

**Министерство сельского хозяйства Российской Федерации**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИМПЕРАТОРА ПЕТРА I»**

## **ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОНИКИ И ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

*Допущено научно-методическим Советом по физике  
Министерства образования и науки Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных  
заведений, обучающихся по техническим направлениям  
подготовки и специальностям*

Воронеж  
2015

УДК 621.38+621.3(075)

ББК 31.2Я7

Ф 505

Рецензенты:

кафедра общей физики Московского государственного областного университета, заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор **Д.Л. Богданов**

декан физического факультета, заведующий кафедрой электроники Воронежского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор **А.М. Бобришов**

Авторы:

профессор А.Н. Ларионов, профессор Ю.И. Кураков,  
профессор В.С. Воищев, доцент И.Н. Маликов, доцент Н.Н. Ларионова,  
доцент И.И. Звенигородский, доцент В.С. Греков,  
А.В. Пахомов, А.И. Ефремов

Ф 505 Физические основы электроники и электротехники: учебное пособие /Ларионов А.Н., Кураков Ю.И., Воищев В.С., Маликов И.Н., Ларионова Н.Н., Звенигородский И.И., Греков В.С., Пахомов А.В., Ефремов А.И. – Воронеж: ФГБОУ ВО Воронежский ГАУ, 2015. – 433 с.

ISBN 978-5-7267-0802-7

В учебном пособии изложены принципы действия и основные характеристики элементов электронной техники, принципы построения и расчёта электронных схем и возможности их практического применения в технических устройствах.

Содержание пособия соответствует требованиям образовательного стандарта и программы курса «Электротехника и электроника» для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

Учебное пособие предназначено для курсантов и студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям обучения.

ISBN 978-5-7267-0802-7

© Ларионов А.Н., Кураков Ю.И., Воищев В.С., Маликов И.Н., Ларионова Н.Н., Звенигородский И.И., Греков В.С., Пахомов А.В., Ефремов А.И., 2015  
© ФГБОУ ВО Воронежский ГАУ, 2015 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	11
<b>РАЗДЕЛ I. ЭЛЕКТРОТЕХНИКА</b>	
<b>I. Линейные электрические цепи постоянного тока</b>	
1.1. Классификация электрических цепей и их элементов . . . . .	13
1.2. Источники ЭДС и источники тока . . . . .	15
1.3. Условия передачи источником максимальной мощности во внешнюю электрическую цепь . . . . .	17
1.4. Обобщённый закон Ома . . . . .	18
1.5. Эквивалентное сопротивление электрической цепи . . . . .	20
1.6. Преобразование звезды в эквивалентный треугольник и тре- угольника в эквивалентную звезду . . . . .	22
1.7. Расчёт простых электрических цепей . . . . .	24
<b>II. Методы расчёта сложных линейных электрических цепей постоянного тока</b>	
2.1. Законы Кирхгофа . . . . .	26
2.2. Применение законов Кирхгофа для расчёта сложных электрических цепей . . . . .	27
2.3. Закон баланса мощности . . . . .	28
2.4. Метод контурных токов . . . . .	29
2.5. Развёрнутая форма первого закона Кирхгофа . . . . .	32
2.6. Метод узловых потенциалов . . . . .	33
2.7. Расчёт электрической цепи с двумя узлами . . . . .	35
2.8. Принцип наложения и метод наложения . . . . .	36
2.9. Теорема взаимности . . . . .	39
2.10. Теорема компенсации . . . . .	40
2.11. Метод эквивалентного генератора . . . . .	41
<b>III. Нелинейные электрические цепи постоянного тока</b>	
3.1. Нелинейные приёмники . . . . .	44
3.2. Нелинейные источники . . . . .	46
3.3. Вопросы устойчивости режимов в нелинейных электрических цепях постоянного тока . . . . .	49
3.4. Графический метод расчёта нелинейных электрических цепей постоянного тока . . . . .	52
3.5. Метод эквивалентного генератора расчёта нелинейных электрических цепей . . . . .	53
3.6. Расчёт нелинейной электрической цепи с двумя узлами . . . . .	54
3.7. Аналитические методы расчёта нелинейных электрических цепей . . . . .	56
<b>IV. Магнитные цепи постоянного тока</b>	
4.1. Основные параметры магнитного поля . . . . .	58
4.2. Магнитные свойства твёрдых тел . . . . .	59

4.3.	Классификация магнитных цепей . . . . .	62
4.4.	Закон полного тока. Магнитодвижущая сила . . . . .	63
4.5.	Магнитное сопротивление и напряжение. Закон Ома для магнитной цепи . . . . .	64
4.6.	Законы Кирхгофа для магнитных цепей . . . . .	66
4.7.	Расчёт неразветвлённой магнитной цепи . . . . .	68
	а) прямая задача . . . . .	68
	б) обратная задача . . . . .	71
4.8.	Расчёт разветвлённой магнитной цепи. . . . .	72
4.9.	Расчёт магнитной цепи с постоянным магнитом . . . . .	75
	А. Получение постоянного магнита . . . . .	75
	Б. Метод расчёта магнитной цепи с постоянным магнитом . . .	75
	В. Прямая и коэффициент возврата . . . . .	76
	Г. Сила тяги электромагнита . . . . .	77
<b>V.</b>	<b>Электромагнитная индукция</b>	
5.1.	Закон электромагнитной индукции . . . . .	78
	А. Формулировка М. Фарадея . . . . .	78
	Б. Формулировка Дж. Максвелла . . . . .	80
	В. Инженерная формулировка закона электромагнитной индукции . . . . .	81
5.2.	Индуктивность . . . . .	82
5.3.	Самоиндукция . . . . .	84
5.4.	Взаимная индукция . . . . .	85
5.5.	Полярности индуктивно связанных катушек . . . . .	87
5.6.	Принцип электромагнитной инерции . . . . .	90
<b>VI.</b>	<b>Линейные электрические цепи однофазного синусоидального тока</b>	
6.1.	Основные параметры синусоидального тока . . . . .	93
6.2.	Векторная диаграмма . . . . .	95
6.3.	Идеальные элементы в электрической цепи синусоидального тока . . . . .	96
	А. Понятие идеального элемента . . . . .	96
	Б. Активное сопротивление в электрической цепи синусоидального тока . . . . .	97
	В. Идеальная катушка в электрической цепи синусоидального тока . . . . .	97
	Г. Идеальный конденсатор в электрической цепи синусоидального тока . . . . .	98
6.4.	Анализ электрической цепи <i>RLC</i> . . . . .	99
6.5.	Анализ электрической цепи <i>GLC</i> . . . . .	102
6.6.	Резонанс в цепи синусоидального тока . . . . .	104
	А. Понятие резонанса . . . . .	104
	Б. Резонанс в последовательной электрической цепи . . . . .	105

	<i>В.</i> Резонанс в параллельной электрической цепи . . . . .	107
6.7.	Символический метод расчёта линейных электрических цепей синусоидального тока . . . . .	110
	<i>А.</i> Понятие символического метода . . . . .	110
	<i>Б.</i> Формы записи комплексного числа . . . . .	111
	<i>В.</i> Комплексная амплитуда и комплексное действующее значение . . . . .	112
	<i>Г.</i> Комплексное сопротивление . . . . .	113
	<i>Д.</i> Комплексная проводимость . . . . .	113
6.8.	Законы электрических цепей однофазного тока в комплексной форме . . . . .	114
	<i>А.</i> Первый закон Кирхгофа . . . . .	114
	<i>Б.</i> Второй закон Кирхгофа . . . . .	114
	<i>В.</i> Закон Ома . . . . .	115
	<i>Г.</i> Символический метод расчёта линейной однофазной электрической цепи . . . . .	116
6.9.	Мощность электрической цепи однофазного тока . . . . .	116
6.10.	Электрические цепи с взаимной индуктивностью . . . . .	118
	<i>А.</i> Символический метод расчёта электрической цепи с взаимной индуктивностью . . . . .	118
	<i>Б.</i> Индуктивность рассеяния . . . . .	120
6.11.	Индуктивно связанные катушки. Трансформатор . . . . .	121
6.12.	Входное сопротивление и энергия трансформатора . . . . .	125
	<i>А.</i> Входное сопротивление трансформатора . . . . .	125
	<i>Б.</i> Энергия индуктивно связанных катушек . . . . .	126
<b>VII.</b>	<b>Четырёхполюсники</b>	
7.1.	Классификация четырёхполюсников . . . . .	128
7.2.	Системы уравнений четырёхполюсников . . . . .	130
7.3.	Параметры холостого хода и короткого замыкания . . . . .	133
7.4.	Входное сопротивление четырёхполюсника . . . . .	134
7.5.	Характеристические параметры четырёхполюсника . . . . .	135
7.6.	Передаточная функция . . . . .	136
<b>VIII.</b>	<b>Трёхфазные электрические цепи</b>	
8.1.	Трёхфазный генератор. Классификация трёхфазных электрических цепей . . . . .	138
8.2.	Несвязанная трёхфазная система электрических цепей . . . . .	140
8.3.	Трёхфазная звезда . . . . .	141
8.4.	Трёхфазный треугольник . . . . .	144
8.5.	Особенности расчёта трёхфазных электрических цепей . . . . .	146
	<i>А.</i> Правило круговой перестановки индексов . . . . .	146
	<i>Б.</i> О применимости закона Ома . . . . .	147
	<i>В.</i> Оператор трёхфазной системы и его свойства . . . . .	147
8.6.	Расчёт несимметричных режимов при непосредственном	

	питании от сети . . . . .	147
	А. Треугольник . . . . .	147
	Б. Звезда с нейтральным проводом . . . . .	148
	В. Звезда без нейтрального провода . . . . .	148
8.7.	Расчёт несимметричных режимов при питании через линию передачи . . . . .	150
	А. Звезда без нейтрального провода . . . . .	150
	Б. Звезда с нейтральными проводом . . . . .	151
	В. Треугольник . . . . .	152
8.8.	Мощность трёхфазной электрической цепи . . . . .	152
	А. Активная мощность . . . . .	152
	Б. Реактивная мощность . . . . .	153
	В. Полная мощность . . . . .	153
	Г. Комплексная мощность . . . . .	153
	Д. Мгновенная мощность . . . . .	154
8.9.	Пульсирующее и вращающееся магнитное поле . . . . .	154
8.10.	Принцип действия синхронных и асинхронных двигателей . . . . .	158
8.11.	Метод симметричных составляющих . . . . .	159
<b>IX.</b>	<b>Электрические цепи несинусоидального тока</b>	
	Введение . . . . .	162
9.1.	Разложение несинусоидальных токов и напряжений в тригонометрический ряд Фурье . . . . .	163
9.2.	Приближённый метод разложения . . . . .	165
9.3.	Разложение в тригонометрический ряд Фурье периодических функций, обладающих симметрией . . . . .	167
9.4.	Характеристики несинусоидальных токов и напряжений . . . . .	168
9.5.	Мощность электрической цепи несинусоидального периодического тока . . . . .	170
9.6.	Коэффициенты формы несинусоидальных периодических функций . . . . .	171
9.7.	Применение принципа наложения для расчёта линейных электрических цепей с несинусоидальными источниками . . . . .	173
9.8.	Символический метод расчёта линейных электрических цепей с несинусоидальными источниками ЭДС . . . . .	177
9.9.	Метод эквивалентных синусоид . . . . .	175
9.10.	Влияние характера электрической цепи на форму кривой тока . . . . .	176
9.11.	Понятие о частотных фильтрах . . . . .	179
9.12.	Высшие гармоники в трёхфазных электрических цепях . . . . .	182
9.13.	Резонансные явления в электрических цепях с несинусоидальными ЭДС и токами . . . . .	184
<b>X.</b>	<b>Нелинейные электрические цепи переменного тока</b>	
10.1.	Классификация нелинейных элементов . . . . .	186
10.2.	Нелинейные резисторы в цепи переменного тока . . . . .	187

10.3.	Общая характеристика нелинейных индуктивностей . . . . .	189
10.4.	Общая характеристика нелинейных ёмкостных сопротивлений . . . . .	191
10.5.	Общая характеристика методов анализа нелинейных электрических цепей переменного тока . . . . .	192
10.6.	Графический метод . . . . .	193
10.7.	Аналитические методы . . . . .	194
	10.7.1. Аппроксимация степенным полиномом . . . . .	195
	10.7.2. Кусочно-линейная аппроксимация . . . . .	196
10.8.	Графо-аналитический метод . . . . .	198
10.9.	Метод последовательных приближений . . . . .	199
10.10.	Основные явления в ферромагнитных катушках . . . . .	200
10.11.	Влияние вихревых токов и гистерезиса на режим работы и параметры ферромагнитной катушки . . . . .	204
	А. Влияние вихревых токов на магнитные свойства катушки . . . . .	204
	Б. Влияние вихревых токов и гистерезиса на параметры катушки . . . . .	205
	В. Вольтамперная характеристика катушки . . . . .	206
	Г. Эквивалентная индуктивность . . . . .	206
10.12.	Анализ работы реальных катушек . . . . .	207
	А. Уравнение и векторная диаграмма реальной катушки . . . . .	207
	Б. Электродвижущая сила и напряжение катушки . . . . .	208
	В. Индуктивность и сопротивление рассеяния . . . . .	209
	Г. Эквивалентная схема реальной катушки . . . . .	209
10.13.	Физические явления в трансформаторе . . . . .	210
10.14.	Уравнения трансформатора . . . . .	212
10.15.	Приведение обмоток трансформатора . . . . .	213
10.16.	Намагничивающий ток трансформатора . . . . .	214
10.17.	Векторная диаграмма трансформатора . . . . .	215
10.18.	Эквивалентная схема трансформатора . . . . .	217
<b>XI.</b>	<b>Переходные процессы в линейных электрических цепях</b>	
11.1.	Законы коммутации . . . . .	218
11.2.	Классический метод расчёта переходных процессов . . . . .	220
11.3.	Свойства корней характеристического уравнения . . . . .	222
11.4.	Определение постоянной интегрирования . . . . .	223
11.5.	Переходные процессы в цепи $RC$ . . . . .	224
11.6.	Переходные процессы в цепи $RLC$ . . . . .	227
11.7.	Переходные процессы в ферромагнитных катушках . . . . .	229
11.8.	Операторный метод расчёта переходных процессов. Оригинал и изображение функции. Интеграл Лапласа . . . . .	230
11.9.	Изображения простейших функций . . . . .	231
11.10.	Изображение производной и интеграла, напряжения на конденсаторе и катушке . . . . .	232
11.11.	Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме . . . . .	233

11.12.	Переход от изображения к функции времени. Теорема разложения . . . . .	237
11.13.	Примеры расчёта переходных процессов операторным методом	239
<b>XII.</b>	<b>Линии с распределёнными параметрами</b>	
12.1.	Параметры длинной линии . . . . .	242
12.2.	Дифференциальные уравнения однородной линии с распределёнными параметрами . . . . .	244
12.3.	Установившийся режим в однородной линии . . . . .	247
12.4.	Комплексы напряжения и тока в произвольной точке линии . . .	250
12.5.	Падающие и отражённые точки в линии . . . . .	251
12.6.	Линия без искажений . . . . .	252
12.7.	Линия без потерь . . . . .	253
12.8.	Преломление и отражение волн . . . . .	254
12.9.	Падение напряжения на конец разомкнутой линии . . . . .	256
12.10.	Падение напряжения на конец линии, замкнутой накоротко . .	256
12.11.	Переход волны с воздушной на кабельную линию . . . . .	257
	<b>РАЗДЕЛ II. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОНИКИ</b>	
<b>XIII.</b>	<b>Основы зонной теории твёрдых тел</b>	
13.1.	Энергетическая диаграмма металлов и полупроводников . . . . .	258
13.2.	Электропроводность полупроводников. Собственная проводимость . . . . .	260
13.3.	Электропроводность полупроводников. Примесная проводимость . . . . .	261
13.4.	Электронно-дырочный переход. Вольтамперная характери- стика полупроводникового диода . . . . .	264
13.5.	Вольт-амперная характеристика <i>p-n</i> перехода . . . . .	267
13.6.	Пробой <i>p-n</i> перехода . . . . .	270
<b>XIV.</b>	<b>Полупроводниковые приборы</b>	
14.1.	Типы полупроводниковых приборов . . . . .	272
14.2.	Полупроводниковые диоды . . . . .	274
14.3.	Полупроводниковые стабилитроны . . . . .	276
14.4.	Устройство и принцип действия биполярного транзистора . . . .	278
14.5.	Схемы включения и статические характеристики биполярного транзистора . . . . .	282
14.6.	Схемы замещения транзистора в физических параметрах . . . . .	284
14.7.	Транзистор как активный четырёхполюсник. <i>h</i> – параметры транзистора . . . . .	287
14.8.	Режимы работы транзисторов . . . . .	289
14.9.	Полевые транзисторы . . . . .	291
14.10.	Тиристоры . . . . .	295
14.11.	Плёночные и гибридные интегральные схемы . . . . .	297
<b>XV.</b>	<b>Неуправляемые выпрямители</b>	
15.1.	Классификация и основные параметры выпрямителей . . . . .	302

15.2.	Однофазный однополупериодный выпрямитель . . . . .	304
15.3.	Однофазный двухполупериодный одноктактный выпрямитель . . . . .	306
15.4.	Однофазный двухполупериодный двухтактный выпрямитель . . . . .	308
15.5.	Трёхфазный одноктактный выпрямитель . . . . .	309
15.6.	Трёхфазный двухтактный выпрямитель . . . . .	312
<b>XVI.</b>	<b>Управляемые выпрямители</b>	
16.1.	Физические принципы управляемого выпрямления . . . . .	315
16.2.	Принцип действия и регулировочная характеристика одно- фазного управляемого выпрямителя с активной нагрузкой . . . . .	318
16.3.	Внешняя характеристика однофазных выпрямителей большой и средней мощности . . . . .	321
16.4.	Коэффициент полезного действия выпрямителей . . . . .	324
16.5.	Коэффициент полезного действия выпрямителей . . . . .	325
16.6.	Назначение и типы сглаживающих фильтров . . . . .	328
16.7.	Влияние сглаживающих фильтров на внешнюю характеристику выпрямителей . . . . .	330
16.8.	Физические принципы инвертирования . . . . .	332
16.9.	Автономные инверторы . . . . .	336
16.9.1.	Автономные инверторы с поочерёдной коммутацией . . . . .	336
16.9.2.	Автономные инверторы с широтно-импульсной модуляцией . . . . .	336
<b>XVII.</b>	<b>Усилители электрических сигналов</b>	
17.1.	Основные показатели усилителей . . . . .	339
17.2.	Классификация усилителей . . . . .	344
17.3.	Принцип построения усилительных каскадов . . . . .	345
17.4.	Усилительный каскад с общим эмиттером . . . . .	347
17.5.	Режимы работы усилительных каскадов . . . . .	349
17.6.	Многокаскадные усилители . . . . .	352
17.7.	Обратная связь в усилителях . . . . .	354
17.8.	Схемы стабилизации рабочей точки усилителя . . . . .	358
17.9.	Усилители постоянного тока . . . . .	360
17.10.	Дифференциальные усилители . . . . .	361
17.11.	Избирательные усилители . . . . .	364
17.12.	Усилители мощности . . . . .	368
17.13.	Операционные усилители . . . . .	371
17.14.	Пример расчёта усилительного каскада . . . . .	379
<b>XVIII</b>	<b>Импульсные и цифровые устройства</b>	
18.1.	Электрические импульсы . . . . .	383
18.2.	Интегрирующие и дифференцирующие цепи . . . . .	385
18.2.1.	Интегрирующая цепь . . . . .	385
18.2.2.	Дифференцирующая цепь . . . . .	386
18.3.	Линии задержки . . . . .	388
18.4.	Электронные ключевые схемы. Диодные ключи . . . . .	390

18.5.	Транзисторные ключи . . . . .	393
18.6.	Ограничители электрических сигналов . . . . .	395
18.7.	Классификация регенеративных импульсных устройств . . . . .	398
18.8.	Мультивибраторы . . . . .	399
18.9.	Ждущий мультивибратор с коллекторно-базовыми связями (одновибратор) . . . . .	405
18.10.	Блокинг-генератор . . . . .	407
18.11.	Триггеры . . . . .	409
18.12.	Схемы запуска триггера . . . . .	411
	18.12.1. Раздельный запуск . . . . .	411
	18.12.2. Счётный запуск . . . . .	413
18.13.	Основы алгебры логики . . . . .	414
18.14.	Логические элементы . . . . .	415
	18.14.1. Логический элемент «ИЛИ» . . . . .	415
	18.14.2. Логический элемент «И» . . . . .	416
	18.14.3. Логический элемент «НЕ» . . . . .	417
	18.14.4. Логический элемент «ИЛИ-НЕ» . . . . .	418
	18.14.5. Логический элемент «И-НЕ» . . . . .	419
18.15.	Счётчики импульсов . . . . .	420
18.16.	Регистры . . . . .	423
18.17.	Шифраторы и дешифраторы . . . . .	424
18.18.	Сумматоры . . . . .	425
18.19.	Микропроцессоры . . . . .	427
	Список литературы . . . . .	433

## ВВЕДЕНИЕ

Электротехника и электроника – одна из первых инженерных дисциплин, изучаемых курсантами и студентами высших учебных заведений, обучающихся по техническим специальностям.

В курсе «Электротехника и электроника» изучаются электрические и магнитные явления и их применение для практических целей. Можно выделить три основных направления использования этих явлений: преобразование энергии, превращение вещества, получение и передача информации. Следовательно, *электротехника – это область науки и техники, изучающая возможности применения электрических и магнитных явлений для преобразования энергии и превращения вещества, а также для получения и передачи информации.*

Вся история развития электротехники – убедительная иллюстрация диалектики научно-технического прогресса, отражения сложных взаимосвязей науки и техники с социально-экономическими, историческими и экологическими проблемами. В настоящее время электрическая энергия прочно вошла в нашу повседневную жизнь, проникла во все области народного хозяйства и играет ведущую роль в вооружении армии, авиации и флота. Исключительная роль электротехники в техническом и социальном прогрессе объясняется рядом уникальных свойств электричества: оно сравнительно легко получается из других видов энергии, весьма просто передаётся на огромные расстояния, без труда дробится на произвольные мелкие порции и легко преобразуется в любые другие виды энергии, необходимые на месте потребления: механическую, тепловую, световую, звуковую, химическую и другие виды энергии.

Зарождение электротехники и электроники относится к периоду создания источника постоянного тока (начало XIX века) и последовавших затем открытий в области электричества и магнетизма. По мере накопления знаний об электромагнитных явлениях усиливалось стремление применить их для достижения практических целей. В 1832 г. академик Российской академии наук Шиллинг изобрёл электромагнитный телеграф, в 1834 г. академик РАН Б.С. Якоби создал первый в мире электродвигатель с вращательным движением, в 1873 г. изобретена электрическая лампа накаливания, в 1876 г. – электрическая свеча русскими учёными П.Н. Яблочковым и А.Н. Лодыгиным. Эпоху в практическом применении электротехники составили работы русского учёного М.О. Доливо-Добровольского, разработавшего систему трёхфазных цепей переменного тока (1888 г.) и создавшего все основные её конструктивные элементы.

*Электроникой* называется раздел науки и техники, изучающий:

1) физические явления в электровакуумных и полупроводниковых приборах; 2) электрические свойства, характеристики и параметры полупроводниковых приборов, а также режимы работы электрических цепей, содер-

жащих эти приборы; 3) свойства комплексных электрических систем и устройств. Первое из этих направлений составляет физические основы электроники, а второе и третье – техническую электронику.

Значительный прогресс электроники связан с созданием больших интегральных схем (БИС), в которых количество элементов в одном кристалле достигает нескольких сотен тысяч, а линейные размеры не превышают  $2\div 3$  мкм. Быстродействие БИС измеряется миллиардными долями секунды. Создание БИС привело к появлению микро-ЭВМ и устройств цифровой обработки информации, осуществляемой по программе микропроцессоров.

Современные электронные полупроводниковые устройства, применяемые в сельскохозяйственной технике, предъявляют жёсткие требования к качеству потребляемой электрической энергии, которая должна иметь высокую стабильность амплитуды, частоты и угла сдвига фаз переменного напряжения и тока, а также минимально возможный уровень пульсаций переменного напряжения.

Для получения электрической энергии нужного вида часто возникает необходимость преобразовывать энергию переменного тока промышленной частоты (50 Гц) в энергию постоянного тока или, наоборот, постоянного тока – в энергию переменного тока. Современные источники электропитания сельскохозяйственной техники являются сложными устройствами, содержащими большое количество функциональных узлов, которые обеспечивают наряду с преобразованием электрической энергии повышение её качества.

В настоящее время совершенствование электрооборудования аэродромов происходит на базе бурного развития полупроводниковой электроники и связанной с ней вычислительной техники.

Электрооборудование современных аэродромов представляет собой сложную систему с большой суммарной мощностью источников электроэнергии, с сотнями электрических машин и других потребителей электрической энергии, сложной измерительной, коммутационной и защитной аппаратурой.

В настоящем учебном пособии рассмотрены принципы действия и характеристики элементов электронной техники, источников вторичного электропитания и инверторов, преобразователей и усилителей электрических сигналов, цифровых и импульсных устройств, логических схем. Широкое применение электронных устройств в военной технике требует от специалистов знания принципов их действия, что является обязательным условием эффективной эксплуатации современной техники.

Для понимания сущности физических процессов, происходящих в электрических элементах, аппаратах и устройствах, входящих в системы электрического оборудования современных технических устройств, необходимо прочное усвоение основ электротехники и электроники, излагаемых в настоящем пособии.

## РАЗДЕЛ I. ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

### Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### 1.1. Классификация электрических цепей и их элементов

*Электрической цепью* называется совокупность соединённых друг с другом источников электрической энергии и нагрузок, по которым может протекать электрический ток.

Отдельные устройства, входящие в электрическую цепь, называются *элементами электрической цепи*.

В электрических цепях можно выделить три основные группы элементов: источники и приёмники электрической энергии, и соединительные элементы.

*Источниками* электрической энергии называются элементы, предназначенные для генерирования электрической энергии.

*Элементы, использующие электрическую энергию, называются приёмниками* электрической энергии.

Соединительные провода являются звеном, связывающим источник и приёмники энергии. Наряду с электрическими проводами это звено включает приборы контроля и управления, а также преобразующие устройства (трансформаторы, выпрямители...), в которых электрическая энергия переводится в состояние, удобное для её передачи и использования.

Электрические цепи и элементы, из которых они состоят, можно классифицировать по ряду признаков.

1. В зависимости от числа зажимов, с помощью которых элемент соединяется с другими элементами электрической цепи, различают двухполюсные и многополюсные элементы. *Двухполюсные элементы* имеют два вывода, например, резисторы, конденсаторы, индуктивные катушки. *Трёхполюсные элементы* имеют три вывода, например, транзисторы. Примерами *четырёхполюсных элементов* являются трансформаторы, дроссели с подмагничиванием.

2. Различают активные и пассивные элементы электрической цепи.

*Активными элементами* являются источники энергии, а также элементы, способные усиливать электрические сигналы (электронные лампы, транзисторы, операционные усилители...). К *пассивным элементам* относятся устройства, в которых рассеивается или накапливается энергия, например, резисторы, индуктивные катушки, конденсаторы, трансформаторы.

Электрическую цепь называют *активной*, если по отношению к её зажимам она является источником энергии. Активные цепи содержат активные элементы.

3. Связь между током и напряжением на зажимах элемента электрической цепи может быть осуществлена с помощью алгебраических уравнений или дифференциальных уравнений. Элемент электрической цепи, напряжение и ток на зажимах которого связаны *линейным* алгебраическим или дифференциальным уравнением, называется **линейным** элементом.

*Коэффициенты, связывающие ток и напряжение на зажимах элемента или их производные, называются параметрами* элемента. Если параметры элемента постоянны, элемент называется **стационарным**. У нестационарных элементов, называемых **параметрическими**, параметры являются функциями времени.

*Элемент электрической цепи, описываемый нелинейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями, связывающими ток и напряжение на его зажимах, называется нелинейным элементом.*

*Электрические цепи, содержащие только линейные элементы, называются линейными электрическими цепями.*

*Электрические цепи, содержащие один или несколько параметрических элементов, называются параметрическими или нестационарными электрическими цепями.*

*Электрические цепи, содержащие один или несколько нелинейных элементов, называются нелинейными электрическими цепями.*

4. Если ток и напряжение на зажимах элемента электрической цепи не являются функциями пространственных координат, определяющих геометрические размеры элемента, то параметры элемента рассматриваются как **сосредоточенные**, а элемент электрической цепи называется элементом с **сосредоточенными параметрами**.

*Элемент электрической цепи, характеризующийся уравнением, в котором ток и напряжение зависят от пространственных координат, называется элементом с распределёнными параметрами.*

*Электрическая цепь, содержащая только элементы с сосредоточенными параметрами, называется цепью с сосредоточенными параметрами.*

*Графическое изображение электрической цепи с помощью стандартных условных обозначений её элементов называется схемой электрической цепи.* В схемах электрических цепей выделяют ветви и узлы.

**Ветвь** – это участок электрической цепи, по которому протекает один и тот же ток.

**Узел** – это точка в электрической цепи, в которой соединяются три ветви или более.

Любой замкнутый путь в электрической цепи называется **контуром**.

## 1.2. Источники ЭДС и источники тока

Реальным источникам энергии в электрических цепях можно поставить в соответствие двухполюсные схемные элементы: источники ЭДС и источники тока.

Источник ЭДС характеризуется величиной электродвижущей силы  $e(t)$ , равной напряжению на зажимах в отсутствие тока через источник. Напряжение  $U$  на зажимах реального источника ЭДС зависит от силы тока через источник. Если этой зависимостью можно пренебречь, то есть если напряжение на зажимах источника равно ЭДС при любом токе через источник ( $U=e$ ), то источник называется *идеальным источником ЭДС*. Внутреннее сопротивление идеального источника ЭДС равно нулю. Условное обозначение идеального источника ЭДС приведено на рис. 1.2.1.а. Здесь стрелка внутри окружности показывает направление ЭДС: начало стрелки соответствует отрицательному зажиму, а конец – положительному зажиму. Возможно также изображение ЭДС, представленное на рис. 1.2.1.б.

Источник, электродвижущая сила которого удовлетворяет условию  $e(t)=E=const$ , называется *источником постоянной ЭДС*. Реальные источники ЭДС обладают внутренним сопротивлением  $R_0$ , отличным от нуля, вследствие чего напряжение на зажимах реального источника зависит от силы тока  $I$  через источник:

$$U=E-I \cdot R_0. \quad (1.2.1)$$

Для упрощения математического описания реальные элементы электрической цепи заменяют *схемами замещения*, или *эквивалентными схемами*, которые представляют собой изображение реальных элементов с помощью идеализированных элементов, совокупность параметров которых отражает параметры замещаемых элементов.

Реальному источнику ЭДС, ток и напряжение на зажимах которого связаны уравнением (1.2.1), соответствует схема замещения, приведённая на рис. 1.2.2.

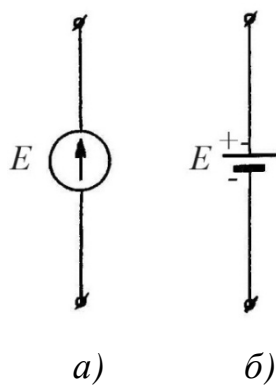


Рис.1.2.1

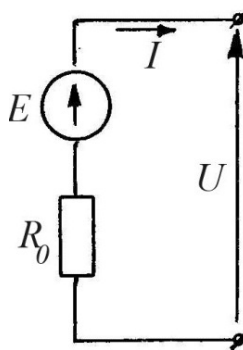


Рис.1.2.2

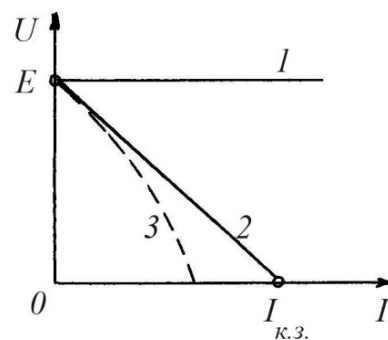


Рис.1.2.3

Зависимость  $U(I)$  называется **внешней характеристикой источника**. Внешняя характеристика идеального источника ЭДС представляет собой прямую линию, параллельную оси токов (линия 1 на рис. 1.2.3). Внешняя характеристика, построенная согласно уравнению (1.2.1), представлена на рис. 1.2.3 линией 2. Здесь

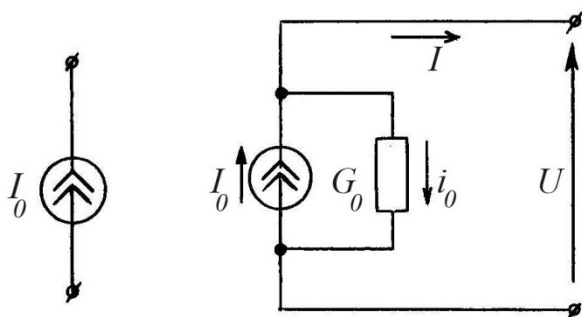
$$I_{к.з} = E/R_0 - \quad (1.2.2)$$

ток короткого замыкания, то есть ток при напряжении на зажимах, равно нулю ( $U=0$ ). В отсутствие тока через источник ( $I=0$ ), то есть в режиме холостого хода напряжение ( $U=U_{хх}$ ), согласно уравнению (1.2.1), равно ЭДС:

$$U_{хх} = E. \quad (1.2.3)$$

В области малых токов внешняя характеристика реальных источников (линия 3 на рис. 1.2.3) близка к линейной и удовлетворяет уравнению (1.2.1).

В отличие от источников ЭДС источник тока характеризуется током  $I_0$  при короткозамкнутых зажимах. *Источник, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах, называется **идеальным источником тока***. Проводимость идеального источника тока равна нулю ( $G_0=0$ ). Условное обозначение идеального источника тока приведено на рис. 1.2.4. Двойная



стрелка с разрывом в окружности показывает направление тока в источнике. Проводимость реального источника отлична от нуля ( $G_0 \neq 0$ ), поэтому ток  $I$  реального источника зависит от напряжения  $U$  на его зажимах:

Рис.1.2.4

Рис.1.2.5

$$I = I_0 - U \cdot G_0. \quad (1.2.4)$$

Уравнению (1.2.4) соответствует схема замещения, приведённая на рис. 1.2.5. Для режима короткого замыкания уравнение (1.2.4) преобразуется к виду:

$$I_{к.з.} = I_0, \quad (1.2.5)$$

так как в этом случае  $U=0$ . При разомкнутых зажимах источника (в режиме холостого хода) уравнение (1.2.4) принимает вид:

$$U_{х.х.} = I_0/G_0. \quad (1.2.6)$$

Реальный источник электрической энергии может быть представлен и как источник тока, и как источник ЭДС, в зависимости от особенностей методики расчёта электрической цепи. Установить связь между параметрами источника тока и источника ЭДС можно, сопоставив формулы (1.2.2) и (1.2.5), а также (1.2.3) и (1.2.6):

$$I_0 = E/R_0, \quad (1.2.7)$$

$$E=I_0/G_0, \quad (1.2.8)$$

причём проводимость  $G_0$  источника тока и внутреннее сопротивление  $R_0$  источника ЭДС связаны соотношением:

$$R_0=1/G_0. \quad (1.2.9)$$

При решении большинства технических задач источники электрической энергии удобно рассматривать как источники ЭДС  $E$  с внутренним сопротивлением  $R_0$ . Замена источника ЭДС источником тока используется лишь при некоторых расчётах, например, при расчётах методом контурных токов.

