умножили обе части уравнения на выражение  $x - 3$ , которое обращается в 0 при  $x = 3$ ; именно это значение оказалось посторонним корнем.

Между прочим, если бы исходным было уравнение

$$(x - 3)(x - 2) = 5(x - 3),$$

имеющее два корня (7 и 3), и мы разделили бы обе части уравнения на  $x - 3$ , то получилось бы уравнение  $x - 2 = 5$  с одним корнем (7). Произошла бы *потеря корня*. Потому советуем: не делите обе части уравнения на одно и то же выражение, если вы не уверены в том, что это выражение всюду отлично от нуля.

2) Возьмём то же самое уравнение  $x - 2 = 5$  и возведём обе его части в квадрат (т. е. в чётную степень). Получим уравнение  $(x - 2)^2 = 25$ . У этого уравнения два корня: 7 и  $-3$ , появился посторонний (для исходного уравнения) корень  $-3$ . Причина его появления состоит в том, что мы возвели обе части уравнения в одну и ту же чётную степень, нарушив при этом условие теоремы 5. В этой теореме содержится требование: обе части уравнения должны быть неотрицательны всюду в области определения исходного уравнения. А выражение  $x - 2$  принимает отрицательные значения при  $x < 2$ .

3) Рассмотрим уравнение  $\ln(2x + 3) = \ln(x^2 - 5)$ . Потенцируя, получаем  $2x + 3 = x^2 - 5$ ,  $x^2 - 2x - 8 = 0$ ,  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = -2$ . Первый корень удовлетворяет заданному логарифмическому уравнению, а второй — нет. Смотрите: при  $x = -2$  оба выражения под знаками логарифмов отрицательны, а логарифм отрицательного числа не существует.

Причина появления постороннего корня  $x = -2$  состоит в том, что мы, потенцируя (т. е. «освобождаясь» от знаков логарифмов), нарушили условия теоремы 6. В этой теореме содержится требование: выражения под знаками логарифмов должны быть положительными. Переход от исходного логарифмического уравнения к уравнению  $2x + 3 = x^2 - 5$  привёл к *расширению области определения уравнения*. Область определения логарифмического уравнения задаётся си-

стеймой неравенств  $\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ x^2 - 5 > 0, \end{cases}$  решив которую находим:  $x > \sqrt{5}$ . Об-

ласть же определения уравнения  $2x + 3 = x^2 - 5$  есть множество всех действительных чисел. По сравнению с логарифмическим уравнением она расширилась: добавился луч  $(-\infty; \sqrt{5}]$ . Именно в эту добавленную часть и «проник» посторонний корень  $x = -2$ .

Перечислим возможные *причины расширения области определения уравнения*:

1) освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину;

2) освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней чётной степени;

3) освобождение в процессе решения уравнения от знаков логарифмов.

Подведём итоги. *Проверка всех найденных корней уравнения обязательна*, если в результате выполненных преобразований уравнения:

а) произошло расширение области определения уравнения;  
б) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же чётную степень;

в) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).

Самый надёжный способ проверки — подстановка всех найденных корней в исходное уравнение. Если такая подстановка затруднительна, то используют обходные пути, например с помощью ОДЗ.

**Пример** Решить уравнение:

$$а) \sqrt{x^2 - 3x + 3} = 2x - 3; \quad б) \lg(x^2 - 5x + 4) = \lg(2x - 7).$$

**Решение.** а) Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$(\sqrt{x^2 - 3x + 3})^2 = (2x - 3)^2;$$

$$x^2 - 3x + 3 = 4x^2 - 12x + 9;$$

$$3x^2 - 9x + 6 = 0;$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0;$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2.$$

**Проверка.** При  $x = 1$  получаем:  $\sqrt{1^2 - 3 \cdot 1 + 3} = 2 \cdot 1 - 3$ ;  $1 = -1$  — неверное равенство. Значит,  $x = 1$  — посторонний корень.



При  $x = 2$  получаем:  $\sqrt{2^2 - 3 \cdot 2 + 3} = 2 \cdot 2 - 3$ ;  $1 = 1$  — верное равенство. Значит,  $x = 2$  — корень заданного уравнения.

б) «Освободившись» от знаков логарифма, получим:

$$x^2 - 5x + 4 = 2x - 7;$$

$$x^2 - 7x + 11 = 0;$$

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}.$$

**Проверка.** Здесь проверка подстановкой затруднительна, поступим по-другому. Найдём область определения заданного логарифмического уравнения:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0, \\ 2x - 7 > 0; \end{cases} \begin{cases} (x-1)(x-4) > 0, \\ x > 3,5; \end{cases} \begin{cases} x < 1 \text{ или } x > 4, \\ x > 3,5; \end{cases}$$
$$x > 4.$$

Первый из найденных корней удовлетворяет неравенству  $x > 4$ , а второй — нет. Значит, второй корень посторонний.

**Ответ:** а) 2; б)  $\frac{7 + \sqrt{5}}{2}$ .

## Упражнения

**27.1.** Является ли уравнение  $\sqrt[3]{x} = 2$  равносильным данному уравнению:

а)  $\frac{32}{x} = 4$ ;

г)  $|x - 3| = 5$ ;

б)  $x^2 - 6x - 16 = 0$ ;

д)  $\frac{2x^2 - 16x}{x} = 0$ ;

в)  $2^x = 256$ ;

е)  $\log_2 x = 3$ ?

**27.2.** Является ли уравнение  $\cos x = 0$  равносильным данному уравнению:

а)  $\sin x = 1$ ;

г)  $\cos(x - \pi) = 0$ ;

б)  $\cos x \cdot \sqrt{1 - x} = 0$ ;

д)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sqrt{x - 1} = 0$ ;

в)  $\operatorname{ctg} x = 0$ ;

е)  $\operatorname{ctg} x \cdot \sin 2x = 0$ ?

**27.3.** Распределите уравнения на пары равносильных друг другу. Укажите уравнение, которое оказалось без пары:

а)  $x^2 + 4x - 45 = 0$ ;  $3^x = 243$ ;  $|x + 2| = 7$ ;

$\log_3 x = 2$ ;  $\sqrt{x + 11} = 4$ ;

б)  $\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = 0$ ;  $5^x = 625$ ;  $|x - 3,5| = 0,5$ ;

$\log_{16} x = 0,5$ ;  $\sqrt{x^2 + 12} = \sqrt{7x}$ ;

в)  $3x^2 - 13x - 16 = 0$ ;  $2^{0,5x-1} = 128$ ;  $|3x + 1| = 0$ ;

$\log_2 x = 4$ ;  $\sqrt{6x + 11} = 3$ ;

г)  $\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = 0$ ;  $6^x = 36$ ;  $|x - 3,5| = 1,5$ ;

$\log_{0,2} x = -1$ ;  $\sqrt{x^2 + 10} = \sqrt{7x}$ .

**27.4.** Придумайте три уравнения, равносильных уравнению:

а)  $|x - 3| = 0$ ;

г)  $|x + 2| = 0$ ;

б)  $\sin x = 2$ ;

д)  $\cos x = -4$ ;

в)  $\log_3 x^2 = 4$ ;

е)  $\sqrt{x^2 - 4} = 0$ .

Равносильны ли данные уравнения?

**27.5.**

а)  $\frac{x^2 + 5x - 3}{2x^2 + 1} = 3$  и  $x^2 + 5x - 3 = 6x^2 + 3$ ;

б)  $\frac{x^2}{\sqrt{x}} = 1$  и  $x^2 = \sqrt{x}$ ;

в)  $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 1$  и  $\sin x = \cos x - 1$ ;

г)  $\frac{x^2 - 4x - 3}{x^2 - 1} = 2$  и  $x^2 - 4x - 3 = 2x^2 - 2$ ;

д)  $\frac{x^3}{\sqrt{x} + 2} = 1$  и  $x^3 = \sqrt{x} + 2$ ;

е)  $\frac{\sin x + 1}{\sin x + 3} = 0,5$  и  $2\sin x + 2 = \sin x + 3$ .

**27.6.**

а)  $4^x - 16x^2 = 0$  и  $x(x^4 + 5) = 2x^2(x^4 + 5)$ ;

б)  $\sqrt{0,2^x} \cdot 5x^2 \sqrt{5} = 25$  и  $x^2 - 0,5x - 1,5 = 0$ ;

в)  $\lg(x - 4) + \lg x = \lg(x - 2)$  и  $x^2 + 4x = x - 4$ ;



$$\text{г) } 5^x - 25^{x^2} = 0 \text{ и } x^3(x-3) = 2x^4(x-3);$$

$$\text{д) } 2^{\sqrt{x}-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 1 \text{ и } \sqrt{x} - x - 3 = 0;$$

$$\text{е) } \lg(x-3) + \lg x = \lg(2x-6) \text{ и } x^2 - 3x = 2x - 6.$$

$$\text{27.7. а) } \sqrt{4x^2 + 3} = \sqrt{x^4 + 5} \text{ и } 4x^2 + 3 = x^4 + 5;$$

$$\text{б) } \sqrt[4]{\cos^2 x + 1} = 1 \text{ и } \cos x = 0;$$

$$\text{в) } \lg(x^2 + 4) = \lg(x + 4) \text{ и } x^2 + 4 = x + 4;$$

$$\text{г) } \sqrt{3^x + 12} = \sqrt{9^x + 3^{x-2}} \text{ и } 3^x + 12 = 9^x + 3^{x-2};$$

$$\text{д) } \sqrt[6]{\sin^4 x + 1} = 1 \text{ и } \sin^2 x = 0;$$

$$\text{е) } \ln(x^2) = \ln x \text{ и } x^2 = x.$$

**27.8.** Найдите область определения (ОДЗ) уравнения:

$$\text{а) } \sqrt{5-x} = \sqrt{x-2};$$

$$\text{г) } \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-2}} = 2;$$

$$\text{б) } \frac{\lg(5-x)-1}{\lg(x-2)+1} = 3;$$

$$\text{д) } \frac{\ln(5-x)}{\ln(x-2)} = 3;$$

$$\text{в) } \sqrt{\frac{5-x}{x-2}} \cdot \lg(x^2-4) = 3;$$

$$\text{е) } \sqrt{\frac{5-x}{x-2}} \cdot \lg(x^2-4) = 3.$$

**27.9.** Докажите, что уравнение не имеет корней:

$$\text{а) } \sqrt{16-x^2} = \sqrt{3x-13};$$

$$\text{б) } \ln(8x-22) = \ln(13-6x);$$

$$\text{в) } \log_2(x^2-7) + \log_2(5-x^2) = 3;$$

$$\text{г) } \ln(-3x-5) = \ln(9-4x^2);$$

$$\text{д) } \sqrt{5x-11} = \sqrt{13-7x};$$

$$\text{е) } \lg(x^2-5x) + \lg(7x-2x^2) = 0,25.$$

Решите уравнение.

$$\text{27.10. а) } \sqrt{7x-12} = x;$$

$$\text{г) } \sqrt{7x-13} = x-1;$$

$$\text{б) } \sqrt{2x-3} = x-3;$$

$$\text{д) } \sqrt{7-x} = x-5;$$

$$\text{в) } \sqrt{x^2+12x-4} = 2x-1;$$

$$\text{е) } \sqrt{x^2-x+3} = 2x-3.$$

$$\text{27.11. а) } \sqrt{x^4+x^2-7x+5} = 1-x^2;$$

$$\text{в) } \sqrt{x^4-17x+8} = x^2-2;$$

$$\text{б) } \sqrt{x^4+x^2-7x+5} = x^2-1;$$

$$\text{г) } \sqrt{x^4-17x+8} = 2-x^2.$$

**27.12.** а)  $\lg(x^2 - 2x - 8) = \lg(3x - 12)$ ;  
 б)  $\lg(x^2 - 9x + 18) = \lg(2x - 12)$ .

**27.13.** а)  $(x^2 - 36)(x - \sqrt{6 - 5x}) = 0$ ;      г)  $(x^2 - 25)(x - \sqrt{10 - 3x}) = 0$ ;  
 б)  $\frac{\sqrt{x^2 - 49}}{\sqrt{14 - 5x} - x} = 0$ ;      д)  $\frac{\sqrt{15 - 2x} - x}{\sqrt{x^2 - 25}} = 0$ ;  
 в)  $\frac{\sqrt{6 - 5x} - x}{\log_5(x^2 - 12)} = 0$ ;      е)  $\frac{\lg(x^2 - 8)}{\sqrt{10 - 3x} - x + 2} = 0$ .

**27.14.** а)  $(\sin 2x - 1) \cdot \sqrt{4 - x^2} = 0$ ;  
 б)  $(\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot \sqrt{3 + 2x - x^2} = 0$ ;  
 в)  $\operatorname{tg} x \cdot \lg(4 - x^2) = 0$ ;  
 г)  $(2\cos 2x - 1) \cdot \sqrt{1 - x^2} = 0$ ;  
 д)  $\sin 2x \cdot \sqrt{6 - x - x^2} = 0$ ;  
 е)  $\operatorname{ctg} x \cdot \ln(9 - x^2) = 0$ .

## § 28. Решение уравнений с одной переменной

Укажем четыре основных метода решения уравнений с одной переменной.

1. Замена уравнения  $f(h(x)) = f(g(x))$  уравнением  $h(x) = g(x)$  при условии, что  $y = f(x)$  — монотонная функция.

Если  $y = f(x)$  — монотонная функция, то уравнения  $f(h(x)) = f(g(x))$  и  $h(x) = g(x)$  равносильны. Мы постоянно пользовались этим методом. Например:

— показательное уравнение  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$  заменяли равносильным ему уравнением  $2x - 3 = 3x + 5$ ;

— логарифмическое уравнение  $\log_3(5x + 2) = \log_3(8 - x)$  заменяли равносильным ему (при условии, что  $5x + 2 > 0$ ,  $8 - x > 0$ ) уравнением  $5x + 2 = 8 - x$ ;

— иррациональное уравнение  $\sqrt[3]{x^2 + 5} = \sqrt[3]{3x + 2}$  заменяли равносильным ему уравнением  $x^2 + 5 = 3x - 2$ .



Во всех этих примерах «внешняя» функция (соответственно  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ,  $y = \log_3 x$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$ ) была монотонна:  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  — убывающая функция,  $y = \log_3 x$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$  — возрастающие функции.

## 2. Функционально-графический метод.

Графический метод решения уравнения  $f(x) = g(x)$  состоит в следующем: нужно построить графики функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ , а затем найти точки их пересечения; корни уравнения  $f(x) = g(x)$  — это абсциссы точек пересечения. Графическим методом мы не раз пользовались, начиная с курса алгебры 7-го класса. Этот метод позволяет определить число корней уравнения, найти приближённые, а иногда и точные значения корней.

В некоторых случаях можно не строить графики, а использовать какие-либо свойства функций. Приведём два полезных утверждения.

1. Если одна из функций  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  возрастает, а другая — убывает, то уравнение  $f(x) = g(x)$  либо не имеет корней, либо имеет единственный корень.

2. Если на промежутке  $X$  наибольшее значение одной из функций  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  равно  $A$  и наименьшее значение другой функции тоже равно  $A$ , то уравнение  $f(x) = g(x)$  равносильно на промежутке  $X$  системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

## 3. Метод введения новой переменной.

Этот метод состоит в следующем: если уравнение  $f(x) = 0$  удалось преобразовать к виду  $p(g(x)) = 0$ , то целесообразно ввести новую переменную  $y = g(x)$ , найти корни  $y_1, y_2, y_3, \dots$  уравнения  $p(y) = 0$ , а затем решить совокупность уравнений:  $g(x) = y_1$ ,  $g(x) = y_2$ ,  $g(x) = y_3, \dots$

Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной. Новая переменная иногда очевидна, иногда несколько завуалирована, но «ощущается», а иногда «проявляется» лишь в процессе преобразований. Примите совет: решая уравнение, не торопитесь начинать преобразования, сначала подумайте, можно ли запи-

сать уравнение проще, введя новую переменную. Если можно, то с этого и начинайте.

#### 4. Метод разложения на множители.

Этот метод заключается в том, что уравнение  $f(x)g(x)h(x) = 0$  заменяют совокупностью уравнений:

$$f(x) = 0; \quad g(x) = 0; \quad h(x) = 0.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те из найденных корней, которые принадлежат области определения *исходного* уравнения, а остальные отбросить как посторонние. Этот метод особенно активно мы применяли при решении тригонометрических уравнений, используя различные формулы тригонометрии.

В приведённых ниже примерах используются функционально-графический метод (пример 1), метод введения новой переменной (пример 2), метод разложения на множители (пример 3).

#### Пример 1 Решить уравнение:

а)  $\sqrt{x} = |x - 2|$ ;

в)  $5^x + 12^x = 13^x$ ;

б)  $\lg(2x - 5) = 51 - 17x$ ;

г)  $\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2$ .

**Решение.** а) Графики функций  $y = \sqrt{x}$  и  $y = |x - 2|$  изображены на рисунке 152. Они пересекаются в точках  $A(1; 1)$  и  $B(4; 2)$ . Значит, уравнение имеет два корня:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$ .

б) Обратите внимание: при  $x = 3$  и левая, и правая части уравнения обращаются в нуль, т. е.  $x = 3$  — корень уравнения. А поскольку функция  $y = \lg(2x - 5)$  возрастает (при  $x > 2,5$ ), тогда как линейная функция  $y = 51 - 17x$  убывает, то  $x = 3$  — единственный корень уравнения.

в) Если числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  удовлетворяют уравнению  $x^2 + y^2 = z^2$ , то тройку  $(x, y, z)$  называют *пифагоровой* (наверное, потому, что для

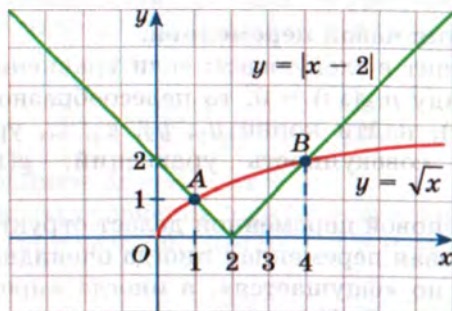


Рис. 152



треугольника со сторонами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  выполняется теорема Пифагора, т. е. это прямоугольный треугольник с катетами  $x$ ,  $y$  и гипотенузой  $z$ ). Приведём несколько примеров пифагоровых троек: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (12, 35, 37). В частности, верно равенство  $5^2 + 12^2 = 13^2$ , т. е.  $x = 2$  — корень заданного уравнения  $5^x + 12^x = 13^x$ . Докажем, что других корней у уравнения нет.

Разделим почленно обе части уравнения  $5^x + 12^x = 13^x$  на  $12^x$ :

$$\left(\frac{5}{12}\right)^x + 1 = \left(\frac{13}{12}\right)^x.$$

Функция  $y = \left(\frac{5}{12}\right)^x + 1$  — убывающая, функция  $y = \left(\frac{13}{12}\right)^x$  — возрастающая. Значит, уравнение имеет не более одного корня, т. е.  $x = 2$  — единственный корень уравнения.

г) Рассмотрим функцию  $y = x^2 - 2x + 2$ . Её графиком служит парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, в вершине параболы функция достигает своего наименьшего значения. Абсциссу вершины найдём из уравнения  $y' = 0$ . Имеем:

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2; \\ 2x - 2 &= 0; \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Если  $x = 1$ , то  $y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$ .

Итак, для функции  $y = x^2 - 2x + 2$  получили:  $y_{\text{наим}} = 1$ . В то же время функция  $y = \cos 2\pi x$  обладает свойством:  $y_{\text{наиб}} = 1$ . Значит, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \\ x^2 - 2x + 2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем:  $x = 1$ . Поскольку это значение удовлетворяет и первому уравнению системы, то оно является единственным решением системы и, следовательно, единственным корнем уравнения.

**Ответ:** а) 1, 4; б) 3; в) 2; г) 1.

**Пример 2** Решить уравнение:

а)  $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ ;

в)  $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$ ;

б)  $\sin^2 x + \cos^2 2x = 1$ ;

г)  $\lg^2 x^2 + \lg 10x - 6 = 0$ .

**Решение.** а) Здесь как бы «напрашивается» новая переменная  $y = x^3$ . Относительно новой переменной  $y = x^3$  уравнение примет вид  $y^2 - 9y + 8 = 0$ , откуда находим:  $y_1 = 1, y_2 = 8$ . И остаётся решить совокупность уравнений  $x^3 = 1; x^3 = 8$ . Получаем соответственно  $x = 1, x = 2$ .

б) Вспомним тригонометрическую формулу понижения степени  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ . Если использовать эту формулу в данном уравне-

нии, то получим  $\frac{1 - \cos 2x}{2} + \cos^2 2x = 1$ . Как видите, «проявилась» новая переменная  $y = \cos 2x$ , относительно которой получается несложное уравнение  $\frac{1 - y}{2} + y^2 = 1$ .

Далее имеем:

$$1 - y + 2y^2 = 2; \quad 2y^2 - y - 1 = 0;$$

$$y_1 = 1, y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Остаётся решить совокупность уравнений  $\cos 2x = 1; \cos 2x = -\frac{1}{2}$ .

$$1) \cos 2x = 1, 2x = 2\pi n, x = \pi n.$$

$$2) \cos 2x = -\frac{1}{2}, 2x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, 2x = \pm \left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,$$

$$2x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

в) Поработаем с подкоренным выражением:

$$2x^2 - 8x + 12 = 2(x^2 - 4x - 6) + 24.$$

«Напрашивается» новая переменная  $y = x^2 - 4x - 6$ , относительно которой заданное уравнение примет более простой вид:  $y = \sqrt{2y + 24}$ . Решим это уравнение:

$$y^2 = 2y + 24, \quad y^2 - 2y - 24 = 0,$$

$$y_1 = 6, y_2 = -4.$$

Поскольку обе части уравнения  $y = \sqrt{2y + 24}$  возводили в чётную степень (в квадрат), обязательна проверка. Значение  $y = 6$  уравнению  $y = \sqrt{2y + 24}$  удовлетворяет, а значение  $y = -4$  — нет (получается  $-4 = \sqrt{16}$ , т. е.  $-4 = 4$  — неверное равенство).



Остаётся решить уравнение  $x^2 - 4y - 6 = 6$ . Имеем:

$$x^2 - 4x - 12 = 0,$$

$$x_1 = 6, x_2 = -2.$$

г) Выше мы говорили, что новая переменная иногда очевидна (так было в пункте «а»), иногда несколько завуалирована, но «ощущается» (так было в пункте «в»), а иногда «проявляется» лишь в процессе преобразований (так было в пункте «б»). Смотрите, как обстоит дело для данного уравнения:

$$\lg 10x = \lg 10 + \lg x = 1 + \lg x;$$

$$\lg^2 x^2 = (\lg x^2)^2 = (2\lg x)^2 = 4\lg^2 x.$$

Теперь понятно, что целесообразно ввести новую переменную  $y = \lg x$ . Тогда заданное уравнение примет вид:

$$4y^2 + (y + 1) - 6 = 0;$$

$$4y^2 + y - 5 = 0;$$

$$y_1 = 1, y_2 = -\frac{5}{4}.$$

Значит, либо  $\lg x = 1$ ,  $x = 10$ , либо

$$\lg x = -\frac{5}{4}, \quad x = 10^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{10^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{10^5}} = \frac{1}{10\sqrt[4]{10}}.$$

**Ответ:** а) 1, 2; б)  $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$ ; в) 6, -2; г) 10,  $\frac{1}{10\sqrt[4]{10}}$ .

**Пример 3** Решить уравнение:

а)  $x^3 + 6x - 7 = 0$ ;

в)  $10^x - 3 \cdot 5^x - 5 \cdot 2^x + 15 = 0$ ;

б)  $\cos^2(\pi - x) + \sin 2x = 0$ ;

г)  $\sqrt{25 - x^2} \cdot \sin x = 0$ .

**Решение.** а) Представим  $6x$  в виде  $-x + 7x$  и поработаем с левой частью уравнения:

$$\begin{aligned} x^3 + 6x - 7 &= x^3 - x + 7x - 7 = (x^3 - x) + (7x - 7) = \\ &= x(x - 1)(x + 1) + 7(x - 1) = (x - 1)(x(x + 1) + 7) = (x - 1)(x^2 + x + 7). \end{aligned}$$

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде

$$(x - 1)(x^2 + x + 7) = 0,$$

откуда следует, что либо  $x - 1 = 0$ , либо  $x^2 + x + 7 = 0$ . Если  $x - 1 = 0$ , то  $x = 1$ . А квадратное уравнение  $x^2 + x + 7 = 0$  не имеет действительных корней (проверьте!).

Вывод: заданное уравнение имеет единственный корень  $x = 1$ .

б) Для  $\cos(\pi - x)$  воспользуемся формулой приведения:  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ ; тогда  $\cos^2(\pi - x) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$ . А к  $\sin 2x$  применим формулу двойного аргумента:  $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ . Теперь заданное уравнение можно переписать в виде  $\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 0$  и далее  $\cos x(\cos x + 2\sin x) = 0$ . Значит, либо  $\cos x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , либо  $\cos x + 2\sin x = 0$ . Получилось однородное тригонометрическое уравнение первой степени. Для его решения разделим обе части уравнения почленно на  $\cos x$ :

$$\frac{\cos x}{\cos x} + \frac{2\sin x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}; \quad 1 + 2\operatorname{tg} x = 0; \quad \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n; \quad x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n.$$

в)

$$\begin{aligned} 10^x - 3 \cdot 5^x - 5 \cdot 2^x + 15 &= 0; \\ 2^x \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x - 5 \cdot 2^x + 15 &= 0; \\ (2^x \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x) - (5 \cdot 2^x - 15) &= 0; \\ 5^x \cdot (2^x - 3) - 5(2^x - 3) &= 0; \\ (2^x - 3)(5^x - 5) &= 0; \\ 2^x &= 3; \quad 5^x = 5; \\ x &= \log_2 3; \quad x = 1. \end{aligned}$$

г) Данное уравнение сводится к совокупности двух уравнений:

$$\sin x = 0; \quad \sqrt{25 - x^2} = 0.$$

Из первого уравнения находим:  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Но область определения уравнения  $\sqrt{25 - x^2} \cdot \sin x = 0$  задаётся неравенством  $25 - x^2 \geq 0$ , откуда находим:  $-5 \leq x \leq 5$ . Значит, из серии  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , надо выбрать те значения  $x$ , которые удовлетворяют неравенству  $-5 \leq x \leq 5$ , т. е. принадлежат отрезку  $[-5; 5]$ .

Посмотрим, как обстоит дело с числами вида  $\pi n$  при различных значениях параметра  $n$ .

Если  $n = 0$ , то  $x = 0$ ; это число принадлежит отрезку  $[-5; 5]$ .

Если  $n = \pm 1$ , то  $x = \pm \pi$ . Оба эти числа принадлежат отрезку  $[-5; 5]$ .

Если  $n = \pm 2$ , то  $x = \pm 2\pi$ . Оба эти числа не принадлежат отрезку  $[-5; 5]$ . И так же будет обстоять дело при  $n = \pm 3$ ,  $n = \pm 4$ , ...

Итак, из всех решений уравнения  $\sin x = 0$  берём только  $0, \pm \pi$ .



Обратимся ко второму уравнению — уравнению  $\sqrt{25 - x^2} = 0$ .  
Имеем:

$$25 - x^2 = 0, \quad x^2 = 25, \\ x = \pm 5.$$

**Ответ:** а) 1; б)  $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\arctg \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; в) 1,  $\log_2 3$ ; г) 0,  $\pm \pi$ ,  $\pm 5$ .

## Упражнения

Решите уравнение.

**28.1.** а)  $\sqrt{4x^2 - 9} = \sqrt{11x - 6}$ ; в)  $\sqrt{6x^2 - 7} = \sqrt{11x - 5}$ ;  
б)  $(\sqrt{4x - 3} + 3)^9 = (\sqrt{4x + 18})^9$ ; г)  $(\sqrt{3x - 1} + 1)^7 = (\sqrt{3x + 8})^7$ .

**28.2.** а)  $\sqrt{6x^2 - 8x} = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$ ;  
б)  $\sqrt{5x^2 - 12x} = \sqrt{5x - 2x^2 + 12}$ ;  
в)  $\sqrt{8x^2 + 4x} = \sqrt{3x^2 + 11x + 6}$ ;  
г)  $\sqrt{4x^2 - 9x - 9} = \sqrt{11x - 2x^2 - 15}$ .

**28.3.** а)  $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{2}$ ;  
б)  $\sqrt{7x + 5} + \sqrt{2x - 13} = \sqrt{9x - 8}$ ;  
в)  $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3} = \sqrt{6}$ ;  
г)  $\sqrt{8x - 11} + \sqrt{2 - x} = \sqrt{7x - 9}$ .

**28.4.** а)  $3^{x^2+3} - 27^{x+1} = 0$ ; в)  $125^{5-x^2} - 5^{x^2-1} = 0$ ;  
б)  $(\sqrt{7})^{\operatorname{tg} x} = \frac{7\sqrt{7}}{7^{\operatorname{tg} x}}$ ; г)  $(\sqrt{3})^{2\cos x} = \frac{1}{3 \cdot 3^{\cos x}}$ .

**28.5.** а)  $2^x \cdot 3^{\frac{1+x}{x}} = 18$ ; в)  $3^x \cdot 5^{\frac{2}{x}} = 75$ ;  
б)  $3^{x-1} \cdot 625^{\frac{x-2}{x-1}} = 225$ ; г)  $5^{x-3} \cdot 64^{\frac{x-4}{x-3}} = 5$ .

**28.6.** а)  $\log_{\sqrt{7}}(x-3) = \log_{\sqrt{7}}(2x-5);$

б)  $\lg \frac{x+5}{2x+10} = \lg \frac{x-3}{x-1};$

в)  $\log_{\sqrt{11}}(3x-8) = \log_{\sqrt{11}}(2x-1);$

г)  $\ln \frac{x-2}{2x-4} = \ln \frac{x+2}{x+3}.$

**28.7.** а)  $\ln(x^2 - 7x + 10) = \ln(4x - 20);$

б)  $\lg(x^2 - 10x + 39) = \lg(4x - 9);$

в)  $\lg(x^2 + 9x - 10) = \lg(12x + 8);$

г)  $\ln(x^2 - 6x + 5) = \ln(4x - 19).$

**28.8.** а)  $\log_{x-5}(x-2) = \log_{x-5}(3x-10);$

б)  $\log_{3x-1} \frac{x-2}{x-1} = \log_{3x-1} \frac{2x+1}{5x-1};$

в)  $\log_{2x-3}(4x-1) = \log_{2x-3}(2x+3);$

г)  $\log_{x-3} \frac{3x-2}{x+2} = \log_{x-3} \frac{5x+1}{x+9}.$

**28.9.** а)  $\log_3(4x-1) + \log_3(4x+1) = 1;$

б)  $\log_{12}x + \log_{12}(x+1) = 1;$

в)  $\log_5(5x-2) + \log_5(5x+2) = 1;$

г)  $\lg x + \lg(x+3) = 1.$

**28.10.** а)  $5^{7x-3} \left( \sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \log_{0,5}(x+1) = 0;$

б)  $(\sin x + \cos x)(x - 8\sqrt{2x-15}) = 0.$

Решите уравнение, используя функционально-графические методы.

**28.11.** а)  $(x-2)^{\frac{5}{6}} = \log_3 x;$

в)  $\log_4 x = (x-3)^{\frac{7}{3}};$

б)  $3^x = 11 - x;$

г)  $\left( \frac{1}{4} \right)^x = x + 5.$

**28.12.** а)  $(x-2)^2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x-1};$

в)  $(x+2)^2 = -\log_{0,5}(x+3);$

б)  $1 - \sqrt{x} = \lg x;$

г)  $\frac{8}{x} + 1 = 2\sqrt[3]{x}.$



**28.13.** а)  $\sqrt{20-4x} = 4(2x-7)^3 - 2$ ;

б)  $\sqrt[3]{81x} = \sqrt{1-4x}$ ;

в)  $\sqrt{17-2x} = 3,5 + 4(3x-1)^3$ ;

г)  $\sqrt[3]{16x-3} = \sqrt{13-4x}$ .

**28.14.** а)  $5^{\sqrt{1-\lg(2,5\pi)}} = 20x - 100x^2$ ;

б)  $\log_2(12x - 4x^2 - 5) = 3 + \cos(2\pi x)$ ;

в)  $0,5x^2 + 16 = 2^{3+\cos\pi x}$ ;

г)  $5 - |2x^2 - 15x + 7| = \frac{5}{\cos^2(\pi x)}$ .

**28.15.** а)  $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 13) = \cos \frac{5\pi x}{2} + \sin \frac{3\pi x}{4}$ ;

б)  $\log_4(x^2 - 2x + 17) = \sin \frac{5\pi x}{2} + \cos 8\pi x$ .

**28.16.** а)  $\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \log_3 \sqrt{x^2 - 2x + 10} = 2$ ;

б)  $(x-7)^2 + \log_5 \sqrt{x^2 - 14x + 74} = 1$ .

Решите уравнение методом введения новой переменной.

**28.17.** а)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ;

б)  $(x-1)^4 - 5(x^2 - 2x + 1) + 4 = 0$ ;

в)  $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$ ;

г)  $(3x-2)^4 + 9x^2 - 12x = 16$ .

**28.18.** а)  $8x^6 - 7x^3 - 1 = 0$ ;

в)  $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ ;

б)  $9x^3 - \left(\frac{2}{x}\right)^3 = 1$ ;

г)  $12x^4 - 1 = \left(\frac{1}{x}\right)^4$ .

**28.19.** а)  $x - 17\sqrt{x} + 16 = 0$ ;

в)  $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$ ;

б)  $2\sqrt[3]{x} - \frac{7}{\sqrt[3]{x}} = 5$ ;

г)  $3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 1 = 0$ .

**28.20.** а)  $2\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 2 = 0$ ;

в)  $3\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 2 = 0$ ;

б)  $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 2 = 0$ ;

г)  $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[6]{x} - 3 = 0$ .

**28.21.** а)  $x - 3 - \sqrt{x - 3} = 2$ ;  
 б)  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 6\sqrt{x - 1} + 7$ ;  
 в)  $x + 4 + 6\sqrt{x + 4} + 8 = 0$ ;  
 г)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5\sqrt{x - 2} + 6$ .

**28.22.** а)  $\sqrt{\frac{2x+3}{2x-1}} + 9\sqrt{\frac{2x-1}{2x+3}} = 6$ ;      в)  $4\sqrt{\frac{3x-2}{x+4}} + 9\sqrt{\frac{x+4}{3x-2}} = 12$ ;  
 б)  $\sqrt[3]{\frac{6x-5}{x+2}} + 6\sqrt[3]{\frac{x+2}{6x-5}} = 7$ ;  
 г)  $\sqrt[3]{\frac{5x-1}{x+3}} + 5\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x-1}} = 6$ .

**28.23.** а)  $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$ ;      в)  $2^x + 2^{2-x} = 5$ ;  
 б)  $5^{2\sqrt{x}+1} + 1 = 6 \cdot 5^{\sqrt{x}}$ ;      г)  $3^{\sqrt{x}+1} - 29 + 18 \cdot 3^{-\sqrt{x}} = 0$ .

**28.24.** а)  $\log_3^2 x + 6 = 5\log_3 x$ ;      в)  $\log_5^2 x + 8 = 6\log_5 x$ ;  
 б)  $\lg^2 x^2 + \lg 10x = 6$ ;      г)  $\lg^2 x^3 + \lg 100x = 12$ .

**28.25.** а)  $4\sin^2 x + 7 = 16\sin x$ ;      в)  $2\cos^2 x - 7\cos x - 4 = 0$ ;  
 б)  $7 - 9\cos 2x = 42\cos x$ ;      г)  $9\cos 2x + 15\sin x = 17$ .

**28.26.** а)  $2\operatorname{tg}^2 x - 5 = 4\cos^2 x$ ;      в)  $4\sin^2 x = 4 - 9\operatorname{tg}^2 x$ ;  
 б)  $3\operatorname{ctg}^2 x + 2\cos^2 x = 4$ ;      г)  $5\operatorname{ctg}^2 x - 4\sin^2 x = 3$ .

**28.27.** а)  $\sin x \cos x - 6\sin x + 6\cos x + 6 = 0$ ;  
 б)  $5\sin 2x - 11\sin x = 11\cos x - 7$ .

Решите уравнение методом разложения на множители.

**28.28.** а)  $x^3 - 10x^2 + 24x = 0$ ;      в)  $x^3 - 11x^2 + 24x = 0$ ;  
 б)  $x^3 - x^2 + 8x - 8 = 0$ ;      г)  $x^3 + x^2 - 11x - 11 = 0$ .

**28.29.** а)  $2\sqrt{x^5} - 11\sqrt{x^3} + 5\sqrt{x} = 0$ ;  
 б)  $-1 + 5x^{0,75} + 5x^{0,5} - x^{0,25} = 0$ ;  
 в)  $3\sqrt[3]{x^7} - 23\sqrt[3]{x^4} + 14\sqrt[3]{x} = 0$ ;  
 г)  $2x^3 + 3x^{2,25} - 2x^{1,5} - 3x^{0,75} = 0$ .

**28.30.** а)  $3^x \cdot x^2 - 9x^2 - 9 + 3^x = 0$ ;      в)  $5x^3 - 5 + 5^{2x} = 25^x \cdot x^3$ ;  
 б)  $4x \cos 2x - \cos 2x = 4x - 1$ ;      г)  $9x^2 \sin \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} + 9x^2 = 1$ .

**28.31.** а)  $\sin 2x = \cos x$ ;      в)  $2\sin 2x = \sin 4x$ ;  
 б)  $\sin 6x = \cos^2(2\pi - 3x)$ ;      г)  $2\sin^2\left(\frac{x}{2} + 3\pi\right) - \sqrt{3}\sin x = 0$ .



Решите уравнение:

28.32. а)  $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 4x$ ;

б)  $\cos 3x + \cos 9x - \cos 6x = 0$ ;

в)  $\cos^2 3x - \sin^2 3x = \cos 8x$ ;

г)  $\sin 7x + \sin 3x + \cos 2x = 0$ .

28.33. а)  $\cos 8x - \cos 2x + \cos 10x - \cos 4x = 0$ ;

б)  $\sin 6x - \sin 2x + \cos 10x - \cos 6x = 0$ ;

в)  $\sin 6x + \sin 2x + \sin 12x - \sin 4x = 0$ ;

г)  $\sin 20x + \sin 12x + \cos 12x + \cos 4x = 0$ .

## § 29. Решение систем уравнений

В курсе алгебры 7—9-го классов вы изучали системы двух рациональных уравнений с двумя переменными, применяли для их решения следующие методы: метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных, графический метод. В этом параграфе мы рассмотрим системы уравнений других видов, не обязательно рациональных.

**Определение 1.** Если поставлена задача — найти такие пары значений  $(x; y)$ , которые одновременно удовлетворяют уравнению  $p(x; y) = 0$  и уравнению  $q(x; y) = 0$ , то говорят, что данные уравнения образуют систему уравнений  $\begin{cases} p(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0. \end{cases}$  Пару значений  $(x; y)$ ,

которая одновременно является решением и первого, и второго уравнений системы, называют **решением системы уравнений**. Решить систему уравнений — значит найти все её решения или установить, что решений нет.

Можно говорить и о системе из большего числа уравнений, такого, например, система уравнений  $\begin{cases} p(x; y; z) = 0, \\ q(x; y; z) = 0, \\ h(x; y; z) = 0. \end{cases}$  Решения такой си-

стемы — это тройки чисел  $(x; y; z)$ , удовлетворяющие одновременно всем уравнениям системы.

**Определение 2.** Две системы уравнений называют **равносильными**, если они имеют одинаковые множества решений (в частности, если обе системы не имеют решений).

Если в процессе решения системы мы применяли неравносильные преобразования того или иного уравнения (возведение в чётную степень обеих частей уравнения или преобразования, которые привели к расширению области определения уравнения), то все найденные решения следует проверить подстановкой в исходную систему. Что касается метода подстановки, метода алгебраического сложения и метода введения новых переменных, то они корректны с точки зрения равносильности. Используя эти методы, мы заменяем одну систему уравнений другой, более простой, но равносильной первоначальной системе.

**Пример 1** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+3y}{y+5}} + 2 = 3 \cdot \sqrt{\frac{y+5}{x+3y}}, \\ xy + 2x = 13 - 4y. \end{cases}$$

**Решение.** В первом уравнении системы введём новую переменную  $z = \sqrt{\frac{x+3y}{y+5}}$ . Тогда уравнение примет вид  $z + 2 = \frac{3}{z}$ . Имеем:  $z^2 + 2z - 3 = 0$ ;  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -3$ . Значит, либо  $\sqrt{\frac{x+3y}{y+5}} = 1$ , либо  $\sqrt{\frac{x+3y}{y+5}} = -3$ . Второе уравнение решений не имеет (значение квадратного корня не может быть отрицательным числом), а из первого уравнения получаем:

$$\frac{x+3y}{y+5} = 1;$$

$$x + 3y = y + 5; \quad x + 2y = 5.$$

Как видите, первое уравнение исходной системы нам удалось привести к существенно более простому виду; соответственно, теперь речь пойдёт о решении системы  $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ xy + 2x = 13 - 4y. \end{cases}$  Решим её мето-



дом подстановки. Из первого уравнения находим:  $x = 5 - 2y$ ; подставим полученное выражение вместо  $x$  во второе уравнение:

$$\begin{aligned}y(5 - 2y) + 2(5 - 2y) &= 13 - 4y; \\5y - 2y^2 + 10 - 4y &= 13 - 4y; \\2y^2 - 5y + 3 &= 0; \\y_1 &= 1; y_2 = 1,5.\end{aligned}$$

Поскольку  $x = 5 - 2y$ , получаем соответственно  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 2$ .

Итак, заданная система уравнений имеет два решения:  $(3; 1)$  и  $(2; 1,5)$ .

**Пример 2** Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 0,5, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1,75. \end{cases}$$

**Решение.** Поскольку  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ,  $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$ , то второе уравнение системы можно переписать так:

$$(1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 y) = 1,75$$

и, далее,  $\cos^2 x + \cos^2 y = 0,25$ . И вот как теперь выглядит заданная система уравнений:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 0,5, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 0,25. \end{cases}$$

В примере 1 мы ввели одну новую переменную и использовали её только в одном уравнении системы. Здесь же введём две новые переменные и использовать их будем в обоих уравнениях:  $z = \cos x$ ,  $t = \cos y$ . Относительно новых переменных получаем довольно простую систему уравнений:

$$\begin{cases} z + t = 0,5, \\ z^2 + t^2 = 0,25. \end{cases} \quad \text{Используя, как и в приме-}$$

ре 1, метод подстановки, получим две пары решений:

$$\begin{cases} z = 0, \\ t = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{1}{2}, \\ t = 0. \end{cases}$$

Вернёмся к переменным  $x$ ,  $y$ . Теперь речь идёт о решении совокупности двух систем тригонометрических уравнений:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos y = 0. \end{cases}$$

Решения первой системы таковы:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k. \end{cases}$$

Решения второй системы таковы:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi k. \end{cases}$$

Ответ:  $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k\right); n, k \in \mathbb{Z}.$

**Пример 3** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x^2} \cdot 4^{0,5y} = \log_5 625, \\ \log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_8 y^3 = 1. \end{cases}$$

**Решение.** Поработаем с каждым уравнением системы по отдельности, постараемся преобразовать и первое, и второе уравнения к более простому виду.

Первое уравнение: здесь

$$4^{0,5y} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^y = (\sqrt{4})^y = 2^y, \\ \log_5 625 = \log_5 5^4 = 4.$$

Теперь первое уравнение можно переписать так:  $2^{x^2} \cdot 2^y = 4;$   
 $2^{x^2+y} = 2^2; x^2 + y = 2.$

Второе уравнение: здесь  $\log_8 y^3 = \frac{\log_2 y^3}{\log_2 8} = \frac{3\log_2 y}{3} = \log_2 y$  (мы воспользовались формулой перехода к новому основанию логарифма:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}).$$

Теперь второе уравнение можно переписать так:

$$\log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_2 y = 1.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 + 3x - 2) &= \log_2 2 + \log_2 y; \\ x^2 + 3x - 2 &= 2y; \\ x^2 + 3x - 2y &= 2. \end{aligned}$$



После этих преобразований мы приходим к существенно более простой системе уравнений: 
$$\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ x^2 + 3x - 2y = 2. \end{cases}$$
 Здесь пригодится метод

алгебраического сложения: составим разность уравнений системы:

$$(x^2 + y) - (x^2 + 3x - 2y) = 2 - 2; \quad 3y - 3x = 0; \quad y = x.$$

И подставим  $x$  вместо  $y$  в уравнение  $x^2 + y = 2$ ; получим:  $x^2 + x = 2$ ;  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$ . Соответственно,  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = -2$ .

Итак, нашли две пары возможных решений:  $(1; 1)$ ,  $(-2; -2)$ . Почему «возможных»?

Потому, что в процессе преобразований мы «освободились» от знаков логарифмов, что могло привести к расширению области определения уравнения и, следовательно, к появлению посторонних решений. Вывод: обязательна проверка, причём сделать её можно по второму уравнению исходной системы (в первом уравнении все преобразования были равносильными).

**Проверка.** Пара  $(1; 1)$  удовлетворяет логарифмическому уравнению  $\log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_8 y^3 = 1$ ; смотрите:  $\log_2(1 + 3 - 2) - \log_8 1 = 1$  — верное равенство (подробнее:  $\log_2 2 - \log_8 1 = 1$ ,  $1 - 0 = 1$  — верное равенство). А вот пару  $(-2; -2)$  брать нельзя, поскольку при  $y = -2$  получаем:  $\log_8 y^3 = \log_8 (-2)^3 = \log_8 (-8)$ , а логарифм отрицательного числа не существует.

**Ответ:**  $(1; 1)$ .

**Пример 4** Построить в прямоугольной системе координат  $xOy$  параболу  $y = ax^2 + bx + c$ , если известно, что она проходит через точки  $(1; 2)$ ,  $(-1; 10)$ ,  $(2; 1)$ .

**Решение.** Парабола  $y = ax^2 + bx + c$  проходит через точку  $(1; 2)$ , это значит, что должно выполняться равенство  $2 = a + b + c$  (в уравнение  $y = ax^2 + bx + c$  подставили  $x = 1$ ,  $y = 2$ ).

Парабола проходит через точку  $(-1; 10)$ , это значит, что должно выполняться равенство  $10 = a - b + c$ .

Наконец, парабола проходит через точку  $(2; 1)$ , это значит, что должно выполняться равенство  $1 = 4a + 2b + c$ .

В итоге получаем систему трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} a + b + c = 2, \\ a - b + c = 10, \\ 4a + 2b + c = 1. \end{cases}$$

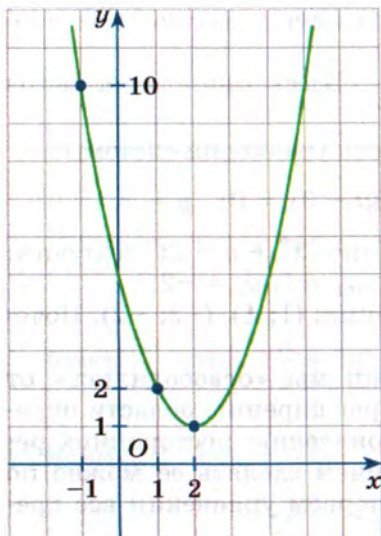


Рис. 153

Эту систему можно решить методом подстановки, например так: выразить из первого уравнения  $c$  через  $a$  и  $b$ , подставить результат вместо  $c$  во второе и третье уравнения, решить полученную систему двух уравнений с двумя переменными  $a, b$ , а затем найти третью переменную  $c$ . Более изящный способ решения системы связан с методом алгебраического сложения. Смотрите: если из первого уравнения вычесть второе, то получим:

$$\begin{aligned}(a + b + c) - (a - b + c) &= 2 - 10, \\ 2b &= -8, \\ b &= -4.\end{aligned}$$

Подставим найденное значение  $b = -4$  в первое и третье уравнения системы:

$$\begin{cases} a - 4 + c = 2, \\ 4a - 8 + c = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a + c = 6, \\ 4a + c = 9; \end{cases} \quad a = 1, \quad c = 5.$$

Итак,  $a = 1$ ,  $b = -4$ ,  $c = 5$ , уравнение параболы составлено:  $y = x^2 - 4x + 5$ . Построим график функции  $y = x^2 - 4x + 5$ , т. е. график функции  $y = (x - 2)^2 + 1$ ; график изображён на рисунке 153. Парабола, как видите, проходит через точки  $(1; 2)$ ,  $(-1; 10)$ ,  $(2; 1)$ , причём  $(2; 1)$  — вершина параболы.

## Упражнения

**29.1.** Решите систему уравнений методом алгебраического сложения:

а) 
$$\begin{cases} 6\sqrt[4]{x} - 4\sqrt[3]{y} = 6, \\ 3\sqrt[3]{y} - 4\sqrt[4]{x} = -3; \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} 5\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 9, \\ 3\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = -5; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} \log_5 x + \lg y = 5, \\ 3\log_5 x - 5\lg y = 17; \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x - 3\log_{\frac{1}{3}} y = 1, \\ 2\log_{\frac{1}{3}} x + 5\log_{\frac{1}{3}} y = -9. \end{cases}$$



**29.2.** Решите систему уравнений методом подстановки:

а) 
$$\begin{cases} 4x = y + 3, \\ 7y - 3x + 4 = 7y - 5x + 3 + 6; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} x = 3y, \\ \log_{\frac{1}{7}}(y + x) + \log_{\frac{1}{7}}(x - 2y - 1) = \log_{\frac{1}{7}} \frac{8}{y - 1}; \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} 3y = x - 2, \\ 5^{2x-5y-3} = 6 - 5^{2y-x+2}; \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} y = 2x, \\ \log_{\frac{1}{6}}(4x - y) + \log_{\frac{1}{6}}(5x - 2y - 2) = 5 \log_{\frac{1}{6}} \frac{2}{\sqrt[5]{x-2}}. \end{cases}$$

**29.3.** Решите систему уравнений методом введения новой переменной:

а) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ \log_6^2 xy + 1 = 2 \log_6 xy; \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} 6x - 2y = -5, \\ \log_{0,5}^2 \frac{y}{x} + 9 = 6 \log_{0,5} \frac{x}{y}; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 10 - 3\sqrt[4]{xy}, \\ 2x - 5y = 6; \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} 8x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 15\sqrt[3]{xy} + 2, \\ 3x - 4y = 4. \end{cases}$$

Решите систему уравнений.

**29.4.**

а) 
$$\begin{cases} 0,5^x \cdot 0,5^{2y} = 8, \\ 2^{2x-3} \cdot 8^{-y} = 32; \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} 0,3^{3x+2y} \cdot 0,3^{y-2x} = 1, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x-y} \cdot 3^{y+1} = 9; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} (\sqrt{3})^{x+y} \cdot (\sqrt{3})^y = \sqrt{3} \cdot \sqrt{27}, \\ 0,1^{x+1} \cdot 10^{3y} = 100; \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} 0,6^{3x+2y} \cdot 0,6^{2x-y} = 0,6, \\ 10^{x-2y} \cdot 10^{3y-1} = 10. \end{cases}$$

**29.5.**

а) 
$$\begin{cases} 3^{3x+y} - 5^{x-2y} = 2, \\ 3^{3x+y} + 5^{x-2y} = 52; \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} 2^{x+y} - 3^{x-y} = 7, \\ 2^{x+y} + 3^{x-y} = 25; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} 5^{2x-y} = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot 625^{\frac{3}{4}}}{25}, \\ x + 3y = 3; \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} 2^{x-y} = \frac{0,25^{-1} \cdot 8^{\frac{2}{3}}}{2}, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

**29.6.** a)  $\begin{cases} \log_3(x^2 + 6x - 4) - \log_3 y = 1, \\ 3x - y = 2; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(5x - y) = \log_{\frac{1}{3}}(3x + 4), \\ \log_9(x^2 + x - 2y) = \log_9(x^2 + y); \end{cases}$

в)  $\begin{cases} \log_4(x^2 + 2x + 4) - \log_4 y = 1, \\ 2x + y = 7; \end{cases}$

г)  $\begin{cases} \log_6(7x - y) = \log_6(4x + 3), \\ \log_{\frac{1}{7}}(x^2 + 2x - y) = \log_{\frac{1}{7}}(x^2 + 3y). \end{cases}$

**29.7.** a)  $\begin{cases} 2^{2x-3y} \cdot 2^{4y-x} = 16, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \cdot 3^{y-1} = \frac{1}{81}, \\ \log_2 2x - \log_2 y = 2; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} 3^{3x-1} \cdot 3^{y-2x} = 27, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1; \end{cases}$

г)  $\begin{cases} 4^x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2-2y} = \log_{\sqrt[4]{5}} 5, \\ \log_4 y - \log_4 x = 1. \end{cases}$

**29.8.** a)  $\begin{cases} \log_{16}(x - y) = \frac{1}{2}, \\ \log_{125} x - \log_{125} y = \frac{1}{3}; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} \log_{\frac{1}{64}}(x - y) = -\frac{1}{3}, \\ \log_9 x - \log_9 y = \frac{1}{2}; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} \log_{27}(3x - y) = \frac{1}{3}, \\ \log_4 y - \log_4 x = 0,5; \end{cases}$

г)  $\begin{cases} \log_{625}(x + y) = 0,25, \\ \log_8 y - \log_8 x = \frac{2}{3}. \end{cases}$

**29.9.** a)  $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{3y}} + \sqrt{\frac{5x}{x+y}} = 3, \\ 17\sqrt{\frac{x-y}{3y}} - 8\sqrt{\frac{5x}{x+y}} = 1; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} \sqrt{\frac{y-x}{2x}} - \sqrt{\frac{x}{x+y}} = \frac{1}{2}, \\ 16\sqrt{\frac{x}{x+y}} - 7\sqrt{\frac{y-x}{2x}} = 1. \end{cases}$

**29.10.** a)  $\begin{cases} \sqrt{x+1} - y = 2, \\ \log_7(4-x) = y; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} \sqrt{x+4} = 2+y, \\ \log_5(6-x) = y-1. \end{cases}$



$$29.11. \text{ a) } \begin{cases} \sqrt{x-y} + \sqrt{x+3y} = 4, \\ 2x - y = 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt{x-3} = \sqrt{4-y} - \sqrt{3x+y+1}, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sqrt{2x+y} + \sqrt{6x-3y} = 2, \\ 6x + 2y = 10; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \sqrt{4x-7} = \sqrt{-1-x-y} - \sqrt{2x+y}, \\ 3x + y = 2. \end{cases}$$

$$29.12. \text{ a) } \begin{cases} 3^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+1} \cdot 3^{y-2} = 729, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4^x \cdot 0,5^x \cdot 0,25^{-y} = 512, \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ xy = 216; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1, \\ \sqrt{xy} = 4. \end{cases}$$

$$29.13. \text{ a) } \begin{cases} 2\sqrt[5]{x+y} = \log_5 25y^2, \\ 3\log_5 y^2 - \sqrt[5]{x+y} = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3\sqrt[3]{x+y} = \log_2 16x^2, \\ \log_2 x^2 + 2\sqrt[3]{x+y} = 6; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5^{x-y} - 3|2y+x| = -1, \\ 2|2y+x| - 5^{x-y-1} = 3; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3^{x-y} - 7|2y-x| = 2, \\ |2y-x| - 3^{x-y-1} = -2. \end{cases}$$

$$29.14. \text{ a) } \begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \cos x + \sin y = 0,5, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 1,25; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \cos x + \cos 2y = -1, \\ 5\cos 2y - \cos x = -2; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 2\sin 2x + 3\operatorname{tg} 3y = -2, \\ 6\sin 2x - 2\operatorname{tg} 3y = 5. \end{cases}$$

$$29.15. \text{ a) } \begin{cases} \sqrt{\operatorname{ctg} x} \cdot \sin 2y = 0, \\ \sin 2x + \cos y = 0,5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt{\cos x} \cdot \operatorname{tg} 2y = 0, \\ \sin^2 y - \cos 2x = 1,5. \end{cases}$$

**29.16.** Решите систему трёх уравнений с тремя переменными:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ x - 4y + 2z = 9, \\ 3x + 2y - z = -1; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x - 2y + 3z = -9, \\ 3x + y - 2z = 9, \\ 2x - 3y - 4z = 4; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x + y = 4, \\ x - z = 5, \\ xy + xz + yz = -5; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - 2y - z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 13. \end{cases} \end{array}$$

**29.17.** Составьте уравнение параболы  $y = ax^2 + bx + c$ , проходящей через точки  $N$ ,  $M$ ,  $K$ :

а)  $N(-4; -4)$ ,  $M(-2; 8)$ ,  $K(2; 8)$ ;

б)  $N(-1; 10)$ ,  $M(-1; 6)$ ,  $K(6; 3)$ .

**29.18.** Постройте в прямоугольной системе координат  $xOy$  параболу  $y = ax^2 + bx + c$ , если известно, что она проходит через точки  $N$ ,  $M$ ,  $K$ :

а)  $N(-1; 1)$ ,  $M(2; 10)$ ,  $K(4; 6)$ ;

б)  $N(-4; -3)$ ,  $M(-1; -6)$ ,  $K(1; 2)$ .

**29.19.** а) Сумма цифр задуманного трёхзначного числа равна 10, а сумма квадратов его цифр равна 38. Если к задуманному числу прибавить 297, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите задуманное число.

б) Шифр замка выражается трёхзначным числом. Сумма его цифр равна 12, а сумма квадратов его цифр равна 56. Если к задуманному числу прибавить 168, то в результате цифра сотен увеличится в 2 раза, а цифры десятков и единиц — уменьшатся каждая в 2 раза. Найдите шифр замка.

**29.20.** а) Турист проплыл на лодке по реке из города  $N$  в город  $M$  и обратно за 5 ч. Найдите скорость течения реки, если известно, что турист проплывал 6 км против течения за то же время, что и 9 км по течению, а расстояние между городами равно 24 км.