### 1.3. Условия передачи источником максимальной мощности во внешнюю электрическую цепь

Из закона Джоуля – Ленца

$$P=U \cdot I \quad (1.3.1)$$

следует, что мощность обращается в ноль как в режиме холостого хода, когда сила тока через источник равна нулю, так и в режиме короткого замыкания ( $I=I_{к.з.}$ ), когда напряжение на зажимах источника равно нулю. Установим, при каком сопротивлении нагрузки  $R$  источник передаёт максимальную мощность приёмнику. Для этого исследуем на экстремум функцию  $P(R)$ . Подставив выражение силы тока в электрической цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_0}, \quad (1.3.2)$$

в формулу мощности (1.3.1), выразим мощность через сопротивления источника  $R_0$  и нагрузки  $R$ :

$$P = \frac{R \cdot \mathcal{E}^2}{(R + R_0)^2}. \quad (1.3.3)$$

Для исследования функции  $P(R)$  на экстремум продифференцируем выражение (1.3.3) по сопротивлению нагрузки  $R$ :

$$\frac{dP}{dR} = \mathcal{E}^2 \cdot \frac{(R + R_0)^2 - R \cdot 2 \cdot (R + R_0)}{(R + R_0)^4} = 0.$$

Поскольку  $E \neq 0$ , то  $(R + R_0)^2 - R \cdot 2 \cdot (R + R_0) = 0$ , следовательно

$$R=R_0. \quad (1.3.4)$$

Можно показать, что  $(d^2P/dR^2)<0$ , то есть функция  $P(R)$  имеет **максимум** при  $R=R_0$ . Поэтому во внешней электрической цепи выделяется максимальная мощность, если сопротивление нагрузки  $R$  равно сопротивлению  $R_0$  источника ЭДС.

Нагрузка, удовлетворяющая условию  $R=R_0$ , называется **согласованной нагрузкой**.

Подстановка равенства (1.3.4) в формулу (1.3.2) позволяет выразить ток в электрической цепи при согласованной нагрузке:

$$I_{\text{согл.}} = \frac{\mathcal{E}}{R + R_0} = \frac{\mathcal{E}}{2 \cdot R_0} = \frac{I_{\text{к.з.}}}{2}. \quad (1.3.5)$$

При согласованной нагрузке во внешней электрической цепи выделяется максимальная мощность (рис.1.3.1)  $P_{\text{MAX}} = \mathcal{E}I_{\text{к.з.}}/2$ .

В согласованном режиме коэффициент полезного действия источника  $\eta = 50\%$ .

Согласованный режим целесообразен в электрических цепях малой мощности (в цепях сигнализации, связи, автоматики, телемеханики). В мощных энергетических установках источники работают в относительно узком диапазоне токов ( $I < 0,1 \cdot I_{\text{к.з.}}$ , рис.1.3.1), когда напряжение на зажимах источника незначительно отличается от напряжения холостого хода.

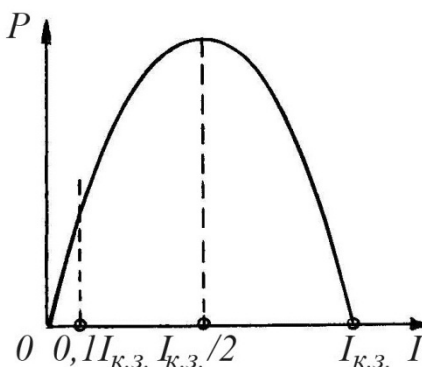


Рис.1.3.1

Максимальная мощность, которую можно получить от источника, не подвергая его опасности повреждения, называется **номинальной мощностью источника**, а напряжение и ток источника в этом режиме называются **номинальным напряжением и номинальным током источника**.

#### 1.4. Обобщённый закон Ома

Обобщённый закон Ома позволяет рассчитать силу тока в ветви электрической цепи, если известны потенциалы её зажимов.

На рис.1.4.1 рассмотрен участок электрической цепи, содержащий резисторы с сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  и источники с ЭДС  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}_3$ . Точки соединения элементов электрической цепи обозначены символами  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ . Выразим потенциалы этих точек через потенциал точка  $a$  ( $\varphi_a$ ), полагая, что ток направлен от точки  $a$  к точке  $h$ . Потенциал точки  $b$  ниже потенциала точки  $a$  на величину падения напряжения  $I \cdot R_1$  на участке  $ab$ :

$$\varphi_b = \varphi_a - I \cdot R_1. \quad (1.4.1)$$

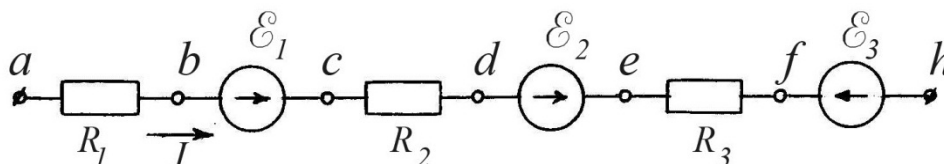


Рис.1.4.1

Источник ЭДС на участке  $bc$  повышает потенциал на этом участке на величину  $\mathcal{E}_1$ , то есть:

$$\varphi_c = \varphi_b + E_1 = \varphi_a - I \cdot R_1 + E_1. \quad (1.4.2)$$

Рассуждая аналогично, можно определить потенциалы всех точек электрической цепи:

$$\varphi_d = \varphi_c - I \cdot R_2 = \varphi_a - I \cdot (R_1 + R_2) + E_1; \quad (1.4.3.a)$$

$$\varphi_e = \varphi_d + E_2 = \varphi_a - I \cdot (R_1 + R_2) + (E_1 + E_2); \quad (1.4.3.б)$$

$$\varphi_f = \varphi_e - I \cdot R_3 = \varphi_a - I \cdot (R_1 + R_2 + R_3) + (E_1 + E_2); \quad (1.4.3.в)$$

$$\varphi_h = \varphi_f - E_3 = \varphi_a - I \cdot (R_1 + R_2 + R_3) + (E_1 + E_2 - E_3). \quad (1.4.3.г)$$

Преобразовав последнее уравнение к виду

$$\varphi_a - \varphi_h = I \cdot (R_1 + R_2 + R_3) - (E_1 + E_2 - E_3)$$

можно выразить силу тока на участке  $ah$ :

$$I = I_{a-h} = \frac{(\varphi_a - \varphi_h) + (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3)}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (1.4.4)$$

Обобщая уравнение (1.4.4), для произвольного участка  $ah$  электрической цепи, его можно записать в виде:

$$I_{a-h} = \frac{(\varphi_a - \varphi_h) + \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k}{\sum_{k=1}^n R_k}, \quad (1.4.5)$$

где  $\sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k$  – алгебраическая сумма ЭДС источников участка  $ah$  электрической цепи, причём ЭДС, направления которых совпадает с направлением тока, записываются в уравнении (1.4.5) со знаком «плюс», а в случае противоположного направления ЭДС и тока – с отрицательным знаком;  $\sum_{k=1}^n R_k$  – сопротивление участка  $ah$  электрической цепи. Выражение (1.4.5) называется **обобщённым законом Ома**.

Анализ распределения потенциала в электрической цепи может быть выполнен с помощью *потенциальной диаграммы*.

**Потенциальная диаграмма** представляет собой график распределения потенциала вдоль участка электрической цепи и контура. На этом графике по оси абсцисс откладывается сопротивление вдоль контура, а по оси ординат – потенциалы. На рис.1.4.2 представлена потенциальная диаграмма участка  $ah$  электрической цепи, рассмотренного на рис.1.4.1. В точке отсчёта потенциал принимают равным нулю.

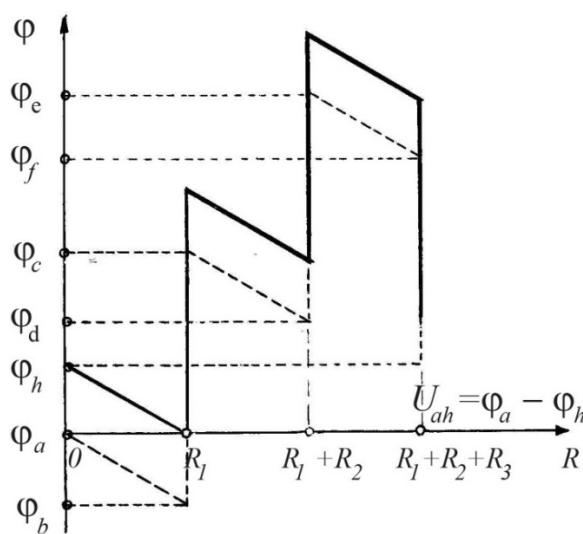


Рис.1.4.2

Если в схеме содержится заземлённая точка, её потенциал принимается равным нулю.

При построении потенциальной диаграммы участка  $ah$  электрической цепи предположили, что  $\varphi_a=0$  (пунктирная линия на рис.1.4.2). Сплошной линией изображена потенциальная диаграмма участка  $ah$  при условии  $\varphi_b=0$ .

Потенциальная диаграмма даёт наглядное представление о распределении потенциала в электрической цепи. Например, из рис.1.4.2 следует, что на участке  $ah$  электрической цепи наибольшее напряжение создаётся между точками  $b$  и  $e$ . Таким образом, анализ потенциальной диаграммы позволяет сделать вывод о том, пробой каких участков наиболее вероятен, и обеспечить необходимую изоляцию.

## 1.5. Эквивалентное сопротивление электрической цепи

Различают последовательное, параллельное и смешанное соединение элементов электрической цепи. **Критерий последовательного соединения элементов:** два приёмника электрической цепи можно считать соединёнными **последовательно**, если между ними имеется одна непосредственная связь, к которой нет никаких присоединений (рис.1.5.1.а).

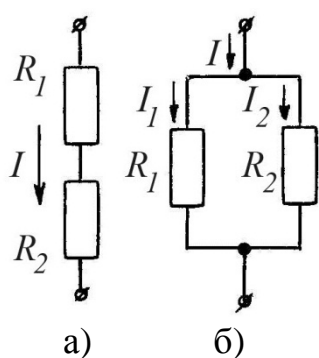


Рис.1.5.1

Группу последовательно соединённых сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  можно заменить эквивалентным сопротивлением:  $R=R_1+R_2=U/I$ . (1.5.1)

**Критерий параллельного соединения элементов:** два приёмника  $R_1$  и  $R_2$  можно считать соединёнными **параллельно**, если между ними существуют два непосредственных соединения (рис.1.5.1.б). Наличие любого количества дополнительных присоединений к этим приёмникам не имеет значения.

Группу параллельно соединённых сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  можно заменить эквивалентной проводимостью:

$$G = G_1 + G_2 = \frac{I_1 + I_2}{U} = \frac{I}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{\text{общ}}}. \quad (1.5.2)$$

Более сложным является *смешанное* соединение приёмников электрической цепи, представляющее собой сочетание параллельного и последовательного соединения. В этом случае расчёт эквивалентного сопротивления выполняют методом «свёртывания» цепи, начиная с приёмников, наиболее удалённых от входных зажимов. Например, при расчёте эквивалентного сопротивления электрической цепи, представленной на рис.1.5.2.а, резисторы  $R_6$  и  $R_7$ , соединённые параллельно, и  $R_2$  и  $R_3$ , соединённые последовательно, можно заменить эквивалентными сопротивлениями

$$R_{6,7} = \frac{R_6 \cdot R_7}{R_6 + R_7} \text{ и } R_{2,3} = R_2 + R_3. \quad (1.5.3)$$

Поэтому электрическую цепь (рис.1.5.2.а) следует преобразовать к виду, представленному на рис.1.5.2.б.

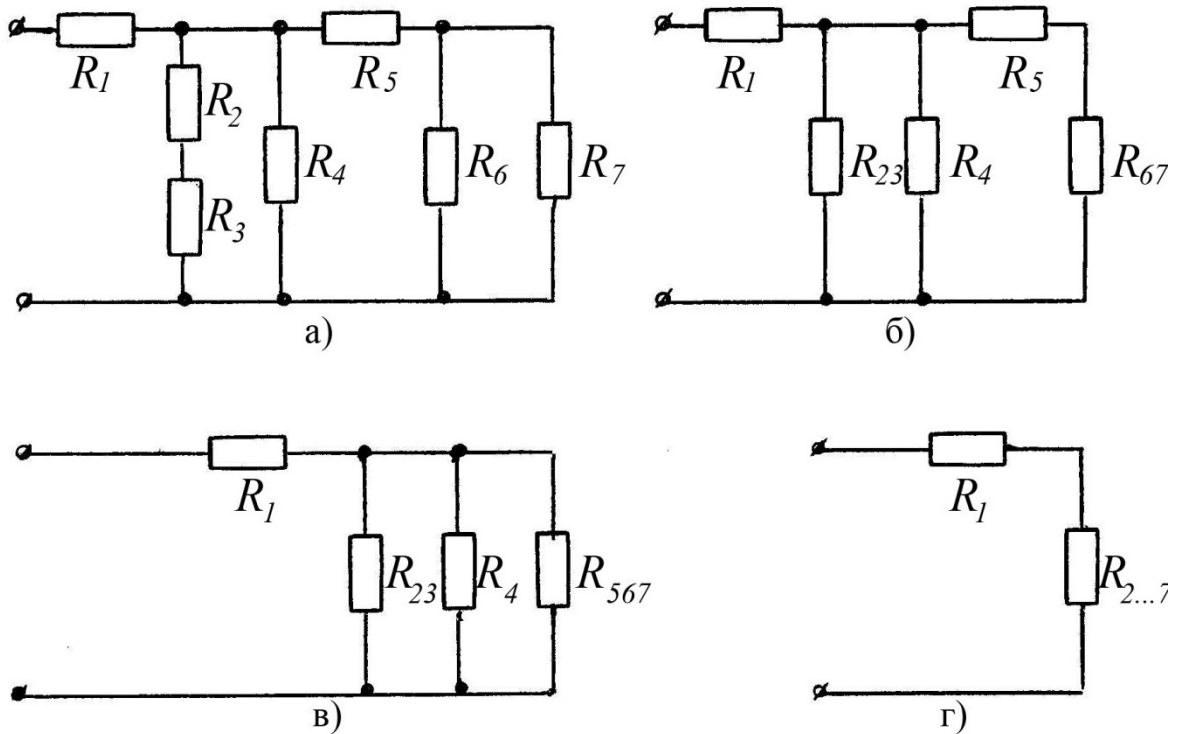


Рис.1.5.2

На рис.1.5.2.б сопротивления  $R_5$  и  $R_{6,7}$  соединены последовательно и могут быть заменены эквивалентным сопротивлением (рис.1.5.2.в):

$$R_{5,6,7} = R_5 + R_{6,7}. \quad (1.5.4)$$

Соединённые параллельно сопротивления  $R_{2,3}$ ,  $R_4$  и  $R_{5,6,7}$  (рис.1.5.2.в) заменены на рис.1.5.2.г эквивалентным сопротивлением

$$R_{2-7} = \frac{R_{2,3} \cdot R_4 \cdot R_{5,6,7}}{R_{2,3} \cdot R_4 + R_{2,3} \cdot R_{5,6,7} + R_{5,6,7} \cdot R_4}. \quad (1.5.5)$$

Таким образом, эквивалентное сопротивление электрической цепи (рис.1.5.2.а) равно:  $R_{ЭКВ} = R_1 + R_{2-7}$ . В некоторых случаях группы сопротивлений в разветвлённых электрических цепях не удовлетворяют ни условию последовательного, ни условию параллельного соединения. Для расчёта эквивалентного сопротивления такой группы элементов необходимо предварительно преобразовать электрическую цепь.

## 1.6. Преобразование звезды в эквивалентный треугольник и треугольника в эквивалентную звезду

В некоторых случаях элементы разветвлённой электрической цепи соединены по схеме «звезда» или «треугольник». При расчёте сопротивления таких цепей необходимо преобразование «звезды» в эквивалентный «треугольник», или обратное преобразование. Взаимная эквивалентность групп сопротивлений означает равенство их сопротивлений относительно входных зажимов. Замена группы сопротивлений эквивалентной группой не приводит к изменению режима работы электрической цепи.

*Соединение звездой* получается при объединении начал или концов элементов электрической цепи в одну точку. На рис.1.6.1.а показана трёхлучевая звезда.

Если конец одного элемента электрической цепи соединить с началом последующего и конец последнего элемента – с началом первого, получается соединение *многоугольником*. На рис.1.6.1.б показана схема соединения резисторов треугольником.

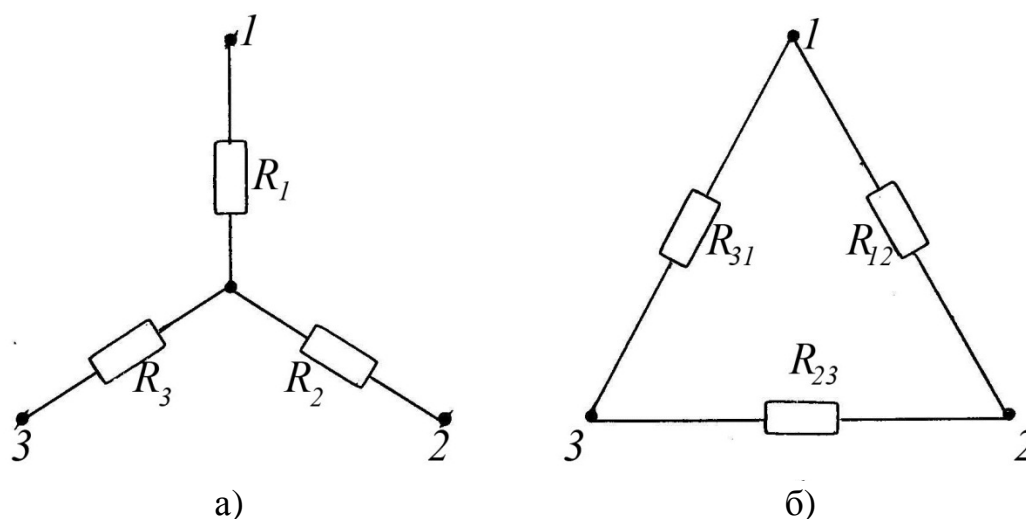


Рис.1.6.1

Треугольник и звезда включены в электрическую цепь в точках 1, 2 и 3 (рис.1.6.1).

Два трёхполюсника, например, треугольник и звезда называются **эквивалентными**, если по отношению к своим выводам они обладают одинаковыми электрическими свойствами, в частности, одинаковыми сопротивлениями между соответствующими выводами.

Установим соотношения между сопротивлениями  $R_1, R_2, R_3$  звезды и сопротивлениями  $R_{12}, R_{23}, R_{31}$  эквивалентного треугольника. Сопротивление между выводами 1 и 2 звезды равно  $R_{ЗВ.12}=R_1+R_2$ , сопротивление между этими же выводами треугольника:  $R_{ТР.1,2} = \frac{R_{12} \cdot (R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$ . Равенство со-

противлений между выводами 1 и 2 в звезде и треугольнике определяет одно из условий эквивалентности этих трёхполюсников:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12} \cdot (R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (1.6.1)$$

Рассуждая аналогично, для двух других пар выводов получим:

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23} \cdot (R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (1.6.2)$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31} \cdot (R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (1.6.3)$$

Полагая в системе уравнений (1.6.1)÷(1.6.3) известными сопротивления  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$  треугольника и решая эту систему уравнений относительно сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , можно определить условия замены треугольника эквивалентной звездой с сопротивлениями:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \\ R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \\ R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \end{cases} \quad (1.6.4)$$

Решение системы уравнений (1.6.1)÷(1.6.3) относительно сопротивлений  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$  позволяет выразить сопротивления треугольника через сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  лучей звезды:

$$\begin{cases} R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}; \\ R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}; \\ R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}. \end{cases} \quad (1.6.5)$$

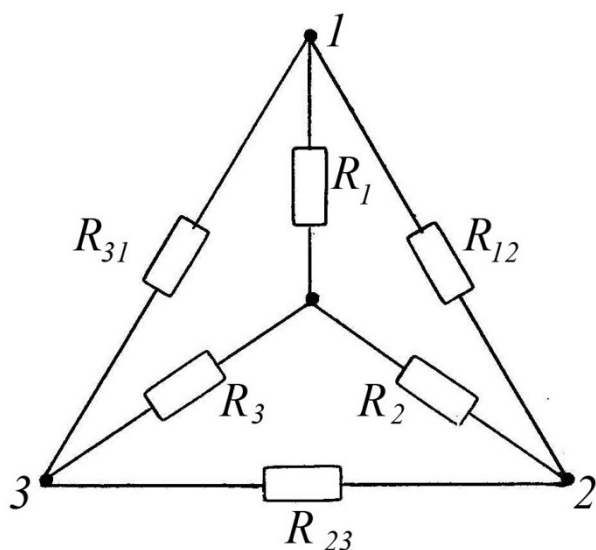


Рис.1.6.2

Если эквивалентные звезду и треугольник мысленно представить наложенными друг на друга (рис.1.6.2), то можно сформулировать мнемонические правила построения формул (1.6.4) и (1.6.5).

**Правило построения формул (1.6.4):**

*сопротивление луча звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, делённому на сумму сопротивлений всех трёх сторон треугольника.*

**Правило построения формул (1.6.5):** *сопротивление стороны треугольника равно сумме сопротивлений прилегающих лучей звезды и произведению тех же сопротивлений, делённому на сопротивление третьего луча.*

## 1.7. Расчёт простых электрических цепей

Методы расчёта режимов работы электрических цепей различаются в зависимости от их принадлежности к простым или сложным электрическим цепям.

**Простыми** называют электрические цепи, направления токов во всех ветвях которых можно установить без предварительных расчётов по направлению действия источников этих цепей. Таким образом, простыми являются электрические цепи, удовлетворяющие следующим условиям: 1) все источники включены в одну ветвь и действуют в одном направлении; 2) все сопротивления соединены параллельно, последовательно или смешанно, то есть образуют простую группу. Все другие электрические цепи, в которых направления токов зависят от параметров их элементов и поэтому не могут быть определены без предварительных расчётов, составляют группу **сложных** электрических цепей.

При расчёте простых электрических цепей можно выделить два типа задач: прямую и обратную задачу.

Если известны параметры всех элементов электрической цепи, включая ЭДС и токи источников, и требуется определить токи в ветвях цепи, задача называется *прямой*.

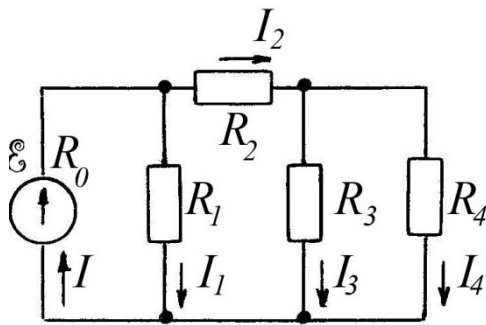


Рис.1.7.1

При решении прямой задачи расчёта электрической цепи, представленной на рис.1.7.1, известными считаются ЭДС источника  $E$ , его внутреннее сопротивление  $R_0$ , а также сопротивления приёмников  $R_1, R_2, R_3, R_4$ . Требуется определить токи  $I_k$  в ветвях цепи.

Для решения задачи необходимо «свернуть» всю группу приёмников  $R_1 \div R_4$  в одно эквивалентное сопротивление  $R$  (рис.1.7.2.в) путём последовательных упрощений схемы (рис.1.7.1  $\rightarrow$  рис.1.7.2.в).

Далее, для полученной на рис.1.7.2.в схемы, следует рассчитать ток в ветви источника  $I = E / (R_0 + R)$  и напряжение на эквивалентном сопротивлении  $U = I \cdot R = E \cdot R / (R_0 + R)$ .

Затем следует «развернуть» схему, переходя от рис.1.7.2.в к рис.1.7.1. Токи  $I_1$  и  $I_2$  в параллельных ветвях (рис.1.7.2.б) можно рассчитать с помощью закона Ома:  $I_1 = U / R_1$  и  $I_2 = U / R_{234}$ . Для определения токов в ветвях сопротивлений  $R_3$  и  $R_4$  необходимо определить напряжения на этих приёмниках:  $U_3 = U_4 = I_2 \cdot R_{34}$  (рис.1.7.2.а). Тогда токи в сопротивлениях  $R_3$  и  $R_4$  (рис.1.7.1) равны соответственно:  $I_3 = U_3 / R_3$  и  $I_4 = U_4 / R_4$ .

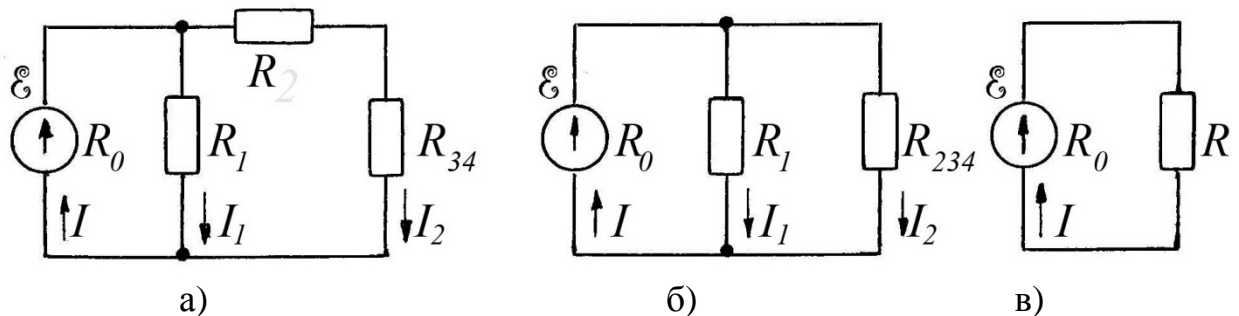


Рис.1.7.2

В *обратной* задаче известны сопротивления всех элементов электрической цепи и ток в одной из ветвей. Требуется определить ЭДС или ток источника. Например, при решении обратной задачи для цепи на рис.1.7.1 известны сопротивления  $R_1, R_2, R_3, R_4$  и ток в одной из ветвей. Рассмотрим наиболее сложный случай, когда известен ток  $I_4$  в ветви, наиболее удалённой от источника ЭДС.

Расчёт следует начать с определения напряжения на соединённых параллельно элементах  $R_3$  и  $R_4$ . Применение закона Ома даёт:  $U_3 = U_4 = I_4 \cdot R_4$ . Используя известное напряжение  $U_3$  можно рассчитать ток  $I_3 = U_3 / R_3$ . Ток  $I_2$  равен сумме токов  $I_3$  и  $I_4$ :  $I_2 = I_3 + I_4$ . Напряжение  $U_{AB} = U_3 + U_4 = I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4$  на

участке  $AB$  можно использовать для определения тока  $I_1 = U_{AB}/R_1$ . Ток  $I$  в ветви приёмника равен сумме токов:  $I = I_1 + I_2$ .

ЭДС источника можно рассчитать с помощью соотношения (1.2.1):  $E = U_{AB} + I \cdot R_0$ . Для идеального источника  $R_0 = 0$ , поэтому  $E = U_{AB}$ .

Поскольку при расчёте одной и той же электрической цепи решение обратной задачи является менее громоздким, так как не требует «свёртывания» электрической цепи, для решения прямой задачи удобно использовать *метод подобия*, также не требующий выполнения «свёртывания» электрической цепи. *Метод подобия*, называемый также *методом пропорциональных величин*, позволяет заменить прямую задачу обратной. Для этого произвольно задают ток одной ветви, как правило, наиболее удалённой от источника ЭДС, и решая обратную задачу, находят ЭДС цепи. Далее, пользуясь строгой пропорциональностью между ЭДС источника и любым током *линейной* электрической цепи, токи, полученные при решении обратной задачи, умножают на коэффициент, равный отношению реальной ЭДС к величине, полученной при решении обратной задачи. Это позволяет рассчитать реальные токи в ветвях электрической цепи. Данный метод применим только для расчёта линейных электрических цепей.

## Глава II. МЕТОДЫ РАСЧЁТА СЛОЖНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 2.1. Законы Кирхгофа

Два закона Кирхгофа установлены опытным путём и являются основными законами электрических цепей.

**Первый закон Кирхгофа** является следствием закона сохранения энергии для электрических цепей и может быть сформулирован двумя способами:

1. Сумма всех токов, приходящих к любому узлу электрической цепи, равна сумме всех токов, выходящих из этого узла
2. Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (2.1.1)$$

**Правило знаков:** токам, входящим в узел, присваивают один произвольный знак, а токам, выходящим из узла, присваивают противоположный знак. Например, для узла  $A$  рис. 2.2.1 первый закон Кирхгофа записывается в следующем виде:

- согласно первой формулировке:  $I_1 + I_2 = I_3$ ,

согласно второй формулировке:  $I_1 + I_2 - I_3 = 0$ .

Если мысленно расsects любую схему произвольной плоскостью и всё, находящееся по одну сторону от плоскости, рассматривать как некоторый большой «узел», то алгебраическая сумма токов, входящих в этот «узел», будет равна нулю.

**Второй закон Кирхгофа** устанавливает связь между результирующей ЭДС, действующей в цепи, и произведениями токов в ветвях цепи на сопротивления соответствующих ветвей и также может быть сформулирована двумя способами.

1. Алгебраическая сумма падений напряжений в любом контуре электрической цепи равна алгебраической сумме ЭДС источников, входящих в контур:

$$\sum_{k=1}^n I_k \cdot R_k = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k \quad (2.1.2)$$

**Правило знаков:** 1) падения напряжения в уравнении (2.2.1) считаются положительными, если направления токов в соответствующих ветвях совпадают с направлением обхода контура, и отрицательными, если их направления противоположны; 2) электродвижущие силы, направления которых совпадают с направлением обхода контура, входят в правую часть уравнения (2.2.1) со знаком «плюс», если направления противоположны – со знаком «минус».

2. Алгебраическая сумма напряжений вдоль любого контура равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n U_n = 0 \quad (2.1.3)$$

Основной метод расчёта токов в сложных электрических цепях базируется на использовании законов Кирхгофа.

## 2.2. Применение законов Кирхгофа для расчёта сложных электрических цепей

Рассмотрим методику расчёта режима работы сложной электрической цепи, содержащей  $m$  ветвей и  $n$  узлов. Число токов в ветвях равно числу ветвей ( $m$ ), поэтому для определения токов необходимо составить  $m$  уравнений.

*Последовательность операций расчёта сложной электрической цепи:*

1. Необходимо определить число  $n$  узлов и ветвей  $m$  электрической цепи. Далее произвольно выбрать направления: а) токов в ветвях и указать

их на схеме и б) обхода контуров для составления уравнений второго закона Кирхгофа.

2. Составить уравнения первого закона Кирхгофа для  $n-1$  узла. Целесообразно не рассматривать узел с наибольшим числом расходящихся из него ветвей.

3. Недостающие  $m-(n-1)$  уравнения получают, записав второй закон Кирхгофа для *взаимно независимых* контуров. **Взаимно независимыми** являются контуры, каждый из которых содержит ветвь, не принадлежащую другим контурам.

4. Решение полученной системы  $m$  уравнений позволяет получить не только численные значения токов, но и их действительные направления. Если решение привело к отрицательному значению какого-либо тока, то его действительное направление противоположно выбранному в пункте 1.а.

В качестве примера рассмотрим расчёт режима работы электрической цепи, представленной на рис. 2.2.1.

1. Электрическая цепь содержит  $n=4$  узла и  $m=6$  ветвей. Произвольно обозначим направления токов  $I_1 \div I_6$  в ветвях. Независимые контуры  $ADkB$ ,  $AC\ell D$  и  $BfgC$  будем обходить по часовой стрелке.

2. Составим  $n-1=3$  уравнения первого закона Кирхгофа для узлов  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

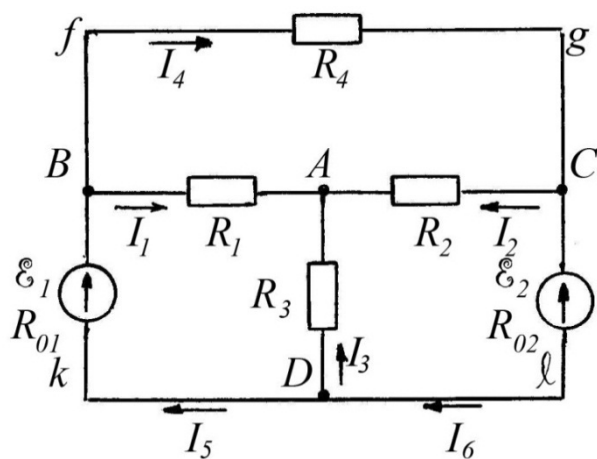


Рис.2.2.1

$$\begin{cases} \text{узел A: } I_1 + I_2 + I_3 = 0, \\ \text{узел B: } I_5 - I_1 - I_4 = 0, \\ \text{узел C: } I_4 - I_2 - I_6 = 0. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

3. Составим уравнения второго закона Кирхгофа для трёх контуров:

$$\begin{cases} \text{контур } ADkB: \\ -I_3 \cdot R_3 + I_5 \cdot R_{01} + I_1 \cdot R_1 = \varepsilon_1; \\ \text{контур } AC\ell D: \\ -I_2 \cdot R_2 + I_6 \cdot R_{02} + I_3 \cdot R_3 = -\varepsilon_2; \\ \text{контур } BfgC: \\ I_4 \cdot R_4 + I_2 \cdot R_2 - I_1 \cdot R_1 = 0. \end{cases}$$

4. Совместное решение уравнений двух полученных систем позволяет определить токи во всех ветвях электрической цепи.

### 2.3. Закон баланса мощности

Для проверки правильности расчёта токов в ветвях электрической цепи используют *закон баланса мощности*. Этот закон является следствием закона сохранения энергии и утверждает, что *суммарная мощность ис-*

точников электрической цепи равна суммарной мощности, потребляемой приёмниками этой цепи:

$$\sum_{k=1}^m \mathcal{E}_k \cdot I_k = \sum_{k=1}^m I_k^2 \cdot R_k \quad (2.3.1)$$

**Правило знаков:** 1) Если направления тока ветви и источника ЭДС совпадают, то произведение  $\mathcal{E}_k \cdot I_k$  записывают со знаком «плюс». При встречном направлении ЭДС и тока в ветви источник потребляет энергию, и произведение  $\mathcal{E}_k \cdot I_k$  является отрицательным. 2) Знак произведения  $I_k^2 \cdot R_k$  не зависит от направления тока и во всех случаях положителен.

Например, для электрической цепи на рис. 2.2.1 закон баланса мощности записывается в следующем виде:

$$E_1 \cdot I_5 - E_2 \cdot I_6 = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_{01} + I_6^2 \cdot R_{02}.$$

## 2.4. Метод контурных токов

Метод контурных токов, предложенный Дж. Максвеллом для упрощения расчёта режимов работы сложных электрических цепей, заключается в том, что вместо действительных токов в ветвях электрической цепи рассчитывают *контурные токи в независимых контурах*.

**Контурным** называется условный (расчётный) ток, который замыкается только в своём контуре, оставаясь вдоль него неизменным.

Согласно этому методу, действительный ток в любой ветви, принадлежащей только одному контуру, равен контурному току этого контура, а ток в ветви, принадлежащей нескольким контурам, равен алгебраической сумме контурных токов, проходящих через эту ветвь.