б) Катер отходит от пункта  $A$ , стоящего на притоке реки, идёт по течению 80 км до пункта  $B$ , где приток впадает в реку, а затем идёт вверх по реке (против течения) до пункта  $C$ , затратив на весь путь 18 ч. Затем он возвращается из пункта  $C$  в пункт  $A$ , затратив на обратный путь 15 ч. Известно, что собственная скорость катера 18 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч. Чему равно расстояние между пунктами  $B$  и  $C$ ?



**29.21.** а) Группа туристов отправилась в поход. На лодках по реке они проплыли 75 км, после чего ещё прошли пешком 10 км. При этом на путь пешком было затрачено на 3 ч меньше, чем на путь по реке. Если бы туристы шли пешком столько времени, сколько на самом деле плыли по реке, а плыли по реке столько времени, сколько шли пешком, то соответствующий путь по реке оказался бы на 5 км больше, чем соответствующий путь пешком. Сколько времени группа туристов шла пешком и сколько времени плыла по реке?

б) Велосипедист каждую минуту проезжает на 1 км меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь длиной 15 км он затрачивает времени на 48 мин больше, чем мотоциклист. Найдите скорости велосипедиста и мотоциклиста.

**29.22.** а) Два токаря вместе могут выполнить некоторую работу за 36 ч. Если бы сначала половину работы сделал первый, а вторую половину — второй, то выполнение задания растянулось бы на 75 ч. За сколько часов мог бы выполнить эту работу каждый токарь, работая самостоятельно?

б) Через два крана некоторую ёмкость объёмом  $98 \text{ м}^3$  наполняют водой. При этом первые 5 ч работает только первый кран, после чего его выключают и 4 ч работает второй кран. Какова пропускная способность второго крана, если  $1 \text{ м}^3$  он заполняет на 1 мин быстрее, чем первый?

**29.23.** а) Имеется два слитка. В первом слитке содержание алюминия составляет 30 %. Если от первого слитка взять кусок 5 кг и сплавить со вторым, то получится слиток, содержащий 56 % алюминия. Если же от первого слитка взять кусок 3 кг и сплавить со вторым слитком, то получится слиток, содержащий 60 % алюминия. Чему равна масса второго слитка и процентное содержание в нём алюминия?

б) Имеется сплав серебра с медью. Сплавив его с 3 кг чистого серебра, можно получить сплав, содержащий 90 % серебра, а сплавив с 2 кг сплава, содержащего 90 % серебра, можно получить сплав с 84%-ной массовой долей серебра. Найдите процентное содержание серебра в имеющемся сплаве.

**29.24.** а) В январе 2017 г. Андрей открыл вклад в евро в банке «Зевс». Через год проценты по вкладу составили 20 евро и Андрей добавил на вклад ещё 480 евро. В результате через год при закрытии счёта на нём оказалось 1530 евро. Какую сумму Андрей положил на счёт первоначально?

б) В январе 2017 г. Борис открыл рублёвый вклад в банке «Сатурн». Через год проценты по вкладу составили 6000 р. Борис добавил на вклад ещё 15 000 р. В результате через год при закрытии счёта на нём оказалось 89 100 р. Какую сумму Борис положил на счёт первоначально?

## § 30. Решение неравенств с одной переменной

Начнём с тех определений и теорем, на которых основано решение неравенств с одной переменной (всё это в той или иной мере вам известно).

**Определение 1.** Два неравенства с одной переменной называют **равносильными**, если они имеют одинаковые решения (т. е. если равны множества их частных решений).

Решение неравенств, встречающихся в школьном курсе математики, основано на шести теоремах о равносильности неравенств. Приведём формулировки этих теорем.

**Теорема 1.** Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

**Теорема 2.** Если обе части неравенства  $f(x) > g(x)$  возвести в одну и ту же нечётную степень  $n$ , оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство  $(f(x))^n > (g(x))^n$ , равносильное данному.

**Теорема 3.** Показательное неравенство  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$  равносильно:

- а) неравенству того же смысла  $f(x) > g(x)$ , если  $a > 1$ ;
- б) неравенству противоположного смысла  $f(x) < g(x)$ , если  $0 < a < 1$ .



**Теорема 4.** а) Если обе части неравенства  $f(x) > g(x)$  умножить на одно и то же выражение  $h(x)$ , положительное при всех  $x$  из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства  $f(x) > g(x)$ , оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство  $f(x)h(x) > g(x)h(x)$ , равносильное данному.

б) Если обе части неравенства  $f(x) > g(x)$  умножить на одно и то же выражение  $h(x)$ , отрицательное при всех  $x$  из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства  $f(x) > g(x)$ , изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство  $f(x)h(x) < g(x)h(x)$ , равносильное данному.

**Теорема 5.** Если обе части неравенства  $f(x) > g(x)$  неотрицательны в области его определения (в ОДЗ), то после возведения обеих частей неравенства в одну и ту же чётную степень  $n$  получится неравенство того же смысла  $(f(x))^n > (g(x))^n$ , равносильное данному.

**Теорема 6.** Если  $f(x) > 0$  и  $g(x) > 0$ , то логарифмическое неравенство  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$  равносильно:

- а) неравенству того же смысла  $f(x) > g(x)$ , если  $a > 1$ ;
- б) неравенству противоположного смысла  $f(x) < g(x)$ , если  $0 < a < 1$ .

Теоремы 1 и 4 вы использовали в 9-м классе при решении рациональных неравенств, теорему 3 — в 10-м классе при решении показательных неравенств, теорему 6 — в 10-м классе при решении логарифмических неравенств. В этом параграфе мы рассмотрим новые примеры решения неравенств, и вы увидите, как «работают» теоремы 1—6.

**Определение 2.** Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств**, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является частным решением *всех* заданных неравенств. Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют **частным решением системы неравенств**. Множество *всех* частных решений системы неравенств представляет собой **общее решение системы неравенств** (чаще говорят просто: **решение системы неравенств**).

Решить систему неравенств — значит найти все её частные решения. Решение системы неравенств представляет собой *пересечение* решений неравенств, образующих систему.

**Определение 3.** Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств**, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением *хотя бы одного* из заданных неравенств. Каждое такое значение переменной называют **частным решением совокупности неравенств**. Множество *всех* частных решений совокупности неравенств представляет собой **решение совокупности неравенств**.

Решение совокупности неравенств представляет собой *объединение* решений неравенств, образующих совокупность.

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобой, а неравенства, образующие совокупность, — квадратной скобой. Впрочем, для неравенств, образующих совокупность, вполне допустима запись в строчку через точку с запятой. Например, решение

неравенства  $\sin^2 x > \frac{1}{4}$  сводится к решению совокупности неравенств:  
 $\sin x > \frac{1}{2}; \sin x < -\frac{1}{2}.$

**Пример 1** Решить неравенство:

а)  $|7x - 11| > 3x + 5;$

в)  $|5x + 3| < |2x - 1|;$

б)  $|5 - 4x - x^2| \leq 7 - 6x - x^2;$

г)  $|x^2 + 5x - 1| \geq |x^2 + 3x + 1|.$

**Решение.** а) Рассмотрим выражение  $|7x - 11|$ . Если  $7x - 11 \geq 0$ , то  $|7x - 11| = 7x - 11$ , и тогда заданное неравенство примет вид

$$7x - 11 > 3x + 5, \text{ т. е. получим систему неравенств } \begin{cases} 7x - 11 \geq 0, \\ 7x - 11 > 3x + 5. \end{cases}$$

Если же  $7x - 11 < 0$ , то  $|7x - 11| = -(7x - 11)$ , и тогда заданное неравенство примет вид  $-(7x - 11) > 3x + 5$ , т. е. получим систему неравенств

$$\begin{cases} 7x - 11 < 0, \\ -(7x - 11) > 3x + 5. \end{cases}$$

Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:



$$\begin{cases} 7x - 11 \geq 0, \\ 7x - 11 > 3x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - 11 < 0, \\ -(7x - 11) > 3x + 5. \end{cases}$$

Значит, план наших действий будет таким: решим первую систему, решим вторую систему, найдём *объединение* полученных решений.

Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases} 7x - 11 \geq 0, \\ 7x - 11 > 3x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{11}{7}, \\ x > 4; \end{cases} \quad x > 4.$$

Решим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases} 7x - 11 < 0, \\ -(7x - 11) > 3x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{11}{7}, \\ -10x > -6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{11}{7}, \\ x < 0,6; \end{cases} \quad x < 0,6.$$

Осталось объединить найденные решения; получим:

$$(-\infty; 0,6) \cup (4; +\infty) \text{ или, короче: } x < 0,6; x > 4.$$

б) Рассуждая, как в пункте «а», получим *совокупность двух систем неравенств*:

$$\begin{cases} 5 - 4x - x^2 \geq 0, \\ 5 - 4x - x^2 \leq 7 - 6x - x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 - 4x - x^2 < 0, \\ -(5 - 4x - x^2) \leq 7 - 6x - x^2. \end{cases}$$

Далее, как и в пункте «а», решим первую систему, решим вторую систему, объединим найденные решения.

Решим первую систему:

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 \leq 0, \\ 2x \leq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} (x + 5)(x - 1) \leq 0, \\ x \leq 1. \end{cases}$$



Рис. 154



Рис. 155

На рисунке 154 верхняя штриховка показывает решение первого неравенства системы (мы воспользовались методом интервалов), а нижняя — решение второго неравенства. Пересечение решений — отрезок  $[-5; 1]$ .

Решим вторую систему, т. е. систему неравенств

$$\begin{cases} 5 - 4x - x^2 < 0, \\ -(5 - 4x - x^2) \leq 7 - 6x - x^2: \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leq 7 - 6x - x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + 5)(x - 1) > 0, \\ x^2 + 5x - 6 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + 5)(x - 1) > 0, \\ (x + 6)(x - 1) \leq 0. \end{cases}$$

Для решения обоих неравенств последней системы воспользуемся методом интервалов. На рисунке 155 верхняя штриховка показывает решение первого неравенства системы, а нижняя — решение второго неравенства. Пересечение решений — полуинтервал  $[-6; -5)$ .

Объединив полуинтервал  $[-6; -5)$  и отрезок  $[-5; 1]$ , получим отрезок  $[-6; 1]$  — решение неравенства «б».

в) Здесь обе части неравенства неотрицательны, значит, согласно теореме 5, возведение обеих частей неравенства в квадрат есть равносильное преобразование неравенства. А что даёт возведение в квадрат? Оно даёт возможность «избавиться» от знаков модуля, поскольку  $(|a|)^2 = a^2$ . Вот как выглядит решение данного неравенства:

$$\begin{aligned} |5x + 3| &< |2x - 1|; \\ (5x + 3)^2 &< (2x - 1)^2; \\ (5x + 3)^2 &< (2x - 1)^2; \\ 25x^2 + 30x + 9 &< 4x^2 - 4x + 1; \\ 21x^2 + 34x + 8 &< 0. \end{aligned}$$



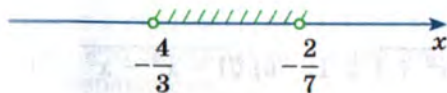


Рис. 156

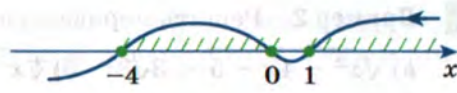


Рис. 157

Найдём корни квадратного трёхчлена  $21x^2 + 34x + 8$ :

$$x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 21 \cdot 8}}{21} = \frac{-17 \pm \sqrt{121}}{21} = \frac{-17 \pm 11}{21};$$

$$x_1 = \frac{-17 + 11}{21} = -\frac{2}{7};$$

$$x_2 = \frac{-17 - 11}{21} = -\frac{4}{3}.$$

Значит,  $21x^2 + 34x + 8 = 21\left(x + \frac{2}{7}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right)$ . Остаётся решить нера-

венство  $21\left(x + \frac{2}{7}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) < 0$ , т. е.  $\left(x + \frac{2}{7}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) < 0$ . Получаем

(рис. 156):  $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{7}$ .

г) Применим тот же приём, что использовали в пункте «в»:

$$\begin{aligned} (x^2 + 5x - 1)^2 &\geq (x^2 + 3x + 1)^2; \\ (x^2 + 5x - 1)^2 &\geq (x^2 + 3x + 1)^2. \end{aligned}$$

Но далее не будем, как в предыдущем примере, выполнять возведение в квадрат, а перенесём выражение из правой части неравенства в левую и применим формулу «разность квадратов»:

$$\begin{aligned} (x^2 + 5x - 1)^2 - (x^2 + 3x + 1)^2 &\geq 0; \\ ((x^2 + 5x - 1) - (x^2 + 3x + 1))(x^2 + 5x - 1) + (x^2 + 3x + 1)) &\geq 0; \\ (2x - 2)(2x^2 + 8x) &\geq 0; \\ 4x(x - 1)(x + 4) &\geq 0; \\ x(x - 1)(x + 4) &\geq 0. \end{aligned}$$

Применив к решению неравенства  $x(x - 1)(x + 4) \geq 0$  метод интервалов, получим (рис. 157):  $-4 \leq x \leq 0$ ;  $x \geq 1$ .

**Ответ:** а)  $x < 0,6$ ;  $x > 4$ ; б)  $-6 \leq x \leq 1$ ; в)  $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{7}$ ;

г)  $-4 \leq x \leq 0$ ;  $x \geq 1$ .

**Пример 2** Решить неравенство:

а)  $\sqrt{x^2 - 4x - 5} < 3\sqrt{3}$ ; б)  $\sqrt[4]{x^3 - 2x^2 + 1} \geq 1$ ; в)  $\sqrt[3]{1 - x^2 - x^3} \leq 1$ .

**Решение.** а) Поскольку выражение  $x^2 - 4x - 5$  содержится под знаком квадратного корня, должно выполняться неравенство  $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ . При этом условии обе части заданного неравенства неотрицательны, и их возведение в квадрат будет, согласно теореме 5, равносильным преобразованием. Таким образом, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \geq 0, \\ (\sqrt{x^2 - 4x - 5})^2 < (3\sqrt{3})^2. \end{cases}$$

Решим первое неравенство этой системы.

Найдём корни уравнения  $x^2 - 4x - 5 = 0$ :  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = -1$ ; значит,  $x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$ . Используя для решения неравенства  $(x - 5)(x + 1) \geq 0$  метод интервалов, получим (верхняя штриховка на рисунке 158):  $x \leq -1$ ;  $x \geq 5$ .

Решим неравенство  $(\sqrt{x^2 - 4x - 5})^2 < (3\sqrt{3})^2$ :

$$x^2 - 4x - 5 < 27;$$

$$x^2 - 4x - 32 < 0;$$

$$(x - 8)(x + 4) < 0;$$

$$-4 < x < 8$$

(нижняя штриховка на рисунке 158). Рисунок 158 помогает нам найти решение системы неравенств:

$$-4 < x \leq -1; \quad 5 \leq x < 8.$$



Рис. 158

б) Рассуждая, как в пункте «а», приходим к системе неравенств, равносильной заданному неравенству:  $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + 1 \geq 0, \\ (\sqrt[4]{x^3 - 2x^2 + 1})^4 > 1^4, \end{cases}$  т. е.

$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 + 1 \geq 0, \\ x^3 - 2x^2 + 1 > 1. \end{cases}$$

Обратите внимание: если выполняется второе нера-



венство системы, то автоматически выполняется и первое неравенство. Это значит, что первое неравенство можно опустить. Решим второе неравенство:

$$\begin{aligned}x^3 - 2x^2 &\geq 0; \\x^2(x - 2) &\geq 0.\end{aligned}$$

Отметим на числовой прямой точки  $x = 0$ ,  $x = 2$ , они разбивают числовую прямую на три промежутка. Знаки выражения  $x^2(x - 2)$  внутри каждого из промежутков показаны на рисунке 159. Выражение  $x^2(x - 2)$  неотрицательно на луче  $[2; +\infty)$  и в точке  $x = 0$ . Значит, решение заданного неравенства выглядит следующим образом:  $x = 0$ ,  $x \geq 2$ .

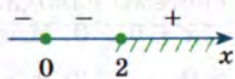


Рис. 159

в) Согласно теореме 2 возведение обеих частей заданного неравенства в третью степень есть равносильное преобразование неравенства. Имеем:

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{1 - x^2 - x^3})^3 &\leq 1^3; \\1 - x^2 - x^3 &\leq 1; \\x^3 + x^2 &\geq 0; \\x^2(x + 1) &\geq 0.\end{aligned}$$

Запишем решение последнего неравенства (рис. 160):  $x \geq -1$ .

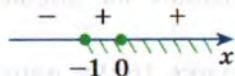


Рис. 160

**Ответ:** а)  $-4 < x \leq -1$ ;  $5 \leq x < 8$ ; б)  $x = 0$ ;  $x \geq 2$ ; в)  $x \geq -1$ .

**Пример 3** Решить неравенство:

а)  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq x + 4$ ; б)  $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$ .

**Решение.** а) Здесь, как и в примере 2 «а», не обойтись без возведения в квадрат обеих частей неравенства. Но это будет равносильным преобразованием лишь при условии неотрицательности обеих частей

неравенства. А что у нас? Смотрите:  $x + 4 \geq \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ , это значит, что  $x + 4 \geq 0$ . Далее, запишем условие, задающее область определения неравенства (ОДЗ):  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ . Вот теперь мы уверены в том, что обе части заданного неравенства неотрицательны, и можно воспользоваться теоремой 5. Итак, задача свелась к решению системы неравенств

$$\begin{cases} x + 4 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 6 \leq (x + 4)^2. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы находим  $x \geq -4$ .

Решим неравенство  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ . Имеем:

$$(x - 2)(x - 3) \geq 0; \quad x \leq 2; \quad x \geq 3 \text{ (рис. 161)}.$$

Решим неравенство  $x^2 - 5x + 6 \leq (x + 4)^2$ :

$$x^2 - 5x + 6 \leq x^2 + 8x + 16;$$

$$-13x \leq 10;$$

$$x \geq -\frac{10}{13}.$$

Осталось найти пересечение трёх множеств: 1)  $x \geq -4$ ; 2)  $x \leq 2$ ;  $x \geq 3$ ; 3)  $x \geq -\frac{10}{13}$ .

Поступим так: сначала найдём пересечение множеств 1 и 3; получим  $x \geq -\frac{10}{13}$ . Затем изобразим на числовой прямой множество 2

(нижняя штриховка на рисунке 162) и неравенство  $x \geq -\frac{10}{13}$  (верхняя штриховка на рисунке 162). Пересечение этих множеств — решение исходного неравенства:  $-\frac{10}{13} \leq x \leq 2$ ;  $x \geq 3$ .

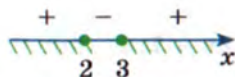


Рис. 161

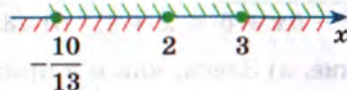


Рис. 162



б) Нам нужно решить неравенство  $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$ . Казалось бы, следует действовать так же, как мы действовали при решении неравенства  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq x + 4$  (из пункта «а»). Но (внимание!) по смыслу этого неравенства его правая часть, т. е.  $x + 4$ , обязана была быть неотрицательной, что мы сразу и зафиксировали. В неравенстве же  $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$  правая часть, т. е.  $2x - 7$ , может быть как отрицательной, так и неотрицательной. Таким образом, следует предусмотреть две возможности:  $2x - 7 < 0$ ;  $2x - 7 \geq 0$ .

1)  $2x - 7 < 0$ . Запишем условие, задающее область определения (ОДЗ) неравенства  $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$ :  $3x^2 - 22x \geq 0$ . Если переменная  $x$  принимает значение, удовлетворяющее и неравенству  $2x - 7 < 0$ , и неравенству  $3x^2 - 22x \geq 0$ , то это значение автоматически является частным решением неравенства  $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$ .

Вывод: все частные решения системы неравенств  $\begin{cases} 2x - 7 < 0, \\ 3x^2 - 22x \geq 0 \end{cases}$  являются частными решениями неравенства  $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$ .

Решим эту систему. Из неравенства  $2x - 7 < 0$  находим:  $x < 3,5$ .

Из неравенства  $3x^2 - 22x \geq 0$  находим:  $3x\left(x - \frac{22}{3}\right) \geq 0$  и далее

(рис. 163):  $x \leq 0$ ;  $x \geq \frac{22}{3}$ . Отметив на той же числовой прямой неравенство  $x < 3,5$  (нижняя штриховка на рисунке 163), получим решение

системы неравенств  $\begin{cases} 2x - 7 < 0, \\ 3x^2 - 22x \geq 0: \end{cases}$

$$x \leq 0.$$

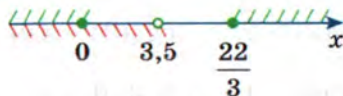


Рис. 163

2)  $2x - 7 \geq 0$ . Вот теперь можем решать неравенство  $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$  по тому же плану, который применяли при ре-

шении неравенства из пункта «а»: задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} 2x - 7 \geq 0, \\ 3x^2 - 22x \geq 0, \\ 3x^2 - 22x > (2x - 7)^2. \end{cases} \quad \text{Решив эту систему, объединим}$$

полученное решение с найденным в случае 1 решением  $x \leq 0$  и получим в итоге решение исходного неравенства.

Из неравенства  $2x - 7 \geq 0$  находим:  $x \geq 3,5$ .

Неравенство  $3x^2 - 22x \geq 0$  уже решено выше (в случае 1):  $x \leq 0$ ;  
 $x \geq \frac{22}{3}$ .

Решим последнее неравенство системы:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 22x &> (2x - 7)^2; \\ 3x^2 - 22x &> 4x^2 - 28x + 49; \\ x^2 - 6x + 49 &< 0. \end{aligned}$$

Квадратный трёхчлен  $x^2 - 6x + 49$  имеет отрицательный дискриминант (проверьте!) и положительный старший коэффициент (коэффициент при  $x^2$  равен 1); значит, для всех значений  $x$  выполняется неравенство  $x^2 - 6x + 49 > 0$ , а потому неравенство  $x^2 - 6x + 49 < 0$  не имеет решений.

Итак, в рассматриваемой системе из трёх неравенств одно неравенство не имеет решений. Значит, и вся система не имеет решений.

Вывод: все решения исходного неравенства исчерпываются найденным в случае 1 решением  $x \leq 0$ .

**Ответ:** а)  $-\frac{10}{13} \leq x \leq 2$ ; б)  $x \geq 3$ ; в)  $x \leq 0$ .

**Пример 4** Решить неравенство  $\log_x \sqrt{21 - 4x} > 1$ .

**Решение.** Имеем:

$$\begin{aligned} \log_x \sqrt{21 - 4x} &> 1; & \frac{1}{2} \log_x (21 - 4x) &> 1; \\ \log_x (21 - 4x) &> 2; & \log_x (21 - 4x) &> \log_x x^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая: 1)  $x > 1$ ; 2)  $0 < x < 1$ .

В первом случае, записав условия, определяющие ОДЗ:  $21 - 4x > 0$ , мы можем «освободиться» от знаков логарифмов, сохранив, согласно теореме 6, знак исходного неравенства:  $21 - 4x > x^2$ .

Во втором случае, записав условия, определяющие ОДЗ:  $21 - 4x > 0$ , мы можем «освободиться» от знаков логарифмов, изменив, согласно



теореме 6, знак исходного неравенства на противоположный знак:  
 $21 - 4x < x^2$ .

Таким образом, заданное логарифмическое неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x > 1, \\ 21 - 4x > 0, \\ 21 - 4x > x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 21 - 4x > 0, \\ 21 - 4x < x^2. \end{cases}$$

Из первой системы неравенств находим:  $1 < x < 3$ . Вторая система не имеет решений.

**Ответ:**  $1 < x < 3$ .

**Пример 5** Решить неравенство

$$(9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9) \cdot \log_2(3x^2 - 2x + 1) < 0.$$

**Решение.** Произведение  $ab$  отрицательно тогда, и только тогда, когда  $a, b$  — числа противоположных знаков. Соответственно, в данном неравенстве

$$\text{либо } \begin{cases} 9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 > 0, \\ \log_2(3x^2 - 2x + 1) < 0, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} 9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 < 0, \\ \log_2(3x^2 - 2x + 1) > 0. \end{cases}$$

Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 > 0, \\ \log_2(3x^2 - 2x + 1) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 < 0, \\ \log_2(3x^2 - 2x + 1) > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решим первую из этих систем; рассмотрим по отдельности каждое из неравенств первой системы.

**1, а.** В неравенстве  $9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 > 0$  есть смысл ввести новую переменную  $y = 3^{\sqrt{x}}$ . Тогда неравенство примет вид  $y^2 - 10y + 9 > 0$  и далее  $(y - 1)(y - 9) > 0$ , откуда следует, что либо  $y < 1$ , либо  $y > 9$ . Значит, либо  $3^{\sqrt{x}} < 1$ , либо  $3^{\sqrt{x}} > 9$ .

Рассмотрим неравенство  $3^{\sqrt{x}} < 1$ . Имеем:  $3^{\sqrt{x}} < 3^0$ ,  $\sqrt{x} < 0$  — это неравенство не имеет решений.

Рассмотрим неравенство  $3^{\sqrt{x}} > 9$ . Имеем:  $3^{\sqrt{x}} > 3^2$ ,  $\sqrt{x} > 2$ ,  $x > 4$ .

Итак, решение неравенства  $9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 > 0$  мы нашли:  $x > 4$ .

1, б. Решим логарифмическое неравенство  $\log_2(3x^2 - 2x + 1) < 0$ , т. е.  $\log_2(3x^2 - 2x + 1) < \log_2 1$ .

Это неравенство равносильно системе неравенств 
$$\begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 > 0, \\ 3x^2 - 2x + 1 < 1. \end{cases}$$

Квадратный трёхчлен  $3x^2 - 2x + 1$  имеет отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент, значит, неравенство  $3x^2 - 2x + 1 > 0$  выполняется при любых значениях  $x$ . Решим второе неравенство системы:  $3x^2 - 2x + 1 < 1$ . Имеем:

$$3x^2 - 2x < 0, 3x\left(x - \frac{2}{3}\right) < 0, 0 < x < \frac{2}{3}.$$

Итак, решение неравенства  $\log_2(3x^2 - 2x + 1) < 0$  мы нашли:  $0 < x < \frac{2}{3}$ .

1, в. Мы решаем первую систему совокупности (1). Нашли решение первого неравенства:  $x > 4$ ; нашли решение второго неравенства:  $0 < x < \frac{2}{3}$ . Пересечение этих решений пусто, значит, первая система совокупности (1) не имеет решений.

Решим вторую систему совокупности (1).

2, а. В неравенстве  $9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 < 0$  вводим новую переменную  $y = 3^{\sqrt{x}}$ . Тогда неравенство примет вид  $y^2 - 10y + 9 < 0$  и далее  $(y - 1)(y - 9) < 0$ , откуда следует, что  $1 < y < 9$ . Далее имеем:

$$1 < 3^{\sqrt{x}} < 9, \quad 3^0 < 3^{\sqrt{x}} < 3^2, \quad 0 < \sqrt{x} < 2, \\ 0 < x < 4.$$

2, б. Решим логарифмическое неравенство  $\log_2(3x^2 - 2x + 1) > 0$ , т. е.  $\log_2(3x^2 - 2x + 1) > \log_2 1$ .

Это неравенство равносильно системе неравенств 
$$\begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 > 0, \\ 3x^2 - 2x + 1 > 1. \end{cases}$$

Первое неравенство можно опустить — оно следует из второго. Решим второе неравенство системы:

$$3x^2 - 2x > 0, 3x\left(x - \frac{2}{3}\right) > 0.$$

Из последнего неравенства получаем:  $x < 0$ ;  $x > \frac{2}{3}$ .



2, в. Мы решаем вторую систему совокупности (1). Нашли решение первого неравенства:  $0 < x < 4$ ; нашли решение второго неравенства:  $x < 0$ ;  $x > \frac{2}{3}$ . Пересечение этих решений таково (рис. 164):  $\frac{2}{3} < x < 4$ .

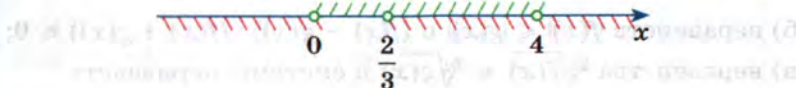


Рис. 164

Вывод: первая система совокупности (1) не имеет решений, вторая система совокупности (1) имеет решение  $\frac{2}{3} < x < 4$ . Значит,  $\frac{2}{3} < x < 4$  — решение совокупности (1), а вместе с тем и решение исходного неравенства.

Ответ:  $\frac{2}{3} < x < 4$ .

## Упражнения

Установите, равносильны ли данные неравенства.

30.1. а)  $\cos x - 3^{x^2+2x-3} \geq 11$  и  $\cos x \geq 11 + 3^{x^2+2x-3}$ ;

б)  $\frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$  и  $\cos x \leq \sqrt{x^2+1}$ ;

в)  $\sqrt{x^2+4x+4} \cdot \log_3(x^2-4x-5) \leq 0$  и  $\log_3(x^2-4x-5) \leq 0$ ;

г)  $\sin x + \log_3(x^2+2x-3) \leq 5$  и  $\sin x \leq 5 - \log_3(x^2+2x-3)$ ;

д)  $\frac{\sin x}{\sqrt{x^2+2}} \leq 1$  и  $\sin x \leq \sqrt{x^2+2}$ ;

е)  $10^{3x-5} \cdot \ln(x^2+4x+4) > 0$  и  $\ln(x^2+4x+4) > 0$ .

30.2. а)  $\frac{1}{\sqrt{x-1}} > 1$  и  $x-1 > 1$ ;

г)  $\frac{1}{\sqrt{x-1}} < 1$  и  $x > 2$ ;

б)  $\sqrt{3^x-2} > 1$  и  $x > 1$ ;

д)  $\sqrt{3^x-2} < 1$  и  $x < 1$ ;

в)  $\log_{0,1} x > 1$  и  $x < 0,1$ ;

е)  $\frac{1}{\lg x} > 1$  и  $x < 10$ .

**30.3.** Докажите равносильность:а) неравенства  $|f(x)| \leq g(x)$  и системы неравенств

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x); \end{cases}$$

б) неравенств  $|f(x)| \leq |g(x)|$  и  $(f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) \leq 0$ ;в) неравенства  $\sqrt[n]{f(x)} \leq \sqrt[n]{g(x)}$  и системы неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x); \end{cases}$$

г) неравенства  $|f(x)| \geq g(x)$  и совокупности неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x); \end{cases}$$

д) неравенства  $\sqrt{f(x)} > g(x)$  и совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

е) неравенства  $\sqrt{f(x)} < g(x)$  и системы неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Решите неравенство, применяя теоремы о равносильности.

**30.4.**а)  $\ln(x^2 + 15) > \ln(2x^2 + 6)$ ;б)  $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) \leq \log_{\frac{1}{3}}(x - 5)$ ;в)  $\log_{12}(3x^2 + 1) \geq \log_{12}(5 - 4x)$ ;г)  $\lg(12x^2 + 11) > \lg(8x^2 + 15)$ ;д)  $\log_{21}(6x - 11) \leq \log_{21}(3x + 2)$ ;е)  $\log_{\frac{1}{\pi}}(2x^2 + 1) > \log_{\frac{1}{\pi}}(x + 4)$ .**30.5.**а)  $\sqrt[5]{3x - 11} > \sqrt[5]{x + 1}$ ;б)  $(x^2 - 6x)^7 < (x - 6)^7$ ;в)  $(2 \cdot 0,1^x + 3)^6 \leq (0,1^x + 103)^6$ ;г)  $\sqrt[3]{6x + 5} < \sqrt[3]{3x + 26}$ ;д)  $(2x^2 - 5x)^{11} \geq (x^2 + 6)^{11}$ ;е)  $(2^{x+1} - 15)^8 \geq (2^x + 17)^8$ .



Решите неравенство методом введения новой переменной.

**30.6.** а)  $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 2 \leq 0$ ; г)  $\sqrt[5]{x} - 6\sqrt[10]{x} + 8 > 0$ ;  
 б)  $x^2 - 7|x| + 6 > 0$ ; д)  $x^2 + 2|x| - 8 < 0$ ;  
 в)  $|x^2 - 3|x| + 2| < 0$ ; е)  $|x^2 - 8|x| + 12| \geq 0$ .

**30.7.** а)  $4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 \leq 0$ ;  
 б)  $3^{1+x} \cdot 2^{1-x} + 3^x \cdot 2^{-x} \geq 10,5$ ;  
 в)  $2 \cdot 5^{2x} - 11 \cdot 5^x + 5 \geq 0$ ;  
 г)  $2^x \cdot 5^{1-x} + 2^{x+1} \cdot 5^{-x} \leq 2,8$ .

**30.8.** а)  $9^{x+2} + 4 \cdot 3^{2x+2} < 4\frac{1}{3}$ ; г)  $8^{x-2} + 3 \cdot 2^{3x-2} > 24,5$ ;  
 б)  $4\sqrt{x} - 9 \cdot 2\sqrt{x} + 8 > 0$ ; д)  $9\sqrt{x} - 10 \cdot 3\sqrt{x} + 9 < 0$ ;  
 в)  $(\sqrt{5} - 2)^x + (\sqrt{5} + 2)^x \leq \sqrt{20}$ ; е)  $(2 - \sqrt{3})^x + (\sqrt{3} + 2)^x \geq 4$ .

**30.9.** а)  $\log_3^2(x+2) - 8\log_3(x+2) + 15 > 0$ ;  
 б)  $\log_5^2(x+1) - 2\log_5(x+1) - 8 < 0$ .

Решите неравенство, применяя функционально-графические методы.

**ИКТ 30.10.** а)  $2^x > 14 - 2x$ ; г)  $2^x < 14 - 2x$ ;  
 б)  $2^x - 1 < \sqrt{x}$ ; д)  $2^x - 1 > \sqrt{x}$ ;  
 в)  $2^x < |x - 3|$ ; е)  $2^x \geq |x - 3|$ .

**ИКТ 30.11.** а)  $\log_4 x < -(x-1)^3$ ; г)  $\log_4 x \geq -(x-1)^3$ ;  
 б)  $\log_2 x \leq 20 - x$ ; д)  $\log_2 x \geq 20 - x$ ;  
 в)  $x + 3\log_8 x > 6$ ; е)  $x + 3\log_8 x < 6$ .

**ИКТ 30.12.** а)  $|x| < x + 1$ ; г)  $|x + 1| \geq 1 - x$ ;  
 б)  $|x - 1| > x - 1$ ; д)  $|x + 2| \leq x + 2$ ;  
 в)  $|x| \leq 3 - 2x$ ; е)  $|x| > 3x - 2$ .

**30.13.** а)  $|2x - 1| > 4 - 0,5x$ ; г)  $|2x + 3| \leq 3 - 0,5x$ ;  
 б)  $|3x - 5| \leq 5 - 2x$ ; д)  $|3x + 4| > x + 4$ ;  
 в)  $|0,5x - 3| > x + 6$ ; е)  $|0,5x + 1| < 4 - 2x$ .

**30.14.** а)  $x^2 + 2 \geq 2\cos x$ ; в)  $x^2 + 2 \leq 2\cos x$ ;  
 б)  $3\sin x \leq -\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 3$ ; г)  $3\sin x \geq -\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 3$ .

Решите систему или совокупность неравенств.

**30.15.** а)  $\begin{cases} 4x - 13 > 2x + 1, \\ 11x + 7 < 5x + 61; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} 5x - 7 \leq 3x - 5, \\ 13x + 3 \geq 9x + 79; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} 4x - 13 > 2x + 1, \\ 11x + 7 < 5x + 61; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} 5x - 7 \leq 3x - 5, \\ 13x + 3 \geq 9x + 79. \end{cases}$

**30.16.** а)  $\begin{cases} (x + 2)^2 - (x - 2)^2 > 16, \\ (x + 3)(x - 3) - (x + 1)^2 > 12; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} (x + 2)^2 - (x - 2)^2 > 16, \\ (x + 3)(x - 3) - (x + 1)^2 > 12; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} (x - 3)^2 - (x + 3)^2 \leq 24, \\ (x - 1)(x + 1) - (x + 2)^2 \geq 3; \end{cases}$

г)  $\begin{cases} (x - 3)^2 - (x + 3)^2 \leq 24, \\ (x - 1)(x + 1) - (x + 2)^2 \geq 3. \end{cases}$

**30.17.** а)  $\begin{cases} x^2 > 9, \\ x - 4 < 0; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} x^2 + 2x < 0, \\ 4x - 8 \geq 0; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x^2 > 9, \\ x - 4 < 0; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} x^2 + 2x < 0, \\ 4x - 8 \geq 0. \end{cases}$

**30.18.** а)  $\begin{cases} x^3 < 4x, \\ 3x^2 - x > 5 - 15x; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} \frac{x + 5}{x - 7} < 1, \\ \frac{3x + 4}{4x - 2} > -1; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x^3 < 4x, \\ 3x^2 - x > 5 - 15x; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} \frac{x + 5}{x - 7} < 1, \\ \frac{3x + 4}{4x - 2} > -1. \end{cases}$



$$30.19. \text{ а) } \begin{cases} \frac{x}{x+2} - \frac{24}{(x+2)^2} < 0, \\ -5x < 15; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x}{x+2} - \frac{24}{(x+2)^2} < 0, \\ -5x < 15; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{x^2 - 1,5x - 7}{(x-3)^2} \geq 0, \\ x^2 < 25; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{x^2 - 1,5x - 7}{(x-3)^2} \geq 0, \\ x^2 < 25. \end{cases}$$

$$30.20. \text{ а) } \begin{cases} (x-2)^3 \geq 27, \\ 5x-4 \leq 9+x; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} (x-2)^3 \geq 27, \\ 5x-4 \leq 9+x; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} (x-1)(x^2+x+1) \leq 26, \\ x^2-121 > 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} (x-1)(x^2+x+1) \leq 26, \\ x^2-121 > 0. \end{cases}$$

Решите неравенство.

$$30.21. \text{ а) } \sqrt{x} > 5;$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{x+1} \leq 2;$$

$$\text{в) } \sqrt[4]{3-x} > 1;$$

$$\text{г) } \sqrt{x} < 4;$$

$$\text{д) } \sqrt[3]{x-1} \geq 3;$$

$$\text{е) } \sqrt[4]{5-x} \leq 2.$$

$$30.22. \text{ а) } x\sqrt{x-2} > 0;$$

$$\text{б) } (x-2)\sqrt{x} \leq 0;$$

$$\text{в) } \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} \geq 0;$$

$$\text{г) } x\sqrt{x+3} < 0;$$

$$\text{д) } (x+3)\sqrt{x-1} \geq 0;$$

$$\text{е) } \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \leq 0.$$

$$30.23. \text{ а) } \sqrt{x^2 - 5x + 10} > 2;$$

$$\text{б) } \sqrt{2x^2 - 12x + 17} < x - 3;$$

$$\text{в) } \sqrt{x^2 - 4x - 3} \geq 3;$$

$$\text{г) } \sqrt{x^2 - 5x + 15} \leq 3;$$

$$\text{д) } \sqrt{2x^2 - 16x + 33} \geq x - 5;$$

$$\text{е) } \sqrt{36 - x - 12x^2} < 5.$$

$$30.24. \text{ а) } \sqrt{x+3} > \sqrt{2x-5};$$

$$\text{б) } \sqrt{x+3} > \sqrt{5-2x};$$

$$\text{в) } \sqrt{x+12} > x;$$

$$\text{г) } \sqrt{2x-5} < \sqrt{5x+3};$$

$$\text{д) } \sqrt{5-2x} < \sqrt{5x+3};$$

$$\text{е) } \sqrt{5x+6} < x.$$

**30.25.** а)  $\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{4x+5} > 6$ ;

б)  $\sqrt{(x+3)(4x+5)} > 6$ ;

в)  $\frac{\sqrt{4x+5}}{\sqrt{x+3}} > 6$ ;

г)  $\sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{x-2} < 3$ ;

д)  $\sqrt{(2x+3)(x-2)} < 3$ ;

е)  $\frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x-2}} < 3$ .

**30.26.** а)  $\sqrt{x^2 + 5x - 11} \leq x + 4$ ;

б)  $\sqrt{37 + 5x - x^2} > x - 10$ ;

в)  $\sqrt{2x^3 + x^2 - 20} \leq x$ ;

г)  $\sqrt{x^2 - 7x + 12} > x - 5$ ;

д)  $\sqrt{9 + 5x - x^2} < x - 8$ ;

е)  $\sqrt{2x^3 + x + 3} \leq x\sqrt{6}$ .

**30.27.** а)  $x|x - 6| \leq 5$ ;

б)  $x|x - 5| \geq 4$ .

**30.28.** а)  $|4x - 3| < |2x + 1|$ ;

б)  $|x^2 + 3x - 5| < |x^2 - 7x + 5|$ ;

в)  $|x^2 + 4x - 5| \leq (x + 5)(x - 1)$ ;

г)  $|7x + 3| > |4 - 5x|$ ;

д)  $|x^2 - 5x + 7| \geq |x^2 + 2x - 7|$ ;

е)  $|x^2 - 2x - 15| \geq (x - 5)(x + 3)$ .

**30.29.** а)  $|\ln x| < 1$ ;

г)  $|\ln x - 1| > 1$ ;

б)  $\lg(|x| + 1) \geq 1$ ;

д)  $|\lg(|x| + 1)| \geq 1$ ;

в)  $|\lg(|x| - 1)| > 1$ ;

е)  $|\lg(|x| - 1)| \leq 1$ .

**30.30.** а)  $(\log_{0,5} x - 19)^{11} > (8\log_{0,5} x + 9)^{11}$ ;

б)  $(3 - 5\log_{0,125} x)^{15} \leq (\log_{0,125} x + 7)^{15}$ .

**30.31.** а)  $2\sin^2 x + \sin x - 3 \geq 0$ ;

б)  $6\cos^2 x - 13\cos x + 7 \leq 0$ .

**30.32.** а)  $25^{\log_{0,1} x} - 5^{\log_{0,1} x + 1} + 0,1^{\log_{0,1} x} \leq 0$ ;

б)  $49^{\ln x} - 7^{\ln x + 1} - e^{\ln 8} \geq 0$ .

**30.33.** а)  $(x - 3)\log_3(x + 3) \geq 0$ ;

г)  $(3 - x)\log_5(x + 4) \leq 0$ ;

б)  $(3^x - 5)(4x + 7) \leq 0$ ;

д)  $(6^x - 3)(5x + 8) \geq 0$ ;

в)  $(x - 5)\sqrt{\log_2(x - 2)} \geq 0$ ;

е)  $(x - 12)\sqrt{\log_7(x - 5)} \geq 0$ .

**30.34.** а)  $(x^2 + 4x)(\operatorname{ctg}^2 x + 3^{x-1}) \leq 0$ ;

б)  $\sqrt{\cos x - 1} \leq x^2 - 36$ ;

в)  $6\log_3|x - 1| < 14 + 2x - x^2$ ;

г)  $(x^2 - 2x)(\operatorname{tg}^2 x + 2^{x+1}) \leq 0$ ;

д)  $\sqrt{\sin x - 1} \leq 9 - x^2$ ;

е)  $\log_2(x^2 + x - 10) < 25 - 2x - 2x^2$ .



## § 31. Уравнения и неравенства с параметрами

Если уравнение  $f(x; a) = 0$  (неравенство  $f(x; a) > 0$ ) надо решить относительно переменной  $x$ , а буквой  $a$  обозначено произвольное действительное число, то уравнение  $f(x; a) = 0$  (неравенство  $f(x; a) > 0$ ) называют **уравнением с параметром  $a$**  (неравенством с параметром  $a$ ). Разумеется, параметр может быть обозначен не только буквой  $a$ , но и другой буквой латинского алфавита ( $p$ ,  $b$ ,  $c$  и т. д.). Решение уравнения или неравенства с параметром — это своего рода мини-исследование, в котором следует разбираться с различными случаями, возникающими в зависимости от значений параметра. Поясним эту мысль.

Пусть необходимо решить уравнение  $2x^2 - 5x + 1 = 0$ . Для этого используем формулу корней квадратного уравнения: найдём дискриминант  $D$  (в данном случае  $D = 25 - 8 = 17$ ) и запишем корни:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Пусть теперь необходимо решить уравнение с параметром  $(a - 3)x^2 + 2x - 1 = 0$ . Как сказано выше, буквой  $a$  обозначено произвольное действительное число. В частности, может быть  $a = 3$ . Тогда исходное уравнение из квадратного превращается в линейное  $2x - 1 = 0$ . Оно имеет один корень  $x = 0,5$ .

В случае, когда  $a \neq 3$ , исходное уравнение решается методом, применяемым для квадратных уравнений. При его решении вновь вычисляется дискриминант  $D = 2^2 - 4 \cdot (a - 3) \cdot (-1) = 4a - 8$ . Как видим, теперь дискриминант зависит от параметра  $a$ . В зависимости от значений параметра  $a$  квадратное уравнение либо имеет два корня

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{D}}{2(a - 3)} \quad (\text{при } a > 2, a \neq 3), \text{ либо один корень } x = -1 \quad (\text{при}$$

$a = 2$ ), либо корней не имеет ( $a < 2$ ). В итоге, ответом является множество решений, зависящее от значений параметра  $a$ .

Ещё сложнее обстоит дело при решении неравенств с параметром. Например, при решении неравенства  $(a - 3)x^2 + 2x - 1 > 0$  придётся разбираться не с двумя возможностями ( $a = 3$ ,  $a \neq 3$ , как в уравнении  $(a - 3)x^2 + 2x - 1 = 0$ ), а с тремя:  $a = 3$ ,  $a < 3$ ,  $a > 3$ . Вот почему мы использовали выше термин «мини-исследование».

И с уравнением  $(a - 3)x^2 + 2x - 1 = 0$ , и с неравенством  $(a - 3)x^2 + 2x - 1 > 0$  мы детально разберёмся ниже, в примере 2. Но сначала рассмотрим более простой пример линейных уравнений и неравенств с параметром  $a$ .

**Пример 1** Решить:

- а) уравнение  $(a^2 - 9)x = a - 3$ ;
- б) неравенство  $(a^2 - 9)x > a - 3$ ;
- в) неравенство  $(a^2 - 9)x \leq a - 3$ .

**Решение.** а) Придётся рассмотреть два случая:  $a^2 - 9 = 0$ ,  $a^2 - 9 \neq 0$ . Первый случай, в свою очередь, распадается на два:  $a = 3$ ,  $a = -3$ . Приступим к рассмотрению каждого из этих случаев.

1)  $a = 3$ . Тогда уравнение  $(a^2 - 9)x = a - 3$  принимает такой вид:  $0 \cdot x = 0$  — это верно при любом значении  $x$ .

2)  $a = -3$ . Тогда уравнение  $(a^2 - 9)x = a - 3$  принимает такой вид:  $0 \cdot x = -6$  — это не выполняется ни при каком значении  $x$ , т. е. в этом случае уравнение не имеет корней.

3)  $a \neq \pm 3$ . Тогда коэффициент при  $x$  отличен от нуля и на него можно разделить обе части уравнения  $(a^2 - 9)x = a - 3$ ; получим:

$$x = \frac{a - 3}{a^2 - 9}, \text{ т. е. } x = \frac{1}{a + 3}.$$

Подведём итоги. Запишем ответ в виде таблицы.

| $a = 3$                 | $a = -3$    | $a \neq \pm 3$        |
|-------------------------|-------------|-----------------------|
| $-\infty < x < +\infty$ | $\emptyset$ | $x = \frac{1}{a + 3}$ |

б) Для неравенства  $(a^2 - 9)x > a - 3$  придётся рассмотреть пять случаев:  $a = 3$ ,  $a = -3$ ,  $a < -3$ ,  $-3 < a < 3$ ,  $a > 3$ .

1)  $a = 3$ . Тогда неравенство  $(a^2 - 9)x > a - 3$  принимает такой вид:  $0 \cdot x > 0$ . Это неравенство не имеет решений.

2)  $a = -3$ . Тогда неравенство  $(a^2 - 9)x > a - 3$  принимает такой вид:  $0 \cdot x > -6$ . Это верно при любых значениях  $x$ .

3)  $a < -3$ . В этом случае коэффициент  $(a^2 - 9)$  при  $x$  — положительное число. Имеем:

$$(a^2 - 9)x > a - 3;$$

$$x > \frac{a - 3}{a^2 - 9}; \quad x > \frac{1}{a + 3}.$$



4)  $-3 < a < 3$ . В этом случае коэффициент  $(a^2 - 9)$  при  $x$  — отрицательное число. Имеем:

$$(a^2 - 9)x > a - 3; x < \frac{1}{a + 3}.$$

5)  $a > 3$ . В этом случае  $a^2 - 9 > 0$ , значит, имеем:

$$(a^2 - 9)x > a - 3; x > \frac{1}{a + 3}.$$

Подведём итоги. Ответ запишем в виде таблицы.

| $a < -3$              | $a = -3$                | $-3 < a < 3$          | $a = 3$     | $a > 3$               |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-------------|-----------------------|
| $x > \frac{1}{a + 3}$ | $-\infty < x < +\infty$ | $x < \frac{1}{a + 3}$ | $\emptyset$ | $x > \frac{1}{a + 3}$ |

в) Как и в пункте «б» рассмотрим пять случаев.

1)  $a = 3$ . Тогда неравенство  $(a^2 - 9)x \leq a - 3$  принимает такой вид:  $0 \cdot x \leq 0$ . Это верно при любых значениях  $x$ .

2)  $a = -3$ . Тогда неравенство  $(a^2 - 9)x \leq a - 3$  принимает такой вид:  $0 \cdot x \leq -6$ . Это неравенство не имеет решений.

3)  $a < -3$ . В этом случае коэффициент при  $x$  — положительное число, получаем  $x \leq \frac{1}{a + 3}$ .

4)  $-3 < a < 3$ . В этом случае коэффициент при  $x$  — отрицательное число, получаем  $x \geq \frac{1}{a + 3}$ .

5)  $a > 3$ . В этом случае коэффициент при  $x$  — отрицательное число, получаем  $x \leq \frac{1}{a + 3}$ .

Подведём итоги. Ответ запишем в виде таблицы.

| $a < -3$                 | $a = -3$    | $-3 < a < 3$             | $a = 3$                 | $a > 3$                  |
|--------------------------|-------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| $x \leq \frac{1}{a + 3}$ | $\emptyset$ | $x \geq \frac{1}{a + 3}$ | $-\infty < x < +\infty$ | $x \leq \frac{1}{a + 3}$ |

При работе с уравнениями и неравенствами с параметрами, в которых появляются квадратные трёхчлены, параметр удобнее обозна-

чать буквой  $p$ , а не  $a$ . Иначе возможна путаница со старшим коэффициентом  $a$  в квадратном трёхчлене  $ax^2 + bx + c$ .

**Пример 2** Решить:

а) уравнение  $(p - 3)x^2 + 2x - 1 = 0$ ;

б) неравенство  $(p - 3)x^2 + 2x - 1 > 0$ .

**Решение.** а) Если  $p = 3$ , то уравнение принимает вид  $2x - 1 = 0$ , откуда находим  $x = \frac{1}{2}$ .

Если  $p \neq 3$ , то получается квадратное уравнение с чётным коэффициентом при  $x$ . Находим  $\frac{D}{4} = 1^2 + (p - 3) \cdot 1 = p - 2$ .

Если  $p < 2$ , то  $D < 0$  и уравнение не имеет действительных корней.

Если  $p = 2$ , то  $D = 0$  и уравнение имеет единственный корень  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{0}}{2 - 3} = 1$ .

Если  $p > 2$  (и  $p \neq 3$ ), то  $D > 0$  и уравнение имеет два корня:  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{p - 2}}{p - 3}$ .

Подведём итоги.

| $p < 2$     | $p = 2$ | $2 < p < 3$ или $p > 3$                       | $p = 3$           |
|-------------|---------|---|-------------------|
| $\emptyset$ | $x = 1$ | $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{p - 2}}{p - 3}$ | $x = \frac{1}{2}$ |

Обратите внимание: в итоговом ответе учтены все возможные значения параметра.

б) Как и в пункте «а», надо рассмотреть пять случаев:  $p < 2$ ,  $p = 2$ ,  $2 < p < 3$ ,  $p = 3$ ,  $p > 3$ .

1)  $p < 2$ . Тогда ветви параболы  $y = (p - 3)x^2 + 2x - 1$  направлены вниз, так как старший коэффициент  $p - 3$  отрицателен, и парабола не пересекает ось  $Ox$ , так как  $D < 0$ . Значит, вся парабола расположена ниже оси  $Ox$ , т. е.  $(p - 3)x^2 + 2x - 1 < 0$  при всех значениях  $x$  (рис. 165).

Итак, неравенство  $(p - 3)x^2 + 2x - 1 > 0$  при  $p < 2$  решений не имеет.



2)  $p = 2$ . Тогда данное неравенство  $(p - 3)x^2 + 2x - 1 > 0$  принимает вид:

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x - 1 < 0, \\ x^2 - 2x + 1 > 0, \quad (x - 1)^2 > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно для всех значений  $x$ , кроме  $x = 1$ . Ответ в данном случае можно записать так:

$$\begin{cases} x < 1, \\ x > 1 \end{cases} \text{ или так: } x < 1; x > 1.$$

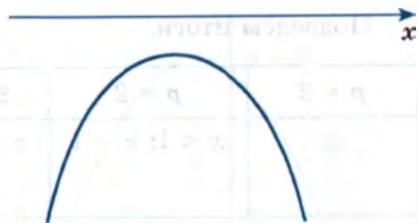


Рис. 165

3)  $2 < p < 3$ . Ветви параболы  $y = (p - 3)x^2 + 2x - 1$  направлены вниз, она пересекает ось  $Ox$  в двух точках (напомним, что в этом случае квадратный трёхчлен  $(p - 3)x^2 + 2x - 1$  имеет два корня) и ответ для интересующего нас неравенства — промежуток между этими точками, т. е. между корнями  $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{p - 2}}{p - 3}$ ,  $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{p - 2}}{p - 3}$  трёхчлена  $(p - 3)x^2 + 2x - 1$ . Так как  $-1 - \sqrt{p - 2} < -1 + \sqrt{p - 2}$ , а

$p - 3 < 0$ , то  $\frac{-1 + \sqrt{p - 2}}{p - 3} < \frac{-1 - \sqrt{p - 2}}{p - 3}$ , т. е.  $x_1 < x_2$  (рис. 166).

$$\text{Итак, } \frac{-1 + \sqrt{p - 2}}{p - 3} < x < \frac{-1 - \sqrt{p - 2}}{p - 3}.$$

4)  $p = 3$ . Тогда получаем неравенство  $2x - 1 > 0$ , т. е.  $x > \frac{1}{2}$ .

5)  $p > 3$ . Ветви параболы  $y = (p - 3)x^2 + 2x - 1$  направлены вверх, она пересекает ось  $Ox$  в двух точках (рис. 167). В отличие от случая  $2 < p < 3$ , здесь  $x_1 > x_2$ , ведь  $p - 3 > 0$ .

Поэтому ответ для интересующего нас неравенства — либо  $x < x_2$ , либо  $x > x_1$ , т. е.:

$$x < \frac{-1 - \sqrt{p - 2}}{p - 3}; \quad x > \frac{-1 + \sqrt{p - 2}}{p - 3}.$$



Рис. 166



Рис. 167

Подведём итоги.

| $p < 2$     | $p = 2$        | $2 < p < 3$     | $p = 3$           | $p > 3$            |
|-------------|----------------|-----------------|-------------------|--------------------|
| $\emptyset$ | $x < 1; x > 1$ | $x_1 < x < x_2$ | $x > \frac{1}{2}$ | $x < x_2; x > x_1$ |

где  $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{p-2}}{p-3}$ ,  $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{p-2}}{p-3}$ .

**Пример 3\*** Найти все значения параметра  $p$ , при которых уравнение  $(p-2)x^2 - 2px + p+3 = 0$  имеет корни, каждый из которых:

- положителен;
- меньше чем 3;
- принадлежит интервалу  $(1; 3)$ .

**Решение.** а) Для  $p = 2$  получаем:  $-4x + 7 = 0$ ,  $x = 1,75$ . Число 1,75 положительно. Таким образом, выполняется условие задачи и значение  $p = 2$  следует включить в ответ.

Если  $p \neq 2$ , то получаем квадратное уравнение. Оно имеет корни, если  $D \geq 0$ . Так как

$$\frac{D}{4} = (-p)^2 - (p-2)(p+3) = 6 - p,$$

то получаем, что  $D \geq 0$ , если  $p \leq 6$ .

Для  $p = 6$  получаем:  $4x^2 - 12x + 9 = 0$ ,  $(2x - 3)^2 = 0$ ,  $x = 1,5$ . Число 1,5 положительно. Таким образом, значение параметра  $p = 6$  следует включить в ответ.

Осталось рассмотреть случай, когда  $p < 6$ ,  $p \neq 2$ . Тогда  $D > 0$  и парабола  $y = (p-2)x^2 - 2px + p+3$  пересекает ось  $Ox$  в двух точках:

$x_1, x_2$ . Найдём абсциссу вершины параболы (по формуле  $x_{\text{верш}} = -\frac{b}{2a}$

для функции  $y = ax^2 + bx + c$ ):  $x_{\text{верш}} = \frac{p}{p-2}$ . Заметим далее, что  $y(0) = p+3$ , т. е. парабола пересекает ось  $Oy$  в точке  $(0; p+3)$ .

Итак,  $x_{\text{верш}} = \frac{p}{p-2}$ ,  $y(0) = p+3$ . Значит, в дальнейшем нам следует обратить особое внимание на такие значения параметра:  $p = 0$ ,  $p = 2$ ,  $p = -3$ .