Таким образом, число неизвестных контурных токов в данном методе, равно числу независимых контуров:

$$N = m - n + 1, \quad (2.4.1)$$

где  $m$  - число ветвей и  $n$  - число узлов электрической цепи. Из уравнения (2.4.1) следует, что  $N < m$ , то есть при использовании метода контурных токов число неизвестных и, следовательно, число уравнений меньше, чем при решении задачи методом токов в ветвях (законов Кирхгофа).

*Последовательность операций расчёта сложной электрической цепи методом контурных токов:*

1) Необходимо определить число  $n$  узлов и ветвей  $m$  электрической цепи и на основании формулы (2.4.1) определить число  $N$  неизвестных контурных токов. Далее произвольно выбрать направления: а) токов в ветвях и указать их на схеме и б) обхода  $N$  контуров.

2) Для каждого из  $N$  контуров следует записать второй закон Кирхгофа.

**Правило знаков:** 1) Поскольку направление обхода контура совпадает с направлением контурного тока этого контура, то падение напряжения при прохождении контурного контура в собственном сопротивлении контура является положительным. 2) Падение напряжения при прохождении контурного тока смежного контура является положительным, если направление контурного тока смежного контура совпадает с направлением обхода, и отрицательным, если направление контурного тока смежного контура противоположно направлению обхода. 3) Значение ЭДС источника является положительным, если оно совпадает с направлением обхода контура. Значение ЭДС отрицательно при встречном направлении обхода контура и ЭДС.

3) Необходимо решить полученную систему  $N$  уравнений и рассчитать контурные токи.

4) Определить действительные токи в ветвях электрической цепи, используя сформулированное выше правило: а) действительный ток в ветви, принадлежащей одному контуру, равен контурному току этого контура; б) действительный ток в ветви, принадлежащей нескольким контурам, равен алгебраической сумме контурных токов, проходящих через эту ветвь.

Рассмотрим пример расчёта токов в ветвях электрической цепи на примере схемы, представленной на рис. 2.4.1.

1. Электрическая цепь содержит  $n=4$  узла и  $m=6$  ветвей. Для расчёта электрической цепи необходимо определить  $N=6-4+1=3$  контурных тока  $I_I$ ,  $I_{II}$ ,  $I_{III}$ .

2. Составим уравнения второго закона Кирхгофа для контуров  $I$ ,  $II$  и  $III$ .

$$\begin{cases} \text{для первого контура:} & I_I \cdot (R_1 + R_{01} + R_4) - I_{II} \cdot R_4 - I_{III} \cdot R_1 = \mathcal{E}_1, \\ \text{для второго контура:} & -I_I \cdot R_4 + I_{II} \cdot (R_2 + R_{02} + R_4) - I_{III} \cdot R_2 = -\mathcal{E}_2, \\ \text{для третьего контура:} & -I_I \cdot R_1 - I_{II} \cdot R_2 + I_{III} \cdot (R_1 + R_2 + R_{03}) = \mathcal{E}_3. \end{cases}$$

3. Полученную систему уравнений целесообразно решить методом определителей. Для этого удобно записать систему в виде:

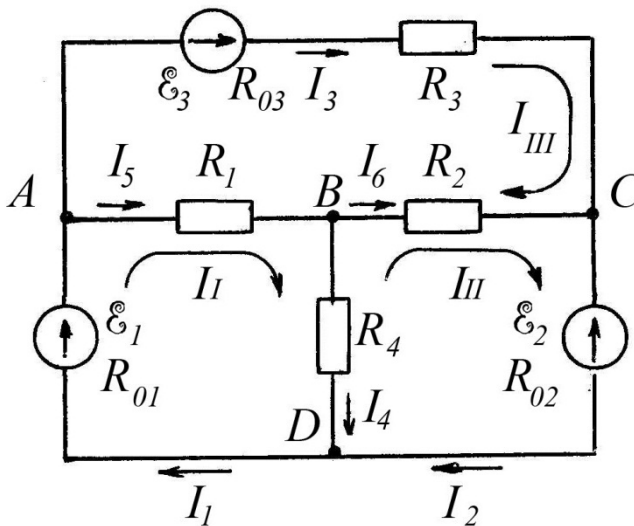


Рис.2.4.1

$$\begin{cases} I_I \cdot R_{11} - I_{II} \cdot R_{12} - I_{III} \cdot R_{13} = \mathcal{E}_{11}, \\ -I_I \cdot R_{21} + I_{II} \cdot R_{22} - I_{III} \cdot R_{23} = \mathcal{E}_{22}, \\ -I_I \cdot R_{31} - I_{II} \cdot R_{32} + I_{III} \cdot R_{33} = \mathcal{E}_{33}. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Здесь  $R_{11}=R_1+R_{01}+R_4$ ,  $R_{22}=R_2+R_{02}+R_4$ ,  $R_{33}=R_1+R_2+R_3+R_4$  – собственные сопротивления контуров;  $R_{12}=R_{21}=R_4$ ,  $R_{13}=R_{31}=R_1$ ,  $R_{23}=R_{32}=R_2$  – общие сопротивления, то есть сопротивления смежных контуров, причём индексы указывают, каким контурам принадлежат сопротивления;  $E_{11}=E_1$ ,  $E_{22}=-E_2$ ,  $E_{33}=E_3$  – ЭДС контуров, номера которых обозначены двумя одинаковыми индексами. Согласно правилу разложения определителя по элементам столбца определитель равен сумме произведений элементов столбца на их алгебраические дополнения. Поэтому общее решение системы уравнений (2.4.2) можно представить в виде:

[illegible]

Таким образом, ток  $k$ -го контура равен:

$$I_k = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{m=1}^n \varepsilon_{mm} \cdot \Delta_{km}. \quad (2.4.4)$$

Здесь  $\Delta_{km}$  – алгебраическое дополнение, полученное из определителя  $\Delta$  системы, путём вычёркивания  $k$ -го столбца и  $m$ -й строки и умножения полученного определителя на  $(-1)^{k+m}$ . Символ « $k$ » соответствует номеру контура, для которого рассчитывают контурный ток. Индекс « $m$ » означает номер строки, которая вычёркивается в определителе системы и соответствует номеру контура, контурная ЭДС которого умножается на данное алгебраическое дополнение.

4. В заключение следует рассчитать действительные токи в ветвях электрической цепи с учётом приведённых выше правил:

- в ветвях, принадлежащих одному контуру, действительный ток равен контурному току этого контура, то есть  $I_1 = I_I, I_2 = I_{II}, I_3 = I_{III}$ ,
- в ветвях, общих для смежных контуров, действительный ток равен алгебраической сумме контурных токов этих ветвей:  $I_4 = I_I - I_{II}, I_5 = I_I - I_{III}, I_6 = I_{II} - I_{III}$ .

Метод контурных токов целесообразно применять для расчёта токов в электрических цепях, содержащих относительно большое число  $n$  узлов, что в соответствии с формулой (2.4.1) позволит использовать небольшое число уравнений для расчёта электрической цепи.

## 2.5. Развёрнутая форма первого закона Кирхгофа

Для упрощения расчёта электрических цепей, содержащих относительно большое число  $m$  ветвей, следует использовать первый закон Кирхгофа, записанный в развёрнутой форме.

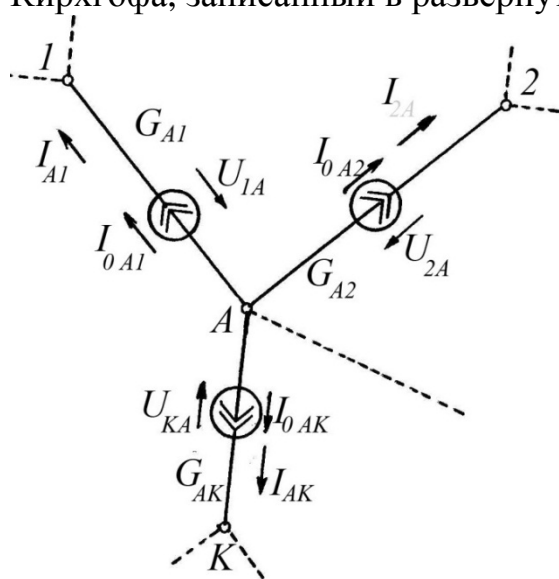


Рис.2.5.1

Рассмотрим участок сложной электрической цепи, содержащий произвольный узел  $A$  и окружающие его узлы  $1, 2, \dots, n$  (рис. 2.5.1). Для упрощения записи первого закона Кирхгофа представим все ветви в виде эквивалентных источников тока, параметры которых будем обозначать двойными индексами, указывающими номера узлов, которые соединяет данная ветвь. Например, ток источника ветви  $AK$  обозначен символом  $I_{0 AK}$ .  $G_{AK}$  – проводимость ветви  $AK$ .  $I_{AK}$  –

сила тока в ветви  $AK$ . Здесь первый символ ( $A$ ) указывает, из какого узла течёт ток.

Для узла  $A$  первый закон Кирхгофа запишется в виде:

$$\sum_{k=1}^n I_{AK} = 0. \quad (2.5.1)$$

Используя уравнение (1.2.4) источника тока, выразим ток в ветви  $AK$  через ток её источника  $I_{0 AK}$  и проводимость  $G_{AK}$  ветви:

$$I_{AK} = I_{0 AK} - G_{AK} \cdot U_{KA}. \quad (2.5.2)$$

Изменение порядка чередования индексов напряжения  $U_{KA}$  указывает на то, что напряжение направлено противоположно току. Заменяя это напряжение разностью потенциалов между точками  $K$  и  $A$ , получим:

$$U_{KA} = \varphi_K - \varphi_A. \quad (2.5.3)$$

Подстановка выражения (2.5.3) в уравнение (2.5.2) даёт:

$$I_{AK} = I_{0 AK} - G_{AK} \cdot (\varphi_K - \varphi_A). \quad (2.5.4)$$

С учётом полученного равенства (2.5.4) уравнение первого закона Кирхгофа (2.5.1) преобразуется к виду:

$$\sum_{k=1}^n [I_{0 AK} - G_{AK} \cdot (\varphi_K - \varphi_A)] = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^n I_{0 AK} - \sum_{k=1}^n G_{AK} \cdot \varphi_K + \sum_{k=1}^n G_{AK} \cdot \varphi_A = 0.$$

Окончательно:

$$\sum_{k=1}^n G_{AK} \cdot \varphi_K - \varphi_A \cdot \sum_{k=1}^n G_{AK} = \sum_{k=1}^n I_{0\ AK}. \quad (2.5.5)$$

Из уравнения (2.5.5), выражающего *развёрнутую форму записи первого закона Кирхгофа*, следует, что *сумма произведений проводимостей ветвей, расходящихся из данного узла, на потенциалы соседних узлов, за вычетом произведения его потенциала на сумму проводимостей всех упомянутых ветвей, равна алгебраической сумме исходных токов расходящихся ветвей.*

## 2.6. Метод узловых потенциалов

Для упрощения расчёта токов в сложных разветвлённых электрических цепях Дж. Максвеллом был предложен оригинальный метод, названный *методом узловых потенциалов*, в котором в качестве промежуточных неизвестных принимаются потенциалы узлов электрической цепи.

Допустим, что электрическая цепь содержит  $n$  узлов. Поскольку одну любую точку электрической цепи можно заземлить без изменения распределения токов в ней, то один из узлов схемы мысленно заземляют, полагая его потенциал равным нулю. *Узел, потенциал которого принимается равным нулю, называется опорным узлом.* Его выбор может быть сделан произвольно. Тогда число неизвестных потенциалов уменьшается на один и становится равным  $n-1$ . Таким образом, если число узлов электрической цепи меньше числа независимых контуров, применение метода узловых потенциалов имеет преимущество даже по сравнению с методом контурных токов.

Расчёт токов в ветвях сложной электрической цепи методом узловых потенциалов следует выполнять в следующей последовательности.

1. Определяют число  $n$  узлов электрической цепи и произвольно выбирают опорный узел.
2. Для любых  $n-1$  узлов из  $n$  узлов электрической цепи следует записать первый закон Кирхгофа в развёрнутой форме (2.5.5).
3. Решить полученную систему уравнений и определить потенциалы узлов электрической цепи.
4. Используя обобщённый закон Ома (1.4.5), определить токи в ветвях электрической цепи.

**Правило знаков:** 1) если определяют ток  $I_{AK}$ , направленный от узла  $A$  к узлу  $K$ , то ЭДС, действующая в том же направлении, положительна, а ЭДС, направленная встречно – отрицательна; 2) при вычислении силы тока по формуле (1.4.5) уменьшаемым всегда должен быть потенциал узла, из которого течёт искомый ток, а вычитаемым – потенциал узла, к которому направлен этот ток.

Рассчитаем методом узловых потенциалов токи в ветвях электрической цепи, представленной на рис. 2.6.1.

1. Электрическая цепь содержит  $n=5$  узлов. Выберем в качестве опорного узла, например, узел 5, снабдив его условным знаком заземления.

2. Полагая, что параметры всех элементов электрической цепи известны, составим уравнения первого закона Кирхгофа в развёрнутой форме для  $n-1=4$  узлов.

$$\text{Узел 1: } \varphi_2 \cdot G_{12} + \varphi_4 \cdot G_{14} + \varphi_5 \cdot G_{15} - \varphi_1 \cdot (G_{12} + G_{14} + G_{15}) = I_{012} + I_{015} + I_{014}, \quad (2.6.1)$$

$$\text{где } G_{12} = \frac{1}{R_1 + R_{01}}; \quad G_{14} = \frac{1}{R_2 + R_{03} + R_3}; \quad G_{15} = \frac{1}{R_{02}}; \quad \varphi_5 = 0;$$

$$I_{012} = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1 + R_{01}};$$

$$I_{014} = \frac{-\mathcal{E}_3}{R_2 + R_{03} + R_3}; \quad I_{015} = \frac{-\mathcal{E}_2}{R_{02}}.$$

$$\text{Узел 2: } \varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_3 \cdot G_{23} - \varphi_2 \cdot (G_{21} + G_{23} + G_{25}) = I_{021}, \quad (2.6.2)$$

$$\text{где } G_{21} = \frac{1}{R_1 + R_{01}}; \quad G_{25} = \frac{1}{R_7}; \quad G_{23} = \frac{1}{R_6}; \quad I_{021} = \frac{-\mathcal{E}_1}{R_1 + R_{01}}.$$

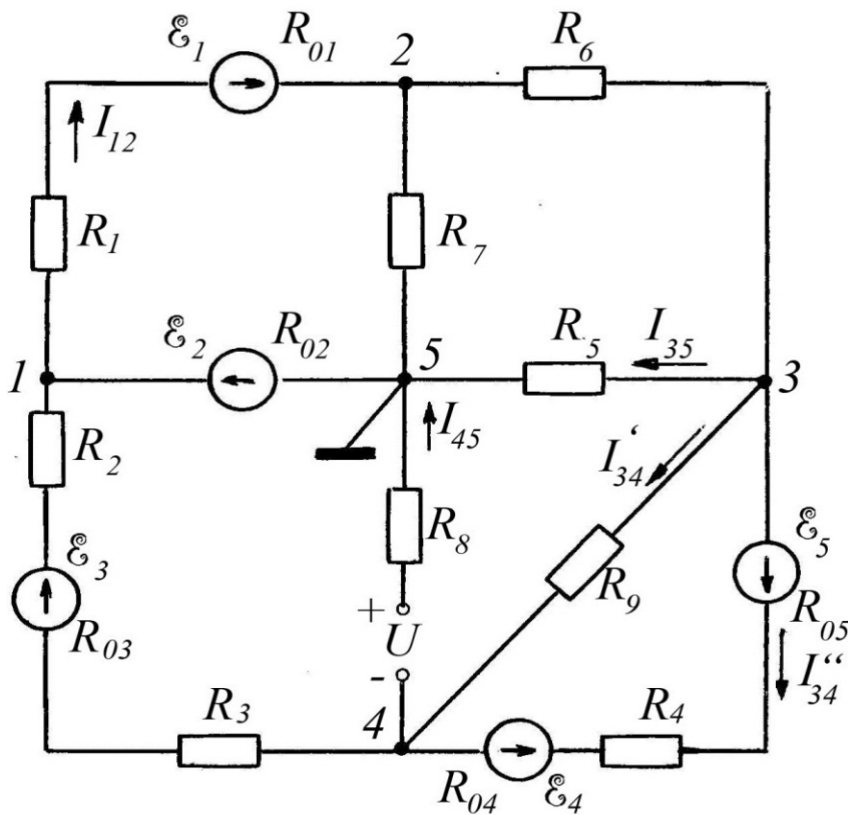


Рис.2.6.1

Аналогичным образом необходимо составить уравнение первого закона Кирхгофа в развёрнутой форме для двух других узлов, например, для узлов 3 и 5.

3. Решение системы четырёх уравнений первого закона Кирхгофа в развёрнутой форме (2.5.5) позволяет определить потенциалы всех узлов электрической цепи (рис. 2.6.1).

4. Токи в ветвях электрической цепи определяют с помощью обобщённого закона Ома, например:

$$I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1}{R_1 + R_{01}};$$

$$I_{35} = \frac{\varphi_3 - \varphi_5}{R_5};$$

$$I_{45} = \frac{\varphi_4 - \varphi_5 + U}{R_8};$$

$$I''_{34} = \frac{\varphi_3 - \varphi_4 + \mathcal{E}_5 - \mathcal{E}_4}{R_1 + R_{04} + R_{05}};$$

$$I'_{34} = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{R_9}.$$

## 2.7. Расчёт электрической цепи с двумя узлами

Метод узловых потенциалов особенно эффективен при расчёте электрических цепей, содержащих два узла, между которыми включены все  $m$  ветвей электрической цепи (рис. 2.7.1). Учитывая, что один из узлов является

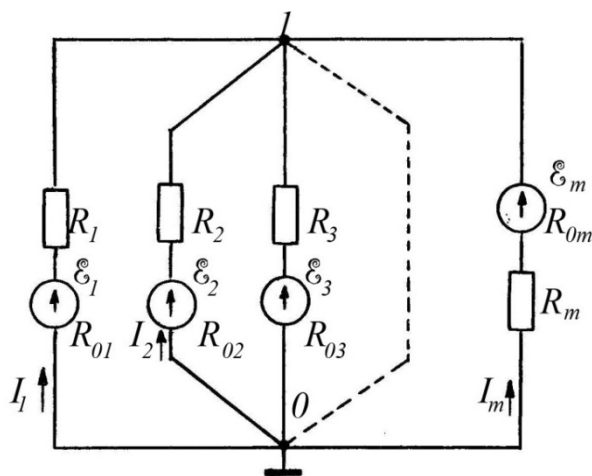


Рис.2.7.1

опорным узлом, переходим к решению задачи с одним неизвестным потенциалом. Если предположить, например, что опорным является узел  $O$ , то есть  $\varphi_0 = 0$ , то для расчёта токов в ветвях электрической цепи (рис. 2.7.1) достаточно составить одно уравнение первого закона Кирхгофа в развёрнутой форме (2.5.5) для узла 1:

$$\begin{aligned} \varphi_1 (G_1 + G_2 + \dots + G_m) = \\ = I_{01} + I_{02} + \dots + I_{0m}, \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

где

$$G_1 = \frac{1}{R_{01} + R_1}; \dots G_m = \frac{1}{R_{0m} + R_m}; \quad (2.7.2)$$

$$I_{01} = \frac{-\mathcal{E}_1}{R_{01} + R_1}; \dots I_{0m} = \frac{-\mathcal{E}_m}{R_{0m} + R_m}. \quad (2.7.3)$$

Подстановка соотношений (2.7.2) и (2.7.3) в уравнение (2.7.1) позволяет преобразовать его к виду:

$$\varphi_1 \cdot (G_1 + G_2 + \dots + G_m) = \mathcal{E}_1 \cdot G_1 + \mathcal{E}_2 \cdot G_2 + \dots + \mathcal{E}_m \cdot G_m. \quad (2.7.4)$$

Таким образом, потенциал  $\varphi_1$  узла 1 определяется уравнением:

$$\varphi_1 = \frac{\mathcal{E}_1 \cdot G_1 + \mathcal{E}_2 \cdot G_2 + \dots + \mathcal{E}_m \cdot G_m}{G_1 + G_2 + \dots + G_m} = \frac{\sum_{k=1}^m \mathcal{E}_k \cdot G_k}{\sum_{k=1}^m G_k}. \quad (2.7.5)$$

Подстановка полученного выражения (2.7.5) потенциала в формулу обобщённого закона Ома позволяет определить силу тока в ветвях электрической цепи:

$$I_1 = \frac{-\varphi_1 + \mathcal{E}_1}{R_{01} + R_1}; \quad I_2 = \frac{-\varphi_1 + \mathcal{E}_2}{R_{02} + R_2}; \dots I_m = \frac{-\varphi_1 + \mathcal{E}_m}{R_{0m} + R_m}. \quad (2.7.6)$$

## 2.8. Принцип наложения и метод наложения

При расчёте токов в сложной электрической цепи методом контурных токов независимые контуры можно выбрать так, чтобы  $k$ -я ветвь входила только в  $k$ -й контур. Тогда ток в  $k$ -ой ветви будет равен контурному току  $k$ -го контура (2.4.4):

$$I_k = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{m=1}^n \mathcal{E}_{mm} \cdot \Delta_{km},$$

или, в развёрнутой форме:

$$I_k = \mathcal{E}_{11} \cdot \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + \mathcal{E}_{22} \cdot \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \mathcal{E}_{33} \cdot \frac{\Delta_{k3}}{\Delta} + \dots \mathcal{E}_{mm} \cdot \frac{\Delta_{km}}{\Delta}. \quad (2.8.1)$$

Каждое слагаемое правой части уравнения (2.8.1) представляет собой ток, вызванный в  $k$ -й ветви соответствующей контурной ЭДС ( $E_{11}, E_{22}, E_{33}, \dots, E_{mm}$ ). Каждую контурную ЭДС можно выразить через электродвижущие силы  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_m$  ветвей, и, сгруппировав коэффициенты при этих ЭДС, преобразовать уравнение (2.8.1) к виду:

$$I_k = E_1 \cdot g_{k1} + E_2 \cdot g_{k2} + E_3 \cdot g_{k3} + \dots + E_m \cdot g_{km}. \quad (2.8.2)$$

Если контуры выбраны так, что какая-либо ЭДС, например, ЭДС  $E_m$ , входит только в  $k$ -й контур и в другие контуры не входит, то  $g_{km} = \Delta_{km} / \Delta$ .

Уравнение (2.8.2) выражает **принцип наложения**, согласно которому: *ток в  $k$ -й ветви линейной электрической цепи равен алгебраической сумме токов, вызываемых в этой ветви каждой ЭДС цепи в отдельности.* Этот принцип справедлив для *линейных* электрических цепей и используется при расчёте электрических цепей методом, получившим название «**метод наложения**».

Применение метода наложения позволяет свести расчёт сложной электрической цепи к нескольким расчётам этой же электрической цепи, но с одним источником, то есть к расчёту простой электрической цепи.

*Последовательность расчёта методом наложения.*

1. Поочерёдно рассматривают действие в электрической цепи одного источника ЭДС, полагая другие ЭДС равными нулю, но оставляя их внутренние сопротивления.
2. Рассчитывают токи в ветвях электрической цепи, вызванные действием каждой ЭДС.
3. Действительные токи в ветвях электрической цепи находят алгебраическим суммированием токов, вызванных в этой ветви каждой ЭДС отдельно.

Рассмотрим применение метода наложения на примере расчёта электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.8.1.

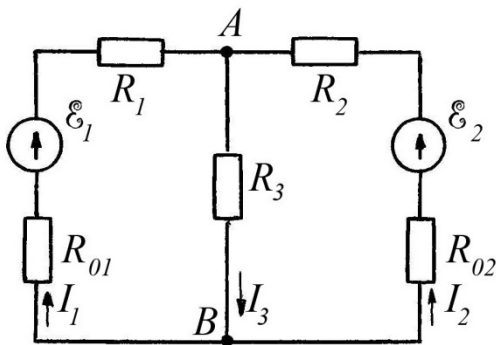


Рис.2.8.1

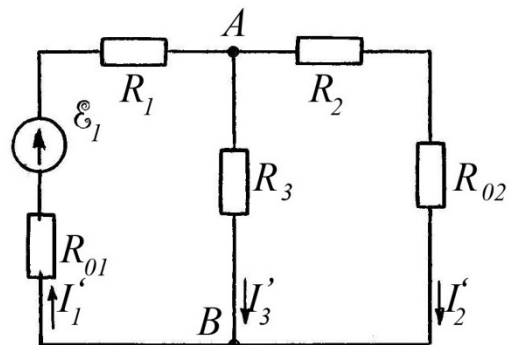


Рис.2.8.2

Полагая ЭДС источника  $E_2=0$ , но оставляя его внутреннее сопротивление  $R_{02}$ , преобразуем исходную электрическую цепь к виду, представленному на рис. 2.8.2. Здесь указаны направления токов, вызванные в ветвях электрической цепи, вызванных действием только ЭДС  $E_1$ . Эквивалентное сопротивление данной электрической цепи относительно зажимов источника ЭДС  $E_1$  выражается формулой:

$$R'_{\text{ЭКВ}} = R_{01} + R_1 + \frac{R_3 \cdot (R_2 + R_{02})}{R_3 + R_2 + R_{02}}.$$

Используя закон Ома, находим токи, создаваемые источником  $E_1$  в ветвях электрической цепи (рис. 2.8.2):

$$I'_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R'_{\text{ЭКВ}}}; \quad U'_{AB} = I'_1 \cdot \frac{R_3 \cdot (R_2 + R_{02})}{R_3 + R_2 + R_{02}}; \quad I'_2 = \frac{U'_{AB}}{R_2 + R_{02}}; \quad I'_3 = \frac{U'_{AB}}{R_3}.$$

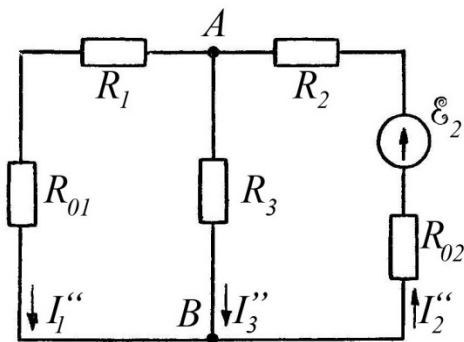


Рис.2.8.3

Затем, исключая ЭДС  $E_1$ , но оставляя её внутреннее сопротивление  $R_{01}$ , преобразуем схему рис. 2.8.1 к виду, представленному на рис. 2.8.3.

На рис. 2.8.3 указаны направления токов, вызванных источником ЭДС  $E_2$ . Эквивалентное сопротивление электрической цепи относительно зажимов источника  $E_2$  равно:

$$R''_{\text{ЭКВ}} = R_2 + R_{02} + \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_{01})}{R_3 + R_1 + R_{01}}$$

Токи в ветвях электрической цепи, создаваемые источником  $E_2$ , равны:

$$I''_3 = \frac{\mathcal{E}_2}{R''_{\text{ЭКВ}}}; \quad U''_{AB} = I''_2 \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_{01})}{R_3 + R_1 + R_{01}};$$

$$I''_2 = \frac{U_{AB}}{R_1 + R_{01}} \quad I''_3 = \frac{U''_{AB}}{R'_3}.$$

Действительные токи в ветвях электрической цепи (рис. 2.8.1) определяются как алгебраическая сумма токов, вызываемых каждым источником ЭДС:

$$I_1 = I'_1 - I''_1; \quad I_2 = I'_2 - I''_2; \quad I_3 = I'_3 + I''_3.$$

## 2.9. Теорема взаимности

В любой **линейной** электрической цепи ток в ***k-й*** ветви  $I_k$ , вызываемый источником  $E_m$ , находящимся в ***m-й*** ветви ( $I_k = E_m \cdot g_{km}$ ), равен току  $I_m$  в ***m-й*** ветви, вызванному источником ЭДС  $E_k$ , численно равной  $E_m$ , находящимся в ***k-й*** ветви.

Для доказательства теоремы взаимности рассмотрим «скелетную схему» пассивной электрической цепи, на которой показаны только ветви и узлы (рис.2.9.1). Выделим две произвольные ветви цепи: ветвь  $m$  и ветвь  $k$ . Включим в ветвь  $m$  источник с ЭДС  $E_m$ , а в ветвь  $k$  - идеальный амперметр (с нулевым внутренним сопротивлением) для измерения силы тока  $I_k$  (рис.2.9.2.а).

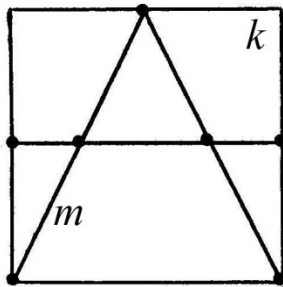
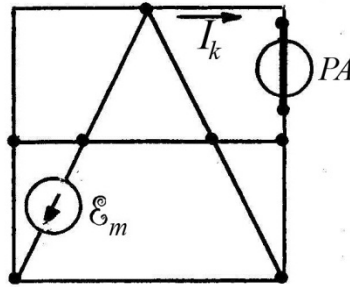
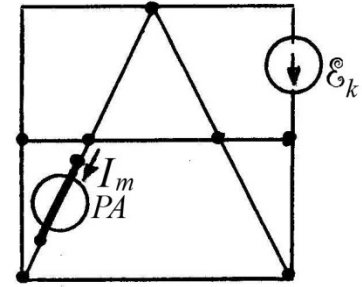


Рис. 2.9.1



а)



б)

Рис. 2.9.2

Определим ток  $I_k$  методом контурных токов, полагая, что ***k-я*** ветвь входит только в ***k-й*** контур. Тогда метод контурных токов приводит к следующему уравнению (2.4.4) для определения тока в ***k-й*** ветви:

$$I_k = E_m \cdot \frac{\Delta_{km}}{\Delta}. \quad (2.9.1)$$

Поменяем местами источник ЭДС и амперметр, то есть переместим источник из ***m-й*** ветви в ***k-ю*** ветвь и обозначим его ЭДС символом  $E_k$ , а амперметр из ветви  $k$  в ветвь  $m$  (рис.2.9.2.б). Определим ток  $I_m$  методом контурных токов, полагая, что ***m-я*** ветвь входит только в ***m-й*** контур:

$$I_m = E_k \cdot \frac{\Delta_{mk}}{\Delta}. \quad (2.9.2)$$

Поскольку  $E_k = E_m$ , а вследствие симметрии определителя  $\Delta$  системы относительно главной диагонали выполняется равенство:  $\Delta_{km} = \Delta_{mk}$ , то ток  $I_k$  в электрической цепи на рис. 2.9.2.а равен току  $I_m$  в электрической цепи на рис. 2.9.2.б, что и требовалось доказать.

При практическом использовании теоремы взаимности для расчёта электрической цепи необходимо учитывать взаимное соответствие направлений токов и ЭДС в ветвях электрических цепей на рис. 2.9.2.а и рис. 2.9.2.б. Например, если ЭДС  $E_k$  источника в  $k$ -й ветви рис. 2.9.2.б направлена согласно с током  $I_k$  в электрической цепи на рис. 2.9.2.а, то направление тока  $I_m$  в электрической цепи на рис. 2.9.б совпадает с направлением ЭДС  $E_m$  в электрической цепи на рис. 2.9.2.а.

Для нелинейных электрических цепей теорема взаимности не выполняется и, поэтому не применяется. *Электрические цепи, для которых теорема взаимности не выполняется, называются **невзаимными** электрическими цепями.*

## 2.10. Теорема компенсации

*В любой электрической цепи без изменения распределения токов в ветвях сопротивление можно заменить идеальным источником, электродвижущая сила которого равна падению напряжения на заменяемом сопротивлении и направлена навстречу току в этом сопротивлении.*

Для доказательства теоремы компенсации представим электрическую цепь в виде активного двухполюсника, из которого выделена рассматриваемая ветвь  $ab$  с сопротивлением  $R$  (рис. 2.10.1.а). По ветви  $ab$  течёт ток  $I$ .

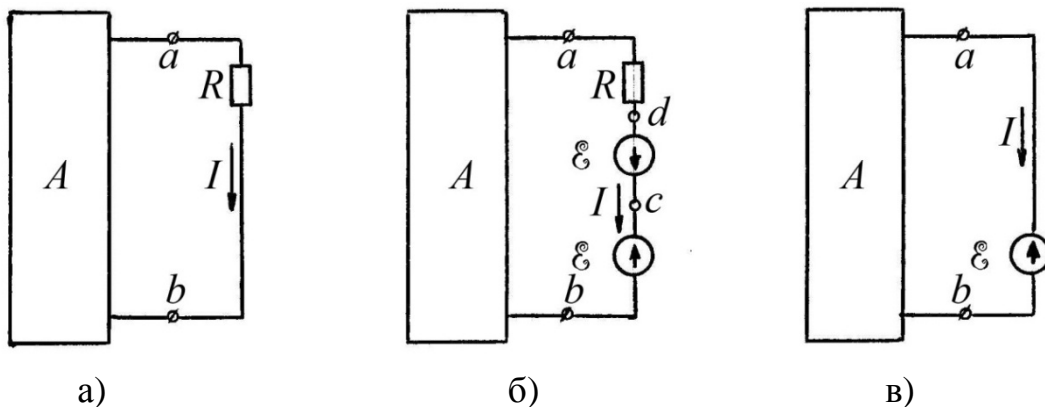


Рис.2.10.1

Если в ветвь  $ab$  включить два одинаковых источника, действующих навстречу друг другу, электродвижущие силы которых равны падению

напряжения на сопротивлении ( $R \cdot I = E$ , рис. 2.10.2.б.), то ток  $I$  в ветви не изменится. При этом разность потенциалов между точками  $a$  и  $c$  равна нулю, то есть  $\varphi_c - \varphi_a = -R \cdot I + E = 0$ . Следовательно,  $\varphi_c = \varphi_a$ . Это позволяет объединить точки  $a$  и  $c$  в одну точку, закоротив участок  $ac$  электрической цепи, и получить электрическую цепь, представленную на рис. 2.10.1.в. Здесь вместо сопротивления  $R$  включён идеальный источник с ЭДС  $E = R \cdot I$ , действующий встречно току  $I$ .

Таким образом, электрическая цепь (рис. 2.10.1.в), в которой идеальный источник с ЭДС  $E = R \cdot I$  направлен противоположно току, заменяет сопротивление  $R$ , эквивалентна исходной электрической цепи (рис. 2.10.1.а), что и требовалось доказать.

## 2.11. Метод эквивалентного генератора

Рассмотренные выше методы расчёта режимов работы сложных электрических цепей постоянного тока сводятся к составлению системы уравнений, позволяющих рассчитать токи во всех ветвях. Для изучения режима работы только одной ветви электрической цепи нет необходимости рассчитывать все токи. В этом случае целесообразно использовать метод *эквивалентного генератора*, основанный на замене всех источников сложной электрической цепи одним эквивалентным источником (*эквивалентным генератором*), электродвижущая сила которого  $E_{\Sigma}$  равна напряжению холостого хода  $U_{XX}$  на зажимах разомкнутой ветви. Внутреннее сопротивление  $R_{\Sigma}$  эквивалентного источника равно входному сопротивлению электрической цепи со стороны зажимов исследуемой ветви.

Решим задачу определения силы тока в ветви  $ab$  сложной электрической цепи. Из электрической цепи выделим исследуемую ветвь  $ab$ , а остальную часть электрической цепи заменим активным двухполюсником (рис. 2.11.1.а).