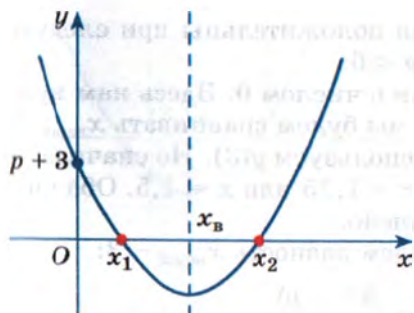


Рис. 168

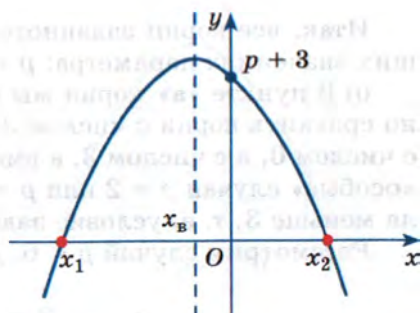


Рис. 169

Если  $2 < p < 6$ , то ветви параболы  $y = (p - 2)x^2 - 2px + p + 3$  направлены вверх, так как  $p - 2 > 0$ . Кроме того,  $x_{\text{верш}} = \frac{p}{p-2} > 0$  и  $y(0) = p + 3 > 0$  (рис. 168).

В этом случае  $x_1, x_2$  положительны, т. е. условие задачи выполняется для обоих корней.

Если  $0 \leq p < 2$ , то  $p - 2 < 0$ , ветви параболы направлены вниз,  $x_{\text{верш}} \leq 0$  и  $y(0) = p + 3 > 0$  (рис. 169).

В этом случае меньший из корней  $x_1, x_2$  отрицателен, т. е. условие задачи не выполнено.

Если  $-3 \leq p < 0$ , то  $p - 2 < 0$ ,  $x_{\text{верш}} > 0$  и  $y(0) = p + 3 \geq 0$  (рис. 170).

В этом случае меньший из корней  $x_1, x_2$  не положителен, т. е. условие задачи не выполнено.

Если  $p < -3$ , то  $p - 2 < 0$ ,  $x_{\text{верш}} > 0$  и  $y(0) = p + 3 < 0$  (рис. 171).

В этом случае условие задачи выполнено.

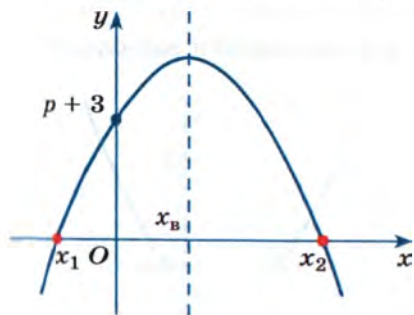


Рис. 170

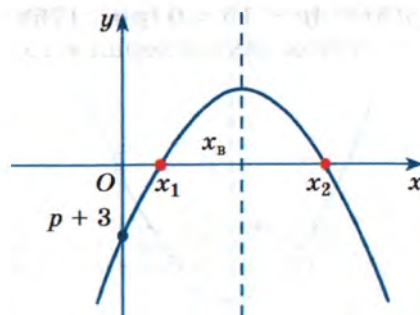


Рис. 171

Итак, все корни заданного уравнения положительны при следующих значениях параметра:  $p < -3$ ,  $2 \leq p \leq 6$ .

б) В пункте «а» корни мы сравнивали с числом 0. Здесь нам нужно сравнить корни с числом 3. Поэтому мы будем сравнивать  $x_{\text{верш}}$  не с числом 0, а с числом 3, а вместо  $y(0)$  используем  $y(3)$ . Но сначала — «особые» случаи  $p = 2$  или  $p = 6$ . Тогда  $x = 1,75$  или  $x = 1,5$ . Оба числа меньше 3, т. е. условие задачи выполнено.

Рассмотрим случай  $p < 6$ ,  $p \neq 2$ . Найдём разность  $x_{\text{верш}} - 3$ :

$$x_{\text{верш}} - 3 = \frac{p}{p-2} - 3 = \frac{2(3-p)}{p-2},$$

$$\text{и } y(3) = (p-2) \cdot 9 - 2p \cdot 3 + p + 3 = 4p - 15.$$

Если  $\frac{15}{4} < p < 6$ , то ветви параболы  $y = (p-2)x^2 - 2px + p + 3$  направлены вверх, так как  $p-2 > 0$ . Кроме того,  $x_{\text{верш}} - 3 = \frac{2(3-p)}{p-2} < 0$ ,  $x_{\text{верш}} < 3$  и  $y(3) = 4p - 15 > 0$  (рис. 172).

В этом случае корни  $x_1, x_2$  меньше 3.

Если  $3 < p \leq \frac{15}{4}$ , то ветви параболы направлены вверх,  $x_{\text{верш}} < 3$ , а  $y(3) = 4p - 15 \leq 0$  (рис. 173).

В этом случае больший из корней  $x_1, x_2$  больше или равен 3, т. е. условие задачи не выполнено.

Если  $2 < p \leq 3$ , то ветви параболы направлены вверх,  $x_{\text{верш}} \geq 3$ , а  $y(3) = 4p - 15 < 0$  (рис. 174).

В этом случае больший из корней  $x_1, x_2$  больше 3, т. е. условие задачи не выполнено.

Если  $p < 2$ , то ветви параболы направлены вниз,  $x_{\text{верш}} < 3$ , а  $y(3) = 4p - 15 < 0$  (рис. 175).

В этом случае корни  $x_1, x_2$  меньше 3, условие задачи выполнено.

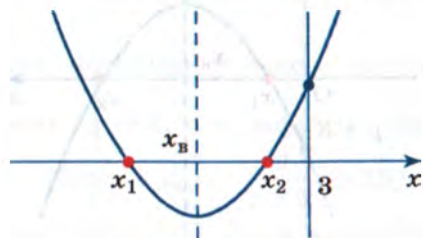


Рис. 172

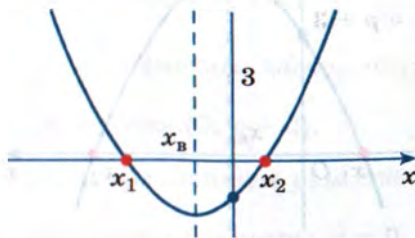


Рис. 173



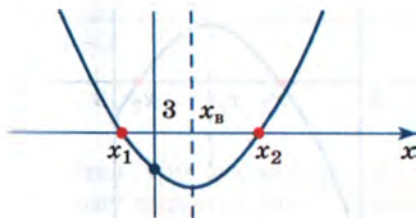


Рис. 174

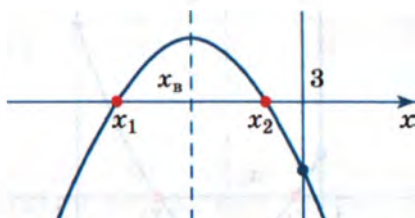


Рис. 175

Остаётся собрать все нужные случаи вместе и не забыть про  $p = 2$  и  $p = 6$ . В итоге получаем, что все корни уравнения

$$(p - 2)x^2 - 2px + p + 3 = 0$$

меньше чем 3, если  $p \leq 2$  или  $\frac{15}{4} < p \leq 6$ .

в) Если  $p = 2$ , то уравнение  $(p - 2)x^2 - 2px + p + 3 = 0$  принимает вид  $-4x + 7 = 0$ , откуда находим  $x = 1,75$ . Этот корень принадлежит интервалу  $(1; 3)$ , а потому значение  $p = 2$  следует включить в окончательный ответ.

Если  $p = 6$ , то уравнение  $(p - 2)x^2 - 2px + p + 3 = 0$  принимает вид  $4x^2 - 12x + 9 = 0$ , откуда находим  $x = 1,5$ . Этот корень принадлежит интервалу  $(1; 3)$ , а потому значение  $p = 6$  также следует включить в окончательный ответ.

Если  $p > 6$ , то, напомним, уравнение не имеет корней.

Если  $p < 6$ ,  $p \neq 2$ , то графиком функции  $y = (p - 2)x^2 - 2px + p + 3$  является парабола с ветвями вверх при  $2 < p < 6$  и с ветвями вниз при  $p < 2$ , пересекающая ось абсцисс в двух точках; по условию задачи обе эти точки должны принадлежать интервалу  $(1; 3)$ .

Имеет место следующее утверждение. Для того чтобы парабола  $y = ax^2 + bx + c$  пересекала ось  $Ox$  в точках, принадлежащих интервалу  $(1; 3)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств

$$\begin{cases} 1 < x_{\text{верш}} < 3, \\ a \cdot y(1) > 0, \\ a \cdot y(3) > 0. \end{cases}$$

Справедливость этого утверждения наглядно иллюстрирует рисунок 176.

Чтобы воспользоваться сформулированным выше утверждением, нам понадобятся  $x_{\text{верш}}$ ,  $y(1)$  и  $y(3)$ .

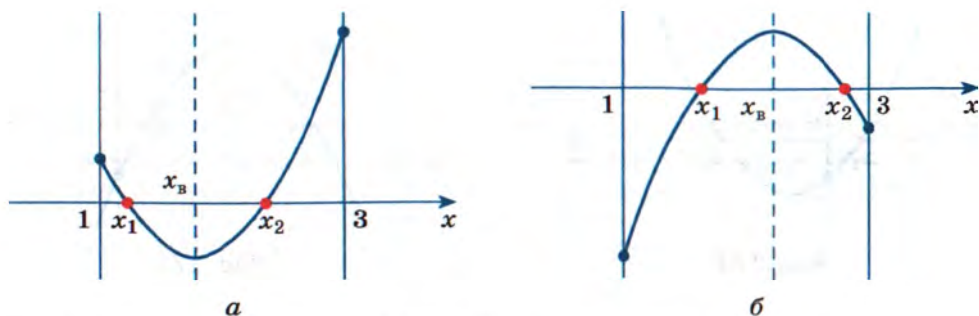


Рис. 176

Имеем:

$$x_{\text{верш}} = \frac{p}{p-2}; y(1) = (p-2) - 2p + (p+3) = 1;$$

$$y(3) = 9(p-2) - 6p + p + 3 = 4p - 15.$$

Составим систему неравенств, о которой идёт речь в утверждении:

$$\begin{cases} 1 < \frac{p}{p-2} < 3, \\ (p-2) \cdot 1 > 0, \\ (p-2)(4p-15) > 0. \end{cases}$$

Решив эту систему с учётом условия  $p < 6$ , получим  $\frac{15}{4} < p < 6$ .

Итак,  $\frac{15}{4} < p \leq 6$ .

Ответ: а)  $p < -3$ ,  $2 \leq p \leq 6$ ; б)  $p \leq 2$ ,  $\frac{15}{4} < p \leq 6$ ; в)  $p = 2$ ,

$$\frac{15}{4} < p \leq 6.$$

**Пример 4** Найти все значения параметра  $a$ , при которых неравенство  $\frac{x-2a+3}{x+a} < 0$  выполняется для всех значений  $x$  из отрезка  $[-3; 5]$ .

**Решение.** Числитель дроби  $\frac{x-(2a-3)}{x+a}$  обращается в 0 при  $x = 2a - 3$ , а знаменатель — при  $x = -a$ . Относительно чисел  $2a - 3$ ,  $-a$





Рис. 177

имеются три возможности:  $2a - 3 < -a$ ,  $2a - 3 = -a$ ,  $2a - 3 > -a$ . Поэтому решим данное неравенство в каждом из этих трёх случаев и затем ответим на вопрос задачи.

1)  $2a - 3 < -a$ . В этом случае точка  $2a - 3$  располагается на числовой прямой левее точки  $-a$  и решение неравенства  $\frac{x - 2a + 3}{x + a} < 0$  таково:  $2a - 3 < x < -a$  (рис. 177, а).

А что означает требование, чтобы заданное неравенство выполнялось для всех значений  $x$  из отрезка  $[-3; 5]$ ? Это означает, что отрезок  $[-3; 5]$  содержится в интервале  $(2a - 3; -a)$ , т. е. должны одновременно выполняться два условия:  $2a - 3 < -3$  и  $5 < -a$  (рис. 177, б). И не забудем про условие  $2a - 3 < -a$ . Вывод: нам нужно найти решение системы трёх неравенств:

$$\begin{cases} 2a - 3 < -a, \\ 2a - 3 < -3, \\ 5 < -a, \end{cases}$$

Имеем:  $\begin{cases} a < 1, \\ a < 0, \\ a < -5; \end{cases}$  получаем  $a < -5$ .

2)  $2a - 3 = -a$ , т. е.  $a = 1$ . В этом случае неравенство  $\frac{x - 2a + 3}{x + a} < 0$  принимает вид  $\frac{x + 1}{x + 1} < 0$ , оно не имеет решений.

3)  $2a - 3 > -a$ . В этом случае точка  $2a - 3$  располагается на числовой прямой правее точки  $-a$  и решение неравенства  $\frac{x - 2a + 3}{x + a} < 0$  таково:  $-a < x < 2a - 3$  (рис. 178, а).

Отрезок  $[-3; 5]$  должен содержаться в интервале  $(-a; 2a - 3)$ , т. е. должны одновременно выполняться два условия:  $-a < -3$  и  $5 < 2a - 3$  (рис. 178, б).



Рис. 178

Вывод: нам нужно найти решение системы трёх неравенств:

$$\begin{cases} 2a - 3 > -a, \\ -a < -3, \\ 5 < 2a - 3. \end{cases} \quad \text{Имеем: } \begin{cases} a > 1, \\ a > 3, \text{ получаем } a > 4. \\ a > 4; \end{cases}$$

Ответ:  $a < -5$ ;  $a > 4$ .

**Пример 5** Найти все значения параметра  $a$ , при которых функция  $y = ax^3 + 3ax^2 + 6x + 7$  возрастает на всей числовой прямой.

**Решение.** Если  $a = 0$ , то заданная функция — линейная:  $y = 6x + 7$ ; эта функция возрастает на всей числовой прямой.

Если  $a \neq 0$ , то заданная функция — кубическая. Как вы знаете, исследование функции на монотонность связано со знаком её производной. Имеем:  $y' = (ax^3 + 3ax^2 + 6x + 7)' = 3ax^2 + 6ax + 6$ .

Чтобы функция возрастала на всей числовой прямой, квадратный трёхчлен  $3ax^2 + 6ax + 6$  должен быть неотрицательным при любых значениях  $x$ . А это будет тогда, и только тогда, когда старший коэффициент (в данном случае  $3a$ ) — положительное число, а дискриминант  $D$  — неотрицательное число. Найдём дискриминант:

$$D = (6a)^2 - 4 \cdot 3a \cdot 6 = 36a^2 - 72a = 36a(a - 2).$$

Итак, нам нужно решить систему неравенств:  $\begin{cases} 3a > 0, \\ 36a(a - 2) \geq 0. \end{cases}$  Получаем  $a \geq 2$ .

Ответ:  $a = 0$ ;  $a \geq 2$ .

**Пример 6** При каких значениях параметра  $a$  функция  $y = 2x^3 - 6a^2x + 3$  имеет минимум в точке  $x = 3$ ?

**Решение.**  $y' = (2x^3 - 6a^2x + 3)' = 6x^2 - 6a^2 = 6(x - a)(x + a)$ .

Если  $a = 0$ , то  $y' = 3x^2$ . Производная всюду неотрицательна, следовательно, функция  $y = 2x^3 - 6a^2x + 3$  возрастает на всей числовой прямой, точек экстремума у неё нет; в частности, точка  $x = 3$  не может быть точкой минимума.

Если  $a \neq 0$ , то заданная функция имеет две стационарные точки:  $a$ ,  $-a$ , которые разбивают ось абсцисс на три промежутка. Тут две возможности:  $a < -a$ ,  $-a < a$ .

Рассмотрим первый случай:  $a < -a$ . Знаки производной на полученных промежутках указаны на рисунке 179. Как видим,  $x = -a$  — точка минимума. Но по условию точкой минимума должна быть точка  $x = 3$ . Значит,  $-a = 3$ ,  $a = -3$ .





Рис. 179



Рис. 180

Рассмотрим второй случай:  $-a < a$ . Знаки производной на полученных промежутках указаны на рисунке 180. Как видим,  $x = a$  — точка минимума. Но по условию точкой минимума должна быть точка  $x = 3$ . Значит,  $a = 3$ .

**Ответ:**  $a = \pm 3$ .

**Пример 7** При каком значении параметра  $a$  прямая  $y = ax + 1$  является касательной к графику функции  $y = \sqrt{4x + 1}$ ?

**Решение.** Как известно, угловой коэффициент касательной (в данном случае он равен  $a$ ) равен значению производной заданной функции в абсциссе точки касания. Обозначим абсциссу точки касания буквой  $b$ . Запишем уравнение касательной в общем виде:

$$y = f(b) + f'(b)(x - b); \quad (1)$$

в рассматриваемом примере  $f(x) = \sqrt{4x + 1}$ ,  $f(b) = \sqrt{4b + 1}$ . Найдём  $f'(b)$ :

$$f'(x) = (\sqrt{4x + 1})' = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x + 1}} = \frac{2}{\sqrt{4x + 1}}; \quad f'(b) = \frac{2}{\sqrt{4b + 1}}.$$

Подставим найденные значения  $f(b)$ ,  $f'(b)$  в уравнение (1):

$$y = \sqrt{4b + 1} + \frac{2}{\sqrt{4b + 1}}(x - b); \quad y = \frac{2}{\sqrt{4b + 1}}x + \left(\sqrt{4b + 1} - \frac{2b}{\sqrt{4b + 1}}\right).$$

Но по условию уравнение касательной таково:  $y = ax + 1$ . Значит, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4b + 1}} = a, \\ \sqrt{4b + 1} - \frac{2b}{\sqrt{4b + 1}} = 1. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$\begin{aligned} 4b + 1 - 2b &= \sqrt{4b + 1}; & 2b + 1 &= \sqrt{4b + 1}; \\ 4b^2 + 4b + 1 &= 4b + 1; & 4b^2 &= 0; & b &= 0. \end{aligned}$$

Если  $b = 0$ , то из первого уравнения системы находим  $a = 2$ .

**Ответ:**  $a = 2$ .

## Упражнения

**31.1.** Для всех значений параметра  $a$  решите уравнение:

- а)  $(a^2 - 4)x - a + 2 = 0$ ;
- б)  $(2a^2 - 3a - 9)x - 2a - 3 = 0$ ;
- в)  $(25 - 4a^2)x - 2a - 5 = 0$ ;
- г)  $(a^2 - 3a - 4)x - a - 1 = 0$ .

**31.2.** Для всех значений параметра  $a$  решите неравенство:

- а)  $(25 - a^2)x \geq 5 - a$ ;
- б)  $(a^2 + 4a - 5)x < a + 5$ ;
- в)  $(9a^2 - 16)x \leq 3a + 4$ ;
- г)  $(a^2 - 2a - 8)x < a - 4$ .

**31.3.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $ax - x - 1 = a^2 - 2$ :

- а) имеет ровно один корень;
- б) имеет хотя бы один положительный корень;
- в) не имеет корней;
- г) имеет более одного корня.

**31.4.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых прямая  $y = (a + 2)x + 3 - 2a$ :

- а) пересекает ось  $Oy$  в точке, расположенной выше начала координат;
- б) пересекает ось  $Ox$  в точке, расположенной левее начала координат;
- в) пересекает ось  $Oy$  в точке, расположенной выше точки  $(0; -3)$  и ниже точки  $(0; -2)$ ;
- г) пересекает ось  $Ox$  в точке, расположенной правее точки  $(2; 0)$  и левее точки  $(4; 0)$ .

**31.5.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $a^2x - 4x + 6 = a^2 + a$ :

- а) имеет ровно один корень;
- б) не имеет корней;
- в) имеет положительный корень;
- г) имеет более одного корня?

**31.6.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $ax^2 + 6x - a + 10 = 0$ :

- а) имеет два различных корня;
- б) имеет ровно один корень;
- в) не имеет действительных корней;
- г) имеет хотя бы один корень.



**31.7.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(a + 1)x^2 - 4ax + 2a + 3 = 0$ :

- а) является линейным относительно  $x$ ;
- б) имеет ровно один корень;
- в) имеет два различных корня;
- г) не имеет корней.

**31.8.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(a + 1)x^2 - 2(a + 3)x + 2a + 3 = 0$ :

- а) является линейным относительно  $x$ ;
- б) имеет ровно один корень;
- в) имеет два различных корня;
- г) не имеет корней.

**31.9.** Для всех значений параметра  $a$  решите уравнение:

- а)  $(a - 3)x^2 + 2x - 5 = 0$ ;
- б)  $(a - 3)x^2 - 2(a + 1)x + a + 2 = 0$ .

**31.10.** Для всех значений параметра  $a$  решите неравенство:

- а)  $(a - 2)x^2 - 4x - 3 \geq 0$ ;
- б)  $(a - 3)x^2 - 2(a + 1)x + a + 2 > 0$ .

Для всех значений параметра  $a$  решите данное уравнение.

- 31.11.** а)  $\sin x = 3a + 2$ ;      в)  $\cos x = 3 - 2a$ ;  
б)  $\cos 2x = 4a - 3$ ;      г)  $\sin 2x = 3 - a$ .

- 31.12.** а)  $\cos\left(\frac{1}{3}x\right) = a^2 - 1$ ;      в)  $\sin\left(-\frac{2}{5}x\right) = 1 - a^2$ ;  
б)  $\sin x = a^2 + 4a + 4$ ;      г)  $\cos x = a^2 - 5a - 5$ .

**31.13.** При каких значениях параметра  $a$ :

- а) ось симметрии параболы  $y = 2x^2 - 5ax + 4$  пересекает ось абсцисс левее точки  $(-5; 0)$ ;
- б) ось симметрии параболы  $y = 3x^2 - 4ax + 2$  пересекает ось абсцисс правее точки  $(6; 0)$ ?

**31.14.** а) При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\frac{x - 3a + 1}{x + a} \leq 0$

выполняется для всех значений  $x$  из отрезка  $[-2; 3]$ ?

- б) При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\frac{2x - 4a + 1}{x + a} < 0$  выполняется для всех значений  $x$  из отрезка  $[-1; 5]$ ?

**31.15.** а) При каких значениях параметра  $a$  функция

$$y = ax^3 - 6ax^2 + 8x - 3$$

возрастает на всей числовой прямой?

б) При каких значениях параметра  $a$  функция

$$y = ax^3 + 6ax^2 - 8x + 5$$

убывает на всей числовой прямой?

**31.16.** а) При каких значениях параметра  $a$  функция

$$y = x^3 - 3a^2x + 7$$

имеет точку максимума  $x = -4$ ?

б) При каких значениях параметра  $a$  функция

$$y = x^3 - 27a^2x - 1$$

имеет точку минимума  $x = 6$ ?

**31.17.** При каких значениях параметра  $a$  прямая  $y = ax - 2$  является касательной к графику функции:

а)  $y = \sqrt{2x - 5}$ ;

б)  $y = -\sqrt{2x + 3}$ ?

**31.18.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множество решений неравенства  $\frac{6x - 2}{x + 1} < a$ :

а) содержит число 0;

б) содержит число 0, но не содержит число 1;

в) не содержит положительных чисел;

г) содержит ровно три натуральных числа.

**ИКТ 31.19.** При каких значениях параметра  $a$  графики данных функций имеют хотя бы одну общую точку:

а)  $y = x^2 - 6x + 7$  и  $y = 2x + a$ ;

б)  $y = x^2 + 4x - 3$  и  $y = -3x + a$ ?

**ИКТ 31.20.** При каких значениях параметра  $a$  имеет решения система уравнений:

а) 
$$\begin{cases} 2x^2 - 3x = y - 1, \\ y = 5x + a; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} 3x^2 - y = 3x + 2, \\ 9x + y = a? \end{cases}$$

**31.21.** Для всех значений параметра  $a$  решите неравенство:

а)  $(x - a)\sqrt{2x - 3} \geq 0$ ;

в)  $(3x - 4)\sqrt{x - a} \leq 0$ ;

б)  $(x - a)\lg(2x - 3) \geq 0$ ;

г)  $(3x - 4)\lg(x - a) \leq 0$ .



**31.22.** Найдите наименьшее целочисленное значение параметра  $a$ , при котором имеет два корня уравнение:

- а)  $x^2 - 2ax + a^2 - 5a + 4 = 0$ ;  
б)  $x^2 + 2(a - 1)x + a^2 - 5a + 17 = 0$ .

**31.23.** При каких значениях параметра  $a$  вершина параболы  $y = (2a - 1)x^2 - 4x + 3$  лежит внутри:

- а) первого координатного угла;  
б) третьего координатного угла;  
в) второго координатного угла;  
г) четвёртого координатного угла?

**31.24.** а) Найдите все положительные значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$(\log_5 a)x^2 - (2\log_5 a - 3)x + \log_5 a - 2,5 = 0$$

имеет единственный корень.

б) Найдите все положительные значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$(\log_8 a)x^2 + (2\log_8 a + 1)x + \log_8 a - 3 = 0$$

не имеет корней.

**31.25.** При каких значениях параметра  $a$  не имеет корней уравнение:

- а)  $27 \cdot 3^x + 16 = a + a \cdot 3^{x+2}$ ;  
б)  $49^x - 2a \cdot 7^{x+1} + 9 = 0$ ?

**31.26.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x^4 - 6x^2 + 3 = a$ :

- а) не имеет корней;  
б) имеет четыре корня?

**31.27.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых:

а) уравнение  $11^{2x} - 6 \cdot 11^x + a - 3 = 0$  имеет единственный корень;

б) уравнение  $\left(\frac{4}{9}\right)^x - 2(a + 1) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 4 = 0$  не имеет корней.

**ИКТ 31.28.** а) При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 = a$$

имеет не менее трёх корней?

б) При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$x^3 - 12x + 1 = a$$

имеет ровно три корня?

## § 32. Уравнения, неравенства и функции в задачах о среднем арифметическом

Среднее арифметическое — интересное и важное понятие. Оно широко и разнообразно используется и в классических разделах математики, и в современной математике, и в статистике и теории вероятностей, и в их многочисленных приложениях, в особенности при обработке данных и работе с информацией, и т. п. Наконец, оно прочно входит в нашу повседневную жизнь, в обычный разговорный язык. Всем нам знакомы и привычны термины: средняя отметка по предмету в школе или вузе, среднесуточная температура, средняя результативность команды, средняя скорость, средняя продолжительность жизни, средняя зарплата и т. д.

В этом параграфе мы разберём несколько примеров того, как наши знания об основных математических моделях — уравнениях, неравенствах и функциях — помогают в решении разнообразных задач, связанных с одним и тем же понятием — средним арифметическим.

Напомним, что *среднее арифметическое значение*<sup>1</sup> чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  равно сумме этих чисел, деленной на их количество:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n}{n}.$$

Эту формулу можно записать и так:  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \bar{x} \cdot n$ . Получаем простое, но важное свойство — *сумма чисел равна произведению их среднего на количество этих чисел*.

**Пример 1** До 31 октября Петя получил по русскому языку такие отметки: 4, 2, 4, 4, 5, 5. После этого он подряд получил несколько пятёрок. Могло ли среднее его отметок оказаться равным:

а) 4; б) 4,4; в) 4,45; г) 5?

**Решение.** Составим математическую модель. Для этого обозначим  $n$  — количество полученных пятёрок. Тогда количество всех отметок равно  $6 + n$ , а их сумма равна

$$4 + 2 + 4 + 4 + 5 + 5 + \overbrace{5 + \dots + 5}^n = 24 + 5n.$$

<sup>1</sup> Кратко — среднее.



Поэтому среднее отметок равно  $\bar{x} = \frac{24 + 5n}{6 + n}$  — это дробно-линейная функция от переменной  $n$ .

а) Уравнение  $\frac{24 + 5n}{6 + n} = 4$ ;  $24 + 5n = 24 + 4n$  имеет корень  $n = 0$ , но по условию  $n > 0$ .

б) Уравнение  $\frac{24 + 5n}{6 + n} = 4,4$ ;  $24 + 5n = 26,4 + 4,4n$ ;  $0,6n = 2,4$  имеет корень  $n = 4$  и он удовлетворяет условию задачи.

в) Уравнение  $\frac{24 + 5n}{6 + n} = 4,45$ ;  $24 + 5n = 26,7 + 4,45n$ ;  $0,55n = 2,7$  имеет корень, но это не целое число и поэтому не удовлетворяет условию задачи.

г) Уравнение  $\frac{24 + 5n}{6 + n} = 5$ ;  $24 + 5n = 30 + 5n$  не имеет корней.

**Ответ:** а), в), г) — нет; б) да, при  $n = 4$ .

Отметим, что ответ «нет» в пункте «г» можно получить без всяких вычислений, используя такое свойство среднего.

Среднее чисел не больше наибольшего из них (не меньше наименьшего) и при этом равенство возможно только в случае, когда все числа равны между собой.

Смотрите, все неравенства  $x_1 \leq x_{\text{наиб}}$ ,  $x_2 \leq x_{\text{наиб}}$ , ...,  $x_n \leq x_{\text{наиб}}$  верны. Значит,

$$n \cdot \bar{x} = x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \underbrace{x_{\text{наиб}} + \dots + x_{\text{наиб}}}_n = n \cdot x_{\text{наиб}}, \quad \bar{x} \leq x_{\text{наиб}},$$

а если хотя бы одно из неравенств  $x_1 \leq x_{\text{наиб}}$ , ...,  $x_n \leq x_{\text{наиб}}$  — строгое, то  $\bar{x} < x_{\text{наиб}}$ . Так как среди отметок в примере 1 уже есть различные и  $x_{\text{наиб}} = 5$ , то  $\bar{x} < 5$ .

**Пример 2** В 20 отделах компании в среднем работает по 50 сотрудников. Число сотрудников можно увеличить, но так, чтобы в среднем в отделах компании работало не более чем по 55 сотрудников. Решено число сотрудников в отделах увеличивать так: в отделе, первом в очереди, — на 1, во втором — на 2, в третьем — на 3 и т. д. В каком наибольшем числе отделов можно провести такое увеличение числа сотрудников?

**Решение.** Составим математическую модель. Для этого обозначим  $n$  — число отделов, в которых проводят увеличение числа сотрудников. По условию общее число новых рабочих мест равно  $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$ . Это сумма арифметической прогрессии, она равна  $\frac{n(n + 1)}{2}$ . По условию число работающих сотрудников равно  $50 \cdot 20 = 1000$ , а после увеличений это число станет равным  $1000 + \frac{n(n + 1)}{2}$ . Так как число отделов останется равным 20, то новое среднее числа сотрудников равно

$$\frac{1000 + \frac{n(n + 1)}{2}}{20} = 50 + \frac{n(n + 1)}{40}.$$

Получаем неравенство

$$50 + \frac{n(n + 1)}{40} \leq 55; \quad \frac{n(n + 1)}{40} \leq 5; \\ n(n + 1) \leq 200.$$

Его можно решить, как обычное квадратное неравенство (ветви параболы — вверх):

$$n^2 + n - 200 \leq 0, \\ \frac{-1 - \sqrt{801}}{2} \leq n \leq \frac{-1 + \sqrt{801}}{2} \approx \frac{27,3}{2} = 13,65$$

и выбрать его наибольшее натуральное решение  $n = 13$ .

Но проще и быстрее провести подбор, подставляя  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ , ... в неравенство  $n(n + 1) \leq 200$ . Если  $n = 13$ , то  $13 \cdot 14 < 200$ . Если  $n = 14$ , то  $14 \cdot 15 > 200$ .

**Ответ:** в 13 отделах.

В следующем примере речь пойдёт о школьных отметках и об изменении среднего арифметического этих отметок. Школьные отметки — это 1, 2, 3, 4 или 5.

**Пример 3** Среднее всех отметок ученика по истории равно 4,2. Ученик решил улучшить это среднее. Для этого он планирует в электронном журнале «удвоить» пятёрки: к каждой уже имеющейся пятёрке дописать ещё одну. Найти наибольшее возможное значение среднего отметок после такой замены.



**Решение.** Составим математическую модель. Для этого обозначим  $n$  — число отметок и  $k$  — число пятёрок. По условию сумма уже выставленных отметок равна  $4,2n$ . После «удвоения» пятёрок сумма отметок станет равной  $4,2n + 5k$ , а их число станет равным  $n + k$ . Поэтому

$$\bar{x}_{\text{нов}} = \frac{4,2n + 5k}{n + k} = \frac{4,2 + 5 \cdot \frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{4,2 + 5t}{1 + t},$$

где  $t = \frac{k}{n} \in [0; 1]$  — частота пятёрок среди уже выставленных отметок.

График дробно-линейной функции  $y = \frac{4,2 + 5t}{1 + t}$ ,  $t \geq 0$  — часть ветви гиперболы, расположенной в первой координатной четверти (рис. 181).

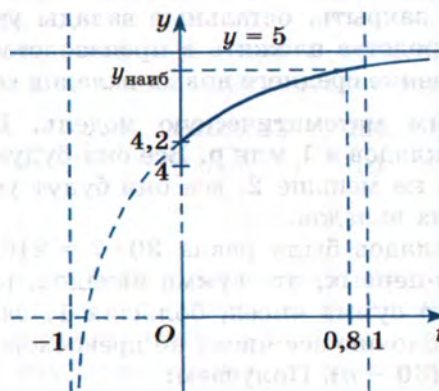


Рис. 181

При  $t \geq 0$  наименьшее значение равно  $y(0) = 4,2$ . При неограниченном возрастании  $t \geq 0$  график функции приближается к горизонтальной асимптоте  $y = 5$ . Значит, новое среднее будет наибольшим при наибольшем значении частоты  $t = \frac{k}{n}$ . Найдём его.

Сумма  $S$  всех отметок никак не меньше чем  $5k + (n - k)$ . Действительно,  $5k$  — это сумма всех пятёрок, а остальные  $n - k$  отметок не меньше 1. Значит,

$$4,2n = S \geq 5k + (n - k); \quad 4,2n \geq 4k + n;$$

$$4,2 \geq 4 \frac{k}{n} + 1; \quad 3,2 \geq 4 \frac{k}{n}; \quad \frac{k}{n} \leq 0,8.$$

Равенство достигается на наборе отметок 5, 5, 5, 3, 3. В итоге наибольшее значение нового среднего равно

$$y(0,8) = \frac{4,2 + 5 \cdot 0,8}{1 + 0,8} = \frac{8,2}{1,8} = \frac{41}{9} = 4,5).$$

Например, оно не может равняться 4,6.

Ответ:  $4\frac{5}{9}$ .

Вот ещё один пример, в котором свойства дробно-линейной функции и соответствующие неравенства составляют основу решения.

**Пример 4** Финансовая компания имела вклады в 30 банках. Среднее вкладов было равно 7 млн р., а размер каждого вклада — целое число миллионов рублей, не превосходящее 40. Решено было все вклады в 1 млн р. закрыть, остальные вклады уменьшить вдвое, а высвободившиеся средства вложить в производство. Найти наибольшее возможное значение среднего новых вкладов компании в банки.

**Решение.** Составим математическую модель. Для этого обозначим  $n$  количество вкладов в 1 млн р. Все они будут закрыты. Остальные  $30 - n$  вкладов не меньше 2, все они будут уменьшены вдвое и составят набор новых вкладов.

Общая сумма вкладов была равна  $30 \cdot 7 = 210$ . Она состояла из двух слагаемых. Во-первых, это сумма вкладов, равных 1, она равна  $n$ . Во-вторых, это сумма чисел, больших 1, она, соответственно, равна  $210 - n$ . По условию все числа не превосходят 40 и поэтому их сумма не больше  $40(30 - n)$ . Получаем:

$$210 - n \leq 40(30 - n);$$

$$39n \leq 1200 - 210;$$

$$n \leq \frac{990}{39} \approx 25,3.$$

Так как  $n$  — число целое, то  $n \leq 25$ .

Среднее  $30 - n$  новых вкладов равно  $\frac{1}{2} \cdot \frac{210 - n}{30 - n}$  и нужно найти наибольшее значение функции  $y = \frac{210 - n}{2(30 - n)}$ ,  $n \leq 25$ . График дробно-



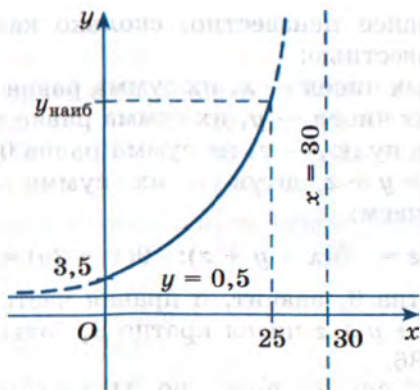


Рис. 182

линейной функции  $y = \frac{210 - x}{2(30 - x)}$  — это гипербола,  $x = 30$  — её вертикальная асимптота,  $y = 0,5$  — горизонтальная асимптота,  $y(0) = 3,5$  (рис. 182).

Нам нужна часть левой ветви при  $0 \leq x \leq 25$ . На этом отрезке функция возрастает и её наибольшее значение равно

$$y_{\text{наиб}} = y(25) = \frac{210 - 25}{2(30 - 25)} = \frac{185}{10} = 18,5.$$

**Ответ:** 18,5 млн р.

В заключение рассмотрим пример, решение которого в пункте «а» наглядно показывает, как составление уравнения (математической модели) позволяет получить ответ, а решение в пунктах «б» и «в» основано на графическом способе решения систем линейных уравнений и неравенств.

**Пример 5** На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно  $-5$ , среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно  $-18$ .

- Сколько чисел написано на доске?
- Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

**Решение.** а) Заранее неизвестно, сколько каких чисел имеется. Обозначим эти неизвестные:

- положительных чисел —  $x$ , их сумма равна  $9x$ ;
- отрицательных чисел —  $y$ , их сумма равна  $-18y$ ;
- чисел, равных нулю, —  $z$ , их сумма равна  $0$ .

Всего чисел  $x + y + z$  штук и их сумма по условию равна  $-5(x + y + z)$ . Получаем:

$$9x - 18y + 0 \cdot z = -5(x + y + z); \quad 9(x - 2y) = -5(x + y + z).$$

Левая часть кратна 9, значит, и правая часть кратна 9. Поэтому общее количество  $x + y + z$  чисел кратно 9, больше 27 и меньше 45. Вывод:  $x + y + z = 36$ .

б)  $9(x - 2y) = -5 \cdot 36$ ;  $x - 2y = -20$ . Построим график уравнения  $x - 2y = -20$ . Это прямая, проходящая через точки  $(0; 10)$  и  $(-20; 0)$ . Нам нужна её часть в первой четверти. Точнее, нужна часть, лежа-

щая и в полуплоскости  $x + y \leq 36$ . Решая систему  $\begin{cases} x - 2y = -20, \\ x + y = 36, \end{cases}$  на-  
ходим, что это отрезок  $I$  с концами в точках  $(0; 10)$  и  $(17\frac{1}{3}; 18\frac{2}{3})$  (рис. 183).

Он лежит выше прямой  $y = x$  и для его точек  $y > x$ . Значит, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Числа  $x$  и  $y$  — целые, а  $x = 2y - 20$ . Поэтому на отрезке  $I$  нужны только точки с чётными абсциссами:  $(2; 11)$ ,  $(4; 12)$ ,  $(6; 13)$ , ...,  $(16; 18)$ . Поэтому  $x_{\text{наиб}} = 16$ ;  $y_{\text{наиб}} = 18$ .

**Ответ:** а) 36; б) отрицательных; в) 16.

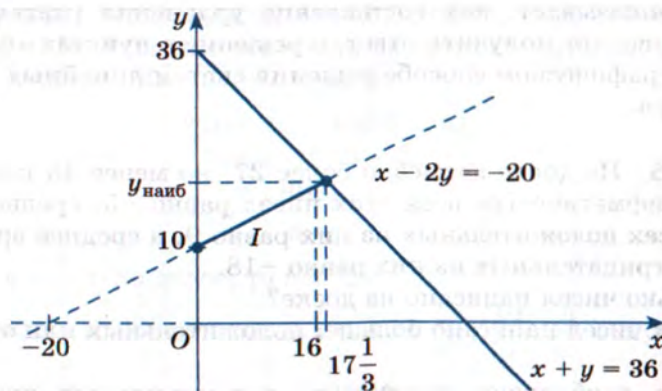


Рис. 183



## Упражнения

- 32.1.** Вычислите среднее следующего набора чисел:  
а) 1, 2, 3, 4, 5; г) -1, -2, -3, 4, 5;  
б) -1, 2, 3, 4, 5; д) 1, -2, 3, -4, 5;  
в) -1, -2, 3, 4, 5; е) 1, -2, -3, -4, 5.
- 32.2.** Вычислите среднее следующего набора натуральных чисел:  
а) от 1 до 5 включительно;  
б) от 2 до 6 включительно;  
в) от 3 до 12 включительно;  
г) от 4 до 23 включительно;  
д) состоящего из всех нечётных однозначных чисел;  
е) состоящего из всех простых однозначных чисел.
- 32.3.** Какое число следует включить в набор -3, 4, 5, 6 для того, чтобы среднее стало равняться:  
а) -2; б) 0; в) 100; г) 1000; д) 2020; е) л?
- 32.4.** Ученик хочет, чтобы его средняя отметка стала больше 4. Какое наименьшее количество пятёрок подряд он должен для этого получить, если сейчас его отметки таковы:  
а) 4, 4, 4, 4, 4, 3; г) 4, 4, 3, 3, 2, 2;  
б) 4, 4, 4, 4, 3, 3; д) 3, 3, 3, 3, 2, 2;  
в) 4, 4, 4, 4, 4, 2; е) 2, 2, 2, 2, 2?
- 32.5.** По плану средний ежемесячный доход предприятия за год должен быть не менее  $a$  млн р., но за первые полгода он оказался равным  $b$  млн р.,  $b < a$ . Найдите наименьшее среднее значение  $c$  ежемесячного дохода за вторые полгода, обеспечивающего выполнение плана, если:  
а)  $a = 2$ ,  $b = 1$ ; г)  $a = 10$ ,  $b = 7$ ;  
б)  $a = 3$ ,  $b = 2$ ; д)  $a > 1$ ,  $b = a - 1$ ;  
в)  $a = 10$ ,  $b = 9$ ; е)  $a > b > 0$ .
- 32.6.** По плану средние ежемесячные расходы на услуги связи за год должны быть не более  $a$  тыс. р., но за первые 7 месяцев года они оказались равны  $b$  тыс. р.,  $b > a$ . Найдите наибольшее среднее значение  $c$  ежемесячных расходов на связь за оставшиеся месяцы, обеспечивающее выполнение плана, если:  
а)  $a = 10$ ,  $b = 11$ ,  $c$  — целое число тысяч рублей;  
б)  $a = 11$ ,  $b = 13$ ,  $c$  — целое число тысяч рублей;  
в)  $a = 20$ ,  $b = 23$ ,  $c$  — целое число тысяч рублей;  
г)  $a = 20$ ,  $b = 23$ ,  $c$  — целое число сотен рублей;  
д)  $a > 5$ ,  $b = a + 3$ ;  
е)  $0 < a < b$ .

**32.7.** Компании № 1, № 2, ..., № 20 имеют по несколько счетов в банке В, в среднем по  $a$  счетов. Банк решил увеличить это среднее, предложив открыть дополнительно компании № 1 один счёт, компании № 2 — два счёта, компании № 3 — три счёта и т. д. В каком наименьшем числе компаний следует таким образом открыть счета для того, чтобы среднее числа счетов стало не меньше  $b$ , если:

а)  $a = 2, b = 3$ ;

б)  $a = 3, b = 5$ ;

в)  $a = 10, b = 15$ ;

г)  $a = 10, b = 20$ ;

д)  $a = 2, b > 2$ ;

е)  $b > a > 0$ ?

**32.8.** Среднее всех отметок ученика по физкультуре равно 3,8. Ученик решил улучшить это среднее. Для этого он планирует в электронном журнале «удвоить» пятёрки: к каждой уже имеющейся пятёрке дописать ещё одну пятёрку.

а) Вычислите среднее отметок  $\underbrace{5, \dots, 5}_7, 1, 1, 1$ .

б) Приведите пример того же среднего 3,8 для отметок без единиц.

в) Приведите пример того же среднего 3,8 для отметок без пятёрок.

г) Докажите, что наибольшая возможная частота пятёрок равна 0,7.

д) Докажите, что среднее значение новых отметок есть дробно-линейная функция от частоты пятёрок в первоначальном наборе отметок.

е) Найдите наибольшее возможное значение среднего новых отметок.

**32.9.** Финансовая компания имела вклады в 20 банках. Среднее вкладов равно 27 млн р. Размер каждого вклада — целое число миллионов рублей, не превосходящее 40. Компания сняла по 1 млн р. с некоторых (быть может, одного) вкладов и закрыла после этого все обнулившиеся вклады.

а) Могла ли половина вкладов быть по 1 млн р.?

б) Могло ли быть 7 вкладов по 1 млн р.?

в) Докажите, что имелось не более 6 вкладов по 1 млн р.

г) Вклады (в млн р.) были следующие: 1, 14, 15, 30, ..., 30; уменьшались первые три вклада (в 1, 14 и 15 млн р.). Найдите среднее новых вкладов.



д) Вклады (в млн р.) были следующие:  $\underbrace{1, \dots, 1, 14}_6, \underbrace{40, \dots, 40}_{13}$ ,

уменьшались первые шесть вкладов (в млн р.). Найдите среднее новых вкладов.

е) Докажите, что ответ в «д» — наибольший из всех возможных значений нового среднего.

**32.10.** В ряд через запятую произвольно написали 47 натуральных чисел, для которых среднее арифметическое любых 9 подряд идущих чисел меньше 1,7.

а) Может ли среди 9 подряд идущих чисел быть ровно одна единица?

б) Может ли среди 9 подряд идущих чисел быть ровно две единицы?

в) Докажите, что среди 9 подряд идущих чисел всегда есть хотя бы три единицы.

г) Какое наименьшее количество единиц может быть среди всех выписанных чисел?

д) Докажите, что сумма всех 47 чисел не больше 83.

е) Приведите пример того, что сумма всех 47 чисел может равняться 83.

# Приложение

Таблица приближённых значений функции Лапласа  $y = \Phi(x)$  для  $x \geq 0$   
(вместо значения 0,abcd указаны четыре знака abcd после запятой)

| x   | Сотые доли x |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     | 0            | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
| 0,0 | 0,0000       | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| 0,1 | 0,398        | 0,438  | 0,478  | 0,517  | 0,557  | 0,596  | 0,636  | 0,675  | 0,714  | 0,753  |
| 0,2 | 0,793        | 0,832  | 0,871  | 0,910  | 0,948  | 0,987  | 1,026  | 1,064  | 1,103  | 1,141  |
| 0,3 | 1,179        | 1,217  | 1,255  | 1,293  | 1,331  | 1,368  | 1,406  | 1,443  | 1,480  | 1,517  |
| 0,4 | 1,554        | 1,591  | 1,628  | 1,664  | 1,700  | 1,736  | 1,772  | 1,808  | 1,844  | 1,879  |
| 0,5 | 1,915        | 1,950  | 1,985  | 2,019  | 2,054  | 2,088  | 2,123  | 2,157  | 2,190  | 2,224  |
| 0,6 | 2,257        | 2,291  | 2,324  | 2,357  | 2,389  | 2,422  | 2,454  | 2,486  | 2,517  | 2,549  |
| 0,7 | 2,580        | 2,611  | 2,642  | 2,673  | 2,704  | 2,734  | 2,764  | 2,794  | 2,823  | 2,852  |
| 0,8 | 2,881        | 2,910  | 2,939  | 2,967  | 2,995  | 3,023  | 3,051  | 3,078  | 3,106  | 3,133  |
| 0,9 | 3,159        | 3,186  | 3,212  | 3,238  | 3,264  | 3,289  | 3,315  | 3,340  | 3,365  | 3,389  |
| 1,0 | 3,413        | 3,438  | 3,461  | 3,485  | 3,508  | 3,531  | 3,554  | 3,577  | 3,599  | 3,621  |
| 1,1 | 3,643        | 3,665  | 3,686  | 3,708  | 3,729  | 3,749  | 3,770  | 3,790  | 3,810  | 3,830  |
| 1,2 | 3,849        | 3,869  | 3,888  | 3,907  | 3,925  | 3,944  | 3,962  | 3,980  | 3,997  | 4,015  |
| 1,3 | 4,032        | 4,049  | 4,066  | 4,082  | 4,099  | 4,115  | 4,131  | 4,147  | 4,162  | 4,177  |
| 1,4 | 4,192        | 4,207  | 4,222  | 4,236  | 4,251  | 4,265  | 4,279  | 4,292  | 4,306  | 4,319  |
| 1,5 | 4,332        | 4,345  | 4,357  | 4,370  | 4,382  | 4,394  | 4,406  | 4,418  | 4,429  | 4,441  |
| 1,6 | 4,452        | 4,463  | 4,474  | 4,484  | 4,495  | 4,505  | 4,515  | 4,525  | 4,535  | 4,545  |
| 1,7 | 4,554        | 4,564  | 4,573  | 4,582  | 4,591  | 4,599  | 4,608  | 4,616  | 4,625  | 4,633  |



|     |            |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1,8 | 4641       | 4649 | 4656 | 4664 | 4671 | 4678 | 4686 | 4693 | 4699 | 4706 |
| 1,9 | 4713       | 4719 | 4726 | 4732 | 4738 | 4744 | 4750 | 4756 | 4761 | 4767 |
| 2,0 | 4772       | 4778 | 4783 | 4788 | 4793 | 4798 | 4803 | 4808 | 4812 | 4817 |
| 2,1 | 4821       | 4826 | 4830 | 4834 | 4838 | 4842 | 4846 | 4850 | 4854 | 4857 |
| 2,2 | 4861       | 4864 | 4868 | 4871 | 4875 | 4878 | 4881 | 4884 | 4887 | 4890 |
| 2,3 | 4893       | 4896 | 4898 | 4901 | 4904 | 4906 | 4909 | 4911 | 4913 | 4916 |
| 2,4 | 4918       | 4920 | 4922 | 4925 | 4927 | 4929 | 4931 | 4932 | 4934 | 4936 |
| 2,5 | 4938       | 4940 | 4941 | 4943 | 4945 | 4946 | 4948 | 4949 | 4951 | 4952 |
| 2,6 | 4953       | 4955 | 4956 | 4957 | 4959 | 4960 | 4961 | 4962 | 4963 | 4964 |
| 2,7 | 4965       | 4966 | 4967 | 4968 | 4969 | 4970 | 4971 | 4972 | 4973 | 4974 |
| 2,8 | 4974       | 4975 | 4976 | 4977 | 4977 | 4978 | 4979 | 4979 | 4980 | 4981 |
| 2,9 | 4981       | 4982 | 4982 | 4983 | 4984 | 4984 | 4985 | 4985 | 4986 | 4986 |
| 3,0 | 4987       | 4987 | 4987 | 4988 | 4988 | 4989 | 4989 | 4989 | 4990 | 4990 |
| 3,2 | 4993       | 4993 | 4994 | 4994 | 4994 | 4994 | 4994 | 4995 | 4995 | 4995 |
| 3,4 | 4997       | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4997 | 4998 |
| 3,5 | 0,4998     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 3,6 | 4998       | 4998 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 |
| 3,7 | 0,4999     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 3,8 | 4999       | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 | 4999 |
| 3,9 | 0,499952   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 4,0 | 0,499968   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 4,5 | 0,499997   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 5,0 | 0,49999971 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |

# Ответы

## Глава 4

**§ 20** 20.8. г)  $-\frac{1}{4}\cos 2x$ ; д)  $\operatorname{tg} x - x$ ; е)  $-\operatorname{ctg} x$ . 20.9. г)  $\sqrt{x} + 1,5$ ; д)  $x^4 - 1,5$ ;

е)  $\ln x + 1$ . 20.10. г)  $-\sqrt{2}\cos x + 2$ ; д)  $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 4$ ; е)  $-2\cos x - 4$ . 20.13. а)  $x = 3,25$ ;

б)  $x = -7,2$ . 20.14.  $p = \pm 4$ . 20.15. г)  $y_{\text{наим}} = 10$ ;  $y_{\text{наиб}} = 266$ ; д)  $y_{\text{наим}} = -12$ ;

$y_{\text{наиб}} = -8$ ; е)  $y_{\text{наим}} = \frac{11\pi - 12}{2}$ ,  $y_{\text{наиб}} = 2\pi + 6\sqrt{3}$ . 20.16. а) 148 750 человек;

б) 63 ученика.

**§ 21** 21.6. г)  $\frac{(x-2)^4}{4}$ ; д)  $-\frac{3}{2(4x+3)^2}$ ; е)  $\frac{3}{2}\sqrt{6x+1}$ . 21.7. г)  $2\cos x + \sin x$ ;

д)  $3\sin \frac{x}{3} - 4\operatorname{tg} x$ ; е)  $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$ . 21.8. г)  $\frac{10^x}{\ln 10} + 3\ln x$ ; д)  $-\frac{1}{3}e^{2-3x} - 2\ln x$ ;

е)  $\frac{1}{5}e^{5x-4} + \frac{1}{5}\ln x$ . 21.9. г)  $2x^2 - 3x - 4$ ; д)  $2x^3 + x^2 + 2$ ; е)  $\sqrt{2x-1} + 1$ .

21.10. г)  $-2\cos x - \sin x + 9$ ; д)  $-3\operatorname{ctg} x - 2\sin \frac{x}{2} + 1$ ; е)  $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{x^2}{2} - 2,5$ .

21.11.  $s = 0,5(t+1)^4 - 6t + 1$ . 21.12. г)  $s = 2t^2 + 3t - 35$ ; д)  $s = 0,5\sin 4t + 3,5$ ;

е)  $s = \frac{2}{t} - 3$ . 21.14. р)  $0,2\sin(5x-3) + C$ ; д)  $-0,5\cos(5x-6) + C$ ; е)  $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - 1\right) + C$ .

21.15. г)  $-\frac{1}{2(4x-3)^2} + C$ ; д)  $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(5x+2)^2} + C$ ; е)  $-\frac{2}{21}\sqrt[4]{(5-6x)^7} + C$ .

21.16. г)  $0,5e^{0,5x} - 2x + C$ ; д)  $-0,5e^{1-2x} - 3\ln x + C$ ; е)  $\frac{1}{5\ln 3} \cdot 3^{5x-2} + \frac{1}{5}\ln x + C$ .

21.18. г)  $-0,5e^{1-2x} + 4\sin \frac{x}{2} + C$ ; д)  $\ln|x| - 0,5\operatorname{ctg} 6x + C$ ; е)  $4\sqrt{x} - 2,5\sqrt[5]{x^2} + C$ .

21.19. г)  $\frac{x^4}{4} + x^3 + C$ ; д)  $\frac{1}{4}\sin 4x + C$ ; е)  $\ln|x-3| + C$ . 21.20. а)  $\frac{1}{9}$ ; б)  $\frac{4}{9}$ .



21.21. а) 0,63; б) 0,97; в) 0,27; г) 0,73. 21.22. а), б)  $a > 0$ . 21.23. а)  $-\frac{7\pi}{4}$ ;

б)  $-\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{7\pi}{4}$ .

§ 22 22.2. б) 26; в) 47; г) 9,25; д) 9; е) 0,25. 22.3. а) 26,5; б) 21,5. 22.4. б) 4;

г) 3,75; е) 2. 22.5. б)  $\frac{7}{288}$ ; г)  $-\frac{2}{15}$ ; е) 3. 22.6. б) -18; г)  $69\frac{1}{3}$ ; е)  $14\frac{2}{3}$ . 22.7. г) -18;

д) 6; е) 62. 22.8. г) 0; д)  $-1\frac{1}{15}$ ; е) -140. 22.9. б) 21; г) 312,4; е)  $\frac{81-12^4}{20}$ .

22.10. б) 0,75; г)  $\frac{4}{15}$ ; е)  $\frac{9^3-5^3}{45^3}$ . 22.11. б) 2; г)  $\frac{14}{15}$ ; е) 12. 22.12. б) -1; г) 2; е) 2.

22.13. г) 1; д)  $\sqrt{3}-1$ ; е) -0,25. 22.14. б)  $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$ ; г)  $e^3-e$ ; е)  $\frac{8}{\ln 3}$ . 22.15. б) 2;

г)  $3\ln 3$ ; е)  $\frac{1}{3}\ln 2$ . 22.16. г) 45; д) 50; е)  $4(4-\sqrt{6})$ . 22.17. а)  $\frac{1}{3}$ ; б)  $10\frac{2}{3}$ .

22.18. а)  $\ln 2 + 5\frac{5}{8}$ ; б)  $15 + \ln 4$ . 22.19. а)  $1,5 + \frac{\pi}{3}$ ; б)  $2 - \frac{\pi}{4}$ .

22.20. а)  $-3 < x \leq -2,5$ ;  $x = 0$ ,  $x = 4$ ; б)  $-4 < x \leq 0$ ;  $2 \leq x \leq 6$ . 22.21. а)  $-\frac{3\pi}{2}$ ,

$-\frac{13\pi}{6}$ ; б)  $\pi$ ,  $3\pi$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{5\pi}{3}$ ,  $\frac{7\pi}{3}$ . 22.22. а) 72 кг; б) на 150 кг.

§ 23 23.1. г) 4; д)  $16\frac{2}{3}$ ; е) 6. 23.2. г)  $\frac{4}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ ; д) 1,5; е) 1. 23.3. г)  $\sqrt{2}$ ;

д)  $2-\sqrt{2}$ ; е)  $\frac{2\pi-3}{6}$ . 23.4. г)  $1-\frac{1}{e}$ ; д)  $\frac{3}{2\ln 2}$ ; е)  $2\ln 2$ . 23.5. г)  $\frac{1}{2}(e^4-1)$ ; д)  $\frac{1}{3}\ln 2$ ;

е)  $\frac{9}{10\ln 10}$ . 23.6. г) 36; д)  $1\frac{1}{3}$ ; е) 0,4. 23.7. г)  $10\frac{2}{3}$ ; д)  $1\frac{1}{3}$ ; е)  $2\frac{2}{3}$ . 23.8. г)  $\pi-2$ ;

д)  $7,5-8\ln 2$ ; е)  $5-\frac{3}{\ln 2}$ . 23.9. в)  $2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}$ ; г) 1. 23.10. а) 4,5; б)  $4\frac{1}{3}$ ; в)  $\frac{1}{6}$ ;

г) 22,5. 23.11. г) 3 : 1; д) 1 : 3; е) 1 : 2. 23.12. а), б) 4,5. 23.13. г)  $14\frac{5}{12}$ ; д)  $5\frac{1}{3}$ ;

е)  $4+\frac{1}{\ln 2}$ . 23.14. а)  $\frac{1}{12}$ ; б) 6,75. 23.15. а) 6,72; б)  $1\frac{1}{3}$ . 23.16. а), б)  $\frac{1}{8}$ .