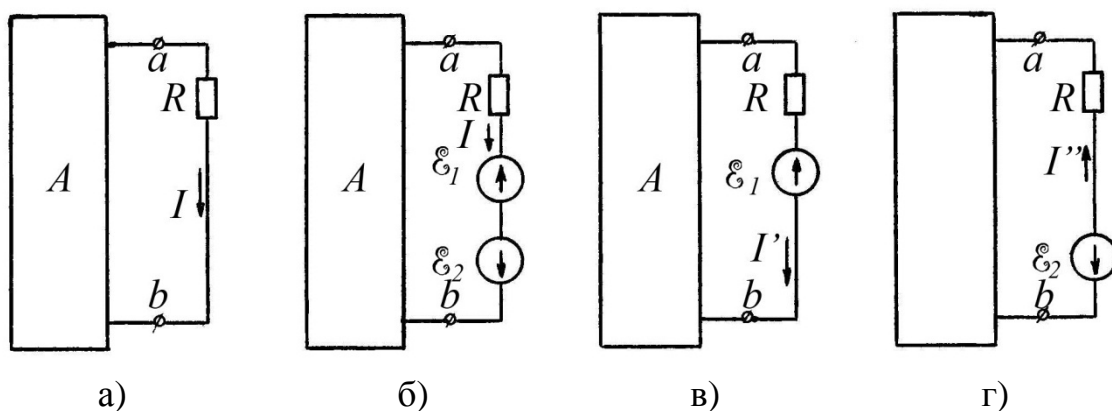


Рис. 2.11.1

Сила тока  $I$  в ветви  $ab$  не изменится, если в неё включить два идеальных источника, электродвижущие силы  $E$  которых одинаковы по величине, и направлены противоположно (рис. 2.11.1.б).

Используя принцип наложения, ток  $I$  можно представить в виде суммы двух токов:  $I'$  и  $I''$ , то есть  $I = I' + I''$ . Здесь  $I'$  – ток в ветви  $ab$ , вызванный ЭДС  $E_1$  и всеми источниками ЭДС активного двухполюсника (рис. 2.11.1.в), равный:

$$I' = \frac{U_{ab} - \mathcal{E}_1}{R + R_{\mathcal{E}}}, \quad (2.11.1)$$

$I''$  – ток в ветви  $ab$ , обусловленный действием ЭДС  $E_2$  (рис. 2.11.1.г), равный:

$$I'' = \frac{\mathcal{E}_2}{R + R_{\mathcal{E}}}. \quad (2.11.2)$$

Если электродвижущие силы источников  $E_1$  и  $E_2$  выбрать равными напряжению холостого хода на зажимах ветви  $ab$ , то есть  $E_1 = E_2 = U_{ab} = U_{xx}$ , то согласно соотношению (2.11.1) ток  $I'$  в ветви  $ab$  электрической цепи на рис. 2.11.1.в равен нулю:  $I' = 0$ . Следовательно, ток  $I$  в ветви  $ab$  равен:

$$I = I'' = \frac{\mathcal{E}_2}{R + R_{\mathcal{E}}} = \frac{U_{xx}}{R + R_{\mathcal{E}}}. \quad (2.11.3)$$

Уравнению (2.11.3) соответствует эквивалентная электрическая цепь (рис. 2.11.3), где вместо двухполюсника изображено эквивалентное сопротивление  $R_{\mathcal{E}}$  (схема Гельмгольца – Тевенена). Совокупность источника с ЭДС  $E_2 = U_{xx}$  и сопротивления  $R_{\mathcal{E}}$  можно рассматривать как эквивалентный генератор.

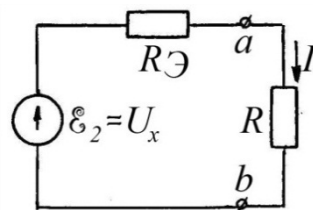


Рис.2.11.2

Таким образом, по отношению к выделенной ветви  $ab$  остальную часть электрической цепи можно рассматривать как эквивалентный генератор с электродвижущей силой  $E = U_{xx}$  и внутренним сопротивлением  $R_{\mathcal{E}}$ .

Метод расчёта тока в выделенной ветви электрической цепи, основанный на замене активного двухполюсника эквивалентным генератором и называемый *методом эквивалентного генератора* или *методом холостого хода и короткого замыкания*, реализуется с помощью следующих операций:

- 1) произвольно выбирают направление тока в исследуемой ветви;
- 2) отключают исследуемую ветвь. При этом реализуется режим холостого хода,

3) определяют напряжение холостого хода  $U_{xx}$  на зажимах разомкнутой ветви,

4) рассчитывают эквивалентное сопротивление  $R_{\Sigma}$  электрической цепи со стороны разомкнутой ветви;

5) ток в исследуемой ветви рассчитывают по формуле:

$$I = \frac{U_{xx} \pm \mathcal{E}}{R_{\Sigma} + R_{ab}}, \quad (2.11.4)$$

где  $\mathcal{E}$  – ЭДС источника, находящегося в исследуемой ветви  $ab$ .

**Правило знаков:** если направление ЭДС совпадает с направлением тока в ветви  $ab$ , то числитель формулы (2.11.4) содержит знак «плюс», в случае встречного направления ЭДС и тока – знак «минус».

Если исследуемая электрическая цепь содержит *идеальные источники тока*, то при определении сопротивления  $R_{\Sigma}$  эквивалентного источника ветви с идеальными источниками тока следует считать *разомкнутыми*. Это объясняется тем, что внутреннее сопротивление *идеального источника тока* равно *бесконечности*.

При реализации метода эквивалентного генератора наиболее трудоёмкой операцией является определение напряжения холостого хода на зажимах разомкнутой исследуемой ветви  $ab$ .

Для некоторых электрических цепей расчёт тока короткого замыкания исследуемой ветви оказывается проще определения напряжения холостого хода на её зажимах. В этом случае ток в ветви  $ab$  следует рассчитывать методом эквивалентного генератора тока по формуле:

$$I_{ab} = \frac{I_K \cdot g_{ab}}{g_{\Sigma} + g_{ab}}, \quad (2.11.5)$$

где  $I_K$  – ток эквивалентного генератора тока, равный току короткого замыкания исследуемой ветви  $ab$ ;  $g_{\Sigma}$  – проводимость эквивалентного генератора тока, равная проводимости всей электрической цепи относительно исследуемой ветви при условии, что все источники тока разомкнуты, а все источники ЭДС замкнуты накоротко, но их внутренние сопротивления оставлены в электрической цепи;  $g_{ab}$  – проводимость ветви  $ab$ , в которой определяют силу тока.

## Глава III. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 3.1. Нелинейные приёмники

**Нелинейными** называются такие элементы электрических цепей, вольтамперные характеристики которых не являются прямыми линиями.

Деление элементов электрических цепей на линейные и нелинейные элементы является, в известной степени, относительным. Это объясняется тем, что вольтамперные характеристики реальных элементов крайне редко оказываются строго линейными. В действительности, они лишь в той или иной степени приближаются к прямым линиям. Поэтому решение вопроса о принадлежности элемента электрической цепи к группе линейных или нелинейных элементов зависит от того, насколько строго оценивается форма его характеристики. Строгость подхода к оценке линейности вольт-амперной характеристики зависит от требуемой точности расчёта режима работы электрической цепи.

Если необходимо подчеркнуть нелинейность элемента электрической цепи, его графическое изображение перечёркивают ломаной линией.

На левом рис. 3.1.1 приведено общее графическое изображение нелинейного приёмника, а на правом рис. 3.1.1 - нелинейного источника.

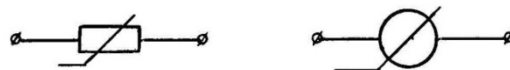


Рис.3.1.1

Поскольку в нелинейных приёмниках отсутствует линейная связь между током и напряжением, понятие о проводимости и сопротивлении этих элементов как коэффициентах пропорциональности между напряжением и током теряет смысл. Однако для выполнения расчётов электрических цепей понятия проводимости и сопротивления вводят искусственно. *Отношение напряжения  $U$  на зажимах приёмника к силе тока  $I$  через него называется **интегральным сопротивлением**:*

$$R_f = \frac{U}{I}. \quad (3.1.1)$$

*Отношение бесконечно малых приращений напряжения ( $dU$ ) и тока ( $dI$ ) называется **дифференциальным сопротивлением**:*

$$R_d = \frac{dU}{dI}. \quad (3.1.2)$$

Интегральное и дифференциальное сопротивления не являются для данного нелинейного приёмника постоянными величинами. Они зависят от

режима работы приёмника, то есть от напряжения на его зажимах и силы тока через него.

На рис. 3.1.2 приведена вольтамперная характеристика нелинейного приёмника. Для режима работы, соответствующего точке  $A$ , **интегральное сопротивление**, в соответствии с формулой (3.1.1), пропорционально тангенсу угла  $\alpha$  наклона прямой линии, соединяющей данную точку с началом координат, то есть

$$R_f = \frac{U}{I} = k \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (3.1.3)$$

Здесь  $k$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от принятых на чертеже масштабов напряжения и тока.

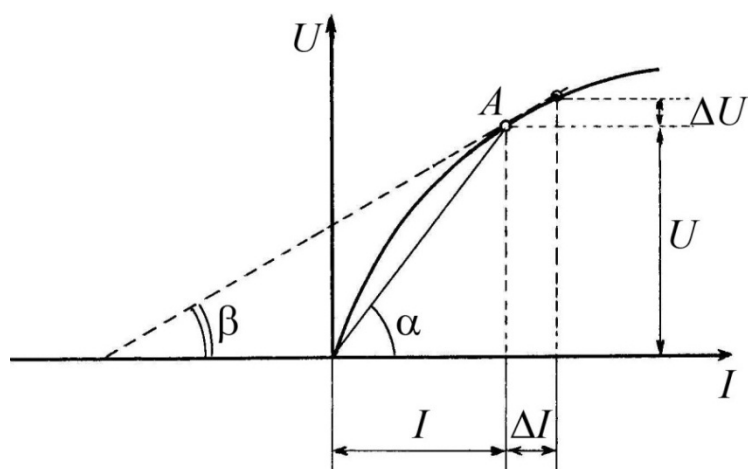


Рис.3.1.2

Дифференциальное *сопротивление* пропорционально тангенсу угла  $\beta$  наклона линии, касательной к вольтамперной характеристике в рабочей точке ( $A$ ):

$$R_d = \frac{dU}{dI} = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = k \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (3.1.4)$$

Величина масштабного коэффициента  $k$  в формулах (3.1.3) и (3.1.4) одинакова.

Изменение режима работы приёмника приводит к перемещению рабочей точки  $A$  по вольтамперной характеристике, что вызывает изменение углов  $\alpha$  и  $\beta$ , а, следовательно, интегрального  $R_f$  и дифференциального  $R_d$  сопротивления.

В зависимости от реакции на изменение направления электрического тока нелинейные приёмники можно разделить на симметричные и несимметричные приёмники.

**Симметричными** называют такие **приёмники**, свойства которых не зависят от направления тока в приёмниках. Поэтому вольтамперные

характеристики симметричных приёмников, полученные при различных направлениях тока, одинаковы и изображаются двумя ветвями, симметричными относительно начала координат. На рис. 3.1.3 приведены вольтамперные характеристики симметричных приёмников:

- на рис. 3.1.3.а – вольтамперная характеристика лампы накаливания,
- на рис. 3.1.3.б – вольтамперная характеристика бареттера, и
- на рис. 3.1.3.в – вольтамперная характеристика полупроводникового термометра сопротивления.

Все линейные приёмники являются симметричными.

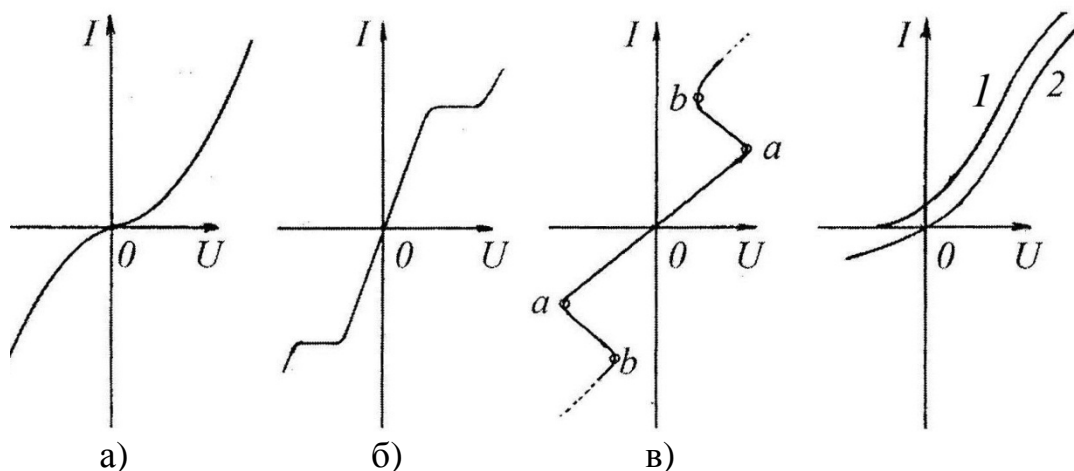


Рис.3.1.3

Рис.3.1.4

**Несимметричными** называются такие **приёмники**, которые по-разному реагируют на токи различных направлений. Поэтому их вольтамперные характеристики несимметричны относительно начала координат. К несимметричным приёмникам относятся, например, вакуумный и полупроводниковый диоды, вольтамперные характеристики которых изображены соответственно линиями 1 и 2 на рис. 3.1.4.

### 3.2. Нелинейные источники

Электродвижущую силу  $E$  и исходный ток  $I_0$  нелинейных источников принято считать постоянными величинами, равными соответственно напряжению  $U_0$  холостого хода и току  $I_K$  короткого замыкания:  $E=U_0$  и  $I_0=I_K$ .

В связи с нелинейностью внешней характеристики нелинейных источников при их описании вводят два внутренних сопротивления: интегральное и дифференциальное сопротивление.

**Интегральным внутренним сопротивлением** нелинейного источника ( $R_{и\int}$ ) называется величина, на которую следует умножить ток источника, чтобы после вычитания полученного произведения из ЭДС полу-

чился результат, равный напряжению источника в данном режиме, то есть:

$$U = \mathcal{E} - R_{\text{и}\int} \cdot I,$$

следовательно:

$$R_{\text{и}\int} = \frac{\mathcal{E} - U}{I}. \quad (3.2.1)$$

Интегральное внутреннее сопротивление источника пропорционально тангенсу угла  $\alpha$  наклона прямой линии, соединяющей точку холостого хода ( $0, U_0$ ) и рабочую точку ( $A$ ) внешней характеристики источника (рис. 3.2.1), то есть:

$$R_{\text{и}\int} = k \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.1.2)$$

где значение коэффициента  $k$  зависит от выбора масштаба по осям тока и напряжения.

**Дифференциальным внутренним сопротивлением** источника называется взятая с обратным знаком производная от напряжения источника по его току:

$$R_{\text{и}\partial} = -\frac{dU}{dI} = k \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (3.1.3)$$

Таким образом, дифференциальное сопротивление пропорционально тангенсу угла наклона к внешней характеристике в рабочей точке (рис. 3.2.1).

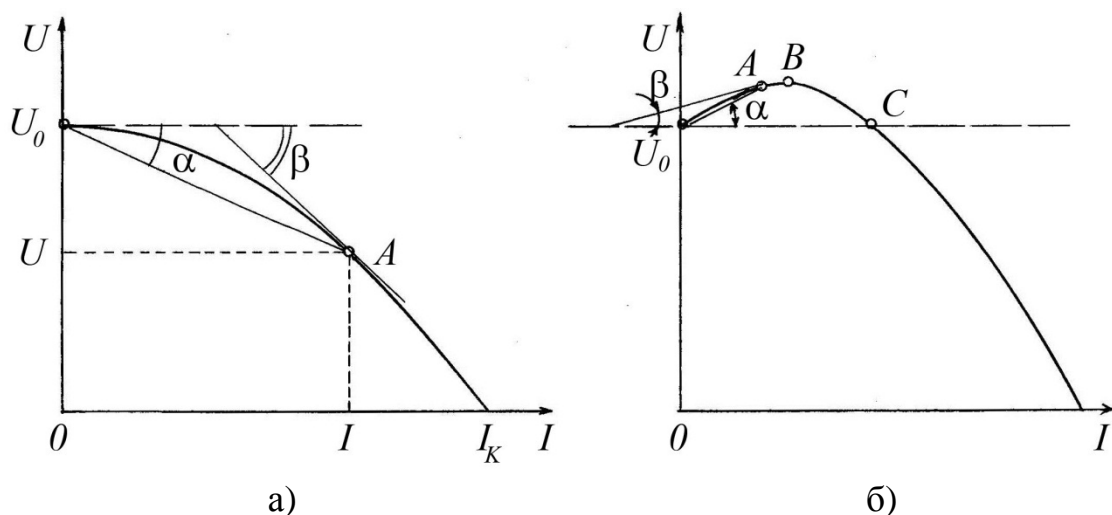


Рис.3.2.1

Для широко распространённых источников с поднимающейся начальной частью характеристики (рис. 3.2.1.б) интегральное и дифференциальное сопротивление на приподнятом участке принимают отрицательное значение. Интегральное сопротивление отрицательно от точки холостого хода до точки  $C$ , а дифференциальное сопротивление отрицательно от точки холостого хода до точки  $B$  характеристики (рис. 3.2.1.б). Диффе-

ренциальное сопротивление обращается в ноль в точке  $B$ , а интегральное сопротивление обращается в ноль в точке  $C$ .

При расчёте электрических цепей нелинейные источники удобно заменять эквивалентными схемами, содержащими идеальный источник и нелинейный резистор. На рис.3.2.2.а, б приведены эквивалентные схемы соответственно нелинейного источника тока и напряжения, которые представлены в виде идеальных источников и нелинейных сопротивлений.

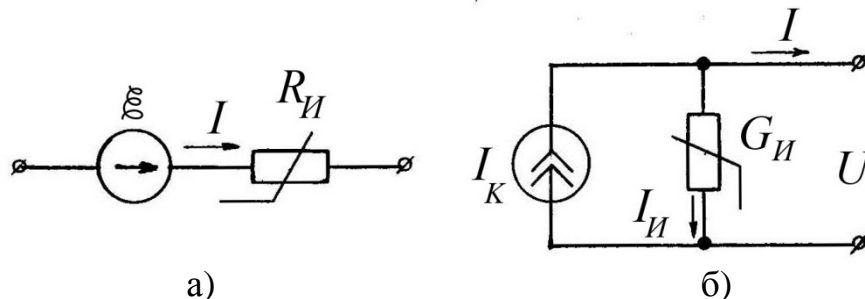


Рис.3.2.2

Напряжение  $U$  нелинейного источника ЭДС, представленного последовательной эквивалентной схемой на рис. 3.2.2.а, равно:  $U = \mathcal{E} - R_{Иf} \cdot I$ , где внутреннее напряжение  $U_{И} = R_{Иf} \cdot I$  можно представить как напряжение на нелинейном резисторе  $R_{Иf}$ . На характеристике источника (рис. 3.2.3.а) зависимость этого напряжения от тока определяется совокупностью заштрихованных ординат.

Аналогичной зависимостью должен характеризоваться и нелинейный резистор  $R_{Иf}$ , вольт-амперная характеристика которого (рис. 3.2.3.б) может быть построена по характеристике нелинейного источника путём переноса оси тока в точку холостого хода с последующим опрокидыванием кривой относительно новой оси (рис. 3.2.3.б). При этом интегральное и дифференциальное сопротивление нелинейного резистора равны соответственно интегральному и дифференциальному внутреннему сопротивлению источника.

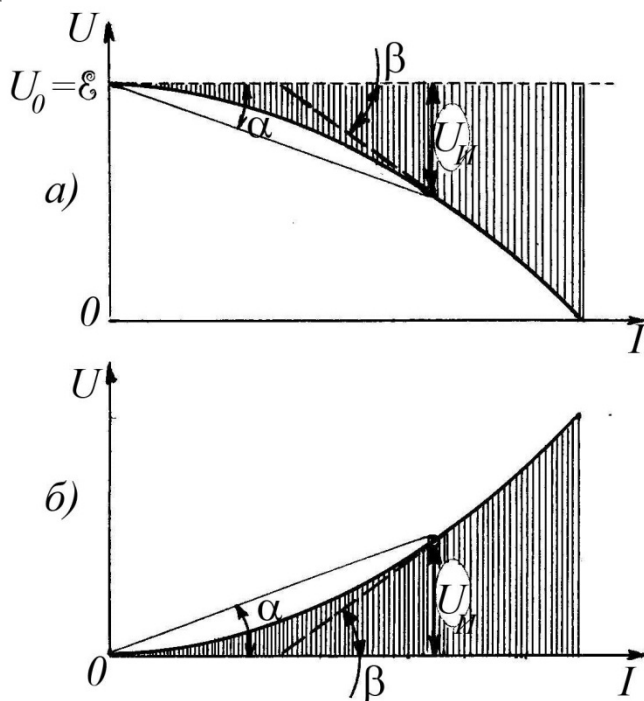


Рис.3.2.3

### 3.3. Вопросы устойчивости режимов в нелинейных электрических цепях постоянного тока

Режим работы электрической цепи постоянного тока является установившимся, если напряжения на всех участках цепи не изменяются со временем. Однако в реальных электрических цепях возможны случайные внешние воздействия, которые могут вывести электрическую цепь из состояния равновесия.

*Если после прекращения внешнего воздействия цепь возвращается в исходное состояние, равновесие электрической цепи называется **устойчивым**.*

*Если электрическая цепь, выведенная из состояния равновесия внешним воздействием, не возвращается в своё исходное состояние после прекращения внешнего воздействия, равновесие электрической цепи называется **неустойчивым**.*

В отличие от линейной электрической цепи, которая при заданных условиях имеет одно устойчивое состояние равновесия, нелинейная электрическая цепь может иметь несколько состояний равновесия - устойчивого и неустойчивого равновесия. Наличие нескольких состояний равновесия характерно для электрических цепей, содержащих нелинейные элементы с «падающим» участком вольтамперной характеристики, то есть участком с отрицательным дифференциальным сопротивлением (участком  $ab$  на рис. 3.1.3.в). При определённых условиях устойчивые режимы работы таких цепей невозможны.

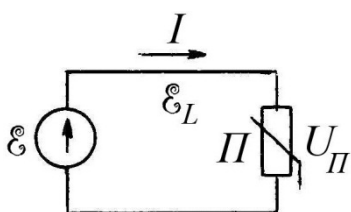


Рис.3.3.1

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую идеальный источник с электродвижущей силой  $\mathcal{E}$  и нелинейный приёмник  $\Pi$  (рис. 3.3.1). При анализе изменения режима работы цепи необходимо учитывать ЭДС индукции ( $\mathcal{E}_L$ ) в проводах, вызванную изменением силы тока:  $\mathcal{E}_L = -L \cdot \frac{dI}{dt}$ , где  $L$  - индуктивность соединительных проводов.

Тогда второй закон Кирхгофа для данной электрической цепи имеет вид:

$$U + \mathcal{E}_L = U_{\Pi}, \quad (3.3.1)$$

где  $U$  - напряжение на зажимах источника,  $U_{\Pi}$  - напряжение на приёмнике. С учётом выражения для ЭДС индукции  $\mathcal{E}_L$  уравнение (3.3.1) преобразуется к виду:

$$U - U_{\Pi} = L \cdot \frac{dI}{dt}. \quad (3.3.2)$$

Признаком постоянства тока в электрической цепи является равенство нулю его производной:  $\frac{dI}{dt} = 0$ . Согласно уравнению (3.3.2) это усло-

вие выполняется, если напряжение на приёмнике  $U_{\Pi}$  равно напряжению источника  $U$ , то есть:  $U_{\Pi}=U$ . Если  $U>U_{\Pi}$ , то в соответствии с уравнением (3.3.2),  $\frac{dI}{dt} > 0$ , то есть сила тока возрастает. В случае преобладания напряжения приёмника ( $U_{\Pi}>U$ ) согласно уравнению (3.3.2)  $\frac{dI}{dt} < 0$ , то есть сила тока в электрической цепи уменьшается.

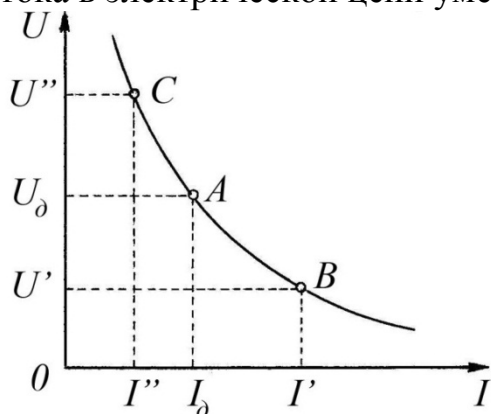


Рис.3.3.2

Если в качестве приёмника  $\Pi$  в электрическую цепь на рис. 3.3.1 включить электрическую дугу, особенностью которой является наличие участка с отрицательным дифференциальным сопротивлением на вольтамперной характеристике (рис. 3.3.2), то режим работы цепи будет неустойчивым. В случае вывода электрической цепи из состояния равновесия, при котором напряжение и ток приёмника равны соответственно  $U_0$  и  $I_0$  (точка  $A$  характеристики, рис. 3.3.2), на-

пример, в сторону увеличения силы тока до значения  $I'$ , напряжение на дуге уменьшится до значения  $U'$ . При этом равновесие напряжений нарушится:  $U-U_{\Pi}>0$ . Согласно формуле (3.3.2) это вызовет дальнейшее увеличение силы тока и дальнейшее отклонение режима работы электрической цепи от положения равновесия.

Если электрическая цепь выведена из равновесия в сторону уменьшения силы тока до значения  $I''$ , то напряжение на приёмнике увеличится до значения  $U''$ . В этом случае  $U-U_{\Pi}<0$ , что согласно уравнению (3.3.2) вызовет дальнейшее уменьшение силы тока, то есть дальнейшее отклонение режима работы от положения равновесия.

Для линейной электрической цепи (рис. 3.3.3) характерно наличие статически устойчивого положения равновесия.

Если электрическую цепь вывести из равновесного режима, когда напряжение и ток на приёмнике равны соответственно  $U_0$  и  $I_0$  (точка  $A$  характеристики, рис. 3.3.3), например, увеличив силу тока до значения  $I''$ , это приведёт к увеличению напряжения на приёмнике до значения  $U''$  и нарушению равновесия напряжений на приёмнике и источнике:  $U-U_{\Pi}<0$ . В соответствии с уравнением

(3.3.2) в этом случае  $\frac{dI}{dt} < 0$ , то есть сила тока в электрической цепи уменьшится до равновесного значения  $I_0$ .

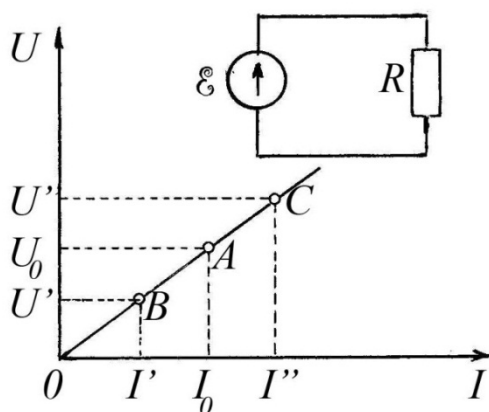


Рис.3.3.3

Уменьшение силы тока, например, до значения  $I'$ , вызовет уменьшение напряжения на приёмнике до значения  $U'$ . При этом  $U - U_{\Pi} > 0$ , что согласно уравнению (3.3.2) вызовет увеличение силы тока ( $\frac{dI}{dt} > 0$ ) для равновесного значения  $I_0$ . Таким образом, равновесие *линейной* электрической цепи является *устойчивым*.

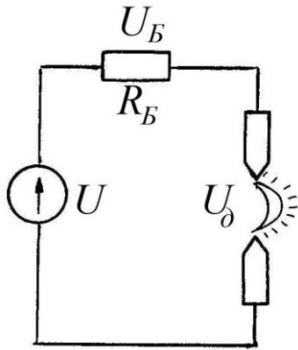


Рис.3.3.4

Устойчивый режим работы электрической цепи, содержащей нелинейные элементы с отрицательным дифференциальным сопротивлением, можно реализовать, включив в цепь балластный линейный резистор с сопротивлением  $R_B$  (рис. 3.3.4). В этом случае напряжение на приёмнике равно  $U_{\Pi} = U_B + U_d$ , и уравнение (3.3.2) преобразуется к виду:

$$U - (U_B + U_d) = L \cdot \frac{dI}{dt}. \quad (3.3.3)$$

Анализ устойчивости режима работы такой электрической цепи удобно выполнить графически. Для этого на одном рисунке следует совместить вольтамперную характеристику дуги  $U_d(I)$  с линейной характеристикой балластного резистора  $U_B(I)$ , которая опрокинута вокруг оси тока и наложена на характеристику дуги так, чтобы оси напряжения обеих характеристик совпадали, а оси тока были сдвинуты друг относительно друга на величину напряжения  $U$  источника питания (рис. 3.3.5).

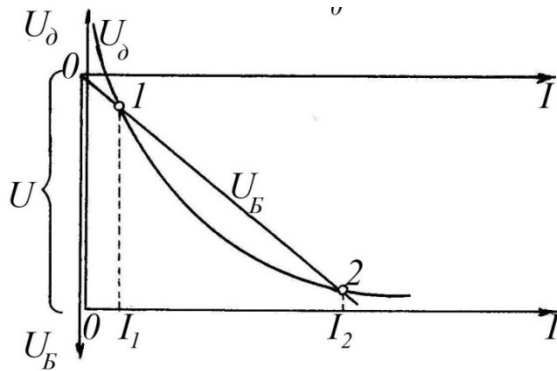


Рис.3.3.5

В точках (1 и 2) пересечения вольтамперных характеристик выполняется равенство (3.3.3), то есть электрическая цепь находится в состоянии равновесия.

Исследуем, является ли равновесие в точках 1 и 2 устойчивым.

*Точка 1.* Если ток изменится от значения  $I_1$ , например, в сторону увеличения,  $U_{\Pi} = U_B + U_d < U$ , то согласно

уравнению (3.3.3)  $\frac{dI}{dt} > 0$ , и сила тока в электрической цепи будет увеличиваться до значения  $I_2$ . Таким образом, равновесие электрической цепи в точке 1 является *неустойчивым*.

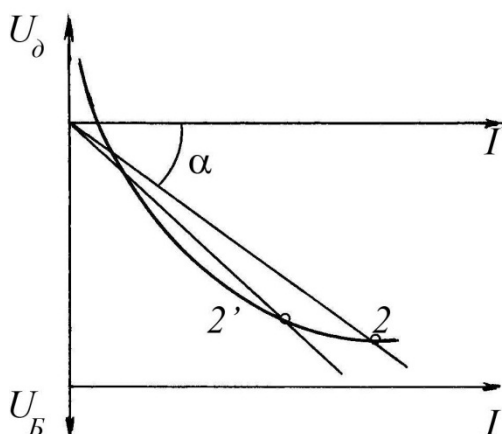


Рис.3.3.6

Точка 2. Дальнейшее увеличение силы тока выше значения  $I_2$  приведёт к росту напряжения на нагрузке ( $U_{II}=U_B+U_0>U$ ), что согласно уравнению (3.3.3) вызовет уменьшение силы тока в цепи ( $\frac{dI}{dt} < 0$ ) до значения  $I_2$ . Следовательно, равновесие электрической цепи в точке 2 является устойчивым.

Управление режимом работы электрической цепи (рис. 3.3.4) можно осуществить, изменяя положение точки 2. Это достигается изменением сопротивления балластного резистора  $R_B = k \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

### 3.4. Графический метод расчёта нелинейных электрических цепей постоянного тока

Исследование и расчёт режимов работы нелинейных электрических цепей сопряжены с большими трудностями, чем аналогичный расчёт линейных электрических цепей. Наиболее простым и наглядным методом расчёта режима работы нелинейных электрических цепей является графический анализ характеристик элементов электрической цепи.

Для нахождения режима работы электрической цепи при последовательном соединении нелинейного источника и приёмника (рис. 3.4.1.а) достаточно на одном графике совместить внешнюю вольтамперную характеристику приёмника  $\Pi$  и источника  $I$ . Точка  $A$  пересечения характеристик определяет напряжение  $U_A$  и силу тока  $I_A$  в элементах электрической цепи (рис. 3.4.1.б).

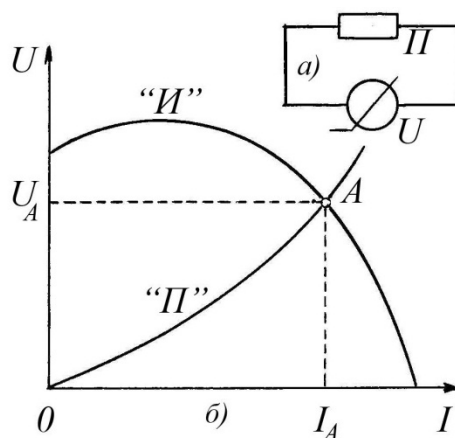


Рис. 3.4.1

При расчёте параметров электрической цепи, содержащей несколько нелинейных элементов, нелинейные приёмники следует заменять их эквивалентными схемами (рис. 3.2.2), содержащими идеальный источник и нелинейный резистор.

Для расчёта разветвлённой нелинейной электрической цепи вольт-амперные характеристики приёмников следует заменить одной общей вольтамперной характеристикой всей группы приёмников, что позволяет свести задачу к рассмотренной на рис. 3.4.1.а.

Например, требуется рассчитать нелинейную электрическую цепь, представленную на рис. 3.4.2.

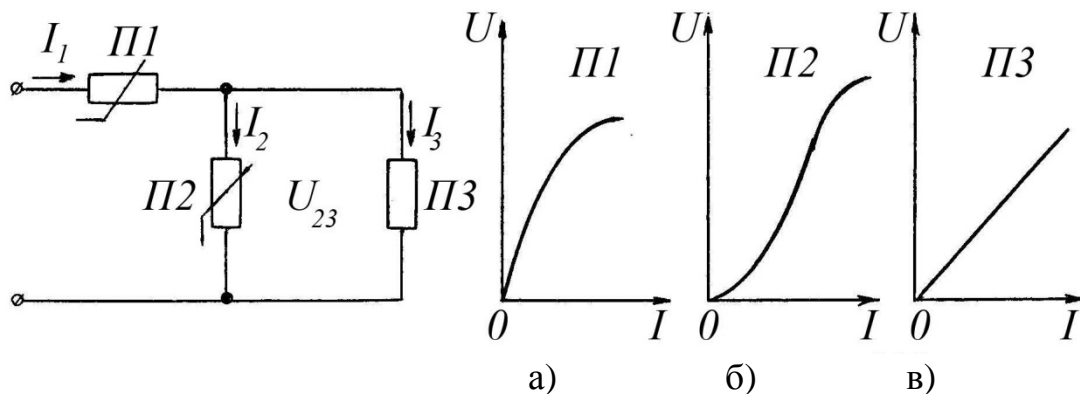


Рис.3.4.2

Рис.3.4.3

При решении прямой задачи известны вольтамперные характеристики приёмников (рис. 3.4.3) и напряжение  $U$  на входных зажимах. Требуется определить силы токов в ветвях электрической цепи.

Поскольку приёмники  $П2$  и  $П3$  соединены параллельно, их следует заменить одним приёмником  $П23$ , вольтамперная характеристика 23 которого получается суммированием характеристик 2 и 3 в направлении оси токов (рис. 3.4.4).

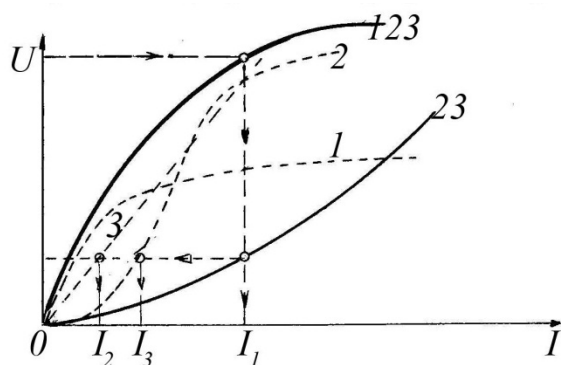


Рис.3.4.4

Приёмники  $П23$  и  $П1$  соединены последовательно, поэтому для построения вольтамперной характеристики 123 всей группы приёмников необходимо выполнить суммирование характеристик 1 и 23 по оси напряжений.

По полученной эквивалентной вольтамперной характеристике 123 и заданному напряжению  $U$  можно графически определить силу тока  $I_1$  в неразветвлённой части цепи (рис. 3.4.4). Используя значение силы тока  $I_1$ , по характеристике 23 можно графически определить напряжение  $U_{23}$  на приёмниках  $П2$  и  $П3$  и далее графически найти токи  $I_2$  и  $I_3$ .

Рассмотренный метод позволяет определить токи в любой нелинейной простой (то есть с одним источником) электрической цепи, но при громоздкой конфигурации электрической цепи графические построения будут слишком сложными.

### 3.5. Метод эквивалентного генератора расчёта нелинейных электрических цепей

Если сложная электрическая цепь содержит один нелинейный элемент, то расчёт электрической цепи удобно выполнять методом эквивалентного генератора.

Рассчитаем сложную электрическую цепь с одним нелинейным приёмником (рис. 3.5.1). Для этого заменим всю электрическую цепь эквивалентным генератором (рис. 3.5.2.а) с ЭДС  $E_{\Sigma}$ , соединённым с нелинейным приёмником  $\Pi$  (рис. 3.5.2.б).

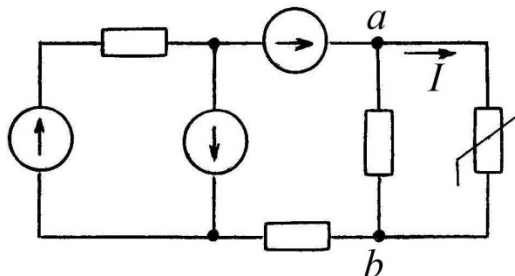


Рис.3.5.1

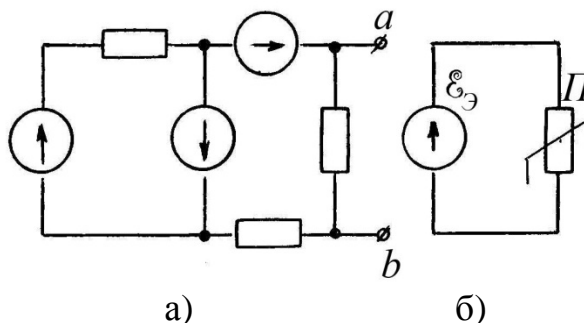


Рис.3.5.2

Точка пересечения вольтамперных характеристик нелинейного приёмника  $\Pi$  и эквивалентного генератора определяет силу тока  $I$  и напряжение  $U$  приёмника. Далее, заменяя нелинейный приёмник его эквивалентным сопротивлением в данном режиме работы  $R=U/I$ , электрическую цепь можно рассматривать и рассчитывать как линейную электрическую цепь.

Метод эквивалентного генератора можно распространить и на цепи с несколькими нелинейными приёмниками, если они образуют простую группу, соединённую с линейной частью электрической цепи двумя зажимами. После замены группы нелинейных приёмников одним нелинейным элементом задача сводится к рассмотренному выше варианту.

### 3.6. Расчёт нелинейной электрической цепи с двумя узлами

Для схем, содержащих два узла или приводящихся к ним, применим метод двух узлов.

Схема на рис. 3.6.1 содержит три источника и три нелинейных приёмника, вольтамперные характеристики которых известны. Направления токов в ветвях указаны произвольно. Первый закон Кирхгофа для одного из узлов, например, для узла  $a$ , имеет вид:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (3.6.1)$$

Токи являются нелинейными функциями падения напряжения на приёмниках:

$$I_1 = f_1(U_1); I_2 = f_2(U_2); I_3 = f_3(U_3).$$

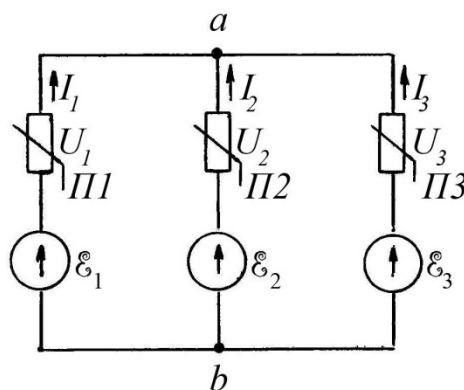


Рис.3.6.1

Для представления токов функциями одной переменной - напряжения  $U_{ab}$  между узлами  $a$  и  $b$  - выразим напряжения  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$  через напряжение  $U_{ab}$  и известные электродвижущие силы источников  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$ :

$$\begin{cases} U_1 = \mathcal{E}_1 - U_{ab}; \\ U_2 = \mathcal{E}_2 - U_{ab}; \\ U_3 = \mathcal{E}_3 - U_{ab}. \end{cases} \quad (3.6.2)$$

Дальнейшее решение может быть выполнено графическим или численным методом. Применение графического метода приводит к сложным геометрическим построениям и сопровождается большой погрешностью.

Численный метод позволяет получить точный результат при минимальном количестве графических операций.

В соответствии с системой уравнений (3.6.2) результат удобно представить в форме таблицы.

№	$U_{ab},$ [В]	$U_1,$ [В]	$U_2,$ [В]	$U_3,$ [В]	$I_1,$ [А]	$I_1,$ [А]	$I_1,$ [А]	$\sum_{k=1}^m I_k$
1.								
2.								
...	...	...	...	...	...	...	...	...
n.								

*Последовательность расчёта методом двух узлов.*

1. Произвольно задают напряжение  $U_{ab}$  (с учётом значений ЭДС источников электрической цепи) и записывают его в соответствующий столбик таблицы.

2. Рассчитывают напряжения  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$  с помощью системы уравнений (3.6.2).

3. Используя вольтамперные характеристики нелинейных приёмников, находят силы токов  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  в ветвях электрической цепи.

4. Определяют алгебраическую сумму токов, сходящихся в узле  $a$ .

5. Если алгебраическая сумма токов в узле  $a$  равна нулю, то значения токов, полученные в пункте 3, являются решениями задачи. Если сумма токов не равна нулю, следует задать другое значение напряжения  $U_{ab}$  и выполнить операции, указанные в пунктах 2÷4. Подобные операции следует повторять до достижения равенства:

$$\sum_{k=1}^m I_k = 0.$$

### 3.7. Аналитические методы расчёта нелинейных электрических цепей

Все рассмотренные выше методы расчёта нелинейных электрических цепей связаны с графическими построениями, поэтому наглядны и достаточно просты. Но, как все графические методы, они отличаются низкой точностью. Кроме того, эти методы не допускают проведения общего анализа закономерностей в нелинейных электрических цепях. Поэтому перспективно применение аналитических методов расчёта нелинейных электрических цепей постоянного тока.

*Аналитические методы расчёта основаны на выражении вольтамперных характеристик нелинейных элементов аналитическими закономерностями  $U_k=f(I_k)$  с последующей их подстановкой в уравнения законов Кирхгофа, записанные для исследуемой электрической цепи.*

Успех применения аналитического метода определяется, с одной стороны, точностью, с которой удаётся подобрать аналитический вид функции  $U_k=f(I_k)$ , отражающей вольтамперную характеристику нелинейного элемента, а, с другой стороны, простотой вида функции  $U_k=f(I_k)$ .

Необходимость удовлетворения двум указанным, как правило, противоречивым требованиям, делает задачу подбора аналитической зависимости для вольтамперных характеристик одним из самых ответственных этапов расчёта нелинейной электрической цепи. Отсутствие стандартного алгоритма существенно усложняет эту проблему. Рассмотрим некоторые методы её решения.

*А. Линейная аппроксимация.* Любая непрерывная функция может быть разложена в ряд Мак Лорена, то есть представлена степенным полиномом, который применительно к вольтамперной характеристике имеет вид:

$$u(I)=a_0+a_1\cdot I+a_2\cdot I^2+a_3\cdot I^3+\dots+a_n\cdot I^n, \quad (3.7.1)$$

Причём, чем больше слагаемых содержит полином, тем ближе аналитическая аппроксимация к исходной вольтамперной характеристике. Однако с увеличением числа членов полинома возрастает порядок уравнений, описывающих процессы в данной электрической цепи, и, следовательно, усложняется задача решения такой системы уравнений. Поэтому при инженерных расчётах практически не пользуются полиномами со степенью выше третьей и по возможности предпочитают пользоваться лишь первыми двумя слагаемыми в разложении, ограничиваясь линейной аппроксимацией вольтамперных характеристик. Такая аппроксимация позволяет получить решение нелинейной задачи с высокой точностью, поскольку в большинстве практических случаев известна область вольтамперной характеристики, в пределах которой ожидается работа того или иного нелинейного элемента. В ограниченной области нелинейной характеристики линейная аппроксимация может дать хорошее совпадение с действительной кривой.

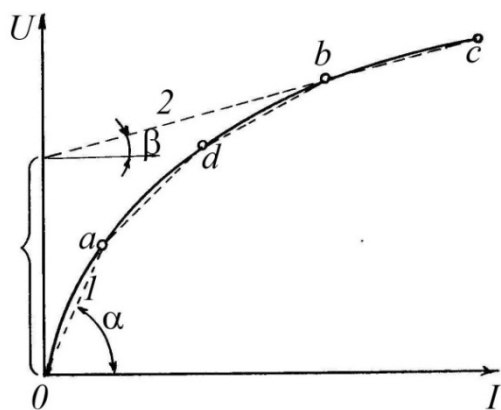


Рис.3.7.1

Например, вольтамперную характеристику, представленную на рис. 3.7.1, с высокой точностью можно заменить прямой линией 1 на участке  $oa$  вольтамперной характеристики или прямой линией 2 на участке  $bc$ . Уравнение прямой 1 можно записать в виде:

$$u = k \cdot I \cdot \operatorname{tg} \alpha = R_I \cdot I. \quad (3.7.2)$$

Здесь  $R_I = k \cdot \operatorname{tg} \alpha$  – среднее интегральное сопротивление на участке  $oa$ .

Уравнение прямой линии 2 на участке  $bc$  имеет вид:

$$u = U_H + R_\partial \cdot I. \quad (3.7.3)$$

Здесь  $U_H$  – начальное напряжение,  $R_\partial = k \cdot \operatorname{tg} \beta$  – среднее дифференциальное сопротивление на участке  $bc$ .

На резко закруглённом участке  $ab$  спрямление вольтамперной характеристики приводит к большой погрешности. Для уменьшения погрешности следует разделить участок  $ab$  на мелкие участки ( $ad$ ,  $db$ ...).

Замена большого участка ломаной линией, как показано на рис. 3.7.1, называется **кусочно-линейной аппроксимацией**. Такая аппроксимация нашла широкое применение при анализе работы нелинейных электрических цепей при изменяющихся токах, причём по мере перехода режима из одной области характеристики в другую меняют уравнение аппроксимирующей прямой.

**Б. Метод последовательных приближений.** Если при расчёте нелинейной электрической цепи нельзя заранее указать диапазон рабочих напряжений нелинейного элемента цепи, вольтамперную характеристику аппроксимируют методом последовательных приближений.

При расчёте электрической цепи с одним нелинейным элементом большой участок вольтамперной характеристики заменяют прямой линией (линия 1 на рис. 3.7.2). Записав уравнение прямой линии 1 при таком весьма грубом приближении, рассчитывают режим работы электрической цепи и в качестве первого приближения определяют силу тока  $I'$  в нелинейном элементе. В качестве второго приближения выпрямляют вольтамперную характеристику на более узком

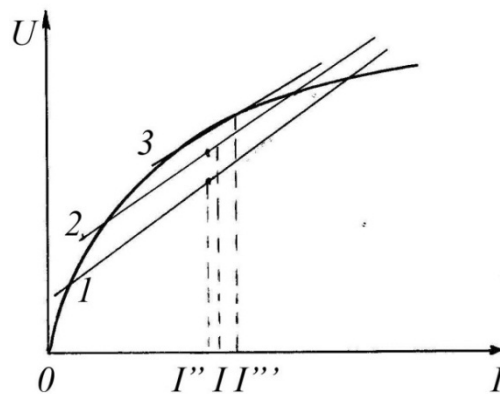


Рис.3.7.2

участке в окрестности первого решения  $I'$ . Составив уравнение прямой линии 2, вновь решают задачу и находят новое значение тока  $I''$  в нелинейном элементе (второе приближение). Это решение является более точным и позволяет сузить область ожидаемого режима работы нелинейного элемента, что позволяет перейти к следующей стадии уточнения аппроксимации вольтамперной характеристики нелинейного элемента (третье приближение).

Повторяя расчёты, получают требуемую точность решения задачи. Каждый последующий результат должен укладываться в предлагаемую для него область значений вольтамперной характеристики. Поэтому сужение области аппроксимируемой характеристики должно быть умеренным.

Данный метод пригоден и для расчёта электрических цепей с несколькими нелинейными элементами. Однако процесс сходимости результатов последовательных расчётов будет происходить медленнее, и для получения точного результата необходимо большое число аппроксимаций.

## Глава IV. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 4.1. Основные параметры магнитного поля

**Магнитным полем** называется силовое поле, действующее на движущиеся электрические заряды и на тела, обладающие магнитным моментом. Термин *магнитное поле* ввёл в 1845 г. английский физик М. Фарадей, считавший, что как электрические, так и магнитные взаимодействия осуществляются посредством единого материального поля. Магнитное поле создаётся намагничёнными телами, проводниками с током или движущимися зарядами. Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции.

**Магнитная индукция  $\vec{B}$**  – это векторная величина, определяемая по силовому воздействию магнитного поля на проводник с током.

Единицей измерения индукции магнитного поля в СИ является *Тесла* [Тл],  $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Вб/м}^2$ . В практике инженерных расчётов широко распространена также внесистемная единица измерения магнитной индукции – *Гаусс* [Гс]:  $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$ .

**Напряжённость магнитного поля  $\vec{H}$**  – количественная характеристика магнитного поля, связанная с магнитной индукцией соотношением:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j}. \quad (4.1.1)$$

Здесь  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – магнитная постоянная,  $\vec{j}$  – **намагниченность вещества** – магнитный момент единицы объёма однородно намагничённого вещества. Единицей измерения напряжённости магнитного поля и намагниченности в СИ является *А/м*. Распространена также внесистемная единица измерения – *эрстед* [Э],  $1 \text{ А/м} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-3} \text{ Э}$ .

Направление вектора намагничённости совпадает с направлением вектора напряжённости в данной точке магнитного поля, а значения этих векторов связаны соотношением:

$$\vec{j} = \chi \cdot \vec{H}. \quad (4.1.2)$$

Здесь  $\chi$  – магнитная восприимчивость, связанная с магнитной проницаемостью  $\mu$  среды соотношением:

$$\mu = 1 + \chi. \quad (4.1.3)$$

Выражая из уравнения (4.1.1) вектор  $\vec{B}$  с учётом соотношений (4.1.2) и (4.1.3), получим:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{j}) = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \chi \cdot \vec{H}) = \mu_0 \cdot (1 + \chi) \cdot \vec{H} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}. \quad (4.1.4)$$

**Магнитным потоком** через поверхность называется произведение вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  на площадь  $d\vec{S}$  поверхности:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (4.1.5)$$

Единицей измерения магнитного потока в СИ является *вебер [Вб]*:  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$ . Внесистемная единица измерения магнитного потока – *максвелл [Мкс]*.  $1 \text{ Вб} = 10^8 \text{ Мкс}$ . Приборы для измерения параметров магнитного поля называют магнитометрами.

## 4.2. Магнитные свойств твёрдых тел

В зависимости от магнитных свойств все вещества делят на три группы:

- 1) *диамагнетики* – вещества, у которых магнитная проницаемость незначительно меньше единицы. Например, у висмута  $\mu = 0,99983$ ,
- 2) *парамагнетики* – вещества, у которых магнитная проницаемость незначительно больше единицы. Например, магнитная проницаемость платины  $\mu = 1,00036$ ,
- 3) *ферромагнетики* – вещества, у которых магнитная проницаемость многократно превышает единицу и может достигать значений  $10^4 \div 10^6$ .

При решении многих задач электротехники вещества, с учётом их магнитных свойств, целесообразно делить не на три, а на две группы:

- 1) *ферромагнетики* – вещества, у которых  $\mu \gg 1$  и
- 2) *не ферромагнетики* – вещества, магнитная проницаемость которых приблизительно равна единице и не зависит от напряжённости внешнего магнитного поля.

Из соотношения (4.1.4) следует, что у неферромагнитных материалов векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  связаны постоянным коэффициентом  $\mu_0$ :  $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$ .

Свойства ферромагнетиков принято характеризовать зависимостью магнитной индукции от напряжённости внешнего магнитного поля. Если ферромагнетик, ранее не подвергавшийся намагничиванию, поместить в постепенно возрастающее магнитное поле, то магнитная индукция будет увеличиваться по мере нарастания напряжённости магнитного поля. Полученная зависимость  $B(H)$  называется *кривой первоначального намагничивания* (линия 1÷5 на рис. 4.2.1). Нижний участок 0÷1 и круто поднимающийся участок 2÷3 кривой являются практически линейными; участки 1÷2 и 3÷4 с резко выраженной кривизной называются соответственно *нижним* и *верхним коленом* кривой первоначального намагничивания; участок 4÷5, для которого характерно незначительно приращение индукции даже при относительно большом увеличении напряжённости магнитного поля, называется *участком насыщения*.

Если опыт намагничивания вещества продолжить, перейдя после достижения максимального значения напряжённости магнитного поля  $H_{max}$  к постепенному уменьшению напряжённости, то снижение индукции магнитного поля в веществе будет происходить по другой линии (5÷6 на рис. 4.2.2).

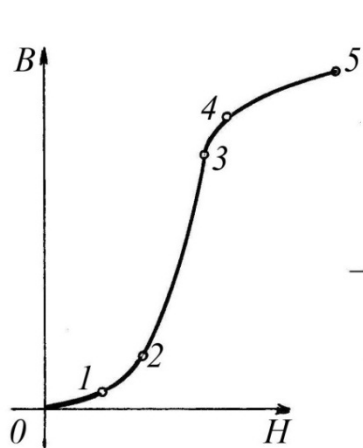


Рис. 4.2.1

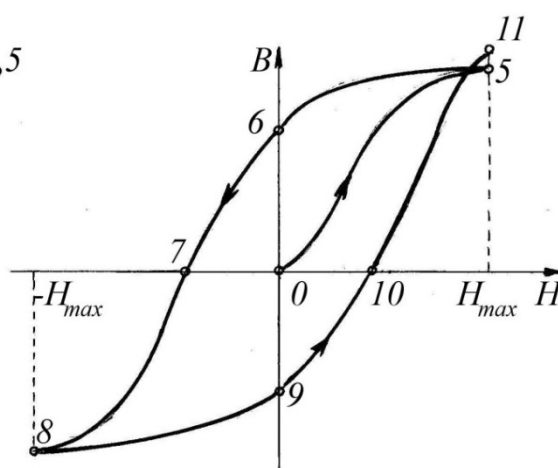


Рис. 4.2.2

При уменьшении напряжённости магнитного поля до нуля (точка 6 на рис. 4.2.2) индукция магнитного поля в веществе остаётся достаточно высокой за счёт явления остаточного намагничивания, называемого *магнитным гистерезисом*. Для того чтобы полностью размагнитить вещество, то есть уменьшить индукцию магнитного поля до нуля, необходимо создать в веществе отрицательную напряжённость ( $-H=H_c$ , точка 7 на рис. 4.2.2), называемую *коэрцитивной силой*. При дальнейшем увеличении отрицательной напряжённости до значения  $-H_{max}$  вещество перемагничивается (линия 7÷8). Последующее изменение напряжённости магнитного поля от значения  $-H_{max}$  до  $+H_{max}$  вызовет второе перемагничивание вещества (линия 8-9-10-11).

Кривая линия 5-6-7-8-9-10-11, полученная в результате полного цикла перемагничивания вещества, называется **петлёй гистерезиса**, а цикл – **гистерезисным циклом**.

После завершения первого гистерезисного цикла магнитная индукция достигает большего значения (точка 11) при прежней максимальной напряжённости  $H_{max}$ , чем при первоначальном намагничивании (точка 5). Незначительное увеличение высоты петли гистерезиса наблюдается ещё в течение нескольких циклов перемагничивания, после чего рост петли прекращается, и дальнейшие перемагничивания протекают по замкнутой петле гистерезиса.

Замкнутая петля гистерезиса, полученная при равных максимальных значениях напряжённости магнитного поля положительной ( $+H_{max}$ ) и отрицательной ( $-H_{max}$ ) полярности и характеризующаяся равными максимальными значениями положительной и отрицательной индукции магнитного поля, называется **симметричной петлёй гистерезиса**. Изменяя значения максимальной напряжённости магнитного поля, можно для данного ферромагнетика получить семейство петель гистерезиса (рис. 4.2.3). При увеличении значения  $H_{max}$  возрастает площадь петли гистерезиса, однако при некотором значении  $H_{max}$  она достигает наибольшей возможной для данного вещества величины. Дальнейшее повышение  $H_{max}$  не приводит ни к увеличению её площади, ни к изменению её формы, а вызывает появление безгистерезисных участков.

Геометрическое место вершин семейства симметричных петель гистерезиса называется основной кривой намагничивания.

В зависимости от величины коэрцитивной силы, то есть от ширины петли гистерезиса, ферромагнитные материалы делят на магнитомягкие и магнитотвёрдые.

**Магнитомягкими** материалами называют вещества с узкой петлёй гистерезиса, то есть с относительно малой коэрцитивной силой (линия 1 на рис. 4.2.4). Их применяют в устройствах, действие которых не основано на явлении гистерезиса, то есть работающих в периодически меняющихся магнитных полях (трансформаторах, электродвигателях, генераторах,...). К магнитомягким материалам относятся, например, перминвар, электротехнические стали, железоникелевые стали и другие.

**Магнитотвёрдыми** называют материалы, характеризующиеся широкой петлёй гистерезиса и большой коэрцитивной силой (линия 2 на рис. 4.2.4). Магнитотвёрдые материалы используются там, где используется явление гистерезиса, например, при изготовлении постоянных магнитов. К магнитотвёрдым материалам относятся углеродистые стали, сплавы магнито, вольфрамовые и платинокобальтовые сплавы.

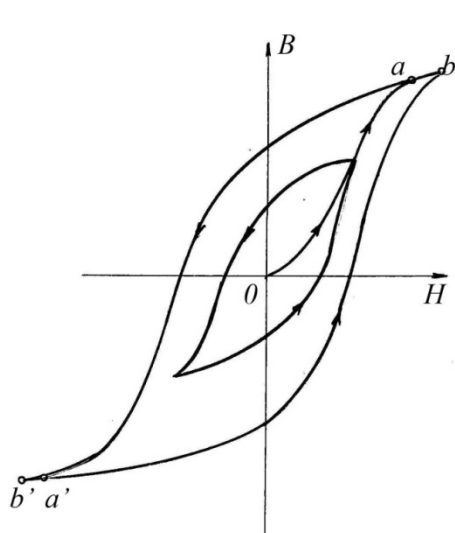


Рис.4.2.3

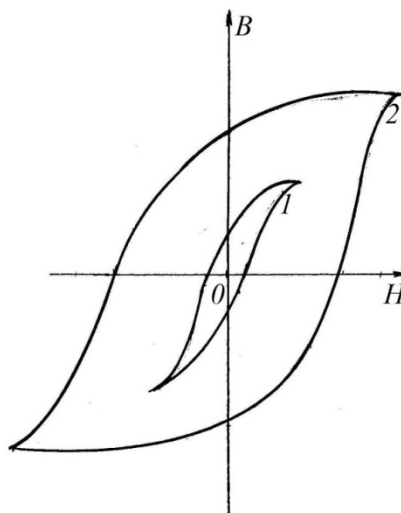


Рис.4.2.4

В высокочастотных радиотехнических устройствах сердечники индуктивных катушек изготавливают из магнитодиэлектриков и ферритов.

*Магнитодиэлектрики* – это материалы, получаемые путём смешивания мелко измельчённого порошка магнетита, железа или пермаллоя с диэлектриком. Эту смесь формуют и запекают. При этом каждую крупинку обволакивает плёнка из диэлектрика. Благодаря наличию таких плёнок сердечники не насыщаются, их относительная магнитная проницаемость изменяется от нескольких единиц до нескольких десятков.

*Ферриты* – это материалы, которые изготавливают из окислов железа и никеля. Смесь формуют и обжигают, в результате чего получается твёрдый раствор. По своим электрическим свойствам ферриты являются полупроводниками. Маркируют их буквами и числом. Например, феррит НЦ-1000 – никель-цинковый феррит, у которого на начальном участке основной кривой намагничивания  $\mu=1000$ .

### 4.3. Классификация магнитных цепей

*Магнитной цепью* называется совокупность магнетиков, по которым проходит магнитный поток.

Подобно электрическим цепям в магнитных цепях выделяют геометрические элементы: *ветви*, *узлы* и *контуры*.

*Ветвью* магнитной цепи называют участок цепи, магнитный поток через любое поперечное сечение которого одинаков.

*Узлом* магнитной цепи называется то место, где сходятся несколько (но не менее трёх) ветвей.

*Контур* представляет собой замкнутый путь в магнитной цепи.

Подобно электрическим цепям магнитные цепи делят на разветвлённые и неразветвленные, простые и сложные, линейные и нелинейные.

**Неразветвленными** называют такие магнитные цепи, в любом участке которых существует один и тот же магнитный поток.

Если в отдельных участках магнитной цепи могут существовать различные магнитные потоки, то магнитная цепь называется **разветвленной**.

Магнитные цепи, направления магнитного потока во всех ветвях которых можно установить без предварительных расчётов, называются **простыми** магнитными цепями.

Остальные магнитные цепи составляют группу **сложных** магнитных цепей. Практически все магнитные цепи, содержащие более одной обмотки, являются сложными магнитными цепями. Все неразветвленные и большинство разветвленных магнитных цепей с одной обмоткой образуют группу **простых** магнитных цепей.

**Линейными** называют магнитные цепи, материал которых характеризуется постоянной относительной магнитной проницаемостью, не зависящей от режима работы.

Если магнитная проницаемость материала хотя бы одного элемента магнитной цепи нельзя считать неизменной, магнитная цепь является **нелинейной**.

#### 4.4. Закон полного тока. Магнитодвижущая сила

Одним из основных законов, используемых при расчёте магнитных цепей, является **закон полного тока**, согласно которому: циркуляция вектора напряжённости  $\vec{H}$  по произвольному контуру  $\ell$  равна алгебраической сумме токов  $\sum I$ , охватываемых этим контуром:

$$\oint_{\ell} (\vec{H}, d\vec{\ell}) = \sum_{k=1}^n I_k \quad (4.4.1)$$

Здесь знак тока определяют по правилу правого винта.

Если контур интегрирования охватывает  $w$  витков в катушке, по которой течёт ток  $I$ , то закон полного тока запишется в виде:

$$(\vec{H}, d\vec{\ell}) = I \cdot w = F. \quad (4.4.2)$$

Величина  $F$ , равная произведению числа витков  $w$  катушки на силу тока  $I$  в ней, называется **магнитодвижущей силой (МДС)**. Единица измерения магнитодвижущей силы – Ампер [А]. Магнитодвижущая сила вызывает магнитный поток в магнитной цепи подобно тому, как электродвижущая сила вызывает электрический ток в электрической цепи. Как и ЭДС, магнитодвижущая сила – величина направленная.

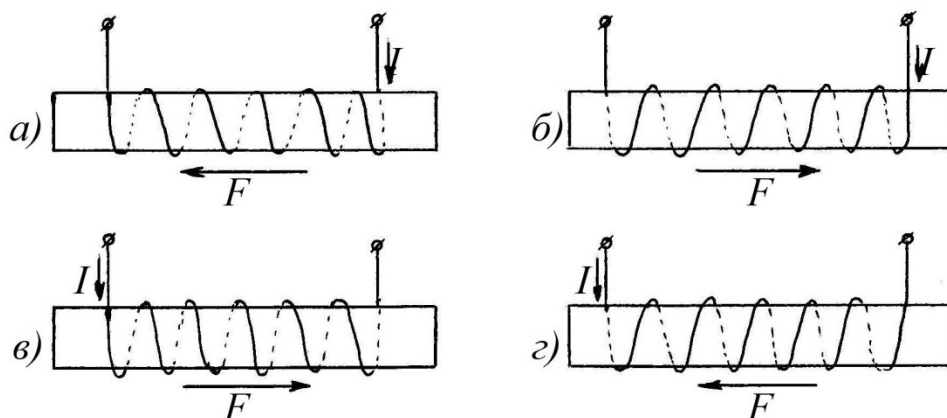


Рис.4.4.1

Направление магнитодвижущей силы совпадает с направлением движения острия правого винта, если его вращать по направлению тока в обмотке. Для определения направления МДС можно пользоваться следующим правилом: «Если сердечник катушки мысленно охватить правой рукой, расположив её пальцы по направлению тока в обмотке, то отогнутый большой палец покажет направление МДС». На рис.4.4.1 показаны направления МДС при различных направлениях намотки катушек и силы тока в них.

## 4.5. Магнитное сопротивление и напряжение.

### Закон Ома для магнитной цепи

В отличие от электрических цепей постоянного тока, где пренебрегают током в изоляции проводников, поскольку проводимость изоляции ничтожно мала по сравнению с проводимостью металла проводников, магнитная проницаемость материалов магнитных цепей и окружающей среды могут незначительно различаться. Поэтому в магнитных цепях приходится учитывать магнитный поток, частично выходящий за пределы магнитной цепи.

Магнитный поток  $\Phi_0$ , полностью замыкающийся по магнитной цепи, называется **основным** магнитным потоком (рис. 4.5.1).

Магнитный поток  $\Phi_s$ , частично замыкающийся по участкам магнитной цепи, а частично – в окружающей среде, называется магнитным потоком **рассеяния** (рис. 4.5.1).

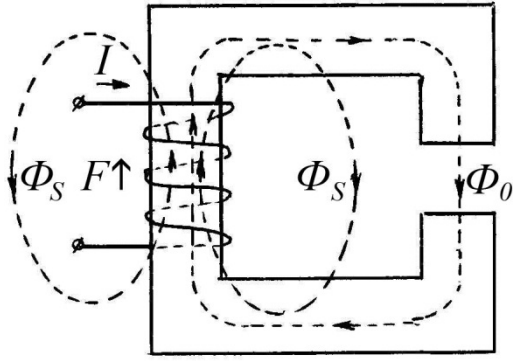


Рис.4.5.1

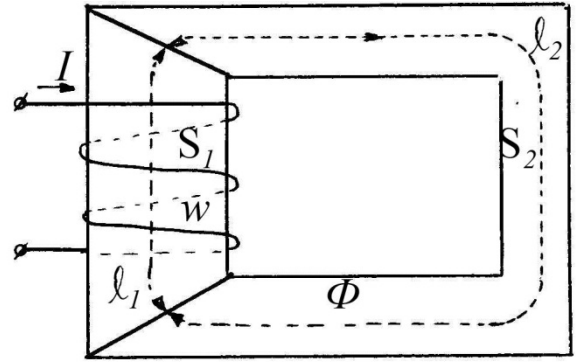


Рис.4.5.2

На рис. 4.5.2 представлена неразветвленная магнитная цепь, участки  $\ell_1$  и  $\ell_2$  которой имеют различные площади поперечного сечения, равные соответственно  $S_1$  и  $S_2$ . При незначительном магнитном потоке рассеяния магнитный поток  $\Phi$  в любом сечении одинаков. Магнитная индукция в материале сердечника равна:

$$\begin{cases} \text{— на первом участке: } B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; \\ \text{— на втором участке: } B_2 = \frac{\Phi}{S_2}. \end{cases} \quad (4.5.1)$$

Напряжённости магнитного поля на этих участках, согласно уравнению (4.1.4), равны:

$$\begin{cases} H_1 = \frac{B_1}{\mu_1 \cdot \mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_1 \cdot \mu_0 \cdot S_1}; \\ H_2 = \frac{B_2}{\mu_2 \cdot \mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_2 \cdot \mu_0 \cdot S_2}. \end{cases} \quad (4.5.2)$$

Здесь  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — магнитная проницаемость соответственно первого и второго участка.

Закон полного тока (4.4.2) для контура на рис. 4.5.2 имеет вид:

$$F = \oint_{\ell} (\vec{H}_1, d\vec{\ell}) = H_1 \cdot \ell_1 + H_2 \cdot \ell_2 = I \cdot w. \quad (4.5.3)$$

Подстановка соотношений (4.5.2) в уравнение (4.5.3) позволяет выразить магнитодвижущую силу:

$$F = I \cdot w = \frac{\Phi \cdot \ell_1}{\mu_1 \cdot \mu_0 \cdot S_1} + \frac{\Phi \cdot \ell_2}{\mu_2 \cdot \mu_0 \cdot S_2} = \Phi \cdot R_{M1} + \Phi \cdot R_{M2}. \quad (4.5.4)$$

Здесь

$$R_{M1} = \frac{\ell_1}{\mu_1 \cdot \mu_0 \cdot S_1} \quad \text{и} \quad R_{M2} = \frac{\ell_2}{\mu_2 \cdot \mu_0 \cdot S_2}$$

- магнитные сопротивления участков. Единица измерения магнитного сопротивления в СИ - А/Вб.

Произведение магнитного потока на магнитное сопротивление называется **магнитным напряжением**:

$$U_M = \Phi \cdot R_M. \quad (4.5.5)$$

Единицей измерения магнитного напряжения является Ампер [А].

Сопоставление выражений (4.5.3), (4.5.4) и (4.5.5) показывает, что магнитное напряжение может быть также представлено в виде произведения:

$$U_M = H \cdot \ell. \quad (4.5.6)$$

С учётом выражений (4.5.5) и (4.5.6) соотношение (4.5.4) можно преобразовать к виду:

$$\Phi = \frac{I \cdot w}{R_{M1} + R_{M2}} = \frac{H_1 \cdot \ell_1 + H_2 \cdot \ell_2}{R_{M1} + R_{M2}} = \frac{U_M}{R_M}. \quad (4.5.7)$$

Уравнение (4.5.7) для магнитной цепи аналогично закону Ома для электрической цепи, поэтому его называют **законом Ома для магнитной цепи**:

$$\Phi = \frac{U_M}{R_M}.$$

#### 4.6. Законы Кирхгофа для магнитных цепей

Расчёт разветвлённых магнитных цепей основан на использовании законов Кирхгофа для магнитных цепей.