23.17. а)  $2 < x < 3$ ;  $7 < x < 8$ ; б)  $x > 7$ . 23.18. а) 36; б) 32.

Тест 1. в), г). 2. б). 3. а). 4. г). 5. б). 6. 6,5. 7. А — 4; Б — 2; В — 1. 8. б). 9. 28. 10. 3,25.

Дополнительные задачи 1. а)—в) Окружность; г) круг; д) боковую поверхность цилиндра; е) цилиндр. 3. а), б) Окружность радиусом  $R$ ; в) круг радиусом  $R$ ; г) круг радиусом  $0,5R$ ; д) цилиндр с радиусом  $R$  основания и высотой  $H$ ;

- е) конус с радиусом  $R$  основания и высотой  $H$ . 6. а)  $\pi R^2$ ; б)  $\frac{\pi R^2}{4}$ ; в)  $y = \frac{R}{H}x$ ;  
 г)  $a = 0$ ,  $b = H$ ,  $f(x) = \frac{R}{H}x$ ; д)  $\frac{1}{3}\pi R^2 H$ ; е)  $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ . 7. а)  $\pi r^2$ ; б)  $\pi R^2$ ;  
 в)  $y = \frac{R-r}{H}x + r$ ; г)  $a = 0$ ,  $b = H$ ,  $f(x) = \frac{R-r}{H}x + r$ ; д)  $\frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$ ;  
 е)  $V_{\text{ус. конуса}} = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$ . 8. а)  $\frac{2\pi}{3}$ ; б), в)  $\frac{4\pi}{3}$ ; г)  $1,5\pi$ ; д)  $\pi$ ; е)  $\frac{7\pi}{6}$ . 9. а)  $\frac{\pi}{2}$ ;  
 б)  $2\pi$ ; в)  $1,5\pi$ ; г)  $60\pi$ ; д)  $80\pi$ ; е)  $104\pi$ . 10. а)  $1:1$ ; б)  $27:5$ ; в)  $5:27$ ; г)  $20:7$ ;  
 д)  $25:2$ ; е)  $81:44$ .

## Глава 5

- § 24** 24.3. а) 0,2; б) 0; в) 0,3; г) 0,8; д) 1; е) 0. 24.4. а) 0,9; б) 0; в) 0,2; г) 0,9;  
 д) 0,4; е) 0,925. 24.5. а) 0; б) 1; в) 0,25; г) 0; д)  $\frac{5}{9}$ ; е)  $\frac{1}{3}$ . 24.6. а) 0; б) 0; в) 0,4;  
 г) 0,25; д) 0,1; е) 0,4. 24.7. а) 1; б) 0; в) 0,25; г)  $\frac{1}{16}$ ; д)  $\frac{8}{9}$ ; е)  $\frac{119}{144} \approx 0,826$ .  
 24.8. а) 0; б) 0,5; в) 0,5; г) 0,5; д) 0,2; е) 0,21. 24.9. а) 0; б) 1; в) 0; г)  $\frac{8}{27}$ ; д)  $\frac{1}{27}$ ;  
 е)  $\frac{2}{9}$ . 24.10. а) 1; б) 0; в)  $\frac{1}{36}$ ; г)  $\frac{3}{4}$ ; д)  $\frac{35}{36}$ ; е)  $\frac{7}{9}$ . 24.13. а) 4; б) 0,2. 24.14. б) 63 уче-  
 ника.  
**§ 25** 25.1. а) 1; б) 0; в) 0,5; г) 0,5; д) 0,25; е) 0,05. 25.2. а) 1; б) 0; в) 0,2;  
 г) 0,4; д) 0,8; е) 0,4. 25.3. а) 3; б) 5; в) 21; г)  $2\frac{1}{999}$ ; д) таких значений  $a$  не суще-  
 ствует; е)  $1 < a \leq 2$ . 25.4. а) 0; б) 0; в) 1; г) 0,5; д) 0,25; е) 0,01. 25.5. а) 1; б) 0;  
 в) 0,5; г) 0,405; д) 0,875; е) 0,775. 25.6. а) 0; б) 0,1915; в) 0,3413; г) 0,4332;  
 д) 0,4772; е) 0,4938. 25.7. а) 0,0478; б)  $-0,1331$ ; в) 0,2123; г)  $-0,2823$ ; д) 0,4625;  
 е) 0,498. 25.8. а) 0,2853; б) 0,4068; в) 0,4664; г) 0,5746; д) 0,6651; е) 0,895.  
 25.9. а) 0,3413; б) 0,1359; в) 0,8185; г) 0,6247; д) 0,53897; е) 0,1309.  
 25.10. а) 0,1915; б) 0,2857; в) 0,9104; г) 0,8185; д) 0,6826; е) 0,9772. 25.11. а) 0;  
 б) 2; в)  $-\frac{2}{3}$ ; г)  $-1$ . 25.13. в) 104; г) 502.  
**§ 26** 26.1. а), б), г)  $\frac{2}{9}$ ; в)  $\frac{5}{9}$ ; д)  $\frac{1}{15}$ ; е)  $\frac{28}{45}$ . 26.2. а), б)  $\frac{1}{12}$ ; в), г)  $\frac{1}{4}$ ; д)  $\frac{1}{24}$ ; е)  $\frac{7}{15}$ .  
 26.3. а)  $P_{16}(6) = C_{16}^6 \cdot 0,5^{16}$ ; б)  $P_{24}(4) = C_{24}^4 \cdot 0,5^{24}$ ; в)  $P_{199}(99) = C_{199}^{99} \cdot 0,5^{199}$ ;  
 г)  $P_{500}(50) = C_{500}^{50} \cdot 0,4^{50} \cdot 0,6^{450}$ ; д)  $P_{700}(170) = C_{700}^{170} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{170} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{530}$ ;



- е)  $P_{735}(573) = C_{735}^{573} \cdot \frac{2^{162}}{3^{735}}$ . 26.4. а)  $P_{60}(6) = C_{60}^6 \cdot 0,4^{54} \cdot 0,6^6$ ;  
 б)  $P_{34}(6) = C_{34}^6 \cdot 0,7^6 \cdot 0,3^{28}$ ; в)  $P_{55}(5) = C_{55}^5 \cdot 0,5^{55}$ ; г)  $P_{100}(10) = C_{100}^{10} \cdot 0,9^{90} \cdot 0,1^{10}$ ;  
 д)  $P_{33}(11) = C_{33}^{11} \cdot 0,6^{11} \cdot 0,4^{22}$ ; е)  $P_{50}(45) = C_{50}^{45} \cdot 0,6^{45} \cdot 0,4^5$ . 26.5. а) 0,2; б) 0,8;  
 в) 2000; г) 40; д) 1960 и 2040; е) 0,6826. 26.6. а) 500; б) 20; в) практически 1;  
 г) практически 0; д) 0,5; е) 0,9876. 26.7. а) 0; б) 0,5; в) 1; г), е) 0,4772; д) 0,6826.  
 26.8. а) 0,0796; б) 0,0671; в) 0,0781; г) 0,0108; д) 0,0736; е) 0,0009.  
 26.9. а) Практически 0; б) практически 1; в) 0,5; г) 0,0671; д) 0,6826; е) 0,9544.  
 26.10. а)—в) Практически 0; г) 0,0638; д) 0,0544; е) 0,0278. 26.11. г)  $x = -1$  —  
 точка минимума,  $x = 3$  — точка максимума; д)  $x = 1$  — точка минимума,  
 $x = 0$  — точка максимума; е)  $x = -0,5$  — точка минимума,  $x = 1$  — точка макси-  
 мума. 26.12. г)  $y_{\text{наим}} = 0$ ;  $y_{\text{наиб}} = e^4$ ; д)  $y_{\text{наим}}$  не существует;  $y_{\text{наиб}} = 9$ ;  
 е)  $y_{\text{наим}} = 1 - \pi$ ;  $y_{\text{наиб}} = 1$ . 26.13. б)  $a = 1$ .

**Тест** 1. в). 2. г). 3. а). 4. б). 5. в). 6. г). 7. а). 8. б). 9. в). 10. г).

- Дополнительные задачи** 1. а) 0,5; б) 0,25; в) 0,75; г) 0,125; д) 0,0625;  
 е) 0,0625. 2. а)  $\frac{1}{6}$ ; б)  $\frac{5}{36}$ ; в)  $\frac{25}{216}$ ; г)  $\frac{191}{216}$ ; д)  $\frac{55}{216}$ ; е)  $\frac{125}{216}$ . 3. а) 2; б) 3; в) 4; г) 1;  
 д), е) — не определено. 4. а)  $p$ ; б)  $qp$ ; в)  $q^2p$ ; г)  $q^3p$ ; д)  $q^{99}p$ ; е)  $q^{k-1}p$ . 6. а) 0,5;  
 б) 0,125; в) 0,03125; е) 10. 7. а)  $p = 0,25$ ,  $q = 0,75$ ; б) 0,1875;  
 в)  $0,75^2 \cdot 0,25 \approx 0,141$ ; е) 13. 8. а)  $p = 0,1$ ,  $q = 0,9$ ; б) 0,081; в) 0,0729; е) 8.  
 9. а)  $q^2p$ ; б)  $q^{35}p$ ; в)  $p(1 + q)$ ; г)  $q^3$ ; д)  $\frac{1}{1 + q}$ ; е)  $\frac{q}{1 + q}$ .

## Глава 6

- § 27** 27.2. г) Да; д) нет; е) да. 27.5. г) Нет; д) да; е) да. 27.6. г) Нет; д) да;  
 е) нет. 27.7. г) Да; д) да; е) нет. 27.8. г)  $2 < x \leq 5$ ; д)  $2 < x < 3$ ;  $3 < x < 5$ ;  
 е)  $2 < x \leq 5$ . 27.10. г) 2; 7; д) 6; е) 3. 27.11. в) 4; г) 0,25. 27.12. а), б) Нет корней.  
 27.13. г) 2; -5; д) нет корней; е) -3. 27.14. г)  $\pm 1$ ;  $\pm \frac{\pi}{6}$ ; д) 0; 2; -3;  $\pm \frac{\pi}{2}$ ;  
 е)  $\pm \frac{\pi}{2}$ ;  $\pm 2\sqrt{2}$ .  
**§ 28** 28.1. в) 2; г)  $5\frac{2}{3}$ . 28.2. в) 2; -0,6; г) 2;  $1\frac{3}{8}$ . 28.3. в) 3; г) 2. 28.4. в)  $\pm 2$ ;  
 г)  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 28.5. а) 1; б) 3; в) 1; г) 4. 28.6. в) 7; г) -1. 28.7. в) 6; г) 6.  
 28.8. в) Нет корней; г) 5. 28.9. в) 0,6; г) 2. 28.10. а) 0,  $(-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n = 0, 1, 2$ ,  
 3, ..., б) 8,  $120, -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n = 3, 4, 5, 6, \dots$ . 28.11. в) 4; г) -1. 28.12. в) -2; -1; г) 8.

- 28.13. а) 4; б) 0; в) 0,5; г) 3. 28.14. а) 0,1; б) 1,5; в) 0; г) 7. 28.15. а) 2; б) 1.
- 28.16. а) 1; б) 7. 28.17. в)  $\pm 1$ ; г) 0;  $\frac{4}{3}$ . 28.18. в) 2; -1; г)  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . 28.19. в) 9; 16; г) 1.
- 28.20. в) 1;  $\frac{16}{81}$ ; г) 729. 28.21. в) Нет корней; г) 38. 28.22. в)  $14\frac{2}{3}$ ; г) 1;  $-3\frac{2}{15}$ .
- 28.23. в) 0; 2; г) 4;  $\log_3 \frac{2}{3}$ . 28.24. в) 25; 625; г) 10;  $\frac{1}{\sqrt[9]{10^{10}}}$ . 28.25. в)  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ ; г)  $(-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 28.26. в)  $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; г)  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- 28.27. а)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $-\pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{10} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 28.28. в) 0; 3;  
 8; г) -1;  $\pm \sqrt{11}$ . 28.29. в) 0;  $\frac{2}{3}$ ; 7; г) 0; 1. 28.30. в) 0,5, 1; г)  $\pm \frac{1}{3}$ ,  $-\pi + 4\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- 28.31. в)  $\frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; г)  $2\pi n$ ,  $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 28.32. в)  $\frac{\pi n}{7}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  
 г)  $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5}$ ,  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 28.33. в)  $\frac{\pi n}{4}$ ,  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  
 г)  $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{8}$ ,  $\frac{\pi n}{16}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- § 29** 29.1. в) (1; 4); г) (9; 3). 29.2. в) (2; 0), (-1; -1); г) (4; 8). 29.3. в) (0,5; 4);  
 г) (4; 2). 29.4. в)  $\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$ ; г)  $\left(-\frac{1}{4}; 2\frac{1}{4}\right)$ . 29.5. в) (3; 1); г) (2; -1). 29.6. в) (2; 3),  
 (-12; 31); г) (1,2; 0,6). 29.7. в) (1; 3), (3; 1); г)  $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ . 29.8. в) (6; 2); г) (1; 4).
- 29.9. а) (4t; t),  $t \in \mathbb{R}$ ; б) (t; 3t),  $t \in \mathbb{R}$ . 29.10. а) (3; 0); б) (5; 1). 29.11. в) (1, 2),  
 $\left(\frac{31}{16}; -\frac{13}{16}\right)$ ; г) (2; -4),  $\left(\frac{29}{16}; -\frac{55}{16}\right)$ . 29.12. в) (1; 4),  $\left(\frac{49}{9}; \frac{16}{9}\right)$ ; г) (16; 1).
- 29.13. в) (2; 6), (-2; 10); г) (3; 1), (5; 3). 29.14. в)  $\left(2\pi n; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi k\right)$ ,  
 $\left(\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$ ; г)  $\left((-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}\right)$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$ .
- 29.15. а)  $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$ ,  $\left((-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ ,  $\left((-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; 2\pi k\right)$ ,  
 $n, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)$ ,  $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$ . 29.16. а) (1; -1; 2);  
 б) (3; 1; -2), (5; -1; 0); в) (1; 2; -2); г) (0; -2; 3),  $\left(\frac{10}{7}; \frac{6}{7}; -\frac{9}{7}\right)$ .
- 29.17. а)  $y = -x^2 + 12$ ; б)  $y = x^2 - 6x + 3$ . 29.18. а)  $y = -x^2 + 4x + 6$ ;



б)  $y = -x^2 - 2x + 5$ . 29.19. а) 235; б) 264. 29.20. а) 2 км/ч; б) 210 км.  
 29.21. а) 2 ч, 5 ч; б) 15 км/ч, 75 км/ч. 29.22. а) 60 ч, 90 ч; б)  $12\text{ м}^3/\text{ч}$ .  
 29.23. а) 10 кг, 69%; б) 80%. 29.24. а) 1000 евро; б) 60 000 р.

**§ 30** 30.1. а), б) Да; в) нет; г) —е) да. 30.2. а), в), д), е) Нет; б), г) да.

30.4. а)  $-3 < x < 3$ ; б)  $x > 5$ ; в)  $x \leq -2$ ,  $\frac{2}{3} \leq x < \frac{5}{4}$ ; г)  $x < -1$ ,  $x > 1$ ;

д)  $\frac{11}{6} < x < \frac{13}{3}$ ; е)  $-1 < x < \frac{3}{2}$ . 30.5. а)  $x > 6$ ; б)  $1 < x < 6$ ; в)  $x \geq -2$ ; г)  $x < 7$ ;

д)  $x \leq -1$ ,  $x \geq 6$ ; е)  $x \geq 5$ . 30.6. а)  $0 \leq x \leq 64$ ; б)  $x < -6$ ,  $-1 < x < 1$ ,  $x > 6$ ; в) нет  
 решений; г)  $0 \leq x < 1024$ ,  $x > 1\,048\,576$ ; д)  $-2 < x < 2$ ; е)  $-\infty < x < +\infty$ .

30.7. а)  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ; б)  $x \geq 1$ ; в)  $x \leq -\log_5 2$ ,  $x \geq 1$ ; г)  $x \geq 1$ . 30.8. а)  $x < -\frac{3}{2}$ ;

б)  $x > 9$ ; в)  $-1 \leq x \leq 1$ ; г)  $x > \frac{5}{3}$ ; д)  $0 < x < 4$ ; е)  $x \leq -1$ ,  $x \geq 1$ .

30.9. а)  $-2 < x < 25$ ,  $x > 241$ ; б)  $-0,96 < x < 624$ . 30.10. а)  $x > 3$ ; б)  $0 < x < 1$ ;

в)  $x < 1$ ; г)  $x < 3$ ; д)  $x > 1$ ; е)  $x \geq 1$ . 30.11. а)  $0 < x < 1$ ; б)  $0 < x \leq 16$ ; в)  $x > 4$ ;

г)  $x \geq 1$ ; д)  $x \geq 16$ ; е)  $0 < x < 4$ . 30.12. а)  $x > -0,5$ ; б)  $x < 1$ ; в)  $x \leq 1$ ; г)  $x \geq 0$ ;

д)  $x \geq -2$ ; е)  $x < 1$ . 30.13. а)  $x < -2$ ,  $x > 2$ ; б)  $0 \leq x \leq 2$ ; в)  $x < -2$ ; г)  $-4 \leq x \leq 0$ ;

д)  $x < -2$ ,  $x > 0$ ; е)  $x < 1,2$ . 30.14. а)  $-\infty < x < +\infty$ ; б)  $x = -\frac{\pi}{2}$ ; в)  $x = 0$ ;

д)  $-\infty < x < +\infty$ . 30.15. а)  $7 < x < 9$ ; б)  $-\infty < x < +\infty$ ; в) нет решений; г)  $x \leq 1$ ,

$x \geq 19$ . 30.16. а) Нет решений; б)  $x < -11$ ,  $x > 2$ ; в)  $x = -2$ ; г)  $-\infty < x < +\infty$ .

30.17. а)  $x < -3$ ,  $3 < x < 4$ ; б)  $-\infty < x < +\infty$ ; в) нет решений; г)  $-2 < x < 0$ ,

$x > 2$ . 30.18. а)  $x < -5$ ,  $\frac{1}{3} < x < 2$ ; б)  $x < -2$ ,  $x > 0$ ; в)  $x < -\frac{2}{7}$ ,  $0,5 < x < 7$ ;

г)  $-\infty < x < +\infty$ . 30.19. а)  $-3 < x < -2$ ,  $-2 < x < 4$ ; б)  $-6 < x < -2$ ,  $x > -2$ ;

в)  $-5 < x \leq 2$ ,  $3,5 \leq x < 5$ ; г)  $-\infty < x < +\infty$ . 30.20. а) Нет решений; б)  $x \leq \frac{13}{4}$ ,

$x \geq 5$ ; в)  $x < -11$ ; г)  $x \leq 3$ ,  $x > 11$ . 30.21. а)  $x > 25$ ; б)  $x \leq 7$ ; в)  $x < 2$ ;

г)  $0 \leq x < 16$ ; д)  $x \geq 28$ ; е)  $-11 \leq x \leq 5$ . 30.22. а)  $x > 2$ ; б)  $0 \leq x \leq 2$ ; в)  $x \geq 3$ ;

г)  $-3 < x < 0$ ; д)  $x \geq 1$ ; е) нет решений. 30.23. а)  $x < 2$ ,  $x > 3$ ; б)  $3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 4$ ;

в)  $x \leq -2$ ,  $x \geq 6$ ; г)  $2 \leq x \leq 3$ ; д)  $-\infty < x < +\infty$ ; е)  $-\frac{1 + \sqrt{1729}}{24} \leq x < -1$ ,

$\frac{11}{12} < x \leq \frac{-1 + \sqrt{1729}}{24}$ . 30.24. а)  $2,5 \leq x < 8$ ; б)  $\frac{2}{3} < x \leq 2,5$ ; в)  $-12 \leq x < 4$ ;

г)  $x \geq 2,5$ ; д)  $\frac{2}{7} < x \leq 2,5$ ; е)  $x > 6$ . 30.25. а)  $x > 1$ ; б)  $x < -\frac{21}{4}$ ,  $x > 1$ ; в) нет ре-

шений; г)  $2 \leq x < 3$ ; д)  $-\frac{5}{2} < x \leq -\frac{3}{2}$ ,  $2 \leq x < 3$ ; е)  $x > 3$ . 30.26. а)  $x \geq \frac{\sqrt{69} - 5}{2}$ ;

б)  $\frac{5 - \sqrt{173}}{2} \leq x \leq \frac{5 + \sqrt{173}}{2}$ ; в)  $2 \leq x \leq \sqrt[3]{10}$ ; г)  $x \leq 3$ ,  $x > \frac{13}{3}$ ; д) нет решений;

- е)  $1 \leq x \leq 1 + \sqrt{2,5}$ . 30.27. а)  $x \leq 1$ ,  $5 \leq x \leq 3 + \sqrt{14}$ ; б)  $1 \leq x \leq 4$ ,  
 $5 \leq x \leq \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$ . 30.28. а)  $\frac{1}{3} < x < 2$ ; б)  $x < 0$ ,  $1 < x < 2$ ; в)  $x \leq -5$ ,  $x \geq 1$ ;  
г)  $x < -3,5$ ,  $-3,5 < x < \frac{1}{12}$ ,  $x > \frac{1}{12}$ ; д)  $x \leq 0$ ,  $1,5 \leq x \leq 2$ ; е)  $-\infty < x < +\infty$ .  
30.29. а)  $\frac{1}{e} < x < e$ ; б), д)  $x \leq -9$ ,  $x \geq 9$ ; в)  $x < -11$ ,  $-1,1 < x < -1$ ,  $1 < x < 1,1$ ,  
 $x > 11$ ; г)  $0 < x < 1$ ,  $x > e^2$ ; е)  $-11 \leq x < -1$ ,  $1 < x \leq 11$ . 30.30. а)  $x > \frac{1}{16}$ ;  
б)  $0 < x < 4$ . 30.31. а)  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $x = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
30.32. а)  $0,1^{\log_5 4} \leq x \leq 1$ ; б)  $x \geq 2^{\frac{3}{\ln 7}}$ . 30.33. а)  $-3 < x \leq -2$ ,  $x \geq 3$ ;  
б)  $-\frac{7}{4} \leq x \leq \log_3 5$ ; в)  $x = 3$ ,  $x \geq 5$ ; г)  $-4 < x \leq -3$ ,  $x \geq 3$ ; д)  $x \leq -\frac{8}{5}$ ,  $x \geq \log_6 3$ ;  
е)  $x = 6$ ,  $x \geq 12$ . 30.34. а)  $-4 \leq x < -\pi$ ,  $-\pi < x < 0$ ; б)  $x = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ;  
в)  $-2 < x < 1$ ,  $1 < x < 4$ ; г)  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < x \leq 2$ ; д)  $x = \frac{\pi}{2}$ ;  
е)  $-4 < x < \frac{-1 - \sqrt{41}}{2}$ ,  $\frac{-1 + \sqrt{41}}{2} < x < 3$ .

- § 31** 31.1. а) Нет корней при  $a = -2$ ;  $-\infty < x < +\infty$  при  $a = 2$ ;  $x = \frac{1}{a+2}$  при  
всех  $a \neq -2$ ; 2; б) нет корней при  $a = 3$ ;  $-\infty < x < +\infty$  при  $a = -1,5$ ,  $x = \frac{1}{a-3}$   
при всех  $a \neq -1,5$ ; 3; в) нет корней при  $a = 2,5$ ;  $-\infty < x < +\infty$  при  $a = -2,5$ ,  
 $x = \frac{1}{5-2a}$  при всех  $a \neq -2,5$ ; 2,5; г) нет корней при  $a = 4$ ;  $-\infty < x < +\infty$   
при  $a = -1$ ;  $x = \frac{1}{a-4}$  при всех  $a \neq -1$ ; 4. 31.2. а)  $x \leq \frac{1}{a+5}$  при  $a < -5$  и  $a > 5$ ;  
нет решений при  $a = -5$ ;  $x \geq \frac{1}{a+5}$  при  $-5 < a < 5$ ;  $-\infty < x < +\infty$  при  $a = 5$ ;  
б)  $x < \frac{1}{a-1}$  при  $a < -5$  и  $a > 1$ ; нет решений при  $a = -5$ ;  $x > \frac{1}{a-1}$   
при  $-5 < a < 1$ ;  $-\infty < x < +\infty$  при  $a = 1$ ; в)  $x \leq \frac{1}{3a-4}$  при  $a < -\frac{4}{3}$  и  $a > \frac{4}{3}$ ;  
 $x \geq \frac{1}{3a-4}$  при  $-\frac{4}{3} < a < \frac{4}{3}$ ;  $-\infty < x < +\infty$  при  $a = -\frac{4}{3}$ ;  $\frac{4}{3}$ ; г)  $x < \frac{1}{a+2}$   
при  $a < -2$  и  $a > 4$ ; нет решений при  $a = -2$ ; 4;  $x > \frac{1}{a+2}$  при  $-2 < a < 4$ .  
31.3. а)  $a \neq 1$ ; б)  $a > -1$ ; в) таких значений нет; г)  $a = 1$ . 31.4. а)  $a < 1,5$ ;



б)  $-2 < a < 1,5$ ; в)  $2,5 < a < 3$ ; г)  $a < -5,5$ . 31.5. а)  $a \neq -2, a \neq 2$ ; б)  $a = -2$ ;  
 в)  $a < -3, a > 2$ ; г)  $a = 2$ . 31.6. а)  $a < 0, 0 < a < 1, a > 9$ ; б)  $a = 0, a = 1, a = 9$ ;  
 в)  $1 < a < 9$ ; г)  $a \leq 1, a \geq 9$ . 31.7. а)  $a = -1$ ; б)  $a = -1, a = -0,5, a = 3$ ; в)  $a < -1$ ,  
 $-1 < a < -0,5, a > 3$ ; г)  $-0,5 < a < 3$ . 31.8. а)  $a = -1$ ; б)  $a = -2, a = 2, a = 3$ ;  
 в)  $-2 < a < -1, -1 < a < 3$ ; г)  $a < -2, a > 3$ . 31.9. а)  $x = 2,5$  при  $a = 3$ ;

нет корней при  $a < 2,8$ ;  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5a-14}}{a-3}$  при остальных  $a$ ; б)  $x = \frac{5}{8}$  при  $a = 3$ ;

$x = \frac{a+1 \pm \sqrt{3a+7}}{a-3}$  при  $a \geq -\frac{7}{3}$ ; нет корней при остальных  $a$ . 31.10. б)  $x < \frac{5}{8}$

при  $a = 3$ ; нет решений при  $a \leq -\frac{7}{3}$ ;  $\frac{a+1+\sqrt{3a+7}}{a-3} < x < \frac{a+1-\sqrt{3a+7}}{a-3}$  при

$-\frac{7}{3} < a < 3$ ;  $x < \frac{a+1-\sqrt{3a+7}}{a-3}, x > \frac{a+1+\sqrt{3a+7}}{a-3}$  при  $a > 3$ . 31.11. а) Нет

корней при  $a < -1, a > -\frac{1}{3}$ ;  $x = (-1)^k \arcsin(3a+2) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , при остальных

значениях  $a$ ; б) нет корней при  $a < 0,5, a > 1$ ;  $x = \pm 0,5 \arccos(4a-3) + \pi n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ , при остальных значениях  $a$ ; в) нет корней при  $a < 1, a > 2$ ;

$x = \pm \arccos(3-2a) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ , при остальных значениях  $a$ ; г) нет корней при  
 $a < 2, a > 4$ ;  $x = 0,5((-1)^k \arcsin(3-a) + \pi k), k \in \mathbb{Z}$ , при остальных значениях  $a$ .

31.12. а) Нет корней при  $a < -\sqrt{2}, a > \sqrt{2}$ ;  $x = \pm 3 \arccos(a^2-1) + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ,

при остальных значениях  $a$ ; б) нет корней при  $a < -3, a > -1$ ;

$x = (-1)^k \arcsin(a+2) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , при остальных значениях  $a$ ; в) нет корней  
 при  $a < -\sqrt{2}, a > \sqrt{2}$ ;  $x = -2,5((-1)^k \arcsin(1-a^2) + \pi k), k \in \mathbb{Z}$ , при остальных

значениях  $a$ ; г) нет корней при  $a < -1, a > 6, \frac{5-\sqrt{41}}{2} < a < \frac{5+\sqrt{41}}{2}$ ;

$x = \pm \arccos(a^2-5a-5) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ , при остальных значениях  $a$ .

31.13. а)  $a < -4$ ; б)  $a > 9$ . 31.14. а)  $a < -3, a > 2$ ; б)  $a < -5, a > 2,75$ .

31.15. а)  $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$ ; б)  $-\frac{2}{3} \leq a \leq 0$ . 31.16. а)  $a = -4, a = 4$ ; б)  $a = -2, a = 2$ .

31.17. а)  $a = 1$ ; б)  $a = -1, a = -\frac{1}{3}$ . 31.18. а)  $a < -2$ ; б)  $-2 < a \leq 2$ ; в)  $a \leq -2$ ;

г)  $4 < a \leq 4,4$ . 31.19. а)  $a \geq -9$ ; б)  $a \geq -\frac{61}{4}$ . 31.20. а)  $a \geq -7$ ; б)  $a \geq -5$ .

31.21. а)  $x \geq 1,5$  при  $a \leq 1,5$ ;  $x \geq a, x = 1,5$  при остальных значениях  $a$ ; б)  $x \geq 2$   
 при  $a \leq 1,5$ ;  $x \geq 2, 1,5 < x \leq a$  при  $1,5 < a \leq 2$ ;  $x \geq a, 1,5 < x \leq 2$  при остальных

значениях  $a$ ; в)  $a \leq x \leq \frac{4}{3}$  при  $a \leq \frac{4}{3}$ ; нет решений при остальных значениях  $a$ ;

г)  $a+1 \leq x \leq \frac{4}{3}$  при  $a \leq \frac{1}{3}$ ;  $\frac{4}{3} \leq x \leq a+1$  при  $\frac{1}{3} < a < \frac{4}{3}$ ;  $a < x \leq a+1$  при

остальных значениях  $a$ . 31.22. а)  $a = 1$ ; б)  $a = 6$ . 31.23. а)  $a > \frac{7}{6}$ ;

б) таких значений нет; в)  $a < 0,5$ ; г)  $0,5 < a < \frac{7}{6}$ . 31.24. а)  $a = 1$ ,  $a = 5^{4,5}$ ;

б)  $0 < a < 8^{-\frac{1}{16}}$ . 31.25. а)  $a \leq \frac{3}{6}$ ,  $a \geq 16$ ; б)  $|a| < \frac{3}{7}$ ,  $|a| > \frac{\sqrt{58}}{7}$ . 31.26. а)  $a < -6$ ;

б)  $-6 < a < 3$ . 31.27. а)  $a = 12$ ; б)  $a < 1$ . 31.28. а)  $-5 \leq a \leq 0$ ; б)  $-2 < a < 2$ .

**§ 32** 32.4. а) 2; б) 3; в) 3; г) 7; д) 9; е) 11. 32.5. а) 3; б) 4; в) 11; г) 13; д)  $a + 1$ ; е)  $2a - b$ . 32.6. а) 8 тыс. р.; б) 9 тыс. р.; в) 15 тыс. р.; г) 15 800 р.; д)  $c = a - 4,2$ ; е)  $c = a - 1,4(b - a)$ . 32.7. а) 6; б) 9; в) 14; г) 20; д)  $n$  — наименьшее натуральное решение неравенства  $n(n + 1) \geq 40(b - 2)$ ; е)  $n$  — наименьшее натуральное решение неравенства  $n(n + 1) \geq 40(b - a)$ . 32.8. а) 3,8; б)  $\underbrace{5, \dots, 5}_4, 4, 4, 2, 2, 2$ ;

в)  $\underbrace{4, \dots, 4}_8, 3, 3$ ; е)  $4 \frac{5}{17}$ . 32.9. а), б) — нет; г)  $28 \frac{5}{19}$ ; д)  $38 \frac{1}{7}$ . 32.10. а), б) — нет;

г) 15; е)  $7, \underbrace{1, \dots, 1}_8, \dots, 7, \underbrace{1, \dots, 1}_8, 1, 7$ .



## Числовые последовательности

Последовательность  $(y_n)$  называют **ограниченной сверху**, если существует число  $M$  такое, что для любого  $n$  выполняется неравенство  $y_n \leq M$ . Число  $M$  называют **верхней границей** последовательности.

Последовательность  $(y_n)$  называют **ограниченной снизу**, если существует число  $m$  такое, что для любого  $n$  выполняется неравенство  $y_n \geq m$ . Число  $m$  называют **нижней границей** последовательности.

Если последовательность ограничена и снизу, и сверху, её называют **ограниченной последовательностью**.

Число  $b$  называют **пределом последовательности  $(x_n)$** , если в любой окрестности точки  $b$  содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера. Если последовательность имеет предел, то её называют **сходящейся**; если последовательность не имеет предела, то говорят, что последовательность **расходится**.

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$ , то

1) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = b + c;$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = bc;$$



3) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{b}{c}, \quad c \neq 0;$$

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (kx_n) = kb.$$

## Предел функции

Равенство  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  означает следующее: если значения аргумента  $x$  приближаются к значению  $x = a$ , то соответствующие значения функции приближаются к предельному значению  $b$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Равенство  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$  означает следующее: у графика функции  $y = f(x)$  имеется горизонтальная асимптота  $y = b$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad (r > 0).$$

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , то:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b + c;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \quad (\text{при условии, что } c \neq 0);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kb.$$

Функцию  $y = f(x)$  называют **непрерывной в точке  $x = a$** , если предел функции  $y = f(x)$  при стремлении  $x$  к  $a$  равен значению функции в точке  $a$ , т. е. если выполняется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$



Если выражение  $f(x)$  составлено с помощью алгебраических операций из рациональных, иррациональных, тригонометрических, обратных тригонометрических, показательных, логарифмических выражений, то функция  $y = f(x)$  непрерывна в любой точке, в которой определено выражение  $f(x)$ .

## Производная

Если функция  $y = f(x)$  определена в точках  $x_0$  и  $x$ , то разность  $x - x_0$  называют **приращением аргумента** и обозначают  $\Delta x$ , а разность  $f(x) - f(x_0)$  называют **приращением функции** и обозначают  $\Delta y$ .

Производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  — это  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ; обозначение:  $f'(x_0)$ .

### Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$

1. Зафиксировать значение  $x$ , найти  $f(x)$ .
2. Дать аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , перейти в новую точку  $x + \Delta x$ , найти  $f(x + \Delta x)$ .
3. Найти приращение функции:  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .
4. Составить отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .
5. Вычислить  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

**Физический смысл производной** состоит в следующем: если  $s = s(t)$  — закон прямолинейного движения, то производная  $s'(t)$  выражает мгновенную скорость в момент времени  $t$  ( $v(t) = s'(t)$ ).

**Геометрический смысл производной** состоит в следующем: если к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x = a$  можно провести касательную, непараллельную оси ординат, то производная  $f'(a)$  выражает угловой коэффициент касательной ( $k_{\text{кас}} = f'(a)$ ).



### Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой  $a$ .
2. Вычислить  $f(a)$ .
3. Найти  $f'(a)$ .
4. Подставить найденные числа  $a$ ,  $f(a)$ ,  $f'(a)$  в формулу

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

### Правила дифференцирования

$$(ay + bz)' = ay' + bz'$$

$$(yz)' = y'z + yz'$$

$$\left(\frac{y}{z}\right)' = \frac{y'z - yz'}{z^2}$$

$$(f(kx + m))' = kf'(kx + m)$$

### Формулы дифференцирования

$$(C)' = 0$$

$$(kx + m)' = k$$

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$



## Исследование функций

Если во всех точках открытого промежутка  $X$  выполняется неравенство  $f'(x) \geq 0$  (причём равенство  $f'(x) = 0$  либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция  $y = f(x)$  возрастает на промежутке  $X$ .

Если во всех точках открытого промежутка  $X$  выполняется неравенство  $f'(x) \leq 0$  (причём равенство  $f'(x) = 0$  либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция  $y = f(x)$  убывает на промежутке  $X$ .

Точку  $x_0$  называют **точкой минимума** функции  $y = f(x)$ , если у этой точки существует окрестность, для всех точек  $x \neq x_0$  которой выполняется неравенство  $f(x) > f(x_0)$ . Значение функции в точке минимума обозначают  $y_{\min}$ .

Точку  $x_0$  называют **точкой максимума** функции  $y = f(x)$ , если у этой точки существует окрестность, для всех точек  $x \neq x_0$  которой выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$ . Значение функции в точке максимума обозначают  $y_{\max}$ .

Если функция  $y = f(x)$  имеет экстремум в точке  $x_0$ , то в этой точке производная функции либо равна нулю (стационарная точка), либо не существует (критическая точка).

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на промежутке  $X$  и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку  $x = x_0$ . Тогда:

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при  $x < x_0$  выполняется неравенство  $f'(x) < 0$ , а при  $x > x_0$  — неравенство  $f'(x) > 0$ , то  $x = x_0$  — точка минимума функции  $y = f(x)$ ;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при  $x < x_0$  выполняется неравенство  $f'(x) > 0$ , а при  $x > x_0$  — неравенство  $f'(x) < 0$ , то  $x = x_0$  — точка максимума функции  $y = f(x)$ ;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что и слева, и справа от точки  $x_0$  знаки производной одинаковы, то в точке  $x_0$  экстремума нет.



### Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

1. Найти производную  $f'(x)$ .
2. Найти стационарные ( $f'(x) = 0$ ) и критические ( $f'(x)$  не существует) точки функции  $y = f(x)$ .
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной внутри получившихся промежутков.
4. Сделать выводы о монотонности функции и о её точках экстремума.

Непрерывная функция на отрезке достигает своих наименьшего и наибольшего значений либо в концевой точке отрезка, либо в стационарной или критической внутренней точке отрезка.

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на промежутке  $X$  и имеет внутри промежутка единственную стационарную или критическую точку  $x = x_0$ , то:

- если  $x_0$  — точка минимума, то  $f(x_0)$  — наименьшее значение функции на этом промежутке;
- если  $x_0$  — точка максимума, то  $f(x_0)$  — наибольшее значение функции на этом промежутке.

### Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. Найти производную  $f'(x)$ .
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка  $[a; b]$ .
3. Вычислить значения функции  $y = f(x)$  в точках, отобранных на втором шаге, и в точках  $a$  и  $b$ ; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет  $y_{\text{наим}}$ ) и наибольшее (это будет  $y_{\text{наиб}}$ ).



## Первообразная и неопределённый интеграл

Функцию  $y = F(x)$  называют первообразной для функции  $y = f(x)$  на промежутке  $X$ , если для всех  $x \in X$  выполняется равенство  $F'(x) = f(x)$ .

Таблица первообразных

| $f(x)$               | $F(x)$                      |
|----------------------|-----------------------------|
| 0                    | $C$                         |
| 1                    | $x$                         |
| $x^r \ (r \neq -1)$  | $\frac{x^{r+1}}{r+1}$       |
| $\frac{1}{x}$        | $\ln x, x \in (0; +\infty)$ |
| $\sin x$             | $-\cos x$                   |
| $\cos x$             | $\sin x$                    |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $-\operatorname{ctg} x$     |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x$       |
| $e^x$                | $e^x$                       |
| $a^x$                | $\frac{a^x}{\ln a}$         |

Если функция  $y = f(x)$  имеет на множестве  $X$  первообразную  $y = F(x)$ , то множество всех первообразных, т. е. множество  $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ , называют неопределённым интегралом от функции  $y = f(x)$  и обозначают так:  $\int f(x) dx$ .

Если функции  $y = f(x)$ ,  $y = h(x)$  имеют на множестве  $X$  первообразные  $y = F(x)$ ,  $y = H(x)$  соответственно, то сумма  $y = F(x) + H(x)$  является первообразной для функции  $y = f(x) + h(x)$ .

Если функция  $y = f(x)$  имеет на множестве  $X$  первообразную  $y = F(x)$ , то для любого числа  $k$  функция  $y = kF(x)$  является первообразной для функции  $y = kf(x)$ .



Если функция  $y = f(x)$  имеет на множестве  $X$  первообразную  $y = F(x)$ , то функция  $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$  является первообразной для функции  $y = f(kx + m)$ .

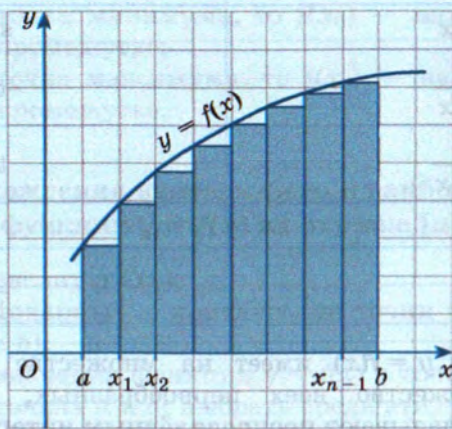
### Свойства первообразных

1. Первообразная суммы равна сумме первообразных.
2. Постоянный множитель можно вынести за знак первообразной.

## Определённый интеграл

Дана непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция  $y = f(x)$ . Разобьём отрезок  $[a; b]$  на  $n$  равных частей точками  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ ; составим сумму

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$



Определённый интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  — это  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Число  $a$  называют *нижним пределом интегрирования*, а число  $b$  — *верхним пределом интегрирования*.



## Свойства определённого интеграла

1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

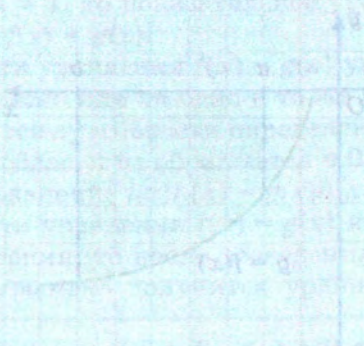
$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

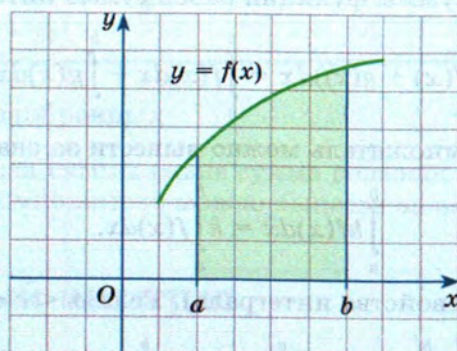
$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

3. (Аддитивное свойство интеграла). Если  $a < c < b$ , то

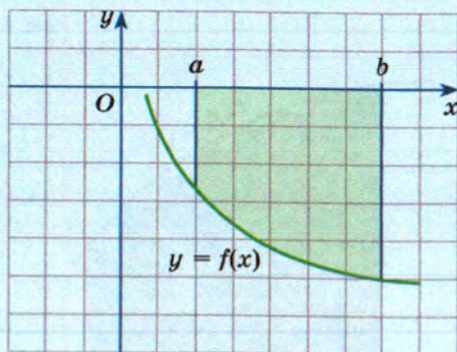
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



## Площадь криволинейной трапеции



$$S = \int_a^b f(x) dx$$



$$S = -\int_a^b f(x) dx$$



## Уравнения

Уравнения  $f(x) = g(x)$  и  $p(x) = h(x)$  называют **равносильными**, если множества их корней совпадают.

Уравнения с пустым множеством корней **равносильны**.

**Областью определения уравнения**  $f(x) = g(x)$  (или областью допустимых значений — ОДЗ) называют множество тех значений переменной  $x$ , при которых одновременно имеют смысл (определены) выражения  $f(x)$  и  $g(x)$ .

### Теоремы о равносильности уравнений

1. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

2. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же *нечётную степень*, то получится уравнение, равносильное данному.

3. Если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то показательное уравнение  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$  равносильно уравнению  $f(x) = g(x)$ .

4. Если обе части уравнения  $f(x) = g(x)$  умножить на одно и то же отличное от нуля число или на одно и то же выражение  $h(x)$ , которое:

а) имеет смысл всюду в области определения уравнения  $f(x) = g(x)$ ;

б) нигде в этой области не обращается в 0,

то получится уравнение  $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ , равносильное данному.

5. Если обе части уравнения  $f(x) = g(x)$  неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения его обеих частей в одну и ту же *чётную степень* получится уравнение, равносильное данному.

6. Если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  и  $f(x) > 0$ ,  $g(x) > 0$  для всех допустимых значений  $x$ , то логарифмическое уравнение  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  равносильно уравнению  $f(x) = g(x)$ .



## Неравенства

Два неравенства с одной переменной называют **равносильными**, если они имеют одинаковые решения (т. е. если равны множества их частных решений).

### Теоремы о равносильности неравенств

1. Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.

2. Если обе части неравенства  $f(x) > g(x)$  возвести в одну и ту же *нечётную степень*  $n$ , оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство  $(f(x))^n > (g(x))^n$ , равносильное данному.

3. Показательное неравенство  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$  равносильно:

- а) неравенству того же смысла  $f(x) > g(x)$ , если  $a > 1$ ;
- б) неравенству противоположного смысла  $f(x) < g(x)$ , если  $0 < a < 1$ .

4. а) Если обе части неравенства  $f(x) > g(x)$  умножить на одно и то же выражение  $h(x)$ , *положительное* при всех  $x$  из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства  $f(x) > g(x)$ , оставив при этом знак неравенства без изменения, то получится неравенство  $f(x)h(x) > g(x)h(x)$ , равносильное данному.

б) Если обе части неравенства  $f(x) > g(x)$  умножить на одно и то же выражение  $h(x)$ , *отрицательное* при всех  $x$  из области определения (области допустимых значений переменной) неравенства  $f(x) > g(x)$ , изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство  $f(x)h(x) < g(x)h(x)$ , равносильное данному.

5. Если обе части неравенства  $f(x) > g(x)$  неотрицательны в области его определения (в ОДЗ), то после возведения обеих частей неравенства в одну и ту же *чётную степень*  $n$  получится неравенство того же смысла  $(f(x))^n > (g(x))^n$ , равносильное данному.

6. Если  $f(x) > 0$ ,  $g(x) > 0$ , то логарифмическое неравенство  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$  равносильно:

- а) неравенству того же смысла  $f(x) > g(x)$ , если  $a > 1$ ;
- б) неравенству противоположного смысла  $f(x) < g(x)$ , если  $0 < a < 1$ .

Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств**, если ставится задача найти все такие значения



переменной, каждое из которых является частным решением *всех* заданных неравенств.

Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют **частным решением системы неравенств**.

Множество *всех* частных решений системы неравенств представляет собой **общее решение системы неравенств** (чаще говорят просто: **решение системы неравенств**).

Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств**, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является частным решением *хотя бы одного* из заданных неравенств. Каждое такое значение переменной называют **частным решением совокупности неравенств**. Множество *всех* частных решений совокупности неравенств представляет собой **решение совокупности неравенств**.

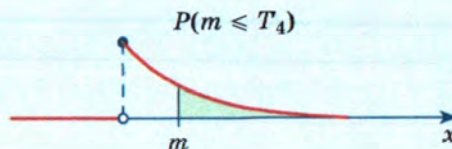
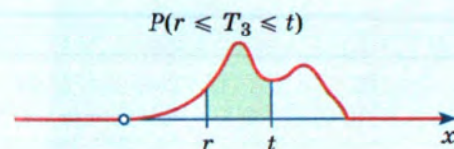
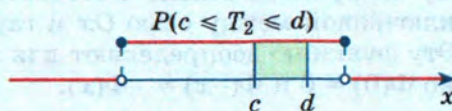
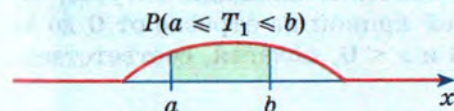
## Геометрическая вероятность

При равномерном распределении вероятность того, что точка, выбираемая из множества  $X$ , окажется точкой подмножества  $Y \subset X$  равна отношению:

- длин  $l(Y) : l(X)$  для числовых множеств;
- площадей  $S(Y) : S(X)$  для плоских фигур;
- объёмов  $V(Y) : V(X)$  для пространственных тел.

## Нормальные и биномиальные распределения

Вероятность того, что значения случайной величины  $T$  находятся между  $a$  и  $b$ , равна площади фигуры, ограниченной снизу осью  $Ox$ , сверху — графиком функции  $y = p(x)$  плотности с. в.  $T$ , слева и справа — прямыми  $x = a$  и  $x = b$ .





Вероятность того, что непрерывная случайная величина  $T$  принимает значения от  $a$  до  $b$ , равна результату интегрирования функции  $y = p(x)$  плотности этой с. в. в пределах от  $a$  до  $b$ :

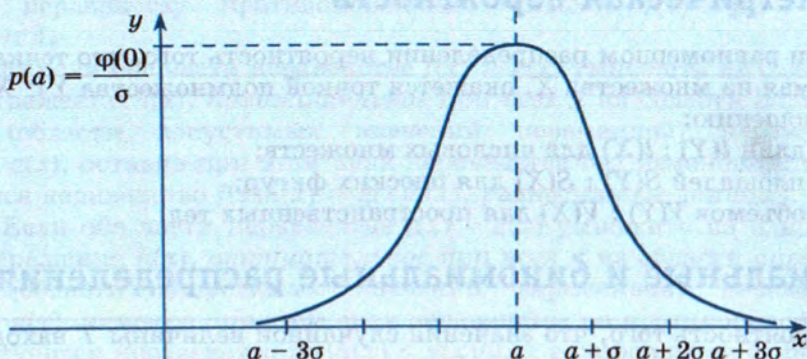
$$P(a \leq T \leq b) = \int_a^b p(x) dx.$$

Случайную величину  $T$  называют **нормально распределённой**, если её плотность распределения имеет вид:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2},$$

где  $a$  и  $\sigma > 0$  — константы распределения.

Площадь под кривой нормального распределения равна 1, и она сосредоточена рядом с точкой  $x = a$  максимума: на отрезке  $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$  она превышает 0,99:



**Функцией Лапласа**  $y = \Phi(x)$  называют функцию, которая каждому числу  $x > 0$  ставит в соответствие значение площади фигуры, заключённой между осью  $Ox$  и гауссовой кривой на отрезке от 0 до  $x$ . Эту функцию доопределяют для  $x = 0$  и  $x < 0$ , полагая, соответственно  $\Phi(0) = 0$  и  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ .



Функция Лапласа — это первообразная гауссовой функции  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ , т. е.  $\Phi'(x) = \varphi(x)$  для всех  $x$ . По формуле Ньютона —

Лейбница для случайной величины  $S$  со стандартным нормальным распределением  $N(0; 1)$ :

$$P(c \leq S \leq d) = \int_c^d \varphi(x) dx = \Phi(d) - \Phi(c).$$

Для чисел  $a < b$  вероятность  $P_n(a \leq k \leq b)$  того, что количество  $k$  «успехов» в  $n$  испытаниях Бернулли не меньше  $a$  и не больше  $b$  вычисляется по формуле

$$P_n(a \leq k \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

### Закон больших чисел (в форме Бернулли)

При неограниченном увеличении  $n$  частота  $\frac{k}{n}$  наступления «успеха» в  $n$  испытаниях Бернулли практически совпадает с вероятностью  $p$  «успеха» в одном испытании.

### Неравенство Чебышёва

$$P(|S - M(S)| \leq t) \geq 1 - \frac{D(S)}{t^2},$$

где  $S$  — случайная величина,  $M(S)$  — её математическое ожидание,  $D(S)$  — дисперсия.

## Список дополнительной литературы

1. Арнольд В. И. Задачи для детей от 5 до 15 лет / В. И. Арнольд. — М. : МЦНМО, 2018. — 16 с.
2. Гиндинкин С. Г. Рассказы о физиках и математиках / Семён Гиндинкин. — М. : Книговек, 2013. — 480 с. : ил. — (Мир вокруг нас).
3. Каганов М. И. Абстракция в математике и физике / М. И. Каганов, Г. Я. Любарский. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 352 с.
4. Клайн Морис. Математика. Утрата определённости / Морис Клайн. — М. : Римис, 2007. — 640 с.
5. Колмогоров А. Н. Введение в теорию вероятностей / А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров. — М. : МЦНМО, 2015. — 168 с. — (Библиотечка «Квант»).
6. Математическая составляющая / Редакторы-составители Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М. Панюнин ; художник-оформитель Р. А. Кокшаров. — М. : Фонд «Математические этюды», 2015. — 151 с. : ил.
7. ПикOVER Клиффорд. Великая математика. От Пифагора до 57-мерных объектов. 250 вех в истории математики / Клиффорд ПикOVER. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 539 с. : ил.
8. Писаревский Б. М. Беседы о математике и математиках / Б. М. Писаревский, В. Т. Харин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 208 с.
9. Уилан Чарльз. Голая статистика. Самая интересная книга о самой скучной науке / Чарльз Уилан. — М. : Манн, Иванов и Фербер, 2016. — 352 с. — (МИФ. Научпоп).

### Интернет-ресурсы:

<http://www.etudes.ru>

<http://www.tcheb.ru>

<http://math4school.ru>

<https://olimpiada.ru/>



# Оглавление

|  |            |
|--|------------|
| <b>Глава 4. Определённый интеграл</b> . . . . .  | <b>5</b>   |
| § 20. Понятие первообразной . . . . .  | 5          |
| § 21. Правила интегрирования . . . . .   | 11         |
| § 22. Понятие определённого интеграла.<br>Формула Ньютона — Лейбница . . . . .         | 18         |
| § 23. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого<br>интеграла . . . . . | 32         |
| Итак, в главе 4 . . . . .  | 44         |
| Вопросы . . . . .  | 44         |
| Тест . . . . .   | 45         |
| Дополнительные задачи . . . . .  | 46         |
| Из истории математики . . . . .  | 51         |
| <b>Глава 5. Непрерывные случайные величины</b> . . . . .                               | <b>55</b>  |
| § 24. Геометрические вероятности . . . . .   | 56         |
| § 25. Нормальное распределение . . . . .   | 64         |
| § 26. Нормальные и биномиальные распределения. Законы больших<br>чисел . . . . .       | 78         |
| Итак, в главе 5 . . . . .  | 90         |
| Вопросы . . . . .  | 91         |
| Тест . . . . .   | 92         |
| Дополнительные задачи . . . . .  | 94         |
| Из истории математики . . . . .  | 98         |
| <b>Глава 6. Уравнения и неравенства</b> . . . . .                                      | <b>103</b> |
| § 27. Равносильность уравнений . . . . .   | 103        |
| § 28. Решение уравнений с одной переменной . . . . .                                   | 110        |
| § 29. Решение систем уравнений . . . . .   | 121        |
| § 30. Решение неравенств с одной переменной . . . . .                                  | 132        |

|   |     |
|---|-----|
| § 31. Уравнения и неравенства с параметрами . . . . .   | 151 |
| § 32. Уравнения, неравенства и функции в задачах о среднем<br>арифметическом . . . . .              | 168 |
| Приложение. Таблица приближённых значений функции Лапласа<br>$y = \Phi(x)$ для $x \geq 0$ . . . . . | 178 |
| Ответы . . . . .  | 180 |
| Справочные материалы . . . . .  | 189 |



*Учебное издание*

**Мордкович Александр Григорьевич,  
Семенов Павел Владимирович,  
Александрова Лидия Александровна,  
Мардахаева Елена Львовна**

**Математика: алгебра и начала математического анализа,  
геометрия. Алгебра и начала математического анализа**

**Базовый уровень**

**11 класс**

**В 2 частях**

**Часть 2**

**Редактор С. В. Бахтина**

**Художественное оформление А. А. Павлов**

**Внешнее оформление В. А. Андрианов**

**Фотографии: «Фотобанк Лори»**

**Компьютерная вёрстка А. А. Павлов**

**Корректор О. Ч. Кохановская**

Подписано в печать 30.06.2020. Формат 70×90/16  
Гарнитура SchoolBookSanPin. Печать цифровая  
Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. 15,21. Тираж 700 экз. Заказ № 61008СМ.

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»

127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,  
тел. (495)181-53-44, e-mail: [binom@blbz.ru](mailto:binom@blbz.ru), <http://www.Lbz.ru>

Приобрести книги издательства

«БИНОМ. Лаборатория знаний»

можно в магазине по адресу:

Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,

тел. (495)181-60-77, e-mail: [shop@blbz.ru](mailto:shop@blbz.ru)

Время работы: вторник — суббота с 9 до 19 часов

Заявки на оптовые заказы принимаются

Коммерческим департаментом издательства:

тел. (495)181-53-44, доб. 271, 511, e-mail: [sales@blbz.ru](mailto:sales@blbz.ru)

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат» Д

АО «Издательство «Высшая школа». Российская Федерация,  
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7(4812) 31-31-70.

E-mail: [spk@smolpk.ru](mailto:spk@smolpk.ru) <http://www.smolpk.ru>





**СОСТАВ УМК «МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ.  
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»**

**АЛГЕБРА. 7—9 классы.**

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.**

**БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. 10—11 классы.**

Примерные рабочие программы.

Авторы: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.**

**БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. 10—11 классы.**

Методические пособия для учителя.

Авторы: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.**

**БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. 10—11 классы. В двух частях.**

Учебные издания для общеобразовательных организаций.

Авторы: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова,  
Е. Л. Мардахаева

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.**

**БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. 10 класс.**

Контрольные работы.

Автор: Е. Л. Мардахаева

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.**

**БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. 11 класс.**

Контрольные работы.

Автор: М. В. Шуркова

ISBN 978-5-9963-6379-7