**Первый закон Кирхгофа** следует из принципа непрерывности магнитного потока (линии магнитной индукции замкнуты). Поэтому магнитный поток через любую замкнутую поверхность, в том числе и через замкнутую поверхность, окружающую узел магнитной цепи, равен нулю. Первый закон Кирхгофа утверждает, что «Алгебраическая сумма магнитных потоков в любом узле магнитной цепи равна нулю»:

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k = 0. \quad (4.6.1)$$

**Второй закон Кирхгофа** представляет собой одну из форм записи закона полного тока для магнитной цепи: «Алгебраическая сумма падений магнитного напряжения вдоль любого контура магнитной цепи равна алгебраической сумме магнитодвижущих сил этого контура»:

$$\sum_{k=1}^n U_{Mk} = \sum_{k=1}^n I_k \cdot w_k. \quad (4.6.2)$$

*Последовательность операций при расчёте магнитной цепи с помощью законов Кирхгофа:*

- 1) определить число  $n$  узлов и  $m$  ветвей магнитной цепи;
- 2) произвольно выбрать направления магнитных потоков в ветвях магнитной цепи и направления обхода  $m-(n-1)$  независимых контуров;
- 3) составить уравнения первого закона Кирхгофа для  $(n-1)$  узла магнитной цепи и  $m-(n-1)$  уравнений второго закона Кирхгофа;
- 4) решить полученную систему уравнений.

**Правило знаков:** а) если направление магнитного потока на рассматриваемом участке совпадает с направлением обхода контуров, то падение магнитного напряжения на этом участке записывается в левой части уравнения (4.6.2) с положительным знаком; при встречном направлении магнитного потока и обхода контура магнитное напряжение отрицательно; б) если направление магнитодвижущей силы совпадает с направлением обхода контура, то магнитодвижущая сила записывается со положительным знаком; в случае встречного направления МДС и направления обхода контура она записывается с отрицательным знаком.

Например, составим уравнения Кирхгофа для магнитной цепи на рис.4.6.1, для которой известны геометрические размеры, магнитные свойства магнитопровода, количество витков обмоток и сила токов в них.

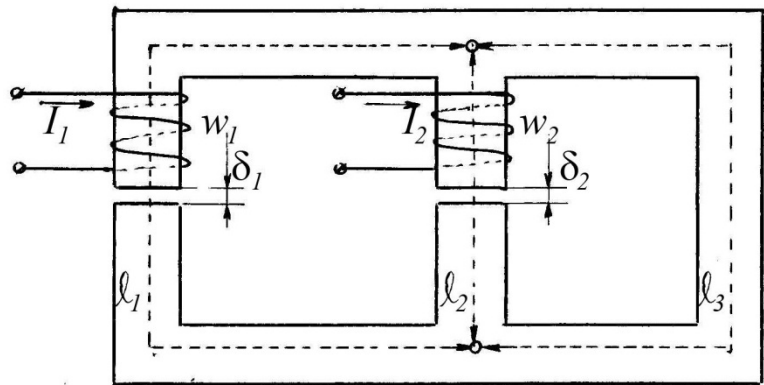


Рис.4.6.1

1) Магнитная цепь содержит два узла ( $n=2$ ) и три ветви ( $m=3$ ). При своём левой ветви индекс «1»:  $S_1, \mu_1, \delta_1, w_1, I_1, \Phi_1$ ; средней ветви – индекс «2»; правой ветви – индекс «3».

2) Произвольно выберем направления магнитных потоков. Например, магнитные потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  направим вверх, а магнитный поток  $\Phi_3$  – вниз. В качестве независимых контуров выберем левый и внешний контуры, которые условимся обходить по часовой стрелке.

3) Запишем первый закон Кирхгофа для верхнего узла магнитной цепи:

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0. \quad (4.6.3)$$

Второй закон Кирхгофа для левого контура:

$$H_1 \cdot l_1 + H_{\delta 1} \cdot \delta_1 - H_2 \cdot l_2 - H_{\delta 2} \cdot \delta_2 = I_1 \cdot w_1 - I_2 \cdot w_2. \quad (4.6.4)$$

Второй закон Кирхгофа для внешнего контура:

$$H_1 \cdot \ell_1 + H_{\delta 1} \cdot \delta_1 + H_3 \cdot \ell_3 = I_1 \cdot w_1. \quad (4.6.5)$$

Отметим, что уравнения (4.6.4) и (4.6.5) могут быть записаны в виде:

$$\Phi_1 \cdot (R_{M1} + R_{M\delta 1}) - \Phi_2 \cdot (R_{M2} + R_{M\delta 2}) = I_1 \cdot w_1 - I_2 \cdot w_2,$$

то есть

$$\Phi_1 \cdot \left( \frac{\ell_1}{\mu_1 \cdot \mu_0 \cdot S_1} + \frac{\delta_1}{\mu_0 \cdot S_1} \right) - \Phi_2 \cdot \left( \frac{\ell_2}{\mu_2 \cdot \mu_0 \cdot S_2} + \frac{\delta_2}{\mu_0 \cdot S_2} \right) = I_1 \cdot w_1 - I_2 \cdot w_2, \quad (4.6.4.a)$$

$$\Phi_1 \cdot \left( \frac{\ell_1}{\mu_1 \cdot \mu_0 \cdot S_1} + \frac{\delta_1}{\mu_0 \cdot S_1} \right) + \Phi_3 \cdot \left( \frac{\ell_3}{\mu_3 \cdot \mu_0 \cdot S_3} \right) = I_1 \cdot w_1. \quad (4.6.5.a)$$

Совместное решение системы уравнений (4.6.3), (4.6.4.a) и (4.6.5.a) относительно трёх неизвестных величин ( $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ ) позволяет определить магнитные потоки в ветвях магнитной цепи. Однако этот метод не является рациональным. Решение данной задачи можно упростить, если использовать метод расчёта цепи с двумя узлами.

#### 4.7. Расчёт неразветвленной магнитной цепи

При расчёте режима работы магнитной цепи магнитные свойства материала, форма и геометрические размеры магнитопровода которой известны, различают прямую и обратную задачу.

В случае *прямой задачи* требуется определить магнитодвижущую силу катушки ( $F$ ?) по заданному в какой-либо части магнитной цепи магнитному потоку или индукции магнитного поля.

При решении *обратной задачи* по заданной магнитодвижущей силе требуется определить магнитный поток или магнитную индукцию.

Для упрощения решения обеих задач делают два допущения, которые, как правило, выполняются:

- 1) пренебрегают магнитными потоками рассеяния, то есть полагают, что все линии магнитной индукции замыкаются по магнитопроводу;
- 2) пренебрегают неоднородностью магнитного поля в воздушном зазоре, то есть считают площадь поперечного сечения в воздушном зазоре такой же, как и в магнитопроводе. Это вполне допустимо при относительно небольшой ширине зазора ( $\delta$ ), если  $\delta \leq 0,1 \cdot d$ , где  $d$  – диаметр магнитопровода.

##### 4.7.a. Прямая задача

Рассмотрим неразветвленную магнитную цепь (рис. 4.7.1), состоящую из  $\Pi$ -образного сердечника электромагнита и стальной пластинки, замыкающей его концы. Между концами сердечника и стальной пластинкой имеется воздушный зазор шириной  $\delta$ . Размеры сердечника электро-

магнита и пластины, а также свойства материалов, из которых они изготовлены, известны. Площадь сечения сердечника электромагнита во всех его частях одинакова и равна  $S_1$ , а площадь сечения пластины равна  $S_2$ .

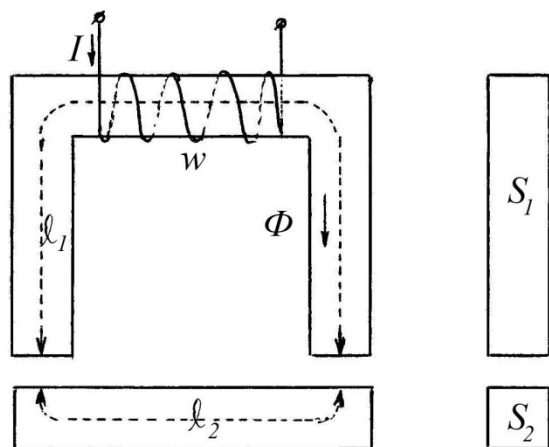


Рис.4.7.1

При известном магнитном потоке  $\Phi$  требуется определить намагничивающий ток  $I$ .

Расчёт требует выполнения следующих операций:

1) магнитопровод необходимо мысленно разделить на участки так, чтобы параметры цепи в пределах каждого участка были неизменны. *Нецелесообразно дробить магнитную цепь на чрезмерно мелкие участки, поскольку это приведёт к усложнению расчётов.*

Но недопустимо, чтобы в пределах одного участка содержались материалы с различными магнитными свойствами или с переменной площадью поперечного сечения. Магнитную цепь, представленную на рис. 4.7.1, можно разделить на три последовательных участка: сердечник электромагнита, два воздушных зазора, стальную пластину.

2) Необходимо приближённо наметить среднюю магнитную линию, показанную на рис. 4.7.1 пунктиром, и определить длины её участков:  $\ell_1$ ,  $2\delta$  и  $\ell_2$ . В соответствии с допущением 2 при малой ширине зазора можно пренебречь искажением магнитного поля в зазоре, то есть считать, что  $S_\delta = S_1$ .

3) Поскольку расчёт магнитной цепи, основанный на применении законов Кирхгофа для данной магнитной цепи, аналогичен расчёту нелинейной электрической цепи постоянного тока, исследуемую цепь (рис. 4.7.1) можно заменить эквивалентной схемой. Эквивалентная схема содержит три соединённых последовательно сопротивления:  $R_{M1}$ ,  $R_\delta$  и  $R_{M2}$  и источник МДС  $F = I \cdot w$  (рис. 4.7.2). Здесь сопротивления сердечника  $R_{M1}$  и стальной пластины  $R_{M2}$  зависят от магнитного потока, если магнитопровод изготовлен из ферромагнитного материала, а сопротивление воздушных зазоров  $R_\delta$  постоянно.

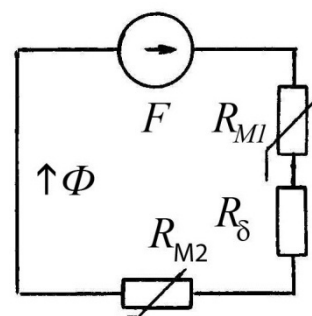


Рис.4.7.2

4) Необходимо составить и решить уравнение второго закона Кирхгофа для данной магнитной цепи:

$$F = I \cdot w = H_1 \cdot \ell_1 + H_\delta \cdot 2\delta + H_2 \cdot \ell_2. \quad (4.7.1)$$

5) По известному магнитному потоку  $\Phi$  необходимо определить индукцию магнитного поля в каждом из трёх участков магнитной цепи:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}; \quad B_\delta = \frac{\Phi}{S_1}. \quad (4.7.2)$$

Дальнейший ход решения задачи зависит от свойств материала магнитопровода.

Если сердечник и пластина изготовлены из *неферромагнитного* материала с магнитной проницаемостью, равной соответственно  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , то напряжённость магнитного поля в отдельных участках магнитной цепи можно определить подстановкой соотношений (4.7.2) в уравнение (4.1.4):

$$\begin{cases} H_1 = \frac{B_1}{\mu_1 \cdot \mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_1 \cdot \mu_0 \cdot S_1}; \\ H_2 = \frac{B_2}{\mu_2 \cdot \mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_2 \cdot \mu_0 \cdot S_2} \\ H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_0 \cdot S_1}. \end{cases} \quad (4.7.3)$$

Подстановка полученных выражений напряжённости магнитного поля (4.7.3) в уравнение (4.7.1) позволяет определить МДС и намагничивающий ток:

$$F = I \cdot w = \Phi \cdot \left( \frac{\ell_1}{\mu_1 \cdot \mu_0 \cdot S_1} + \frac{\ell_2}{\mu_2 \cdot \mu_0 \cdot S_2} + \frac{2 \cdot \delta}{\mu_0 \cdot S_1} \right). \quad (4.7.4)$$

Окончательно:

$$I = \frac{\Phi}{w} \cdot \left( \frac{\ell_1}{\mu_1 \cdot \mu_0 \cdot S_1} + \frac{\ell_2}{\mu_2 \cdot \mu_0 \cdot S_2} + \frac{2 \cdot \delta}{\mu_0 \cdot S_1} \right). \quad (4.7.5)$$

Учитывая, что

$$\frac{\ell_i}{\mu_i \cdot \mu_0 \cdot S_i} = R_{Mi}$$

– магнитное сопротивление  $i$ -го участка магнитной цепи, уравнение (4.7.5) можно преобразовать к виду:

$$I = \frac{\Phi}{w} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\ell_i}{\mu_i \cdot \mu_0 \cdot S_i} = \frac{\Phi}{w} \cdot \sum_{i=1}^n R_{Mi}. \quad (4.7.6)$$

Если сердечник и (или) пластина изготовлены из *ферромагнитного* материала, то напряжённости магнитного поля в них определяются графически из известных зависимостей  $B_1=f_1(H)$  и  $B_2=f_2(H)$ , где значения индукции магнитного поля  $B_1$  и  $B_2$  рассчитаны с помощью уравнения (4.7.2). Напряжённость магнитного поля в зазоре  $H_\delta$  рассчитывается с помощью третьего уравнения системы (4.7.3). Подстановка полученных значений  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_\delta$  в уравнение (4.7.1) позволяет рассчитать МДС и намагничивающий ток:

$$I = \frac{\Phi}{w} \cdot (H_1 \cdot \ell_1 + H_2 \cdot \ell_2 + 2 \cdot H_\delta \cdot \delta). \quad (4.7.7)$$

#### 4.7.6. Обратная задача

Решение обратной задачи рассмотрим на примере расчёта неразветвленной магнитной цепи (рис.4.7.1). В этом случае известны геометрические размеры и магнитные свойства материала магнитопровода, а также намагничивающий ток  $I$ . Требуется определить магнитный поток в магнитной цепи.

Если сердечник и пластина изготовлены из *неферромагнитного* материала, то выражение для расчёта магнитного потока можно получить из уравнения (4.7.4):

$$\Phi = \frac{I \cdot w}{\frac{\ell_1}{\mu_1 \cdot \mu_0 \cdot S_1} + \frac{\ell_2}{\mu_2 \cdot \mu_0 \cdot S_2} + \frac{2 \cdot \delta}{\mu_0 \cdot S_1}} \quad (4.7.8)$$

или в общем виде:

$$\Phi = \frac{I \cdot w}{\sum_{i=1}^n R_{Mi}}. \quad (4.7.9)$$

решить прямую задачу, то есть рассчитать намагничивающий ток с помощью уравнения (4.7.7). Первоначально целесообразно задаться максимальным для данной магнитной цепи значением магнитного потока  $\Phi_{MAX}$ . Для этого следует пренебречь магнитным напряжением на металлических участках магнитопровода, полагая, что  $U_{M1} \ll U_\delta$  и  $U_{M2} \ll U_\delta$ . В этом случае, пренебрегая первыми двумя слагаемыми в скобках уравнения (4.7.5), находим:

$$\Phi_{MAX} = \frac{\mu_0 \cdot S_1 \cdot I \cdot w}{2 \cdot \delta}. \quad (4.7.10)$$

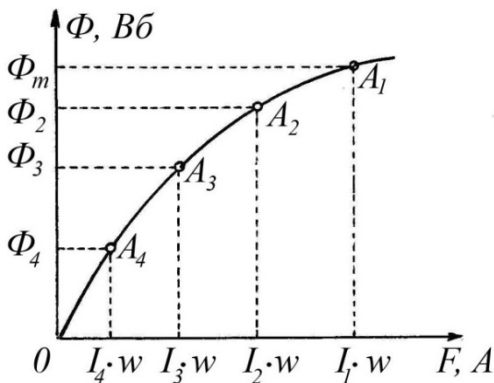


Рис.4.7.3

Решение прямой задачи для  $\Phi_I = \Phi_{MAX}$  позволяет определить ток  $I_I$  и получить точку  $A_I$  на графике зависимости  $\Phi = f(I \cdot w)$  (рис.4.7.3). Далее решение прямой задачи для  $\Phi_2 < \Phi_I$ ,  $\Phi_3 < \Phi_2$ ,  $\Phi_4 < \Phi_3, \dots$  позволяет определить  $I_2, I_3, I_4, \dots$  и, установив координаты точек  $A_2, A_3, A_4, \dots$ , построить график зависимости  $\Phi = f(I \cdot w)$ . Далее, по известному значению  $I \cdot w$ , с помощью графика можно определить искомый магнитный поток  $\Phi$ .

*Метод последовательных приближений.* При использовании этого метода с помощью уравнения (4.7.10) предварительно рассчитывают значение  $\Phi_{MAX}$  и решают прямую задачу. Результаты удобно занести в таблицу (первая строка).

№	$\Phi$ , [Вб]	$B_1$ , [Тл]	$B_2$ , [Тл]	$B_\delta$ , [Тл]	$H_1$ , [А/м]	$H_2$ , [А/м]	$H_\delta$ , [А/м]	$H_1 \cdot \ell_1$ , [А]	$H_2 \cdot \ell_2$ , [А]	$H_\delta \cdot 2\delta$ , [А]	$\sum_k H_k \ell_k$
1											
2											
...											

Если, например,  $\sum_k H_k \ell_k > I \cdot w$ , то необходимо задать новое значение магнитного потока  $\Phi_2 < \Phi_1$ , называемое вторым приближением, и вновь решить обратную задачу. Подобные операции следует повторять до тех пор, пока рассчитанное значение  $\sum_k H_k \ell_k$  не окажется равным  $I \cdot w$ . Значение  $\Phi_n$ , при котором выполняется равенство  $\sum_k (H_k \ell_k)_n > I \cdot w$ , является решением задачи. Метод последовательных приближений особенно удобен при решении нелинейных задач с применением ЭВМ.

#### 4.8. Расчёт разветвлённой магнитной цепи

Современное авиационное электротехническое оборудование содержит устройства с разветвлёнными магнитопроводами, конфигурация которых обладает различной симметрией. Наличие симметрии позволяет значительно упростить расчёт магнитных цепей, поэтому анализ режима работы магнитных цепей следует начинать с выяснения, обладает ли магнитная цепь симметрией.

Магнитная цепь называется **симметричной**, если её можно мысленно разделить на две части: 1) одинаковые геометрически, 2) изготовленные из одного материала, 3) имеющие одинаковые МДС. В этом случае магнитные потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в обеих частях одинаковы.

На рис. 4.8.1 представлена симметричная магнитная цепь.

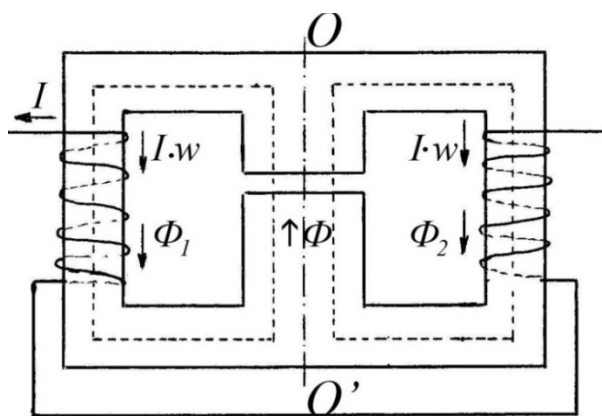


Рис.4.8.1

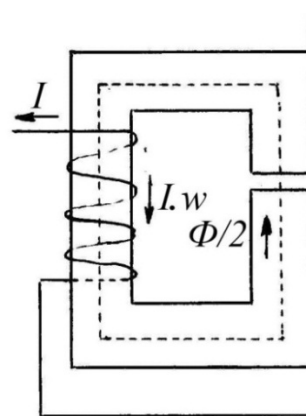


Рис.4.8.2

Если её мысленно разделить вдоль плоскости симметрии  $OO'$ , то задача сведётся к расчёту неразветвленной магнитной цепи (рис. 4.8.2). Вследствие симметрии магнитной цепи  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi/2$ , а МДС равна половине магнитодвижущей силы всей магнитной цепи. Расчёт такой магнитной цепи описан в п. 4.7.

Если магнитная цепь не обладает симметрией, то для её расчёта можно использовать метод аналогии, который основан на аналогии законов Кирхгофа для электрических и магнитных цепей. Магнитную цепь заменяют эквивалентной электрической схемой. При этом учитывают, что:

- 1) МДС аналогична ЭДС;
- 2) магнитное сопротивление  $R_M$  ферромагнитного участка магнитопровода аналогично нелинейному электрическому сопротивлению  $R$ ;
- 3) магнитное сопротивление воздушного зазора  $R_\delta$  аналогично сопротивлению линейного резистора;
- 4) магнитный поток  $\Phi$  аналогичен электрическому току  $I$ .

В результате получается нелинейная электрическая цепь, которую следует рассчитывать методом, приведённым в главе III.

Рассмотрим пример расчёта несимметричной магнитной электрической цепи (рис. 4.8.3), эквивалентная схема которой приведена на рис. 4.8.4.

*Прямая задача.* Дано: 1) геометрические размеры магнитопровода, 2) магнитные характеристики материала магнитопровода, 3) магнитный поток в одной из ветвей, например,  $\Phi_3$ . Требуется определить МДС.

Для решения поставленной задачи по известному магнитному потоку  $\Phi_3$  в магнитопроводе рассчитывают магнитную индукцию в данной ветви

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3},$$

а затем с помощью кривой намагничивания  $B_3 = f_3(H_3)$  определяют напряжённость магнитного поля в магнитопроводе и рассчитывают напряжённость магнитного поля в воздушном зазоре:

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = \frac{B_3}{\mu_0} = \frac{\Phi_3}{\mu_0 \cdot S_3}.$$

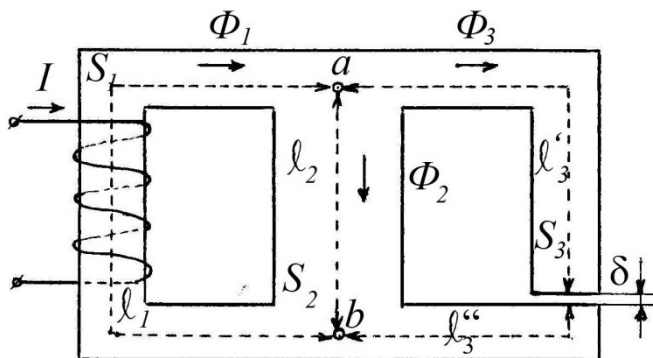


Рис. 4.8.3

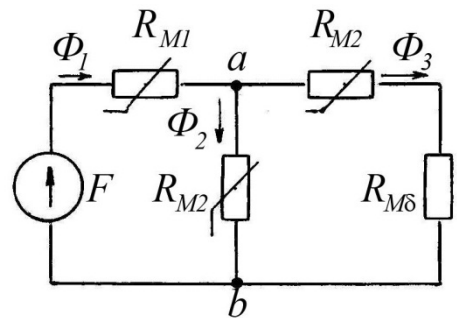


Рис. 4.8.4

Магнитное напряжение в третьей ветви, то есть между узлами  $a$  и  $b$ :

$$U_{Mab} = \sum_{k=1}^n H_k \cdot \ell_k = H_3 \cdot (\ell'_3 + \ell''_3) + H_\delta \cdot \delta$$

равно магнитному напряжению второй ветви, поскольку вторая и третья ветви соединены параллельно. Это позволяет рассчитать напряжённость магнитного поля во второй ветви  $H_2$ , используя второй закон Кирхгофа:

$$H_2 \cdot \ell_2 = U_{Mab}.$$

Следовательно,  $H_2 = U_{Mab} / \ell_2 = U_{Mab}$ .

Далее с помощью кривой намагничивания  $B_2 = f_2(H_2)$  определяют индукцию магнитного поля  $B_2$  во второй ветви и рассчитывают магнитный поток  $\Phi_2 = B_2 \cdot S_2$ .

С помощью первого закона Кирхгофа определяют магнитный поток в первой ветви  $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$ , рассчитывают магнитную индукцию

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$$

и по кривой намагничивания  $B_1 = f_1(H_1)$  определяют напряжённость магнитного поля  $H_1$  в первой ветви.

Применяя второй закон Кирхгофа к левому контуру определяют искомую МДС:  $F = I \cdot w = H_1 \cdot \ell_1 + U_{Mab}$ .

*Обратная задача.* Дано: 1) геометрические размеры магнитопровода, 2) магнитные характеристики материалов магнитопровода, 3) намагничивающий ток и число витков катушки, то есть её магнитодвижущая сила  $F = I \cdot w$ . Требуется определить магнитные потоки  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  в магнитной цепи.

Обратная задача может быть решена графически. С помощью кривых намагничивания  $B = f(H)$  строят графики зависимостей  $\Phi_2(U_{Mab}) = \Phi_2(H_2 \cdot \ell_2)$  и  $\Phi_3(U_{Mab}) = \Phi_3(H_3 \cdot \ell_3 + H_\delta \cdot \delta)$  (рис. 4.8.5).

Обратная задача может быть решена графически. С помощью кривых намагничивания  $B = f(H)$  строят графики зависимостей  $\Phi_2(U_{Mab}) = \Phi_2(H_2 \cdot \ell_2)$  и  $\Phi_3(U_{Mab}) = \Phi_3(H_3 \cdot \ell_3 + H_\delta \cdot \delta)$  (рис. 4.8.5). Зависимость  $\Phi_3(U_{Mab})$  может быть получена суммированием абсцисс прямой линии  $\Phi_3(H_3 \cdot \ell_3)$  при одних и тех же значениях магнитного потока  $\Phi_3$ . Затем суммированием ординат зависимостей  $\Phi_2(U_{Mab})$  и  $\Phi_3(U_{Mab})$  для

одних и тех же значений магнитного напряжения  $U_{Mab}$  получают зависимость  $\Phi_2 + \Phi_3 = f(U_{Mab})$ . Точка  $m_1$  пересечения полученной кривой линии и характеристики  $\Phi_1(U_{Mab})$  определяет действительное магнитное напряже-

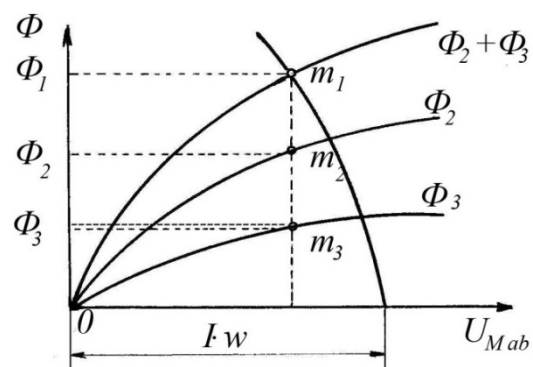


Рис.4.8.5

ние  $U_{Mab}$  между узлами  $a$  и  $b$  и магнитный поток  $\Phi_1$  в первой ветви. Ординаты точек  $m_2$  и  $m_3$  (рис.4.8.5) пересечения вертикальной линии с графиками зависимостей  $\Phi_2(U_{Mab})$  и  $\Phi_3(U_{Mab})$  определяют магнитные потоки соответственно  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ .

#### 4.9. Расчёт магнитной цепи с постоянным магнитом

##### А. Получение постоянного магнита

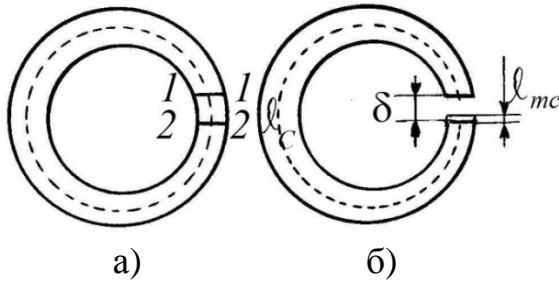


Рис.4.9.1

Рассмотрим замкнутый кольцевой сердечник, изготовленный из магнитотвердого материала, в котором имеются два бесконечно тонких пропила 1-1 и 2-2 (рис. 4.9.1.а). Намотаем на сердечник обмотку и пропустим по ней ток такой величины, чтобы намагнитить сердечник до насыщения.

Если затем выключить электрический ток, то сердечник останется намагниченным. Если удалить выпиленный кусок сердечника между сечениями 1-1 и 2-2 (рис. 4.9.1.б), то магнитное сопротивление цепи возрастет, магнитный поток уменьшится, а в воздушном зазоре возникнет магнитный поток. То есть полученное устройство представляет собой постоянный магнит.

##### Б. Метод расчёта магнитной цепи с постоянным магнитом

Обозначим символами  $H_\delta$ ,  $B_\delta$  и  $H_l$ ,  $B_l$  соответственно напряжённость и индукцию магнитного поля в воздушном зазоре шириной  $\delta$  и в магнитном сердечнике. Длина средней магнитной линии в сердечнике  $\ell_c$ .

Полагая известными кривую размагничивания ферромагнитного материала (рис. 4.9.2),<sup>ab</sup> ширину зазора  $\delta$  и длину  $\ell_c$ , определим величины  $H_c$  и  $B_c$ . Для этого запишем закон полного тока для магнитной цепи (рис. 4.9.1.б), учитывая, что МДС отсутствует (равна нулю):

$$\oint_{\ell} (\vec{H}, d\vec{\ell}) = H_c \cdot \ell_c + H_\delta \cdot \delta = 0. \quad (4.9.1)$$

Если зазор  $\delta$  невелик, то можно пренебречь рассеянием магнитного потока:

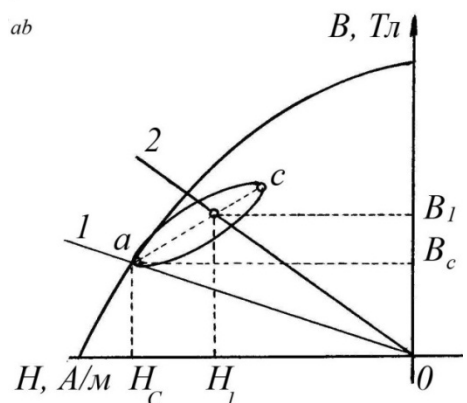


Рис.4.9.2

$$B_c \cdot S_c = B_\delta \cdot S_\delta, \quad (4.9.2)$$

где  $S_C$  и  $S_\delta$  – площади поперечного сечения соответственно магнита и воздушного зазора. Следовательно:

$$B_\delta = \frac{B_C \cdot S_C}{S_\delta},$$

то есть

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = \frac{B_C \cdot S_C}{\mu_0 \cdot S_\delta}. \quad (4.9.3)$$

Подстановка соотношения (4.9.3) в уравнение (4.9.1) позволяет получить выражение для определения напряжённости магнитного поля в сердечнике:

$$H_C \ell_C + \frac{1}{\mu_0} \cdot B_C \cdot \frac{S_C}{S_\delta} \cdot \delta = 0,$$

следовательно,

$$H_C = -\frac{1}{\mu_0} \cdot B_C \frac{\delta \cdot S_C}{\ell_C \cdot S_\delta} = 0,$$

или

$$H_C = -N \cdot B_C, \quad (4.9.4)$$

где

$$N = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\delta \cdot S_C}{\ell_C \cdot S_\delta} \left[ \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{В} \cdot \text{с}} \right]. \quad (4.9.5)$$

Коэффициент  $N$ , зависящий от геометрических размеров магнита, называется *размагничивающим фактором*.

Для определения значений  $H_C$  и  $B_C$  на рис. 4.9.2 следует построить прямую линию «1» с помощью уравнения (4.9.4). Точка «а» на рис. 4.9.2 пересечения линии «1» и кривой размагничивания определяет значения  $H_C$  и  $B_C$ , удовлетворяющие условию задачи.

### *В. Прямая и коэффициент возврата*

Если зазор  $\delta$  (рис.4.9.1.б) частично заполнить магнитомягким материалом толщиной  $\ell_m$ , то под действием магнитного поля постоянного магнита внесённый материал намагничивается, что приводит к увеличению магнитного потока в магнитопроводе, в результате уменьшения магнитного сопротивления магнитной цепи. Вследствие гистерезиса изменение величин  $B$  и  $H$  будет происходить не по линии  $ab$ , а по нижней ветви  $ac$  петли, называемой *частным циклом*. Для упрощения расчётов принято заменять частный цикл прямой линией ( $ac$ ), соединяющей его вершины, называемой *прямой возврата*. Тангенс угла наклона прямой возврата к оси

абсцисс называется *коэффициентом возврата*. Значения коэффициента возврата для различных материалов приведены в справочных таблицах параметров постоянных магнитов.

Введение в зазор  $\delta$  магнитомягкого материала толщиной  $\ell_m$  приводит к уменьшению длины воздушного зазора до значения  $\delta = \delta_I - \ell_m$ . Закон полного тока для данной магнитной цепи имеет вид:

$$H_C \cdot \ell_C + H_{\delta I} \cdot \delta_I + \ell_m \cdot H_m = 0. \quad (4.9.6)$$

Поскольку магнитное сопротивление магнитомягкого материала ничтожно мало по сравнению с магнитным сопротивлением воздушного зазора  $\delta_I$ , напряжённость магнитного поля в магнитомягком материале много меньше напряжённости магнитного поля в воздушном зазоре, слагаемым  $\ell_m \cdot H_m$  в уравнении (4.9.6) можно пренебречь:  $H_C \cdot \ell_C + H_{\delta I} \cdot \delta_I = 0$ . Следовательно,

$$H_C = -\frac{1}{\mu_0} \cdot B_C \frac{\delta_I \cdot S_C}{\ell_C \cdot S_\delta}. \quad (4.9.7)$$

Магнитные параметры ( $H_I$  и  $B_I$ ) постоянного магнита с пластинкой из магнитомягкого материала определяются точкой пересечения прямой возврата с линией «2» (рис.4.9.2), построенной с помощью уравнения (4.9.7).

#### Г. Сила тяги электромагнита

Широкое практическое применение находят устройства, действие которых основано на притяжении подвижной пластины (якоря) электромагнитом, например, электромагнитное реле, стрелочные измерительные приборы электромагнитной системы и другие устройства.

На рис. 4.9.3 изображён электромагнит 1, притягивающий якорь 2, находящийся на расстоянии  $\ell$  от сердечника электромагнита. Площадь поперечного сечения магнитопровода и воздушных зазоров одинакова и равна  $S$ . Если можно пренебречь неоднородностью магнитного поля в зазорах («выпучиванием» линий магнитной индукции), то энергию магнитного поля в зазорах можно описать уравнением:

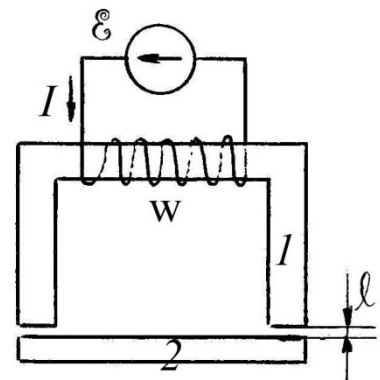


Рис.4.9.3

$$W_M = \frac{B \cdot H}{2} \cdot S \cdot \ell.$$

Учитывая, что сила тяги равна частной производной энергии по перемещению, силу тяги электромагнита можно выразить уравнением:

$$F = \frac{\partial W_M}{\partial \ell} = \frac{B \cdot H \cdot S}{2} = \frac{B^2 \cdot S}{2 \cdot \mu_0}.$$

Эта формула применима и для расчёта силы тяги постоянного магнита.

## Глава V. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

### 5.1. Закон электромагнитной индукции

#### *А. Формулировка М. Фарадея*

*Электромагнитной индукцией* называется явление возникновения электродвижущей силы (ЭДС индукции) в проводящем контуре, находящемся в переменном магнитном поле или движущемся в постоянном магнитном поле. Электрический ток, вызываемый этой электродвижущей силой, называется *индукционным током*. На явлении электромагнитной индукции основано действие ряда электротехнических устройств.

На рис. 5.1.1 представлен проводящий контур, содержащий  $w$  витков, помещённый в магнитное поле индукцией  $B$ .

Алгебраическая сумма магнитных потоков  $\Phi_k$ , пронизывающих отдельные витки, называется **потокосцеплением**  $\psi$  контура:

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_w = \sum_{k=1}^w \Phi_k. \quad (5.1.1)$$

Если каждый виток контура пронизывает один и тот же магнитный поток  $\Phi$ , то потокосцепление контура равно:

$$\Psi = \Phi \cdot w. \quad (5.1.2)$$

Поскольку величина  $w$  не имеет размерности, то в соответствии с формулами (5.1.1) и (5.1.2) потокосцепление измеряется в тех же единицах, что и магнитный поток, то есть в *веберах* [Вб].

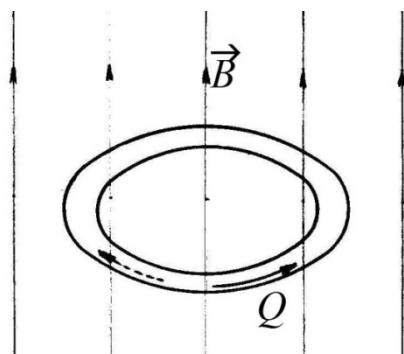


Рис.5.1.1

Экспериментально установлено, что при изменении потокосцепления проводящего контура в нём индуцируется электрический ток.

Количество электричества  $Q$ , проходящее через поперечное сечение проводника контура в процессе изменения потокосцепления, равно отношению изменения потокосцепления контура  $\Delta\psi$  к его электрическому сопротивлению  $R$ :

$$Q = -\frac{\Delta\psi}{R}. \quad (5.1.3)$$

Выражение (5.1.3), близкое по форме к соотношению, предложенному в 1831 г. английским физиком М. Фарадеем, называют *законом электромагнитной индукции в формулировке Фарадея*. Экспериментально установлено, что при увеличении индукции магнитного поля ток течёт в контуре в направлении, указанном на рис. 5.1.1 пунктирной стрелкой. Таким образом, в формуле (5.1.3) приращение  $\Delta\psi$  и направление движения заряда не согласуется с правилом правого винта, которое использовалось для установления связи направлений движения по контуру и сквозь него. Знак минус в законе Фарадея введён для согласования противоположных знаков в левой и правой частях равенства (5.1.3).

Закон электромагнитной индукции М. Фарадея, связывающий изменение потокосцепления контура с количеством протекающего по нему электричества, позволяет использовать измерение заряда  $Q$  для определения магнитного потока  $\Phi$ . Величина заряда  $Q$  может быть измерена баллистическим гальванометром. Например, для измерения магнитного потока через воздушный зазор магнитной цепи необходимо охватить зазор несколькими плотно прилегающими друг к другу витками изолированной проволоки, концы которой присоединены к баллистическому гальванометру. В этом случае потокосцепление  $\psi_I$  контура равно:

$$\psi_I = \omega \cdot \Phi, \quad (5.1.4)$$

где  $\omega$  – число витков контура. Если затем контур быстро удалить через зазор за пределы магнитного поля, то потокосцепление контура уменьшится до нуля ( $\psi_2 = 0$ ). Изменение потокосцепления равно:  $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 = -\psi_1$ .

Измерив гальванометром количество электричества  $Q$ , индуцированное в контуре в процессе его удаления за пределы магнитного поля, рассчитаем потокосцепление:

$$\psi_I = -\Delta\psi = Q \cdot R. \quad (5.1.5)$$

Здесь  $R$  – суммарное сопротивление контура и баллистического гальванометра. Подстановка уравнения (5.1.5) в соотношение (5.1.2) позволяет выразить искомый магнитный поток в зазоре:

$$\Phi = \frac{\psi_1}{\omega} = \frac{Q \cdot R}{\omega} . \quad (5.1.6)$$

### *Б. Формулировка Дж. Максвелла*

Рассмотрим проводящий контур, который находится в непрерывно изменяющемся магнитном поле. Тогда согласно закону электромагнитной индукции в формулировке М. Фарадея (5.1.3) за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ , в течение которого потокосцепление изменится на величину  $d\psi$ , через поперечное сечение проводника, образующего контур, пройдет бесконечно малое количество электричества  $dQ$ , равное:

$$dQ = -\frac{d\psi}{R} . \quad (5.1.7)$$

Здесь  $R$  - сопротивление контура,

$$dQ = I \cdot dt. \quad (5.1.8)$$

Приравнивая правые части уравнений (5.1.7) и (5.1.8), получим

$$I \cdot dt = -\frac{d\psi}{R} .$$

следовательно:

$$I \cdot R = -\frac{d\psi}{dt} . \quad (5.1.9)$$

Произведение  $I \cdot R$  в правой части равенства (5.1.9) равно суммарному напряжению в рассматриваемом контуре, которое, согласно второму закону Кирхгофа, равно индуцированной в контуре ЭДС, то есть  $I \cdot R = E$ , следовательно:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\psi}{dt} . \quad (5.1.10)$$

Уравнение (5.1.10), согласно которому индуцируемая в контуре ЭДС равна производной потокосцепления контура по времени с противоположным знаком, называется *законом электромагнитной индукции в формулировке Дж. Максвелла*. Знак минус в уравнении (5.1.10) необходим для согласования фактических и условно положительных направлений измене-

ний магнитного поля и ЭДС индукции в контуре (как и в формулировке М. Фарадея).

Рассмотрим пример применения уравнения (5.1.10) для определения ЭДС индукции в контуре, потокосцепление которого изменяется по некоторому закону (сплошная линия на рис. 5.1.2).

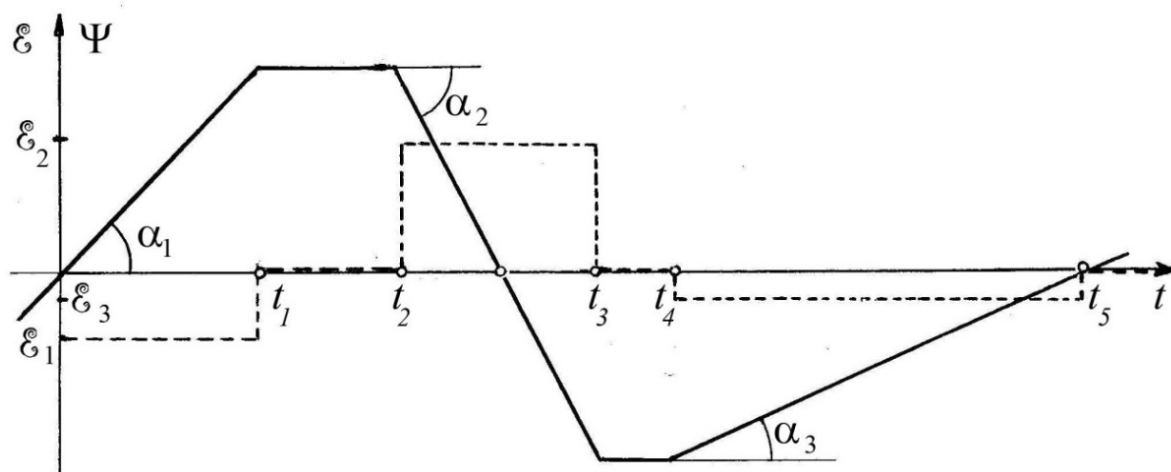


Рис.5.1.2

В течение интервала времени  $0 \div t_1$ , когда потокосцепление непрерывно возрастает, в контуре индуцируется постоянная отрицательная ЭДС  $E_1$ , поскольку производная  $\frac{d\psi}{dt}$  положительна. В интервале времени  $t_1 \div t_2$  потокосцепление не изменяется, поэтому  $\frac{d\psi}{dt} = 0$  и ЭДС не индуцируется. В течение временного интервала  $t_2 \div t_3$  потокосцепление убывает, причём  $\alpha_2 > \alpha_3$ , поэтому индуцируется положительная ЭДС  $E_2$ , большая по модулю, чем  $E_1$ . В течение следующего промежутка времени  $t_3 \div t_4$  потокосцепление не изменяется, и ЭДС индукции равна нулю. Затем в течение интервала времени  $t_4 \div t_5$  потокосцепление возрастает, причём  $\alpha_3 < \alpha_1$ , поэтому в контуре индуцируется отрицательная ЭДС  $E_3$ , меньшая по модулю, чем  $E_1$ .

#### В. Инженерная формулировка закона электромагнитной индукции

Практически часто возникает необходимость расчёта электродвижущей силы, индуцируемой в прямых проводниках, движущихся в однородном магнитном поле.

Выведем формулу ЭДС индукции, возникающей в прямом проводнике  $AC$  длиной  $\ell$ , который перемещается со скоростью  $v$  по направляющим  $KL$  и  $BN$  перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля (рис. 5.1.3).

К контуру  $ACKB$  можно применить закон электромагнитной индукции (5.1.10)  $\mathcal{E} = -\frac{d\psi}{dt}$ , где  $d\psi = d\Phi$ , поскольку число витков равно единице ( $w=1$ ). Таким образом,  $d\psi = B \cdot dS$ . Приращение площади контура за время  $dt$  равно (рис. 5.1.3)  $dS = \ell \cdot v \cdot dt$ , следовательно

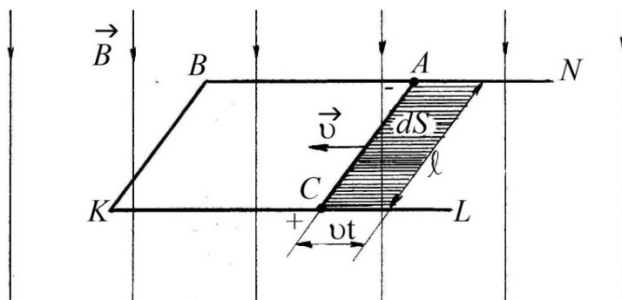


Рис.5.1.3

$$\mathcal{E} = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{B \cdot \ell \cdot v \cdot dt}{dt} = -B \cdot \ell \cdot v.$$

Полученную формулу, называемую *инженерной формулировкой* закона электромагнитной индукции, записывают, выражая абсолютное значение ЭДС, то есть:

$$\mathcal{E} = B \cdot \ell \cdot v. \quad (5.1.11)$$

Направление ЭДС индукции определяют с помощью **правила правой руки**: если правую руку расположить в магнитном поле так, чтобы линии магнитной индукции входили в ладонь, а отогнутый в сторону большой палец указывал направление движения проводника, то четыре пальца укажут направление ЭДС. Полярность ЭДС индукции, определённая с помощью правила правой руки, показана на рис. 5.1.3.

## 5.2. Индуктивность

Вокруг любого проводника с током возникает магнитное поле.

Магнитное поле контура с током  $I$  (рис. 5.2.1) создаёт собственный магнитный поток  $\Phi_{ms}$  через поверхность площадью  $S$ , опирающуюся на этот контур, называемый *магнитным потоком самоиндукции*:

$$\Phi_{ms} = \int_S B_n \cdot dS. \quad (5.2.1)$$

Здесь  $B_n$  – проекция вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  на нормаль к поверхности. Согласно закону Био – Савара – Лапласа, магнитная индукция  $d\vec{B}$  в точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $r$  от элемента  $d\vec{\ell}$  контура с током  $I$ , равна

$$d\vec{B} = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{r^3} \cdot [d\vec{\ell}, \vec{r}],$$

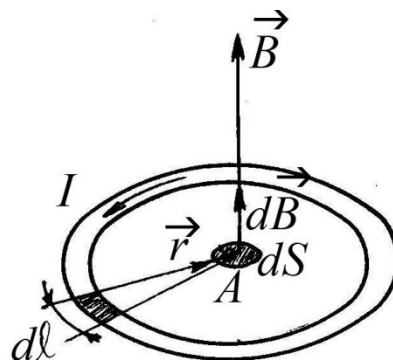


Рис.5.2.1

Следовательно,

$$\vec{B} = \oint_{\ell} d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot I \oint_{\ell} \mu \cdot \frac{[d\vec{\ell}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (5.2.2)$$

Здесь ток  $I$  полагается постоянным,  $\vec{r}$  - радиус-вектор, проведённый из начала вектора  $d\vec{\ell}$  в центр элемента поверхности площадью  $dS$ .

Согласно принципу суперпозиции проекция векторной суммы ( $\vec{B}$ ) на выбранное направление равна алгебраической сумме проекций на это направление всех составляющих векторов. Поэтому уравнение (5.2.2) можно записать в скалярном виде:

$$B_n = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot I \oint_{\ell} \mu \cdot \frac{[d\vec{\ell}, \vec{r}]_n}{r^3}. \quad (5.2.3)$$

Здесь  $[d\vec{\ell}, \vec{r}]_n$  - проекция векторного произведения  $[d\vec{\ell}, \vec{r}]$  на направление нормали к элементу  $dS$  поверхности, опирающейся на контур  $\ell$ .

Подстановка уравнения (5.2.3) в соотношение (5.2.1) позволяет выразить магнитный поток самоиндукции через поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $\ell$ :

$$\Phi_{mS} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_S I \cdot \left\{ \oint_{\ell} \mu \cdot \frac{[d\vec{\ell}, \vec{r}]_n}{r^3} \right\} \cdot dS. \quad (5.2.4)$$

Поскольку ток  $I$  в контуре не зависит от величины  $S$ , выражение (5.2.4) можно записать в виде:

$$\Phi_{mS} = I \cdot \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_S dS \cdot \left\{ \oint_{\ell} \mu \cdot \frac{[d\vec{\ell}, \vec{r}]_n}{r^3} \right\}. \quad (5.2.5)$$

Вводя обозначение

$$L = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_S dS \cdot \left\{ \oint_{\ell} \mu \cdot \frac{[d\vec{\ell}, \vec{r}]_n}{r^3} \right\}, \quad (5.2.6)$$

магнитный поток самоиндукции можно описать уравнением:

$$\Phi_{mS} = I \cdot L. \quad (5.2.7)$$

Величина  $L$  называется *индуктивностью* контура. Из уравнения (5.2.6) следует, что индуктивность контура зависит от его формы и размеров, а также от магнитной проницаемости среды  $\mu$ , в которой он находится.

Согласно соотношению (5.2.7) *индуктивность контура равна потоку самоиндукции контура, если сила тока в контуре равна одному амперу, то есть  $L = \Phi_{ms}$ , если  $I = 1$  А.*

Единицей индуктивности в СИ является *генри (Гн)* – индуктивность контура, магнитный поток самоиндукции которого при силе тока  $I = 1$  А равен *1 Вб*.

### 5.3. Самоиндукция

Рассмотрим уединённый проводящий контур с током в пространстве, где отсутствуют внешние магнитные поля. Если сила тока в контуре изменяется, то изменяется и поток самоиндукции, что приводит к наведению ЭДС индукции в контуре. *Возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нём силы тока называется **самоиндукцией*** и является частным случаем электромагнитной индукции. *Возникающая при этом индукционная ЭДС называется **электродвижущей силой самоиндукции  $E_c$*** . Подстановка выражения (5.2.7) магнитного потока самоиндукции в уравнение (5.1.10) позволяет выразить ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_c = -\frac{d\Phi_{ms}}{dt} = -\frac{d(L \cdot I)}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt} - I \cdot \frac{dL}{dt}. \quad (5.3.1)$$

Таким образом, ЭДС самоиндукции зависит от скорости изменения силы тока в контуре  $\left(\frac{dI}{dt}\right)$  и скорости изменения его индуктивности  $\left(\frac{dL}{dt}\right)$ . При жёсткой конструкции контуров, размеры которых, а следовательно, и индуктивность, не изменяются, второе слагаемое в правой части уравнения (5.3.1) обращается в ноль, и ЭДС самоиндукции характеризуется соотношением:

$$\varepsilon_c = -L \cdot \frac{dI}{dt}. \quad (5.3.2)$$

Из формулы (5.3.2), справедливой для контура с неизменной индуктивностью, следует, что ЭДС самоиндукции и индукционный ток прямо пропорциональны индуктивности контура. Следовательно, индуктивность имеет следующий физический смысл: *индуктивность контура является мерой его инертности по отношению к изменению силы тока.*

На рис. 5.3.1 рассмотрим катушку с индуктивностью  $L$ , по которой течёт ток силой  $I$  от зажима 1 к зажиму 2. Если сила тока увеличивается, то есть  $\frac{dI}{dt} > 0$  (рис. 5.3.1.а), то согласно уравнению (5.3.2) ЭДС самоиндукции отрицательна и направлена навстречу току  $I$ . Таким образом, *при увеличении силы тока электродвижущая сила самоиндукции направлена противоположно току.*

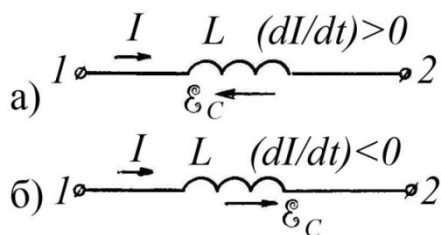


Рис.5.3.1

При уменьшении силы тока  $I$  производная  $\frac{dI}{dt}$  отрицательная, и согласно уравнению (5.3.2) ЭДС самоиндукции и ток в катушке имеют одинаковый знак (рис. 5.3.1.б). Следовательно, *убывающий ток вызывает в индуктивной катушке электродвижущую*

*силу самоиндукции, направленную в ту же сторону, что и ток.*

Направление электрического тока, возникающего в результате явления самоиндукции, определяется правилом, сформулированным Э.Х. Ленцем. Согласно правилу Ленца *индукционный ток в контуре направлен так, чтобы создаваемый им поток магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром, препятствовал изменению магнитного поля, которое вызывает данный ток.*

Индуктивность катушек с ферромагнитным сердечником является переменной величиной, зависящей от силы тока в катушке, вследствие нелинейности характеристики магнитопровода. Поэтому ЭДС самоиндукции катушек с ферромагнитным сердечником описывается уравнением:

$$\varepsilon_c = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\psi}{dI} \cdot \frac{dI}{dt} = -L_\partial \cdot \frac{dI}{dt}. \quad (5.3.3)$$

Здесь

$$L_\partial = -\frac{d\psi}{dI}$$

– дифференциальная индуктивность. В инженерной практике при вычислении ЭДС самоиндукции таких катушек дифференциальную индуктивность определяют графически, используя магнитную характеристику катушки  $\psi=f(I)$ , с учётом зависимости силы тока от времени.

## 5.4. Взаимная индукция

*Явление, в котором обнаруживается магнитная связь двух или более электрических цепей и заключающееся в наведении ЭДС индукции в электрической цепи, при изменении силы тока в другой, магнитно связанной с ней электрической цепи, называется **взаимной индукцией**.* Возникающая при этом ЭДС называется *электродвижущей силой взаимной индукции*  $E_M$ .

Рассмотрим два проводящих контура, между которыми существует магнитная связь (рис. 4.5.1). Следовательно, каждый из этих контуров находится в магнитном поле другого контура.

По первому контуру, содержащему  $w_1$  витков, течёт ток силой  $I_1$ , а по второму контуру, содержащему  $w_2$  витков, течёт ток силой  $I_2$ . На рис. 4.5.1 каждый магнитный поток обозначен одной линией. Магнитный поток  $\Phi_1$ , создаваемый током  $I_1$ , частично замыкается, минуя второй контур ( $\Phi_{11}$ ), и частично проходит через второй контур ( $\Phi_{12}$ ), то есть

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}. \quad (5.4.1)$$

Аналогично, магнитный поток  $\Phi_2$ , создаваемый током  $I_2$ , частично замыкается, минуя первый контур ( $\Phi_{22}$ ), и частично проходит через первый контур ( $\Phi_{21}$ ):

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}. \quad (5.4.2)$$

Полное потокосцепление первого и второго контура равно соответственно:

$$\Psi_{1 \text{ полн.}} = w_1 \cdot (\Phi_1 \pm \Phi_{21}) = \psi_1 \pm \psi_{21}, \quad (5.4.3)$$

$$\Psi_{2 \text{ полн.}} = w_2 \cdot (\Phi_2 \pm \Phi_{12}) = \psi_2 \pm \psi_{12}. \quad (5.4.4)$$

Если направление магнитного потока взаимной индукции совпадает с направлением магнитного потока самоиндукции, создаваемого данным контуром (*согласное направление*), в выражениях (5.4.3) и (5.4.4) записывают знак «плюс». При встречном направлении указанных магнитных потоков – знак «минус».

Согласно закону Био – Савара – Лапласа индукция магнитного поля, создаваемого контуром, пропорциональна протекающего по нему току. Следовательно, и магнитные потоки, и потокосцепления также пропорциональны силе тока в контуре, если окружающая среда имеет постоянную магнитную проницаемость, то есть потокосцепление взаимной индукции равно произведению силы тока в контуре на коэффициент пропорциональности:

$$\Psi_{21} = M_{21} \cdot I_2, \quad (5.4.5)$$

$$\Psi_{12} = M_{12} \cdot I_1. \quad (5.4.6)$$

Здесь коэффициенты  $M_{21}$  и  $M_{12}$  зависят от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости среды, в которой находятся контуры и называются *взаимной индуктивностью контуров*. Сравнение формул (5.4.5), (5.4.6) и (5.2.7) показывает, что взаимная индуктивность имеет ту же размерность, что и индуктивность – *генри* (Гн).

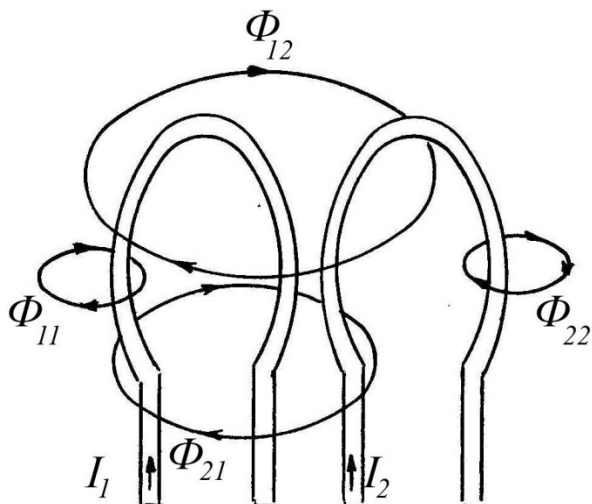


Рис.5.4.1

Из уравнения (5.4.3) следует:

$$\Psi_{21} = M_{21} \cdot \Phi_{21}. \quad (5.4.7)$$

Приравнивая правые части уравнений (5.4.5) и (5.4.7), выразим взаимную индуктивность:

$$M_{21} = \frac{w_1 \cdot \Phi_{21}}{I_2}. \quad (5.4.8)$$

Аналогичным образом, сравнение формул (5.4.4) и (5.4.6) позволяет выразить взаимную индуктивность:

$$M_{12} = \frac{w_2 \cdot \Phi_{12}}{I_1}. \quad (5.4.9)$$

Если контуры находятся в неферромагнитной среде, то их взаимные индуктивности одинаковы, то есть  $M_{21} = M_{12} = M$ .

Если контуры находятся в ферромагнитной среде, а токи в контурах не равны друг другу, то взаимные индуктивности контуров различаются.

Подстановка соотношений (5.4.3) и (5.4.4) полного потокосцепления в уравнение (5.1.10) закона электромагнитной индукции позволяет получить выражение полной ЭДС, индуцируемой в первом контуре:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1 \text{ полн.}} &= - \frac{d\psi_{1 \text{ полн.}}}{dt} = - \frac{d}{dt} (\psi_1 \pm \psi_{21}) = \\ &= -L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} \mp M_{21} \cdot \frac{dI_2}{dt} = \mathcal{E}_{1c} + \mathcal{E}_{1m} \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

и во втором контуре:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{2 \text{ полн.}} &= - \frac{d\psi_{2 \text{ полн.}}}{dt} = - \frac{d}{dt} (\psi_2 \pm \psi_{12}) = \\ &= -L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} \mp M_{12} \cdot \frac{dI_1}{dt} = \mathcal{E}_{2c} + \mathcal{E}_{2m}. \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Таким образом, электродвижущие силы взаимной индукции в первом и во втором контурах равны соответственно:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{1m} = \mp M_{21} \cdot \frac{dI_2}{dt}; \\ \mathcal{E}_{2m} = \mp M_{12} \cdot \frac{dI_1}{dt}. \end{cases} \quad (5.4.12)$$

В уравнениях системы (5.4.12) знак «минус» соответствует *согласному* направлению магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции, а знак «плюс» - *встречному* направлению.

## 5.5. Полярности индуктивно связанных катушек

Рассмотрим индуктивно связанные катушки, расположенные на одном магнитопроводе (рис. 5.5.1.а). Здесь с учётом направления намотки витков выбраны такие направления токов  $I_1$  и  $I_2$ , при которых направления магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции совпадают. Таким образом, рис. 5.5.1.а,б иллюстрируют согласное направление токов.

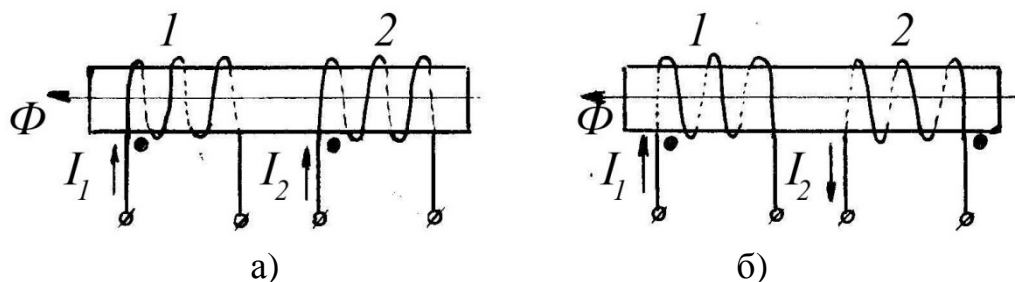


Рис.5.5.1

При согласном направлении токов  $I_1$  и  $I_2$  в двух индуктивно связанных катушках *выводы этих катушек, относительно которых токи  $I_1$  и  $I_2$  направлены одинаково, называются **однополярными** или **одноимёнными** выводами*. Каждая пара однополярных выводов обозначается одинаковыми символами, например, точками (рис. 5.5.1). Два других вывода составляют вторую пару однополярных выводов. Из сказанного следует *первое свойство* индуктивно связанных катушек: *при одинаковом направлении токов относительно одноимённых выводов магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке складываются*.

Использование понятия однополярных выводов исключает необходимость показывать направление намотки индуктивно связанных катушек.

Для доказательства второго свойства индуктивно связанных катушек предположим, что сила тока  $I_1$  через первую катушку возрастает, то есть  $\frac{dI_1}{dt} > 0$ . Если катушки соединены согласно, то в соответствии с уравнениями системы (5.4.12) можно записать  $\mathcal{E}_{2M} = \mp M_{12} \cdot \frac{dI_1}{dt} < 0$ , так как  $\frac{dI_1}{dt} > 0$ . Следовательно, потенциал вывода второй катушки, одноимённого с тем, в который входит ток  $I_1$  первой катушки, оказывается выше другого потенциала второй катушки.

Отсюда следует *второе свойство* индуктивно связанных катушек: *подведение к выводу катушки возрастающего тока вызывает повышение потенциала на одноимённом выводе индуктивно связанной катушки*.

Второе свойство используют для определения одноимённых выводов индуктивно

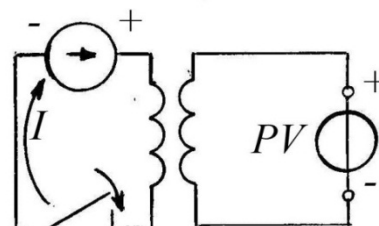


Рис.5.5.2

связанных катушек. Для этого одна из катушек включается в цепь источника постоянного напряжения (рис. 5.5.2). Если в момент замыкания цепи источника стрелка вольтметра отклонится в сторону положительных значений напряжения, то выводы индуктивно связанных катушек, подключённые к одноимённым полюсам источника ЭДС и вольтметра, являются однополярными.

Рассмотрим последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек (рис. 5.5.3). При согласном направлении токов (рис. 5.5.3.а) ЭДС взаимной индукции катушек равны  $\mathcal{E}_{1M} = -M \cdot \frac{dI_2}{dt}$ ,  $\mathcal{E}_{2M} = -M \cdot \frac{dI_1}{dt}$ , и при обходе контура могут быть заменены напряжениями  $U_{1M} = -\mathcal{E}_{1M}$  и  $U_{2M} = -\mathcal{E}_{2M}$ . Тогда суммарное напряжение на участке 1-2 при согласном включении катушек (рис. 5.5.3.а) равно:

$$U_{\text{сog.}} = \left( R_1 \cdot I_1 + L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} + M \cdot \frac{dI_2}{dt} \right) + \left( R_2 \cdot I_2 + L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} + M \cdot \frac{dI_1}{dt} \right),$$

но поскольку катушки соединены последовательно, токи одинаковы  $I_1 = I_2 = I$  и последнее выражение преобразуется к виду:

$$U_{\text{сog.}} = (R_1 + R_2) \cdot I + (L_1 + L_2 + 2 \cdot M) \cdot \frac{dI}{dt}. \quad (5.5.1)$$

Из уравнения (5.5.1) следует, что две индуктивно связанные катушки, соединённые последовательно, при согласном направлении токов эквивалентны катушке, имеющей активное сопротивление  $R_1 + R_2$  и индуктивность  $L_1 + L_2 + 2 \cdot M$ . Таким образом, наличие взаимной индуктивности при согласном направлении токов в катушках, соединённых последовательно, увеличивает индуктивность цепи.

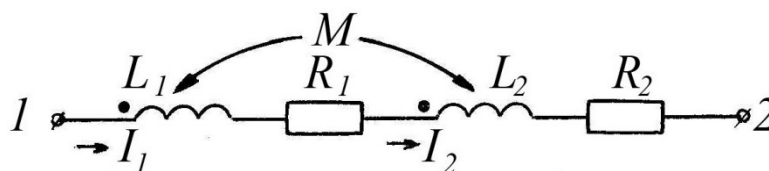


Рис.5.5.3.а

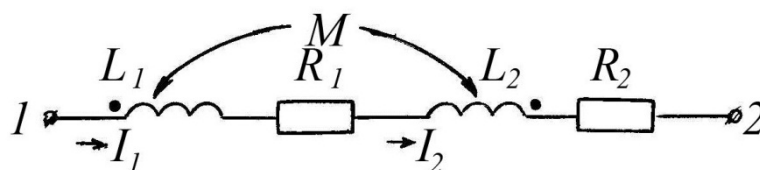


Рис.5.5.3.б

При встречном направлении токов (рис. 5.5.3.б) напряжение на участке 1-2 равно:

$$U_{\text{ВСТР.}} = \left( R_1 \cdot I_1 + L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} - M \cdot \frac{dI_2}{dt} \right) + \left( R_2 \cdot I_2 + L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} - M \cdot \frac{dI_1}{dt} \right),$$

или

$$U_{\text{ВСТР.}} = (R_1 + R_2) \cdot I + (L_1 + L_2 - 2 \cdot M) \cdot \frac{dI}{dt}. \quad (5.5.2)$$

Из выражения (5.5.2) можно сделать следующий вывод: *две индуктивно связанные катушки, соединённые последовательно, при встречном направлении токов эквивалентны катушке, имеющей активное сопротивление  $R_1 + R_2$ , и индуктивность  $L_1 + L_2 - 2 \cdot M$ .*

Следовательно, наличие взаимной индуктивности, при встречном направлении токов в катушках, соединённых последовательно, уменьшает индуктивность электрической цепи.

## 5.6. Принцип электромагнитной инерции

Рассмотрим замкнутый проводящий контур, расположенный в изменяющемся магнитном поле индукцией  $B$  (рис. 5.6.1). Изменение потокосцепления взаимной индукции  $\psi_M$  обусловит возникновение в контуре ЭДС взаимной индукции  $E_M$ , которая вызовет в контуре изменяющийся со временем ток.

Изменение силы тока приведёт к формированию магнитного потока самоиндукции  $\Phi_S$ , индуцирующего в контуре ЭДС самоиндукции  $E_C$ . Тогда второй закон Кирхгофа для рассматриваемого контура запишется в виде:

$$R \cdot I = E_C + E_M. \quad (5.6.1)$$

Здесь  $R$  – сопротивление контура,  $I$  – сила тока в контуре, вызванного ЭДС индукции.

Если контур изготовлен из сверхпроводящего материала ( $R=0$ ), то левая часть уравнения (5.6.1) обратится в ноль:  $0 = E_C + E_M$ , или, выражая

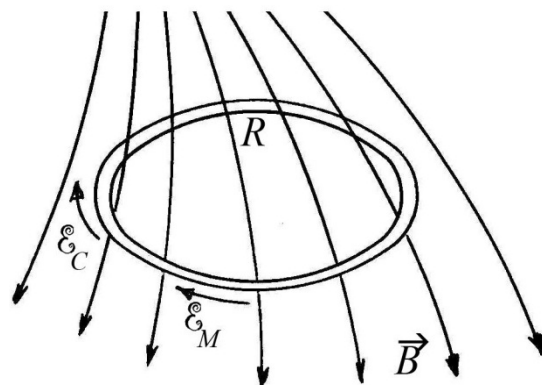


Рис.5.6.1

электродвижущие силы через соответствующие потокоцепления, получим:

$$\frac{d\psi_C}{dt} + \frac{d\psi_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\psi_C + \psi_M) = \frac{d\psi}{dt} = 0. \quad (5.6.2)$$

Равенство нулю производной от суммарного потокоцепления  $\psi$  по времени приводит к выводу о том, что *потокоцепление сверхпроводящего контура не изменяется со временем*. Данное утверждение называется *принципом электромагнитной инерции*.

Принцип электромагнитной инерции экспериментально подтверждён в 1915 году русским физиком В.К. Аркадьевым. В опыте Аркадьева свинцовое кольцо помещалось в магнитное поле между полюсами электромагнита, где фиксировалось его потокоцепление (рис. 5.6.2.а).

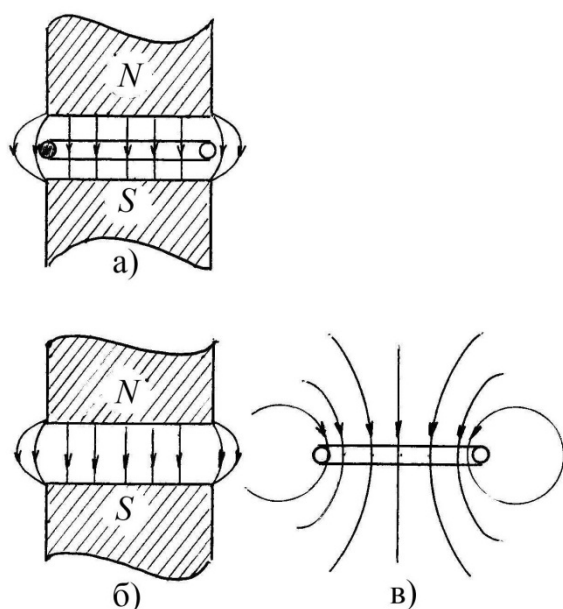


Рис.5.6.2

Затем кольцо охлаждалось настолько, чтобы свинец перешёл в сверхпроводящее состояние. После этого кольцо выносили за пределы поля электромагнита (рис. 5.6.2.б, в). При этом оказалось, что потокоцепление кольца не только не исчезло, но даже не изменилось. Вокруг кольца образовалось собственное магнитное поле (рис. 5.6.2.в) и потокоцепление кольца в течение длительного времени оставалось таким, каким оно было в момент нахождения кольца между полюсами электромагнита (рис. 5.6.2.а).

Очевидно, что во время удаления кольца из поля электромагнита возникает тенденция к уменьшению потокоцепления взаимной индукции  $\psi_M$ . Это вызывает возникновение в контуре электродвижущей силы самоиндукции и появление магнитного потока самоиндукции  $\psi_C$  наряду с уменьшением магнитного потока взаимной индукции  $\psi_M$ . В дальнейшем, по мере удаления кольца из магнитного поля электромагнита, происходит замена убывающего потокоцепления взаимной индукции потокоцеплением самоиндукции. Причём сумма этих потокоцеплений остаётся неизменной и равной исходному потокоцеплению кольца, то есть:

$$\psi_C + \psi_M = \psi = const. \quad (5.6.3)$$

Проявление электромагнитной инерции в реальных электрических контурах с отличным от нуля сопротивлением ( $R \neq 0$ ) отличается от рассмотренного теоретического примера тем, что потокосцепление не является постоянным, но стремится к постоянству. С уменьшением сопротивления контура усиливается тенденция постоянства потокосцепления.

На явлении электромагнитной инерции основана работа реле замедленного действия. Конструкция такого реле показана на рис. 5.6.3.

При включении реле, то есть при пропускании электрического тока по обмотке, содержащей  $w$  витков, в магнитопроводе возникает магнитный поток  $\Phi$ , вызывающий притяжение якоря  $Я$  к стержню  $С$  магнитопровода.

При выключении электрического тока магнитный поток  $\Phi$  исчезает, и якорь  $Я$  возвращается пружиной  $П$  в исходное положение.

Для замедления процесса отключения реле, то есть увеличения промежутка времени между моментами выключения тока и возвращения якоря в исходное положение, на стержень  $С$  надевают свинцовую или медную

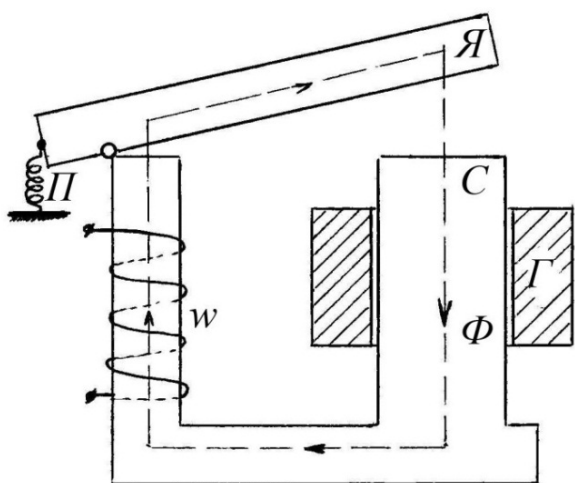


Рис.5.6.3

гильзу  $Г$ . Гильза представляет собой замкнутый контур с малым электрическим сопротивлением. При включении электрического тока магнитный поток сцепляется с гильзой. После выключения электрического тока магнитный поток уменьшается, индуцируя в гильзе электрический ток, стремящийся сохранить неизменным магнитный поток. Поскольку гильза  $Г$  имеет небольшое электрическое сопротивление, уменьшение магнитного потока происходит относительно мед-

ленно. Поэтому некоторое время якорь ещё удерживается в прежнем состоянии, то есть притянут к стержню  $С$ . Таким способом достигается запаздывание процесса возвращения якоря после выключения тока в обмотке.

Явление электромагнитной инерции наблюдается во многих электротехнических устройствах, причём в большинстве случаев оно оказывает негативное влияние на их параметры.

## Глава VI. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### 6.1. Основные параметры синусоидального тока

**Переменным током** называется электрический ток  $i(t)$ , изменяющийся со временем.

Переменный ток, для которого справедливо равенство  $i(t+T)=i(t)$ , называется **периодическим током**. Здесь  $T=const$  – период переменного тока. Величина  $f = \frac{1}{T}$ , обратная периоду, называется **частотой** переменного тока. Единица измерения частоты – герц [ $Гц=c^{-1}$ ]. В России и в Европе принята стандартная частота переменного тока, равная 50 Гц. В США стандартная частота переменного тока равна 60 Гц.

Величина  $\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = 2\cdot\pi\cdot f$  называется **круговой**, или **циклической** частотой и измеряется в [ $рад/с$ ].

Величина переменного тока в данный момент времени называется **мгновенным значением**  $i(t)$  переменного тока.

Наиболее распространённым переменным током является гармонический, или синусоидальный, электрический ток.

**Гармоническим**, или **синусоидальным**, называется переменный ток, мгновенное значение которого описывается уравнением:

$$i(t) = I_m \cdot \sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T} \cdot t + \psi_i\right) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i). \quad (6.1.1)$$

Здесь  $I_m$  – максимальное значение (амплитуда) переменного тока, аргумент синуса  $(\omega \cdot t + \psi_i)$  – фаза переменного тока,  $\psi_i$  – начальная фаза. Фаза характеризует состояние колебания в данный момент времени. За промежуток времени  $t$ , равный периоду ( $t=T$ ), фаза увеличивается на  $2\cdot\pi$  радиан, или на  $360^\circ$ . Начальная фаза считается положительной ( $\psi_i > 0$ ), если она отложена от нуля в сторону, противоположную оси  $\omega \cdot t$  (рис. 6.1.1). Начальная фаза отрицательна, если она отложена от нуля в направлении оси  $\omega \cdot t$  (рис. 6.1.2).

Подобно электрическому току, синусоидальное напряжение описывается уравнением:

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u). \quad (6.1.2)$$

Здесь  $U_m$  – амплитуда напряжения,  $\psi_u$  – начальная фаза напряжения (рис. 6.1.1).

Величина

$$\varphi = \psi_u - \psi_i \quad (6.1.3)$$

называется разностью фаз между напряжением и током. При положительной разности фаз ток отстаёт от напряжения (рис. 6.1.1). При отрицательной разности фаз ток опережает напряжение.

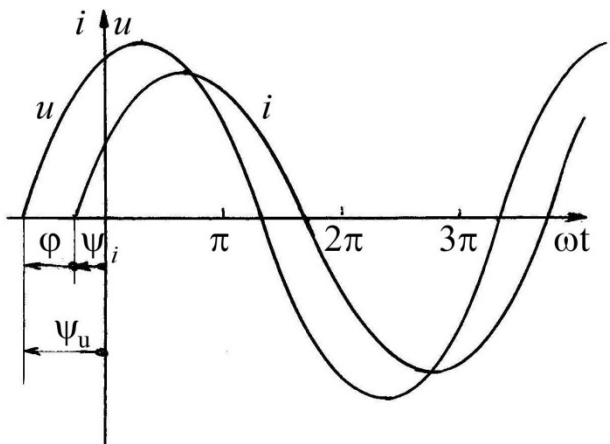


Рис.6.1.1

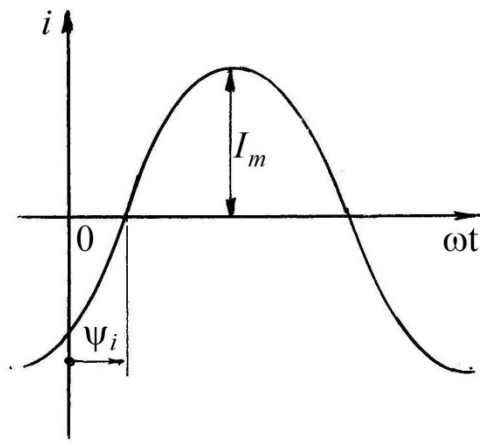


Рис.6.1.2

На графиках разность фаз всегда откладывают от начала синусоиды тока к началу синусоиды напряжения (рис. 6.1.1). Причём, как и начальные фазы, положительные значения  $\varphi$  откладывают в направлении, противоположном оси  $\omega \cdot t$ , а отрицательные – в направлении оси  $\omega \cdot t$ .

Величину гармонического напряжения и тока характеризуют их средними и действующими значениями.

**Средним значением** синусоидально изменяющейся величины называется её среднее значение за половину периода. Например, среднее значение синусоидального тока равно:

$$I_{CP} = \frac{1}{T/2} \cdot \int_0^{T/2} i(t) \cdot dt. \quad (6.1.4)$$

Подстановка в данное выражение формулы (6.1.1) в предположении, что начальная фаза тока равна нулю ( $\psi_i=0$ ), позволяет выразить среднее значение синусоидального тока:

$$I_{CP} = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot dt = \frac{2 \cdot I_m}{T \cdot \omega} [-\cos(\omega \cdot t)]_0^{\pi} = \frac{4 \cdot I_m}{T \cdot \omega}.$$

Учитывая, что  $T \cdot \omega = 2 \cdot \pi$ , из последнего уравнения определим среднее значение синусоидального тока:

$$I_{CP} = \frac{2 \cdot I_m}{\pi} = 0,638 \cdot I_m. \quad (6.1.5)$$

Рассуждая аналогично, выразим среднее значение синусоидального напряжения:  $U_{CP} = 0,638 \cdot U_m$ .

**Действующее** значение синусоидального тока равно его среднеквадратичному значению за период:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2(\omega t) \cdot d(\omega t)} =$$

$$= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m. \quad (6.1.6)$$

Рассуждая аналогично, получим:  $U=0,707 \cdot U_m$ .

Действующее значение переменного тока равно такому значению постоянного тока, который за время, равное периоду синусоидального тока, выделяет в нагрузке такое же количество тепла, что и переменный ток.

Большинство электроизмерительных приборов позволяет определять действующее значение измеряемой величины. Действующее, среднее и амплитудное значение периодического сигнала связаны коэффициентами формы и амплитуды.

Коэффициентом формы называется отношение действующего значения периодически изменяющейся функции к её среднему значению. Для синусоидального тока коэффициент формы равен:

$$K_{\Phi} = \frac{I}{I_{CP}} = \frac{I_m/\sqrt{2}}{2 \cdot I_m/\pi} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1,11.$$

Коэффициентом амплитуды называется отношение амплитуды периодически изменяющейся функции к её действующему значению. Для синусоидального тока коэффициент амплитуды равен:

$$K_A = \frac{I_m}{I} = \frac{I_m}{I_m/\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1,41.$$

## 6.2. Векторная диаграмма

На рис. 6.2.1 изображён вектор  $\vec{I}_m$ , расположенный под углом  $\psi_i$  к оси абсцисс.

Приведём этот вектор во вращение против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . За промежуток времени  $t$  вектор  $\vec{I}_m$  повернётся на угол  $\omega \cdot t$ , и проекция этого вектора на ось ординат будет равна  $I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i)$  (рис. 6.2.1). Следовательно, зависимость от времени проекции вектора  $\vec{I}_m$  на ось ординат описывается синусоидальной функцией.

Верно и обратное утверждение: синусоидальную функцию можно представить вращающимся вектором, называемым векторным изображением синусоидальной функции.

*Совокупность векторов, изображающих синусоидальные ЭДС, напряжения и токи одной частоты, называется векторной диаграммой.*

При построении векторных диаграмм фазы векторов принимают равными начальной фазе (для  $t=0$ ). Начальные фазы синусоидальных функций при построении изображающих их векторов откладывают от оси абсцисс к соответствующему вектору, а разность фаз напряжения и тока отсчитывают от вектора тока к вектору напряжения. Положительные значения отмеченных углов откладывают против часовой стрелки, а отрицательные – по часовой стрелке. Например, векторная диаграмма синусоид напряжения и тока, изображённых на рис. 6.1.1, показана на рис. 6.2.2.

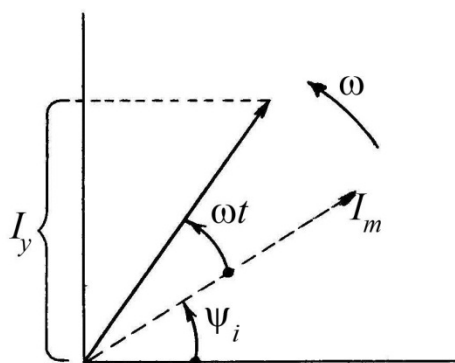


Рис.6.2.1

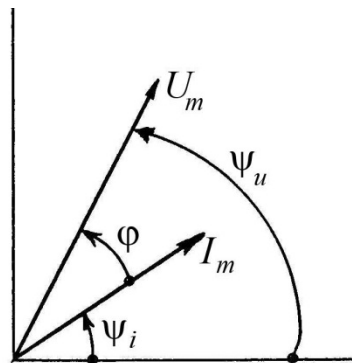


Рис.6.2.2

Применение векторных диаграмм делает расчёт электрических цепей более простым и наглядным, поскольку позволяет заменить громоздкие и сложные операции над синусоидами действиями над соответствующими векторами.

### 6.3. Идеальные элементы в электрической цепи синусоидального тока

#### А. Понятие идеального элемента

Все пассивные элементы в электрических цепях переменного тока можно разделить на три вида:

- 1) *резистивные элементы*, в которых происходит преобразование электрической энергии в тепло или в другие виды энергии;
- 2) *индуктивные элементы*, в которых накапливается энергия магнитного поля;
- 3) *ёмкостные элементы*, являющиеся носителями электрического поля.

*Элемент электрической цепи называется **идеальным**, если его можно характеризовать одним параметром:*

- 1) резистор – сопротивлением  $R$ ,
- 2) катушку – индуктивностью  $L$ ,
- 3) конденсатор – ёмкостью  $C$ .

Таким образом, в идеальном резисторе пренебрегают его индуктивностью и ёмкостью, в идеальной катушке – сопротивлением обмоток и ём-

костью между витками, в идеальном конденсаторе – потерями энергии в диэлектрике и индуктивностью обкладок.

В электрических цепях переменного тока катушку и конденсатор принято объединять в группу реактивных элементов. В противоположность этому термину резистор называют активным элементом цепи переменного тока, не вкладывая в этот термин смысла источника энергии.

#### Б. Активное сопротивление в электрической цепи синусоидального тока

Если к источнику синусоидальной ЭДС  $e(t) = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_E)$  подключить идеальный резистор с сопротивлением  $R$ , то после замыкания ключа  $SA$  (рис. 6.3.1.а) ток в резисторе можно определить по закону Ома:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u). \quad (6.3.1)$$

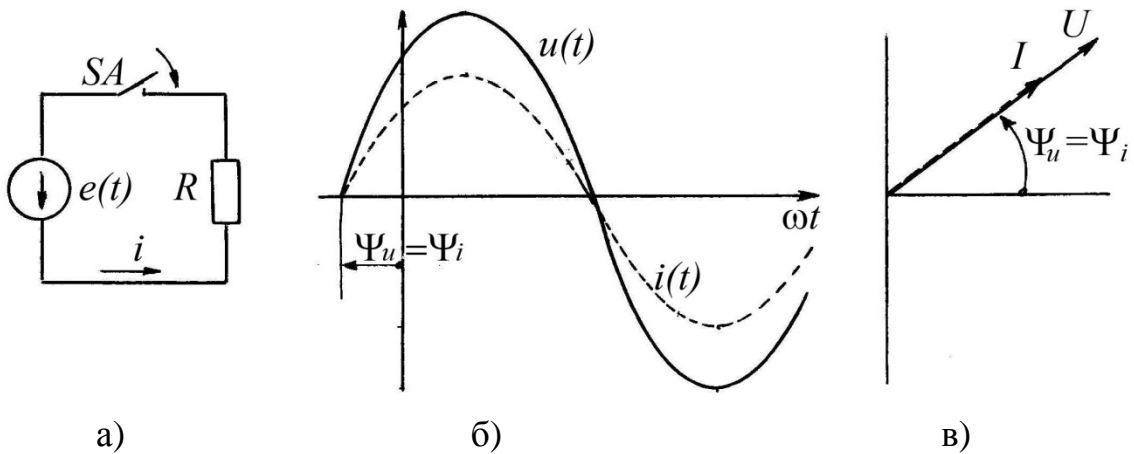


Рис.6.3.1

Сравнение уравнений (6.1.1) и (6.3.1) показывает, что  $I_m = \frac{U_m}{R}$ ;  $\psi_u = \psi_i$ . Следовательно, в идеальном резисторе сдвиг фаз между напряжением и током равен нулю ( $\varphi=0$ ) (рис. 6.3.1.б, в).

#### В. Идеальная катушка в электрической цепи синусоидального тока

Пусть через катушку с индуктивностью  $L$  с пренебрежимо малыми значениями сопротивления и ёмкости течёт синусоидальный ток  $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i)$  (рис.6.3.2.а). Протекание через индуктивность переменного тока приводит к возникновению ЭДС самоиндукции:

$$e(t) = -L \cdot \frac{di}{dt} = -L \cdot \frac{d}{dt} I_m \cdot [\sin(\omega \cdot t + \psi_i)] = -\omega \cdot L \cdot I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_i).$$

Используя формулы приведения, представим ЭДС индукции в виде функции синуса:

$$e(t) = -\omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right).$$

Напряжение на индуктивной катушке равно:

$$u_L(t) = -e(t) = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.3.2)$$

Сравнение уравнений (6.1.2) и (6.3.2) показывает, что  $U_m = \omega \cdot L \cdot I_m$  и  $\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}$ . Таким образом, в идеальной катушке напряжение опережает ток на угол  $\frac{\pi}{2}$ , то есть  $\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}$ , что показано на рис. 6.3.2.б,в.

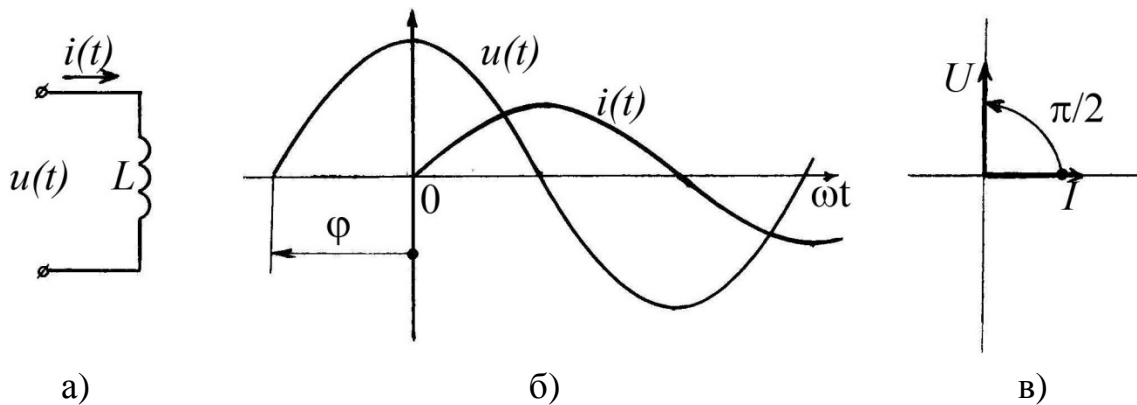


Рис.6.3.2

Величина  $x_L = \omega \cdot L$  называется индуктивным сопротивлением и имеет размерность Ом.

#### Г. Идеальный конденсатор в электрической цепи синусоидального тока

Пусть идеальный конденсатор ёмкостью  $C$  в момент времени  $t=0$  подключается к источнику синусоидальной ЭДС  $e(t)$  (рис. 6.3.3.а).

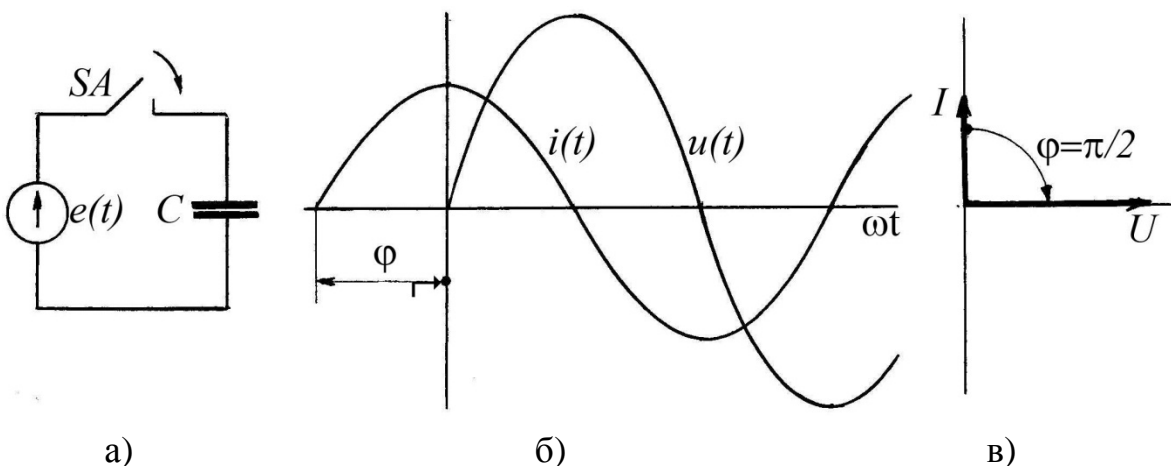


Рис.6.3.3

Мгновенное значение напряжения на конденсаторе изменяется по гармоническому закону:  $u_C(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u)$  (рис. 6.3.3.б).

Поскольку ток и напряжение конденсатора связаны соотношением  $i_C(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ , ток в конденсаторе изменяется по следующему закону:

$$i_c(t) = C \cdot \frac{du_c}{dt} = C \cdot U_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_u).$$

С учётом формулы приведения данное соотношение преобразуется к виду:

$$i_c(t) = C \cdot U_m \cdot \omega \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.3.3)$$

Сравнение уравнений (6.3.3) и (6.1.1) позволяет сделать вывод о том, что амплитуда тока в конденсаторе равна  $I_m = \omega \cdot C \cdot U_m = \frac{U_m}{x_C}$ , где  $x_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$  – величина, имеющая размерность сопротивления и называемая ёмкостным сопротивлением,  $\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}$ . Следовательно, в идеальном конденсаторе напряжение отстаёт по фазе от тока на угол  $\frac{\pi}{2}$ , то есть фазовый сдвиг между напряжением и током в конденсаторе:  $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}$  (рис. 6.3.3.б, в).

#### 6.4. Анализ электрической цепи *RLC*

Электрическая цепь, состоящая из соединённых последовательно идеальных резистора, катушки и конденсатора, называется ***RLC – цепью*** (рис. 6.4.1).

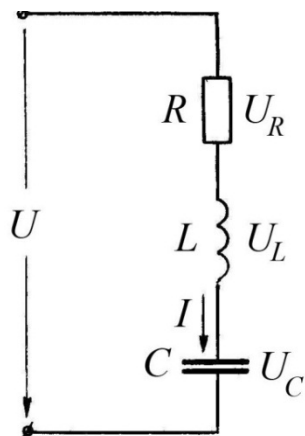


Рис.6.4.1

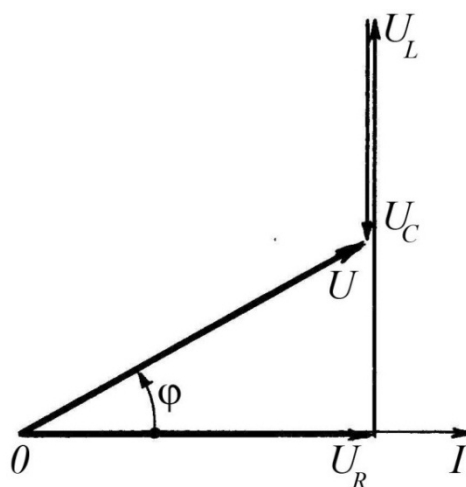


Рис.6.4.2

Пусть в *RLC* – цепи течёт синусоидальный ток. Определим напряжение на её зажимах.

Поскольку при синусоидальном токе напряжения на идеальных элементах цепи также изменяются по синусоидальному закону, то алгебраическую сумму мгновенных значений напряжения  $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$  можно заменить геометрическим суммированием амплитудных или действующих значений напряжений:

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C. \quad (6.4.1)$$

Если положить начальную фазу тока равной нулю ( $\psi_i = 0$ ), вектор тока  $\vec{I}$  на диаграмме расположится горизонтально (рис. 6.4.2). Вектор напряжения на резисторе  $\vec{U}_R$  совпадает по направлению с вектором тока, а его длина в соответствующем масштабе равна:  $U_R = I \cdot R$ .

Вектор напряжения на катушке, модуль которого определяется выражением  $U_L = I \cdot x_L$ , опережает вектор тока на  $90^\circ$  (рис. 6.4.2). Геометрическая сумма векторов  $\vec{U}_R$ ,  $\vec{U}_L$  и  $\vec{U}_C$  равна вектору питающего напряжения  $\vec{U}$  (6.4.1), модуль которого можно рассчитать как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами  $U_R$  и  $U_L - U_C$ :

$$U = \sqrt{R^2 + \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2}. \quad (6.4.2)$$

Разность фаз напряжения и тока всей  $RLC$  – цепи в целом определяется из того же треугольника:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}. \quad (6.4.3)$$

Таким образом, в общем случае напряжение и ток в электрической цепи сдвинуты друг относительно друга по фазе на угол  $\varphi$  (рис. 6.4.3).

Проекция вектора напряжения на вектор тока  $U_a$  называется **активным напряжением** (рис. 6.4.3).

Проекция вектора напряжения на направление, перпендикулярное вектору тока  $U_p$ , называется **реактивным напряжением** (рис. 6.4.3).

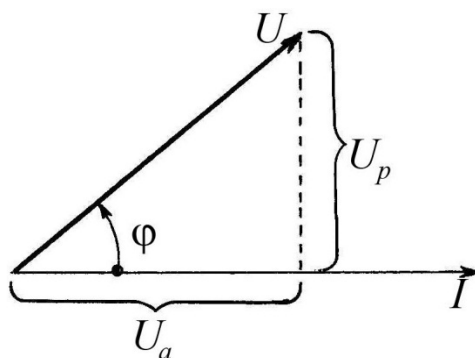


Рис.6.4.3

Прямоугольный треугольник со сторонами  $U$ ,  $U_a$  и  $U_p$  называется **треугольником напряжений**.

Из треугольника напряжений следует ряд соотношений, необходимых для расчёта электрических цепей переменного тока:

$$\begin{cases} U_a = U \cdot \cos \varphi, \\ U_p = U \cdot \sin \varphi, \\ U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{U_p}{U_a}. \end{cases} \quad (6.4.4)$$

Разложение полного напряжения на активную и реактивную составляющую представляет собой формальную операцию, поэтому в общем случае не следует искать физический смысл этих составляющих. Однако сопоставление векторных диаграмм, представленных на рис. 6.4.2 и рис. 6.4.3 для  $RLC$  – цепи, позволяет установить, что *активное напряжение в  $RLC$  – цепи является напряжением на активном сопротивлении  $R$ :  $U_a = U_p = I \cdot R$ , реактивное напряжение цепи  $RLC$  равно арифметической разности напряжений на катушке и конденсаторе:  $U_p = U_L - U_C = I \cdot (x_L - x_C)$ .*

Характер цепи -  $RLC$  зависит от того, какое из реактивных сопротивлений больше: индуктивное или ёмкостное.

Если  $x_L > x_C$ , то  $\varphi > 0$ , то есть электрическая цепь имеет *индуктивный характер* (рис. 6.4.2).

Если  $x_L < x_C$ , то  $\varphi < 0$ , то есть электрическая цепь имеет *ёмкостный характер*.

Сила тока и напряжение на зажимах электрической цепи связаны соотношением:  $U = Z \cdot I$ , где коэффициент пропорциональности  $Z$ , имеющий размерность сопротивления, называется *полным электрическим сопротивлением цепи*. Пропорциональны силе тока и составляющие полного напряжения:

$$U_a = r \cdot I, \quad (6.4.5)$$

$$U_p = x \cdot I. \quad (6.4.6)$$

Здесь  $r$  – активное сопротивление,  $x$  – реактивное сопротивление. Сравнение уравнений (6.4.4), (6.4.5) и (6.4.6) показывает, что активное сопротивление электрической цепи  $RLC$  равно активному сопротивлению:

$$r = R, \quad (6.4.7)$$

реактивное сопротивление равно разности индуктивного сопротивления катушки и ёмкостного сопротивления конденсатора:

$$x = x_L - x_C = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}. \quad (6.4.8)$$

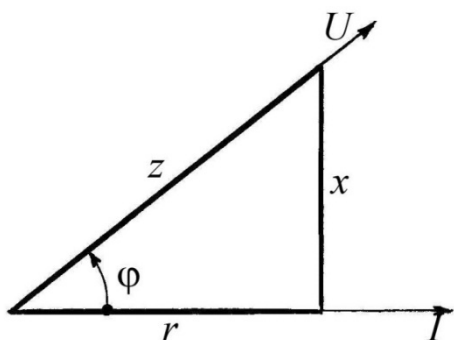


Рис.6.4.4

Разделив параметры  $U$ ,  $U_a$  и  $U_p$  треугольника напряжений (рис. 6.4.3) на силу тока  $I$ , получим треугольник (рис. 6.4.4), подобный треугольнику напряжений, стороны которого равны соответственно  $Z$ ,  $r$  и  $x$ . Стороны и угол  $\varphi$  этого треугольника, называемого *треугольником сопротивлений*, связаны соотношениями:

$$\begin{cases} r = z \cdot \cos\varphi, \\ x = z \cdot \sin\varphi, \\ z = \sqrt{x^2 + r^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{r}. \end{cases} \quad (6.4.9)$$

### 6.5. Анализ электрической цепи GLC

Электрическая цепь, состоящая из соединённых параллельно резистора с проводимостью  $G = \frac{1}{R}$ , индуктивной катушки и конденсатора, называется **цепью – GLC** (рис. 6.5.1). Если на вход цепи – GLC подано синусоидальное напряжение, то векторы действующих значений токов в ветвях цепи согласно первому закону Кирхгофа связаны соотношением:

$$\vec{I} = \vec{I}_G + \vec{I}_L + \vec{I}_C. \quad (6.5.1)$$

Полагая начальную фазу входного напряжения равной нулю ( $\psi_u=0$ ), вектор входного напряжения  $\vec{U}$  располагаем на диаграмме горизонтально (рис. 6.5.2). Вектор тока в резисторе равен  $I_G = \frac{U}{R} = G \cdot U$  и совпадает по фазе с напряжением, поэтому располагается вдоль вектора напряжения  $\vec{U}$ .

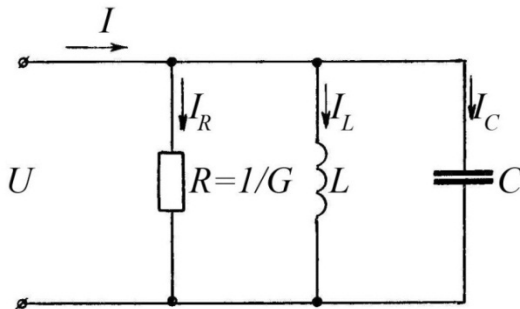


Рис.6.5.1

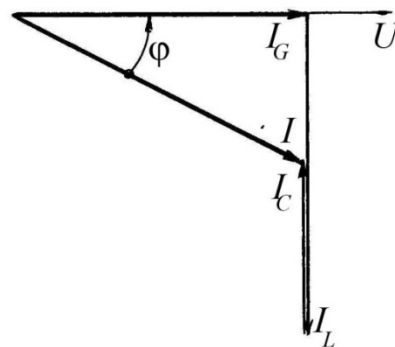


Рис.6.5.2

Вектор тока в катушке отстаёт по фазе от вектора напряжения на угол  $90^\circ$ . Модуль вектора силы тока в индуктивной катушке равен:

$$I_L = \frac{U}{x_L} = U \cdot b_L. \quad (6.5.2)$$

Здесь

$$b_L = \frac{1}{x_L} = \frac{1}{\omega \cdot L}$$

– индуктивная проводимость, единицей измерения индуктивной проводимости является  $\text{Ом}^{-1} = \text{См}$  (Сименс).

Вектор тока в конденсаторе опережает вектор напряжения на угол  $90^\circ$ . Модуль вектора силы тока в конденсаторе равен:

$$I_C = \frac{U}{x_C} = U \cdot b_C, \quad (6.5.3)$$

где

$$b_C = \frac{1}{x_C} = \omega \cdot C$$

– ёмкостная проводимость.

Геометрическая сумма векторов (6.5.1) равна вектору силы тока в неразветвленной части электрической цепи  $GLC$ , модуль которого можно определить как гипотенузу прямоугольного треугольника (6.5.2) с катетами  $I_G$  и  $I_L - I_C$ :

$$I = U \cdot \sqrt{G^2 + \left( \frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C \right)^2}. \quad (6.5.4)$$

Разность фаз напряжения и тока в неразветвленной части цепи  $GLC$  также определим из рассмотренного треугольника токов (рис.6.5.2):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_G} = \frac{\frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C}{G}. \quad (6.5.5)$$

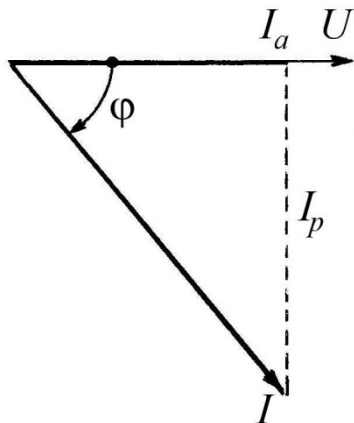


Рис.6.5.3

Разложим вектор тока  $\vec{I}$  на две составляющие: *активный ток*  $I_a$  – проекцию вектора тока на напряжение, и *реактивный ток*  $I_p$  – проекцию вектора тока на нормаль к вектору напряжения (рис. 6.5.3). Полученный треугольник (рис. 6.5.3) со сторонами  $I$ ,  $I_a$ ,  $I_p$  называется *треугольником токов*.

В линейных электрических цепях переменного тока сила тока и напряжение на входных зажимах цепи связаны соотношением:

$$I = y \cdot U. \quad (6.5.6)$$

Здесь коэффициент пропорциональности  $y$  называют *полной проводимостью электрической цепи*. Аналогичные соотношения можно записать и для составляющих полного тока:

$$\begin{cases} I_a = g \cdot U, \\ I_p = b \cdot U. \end{cases} \quad (6.5.7)$$

Здесь  $g$  – активная проводимость,  $b$  – реактивная проводимость.

Деление всех сторон треугольника токов (рис. 6.5.30) на напряжение с учётом соотношений (6.5.6) и (6.5.7) даёт новый треугольник, подобный

треугольнику токов. Стороны этого треугольника равны соответствующим проводимостям (рис. 6.5.4).

Стороны  $g$ ,  $b$  и  $y$ , а также угол  $\varphi$  этого треугольника, называемого *треугольником проводимостей*, связаны соотношениями:

$$\begin{cases} g = y \cdot \cos\varphi, \\ b = y \cdot \sin\varphi, \\ y = \sqrt{b^2 + g^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{g}. \end{cases} \quad (6.5.8)$$

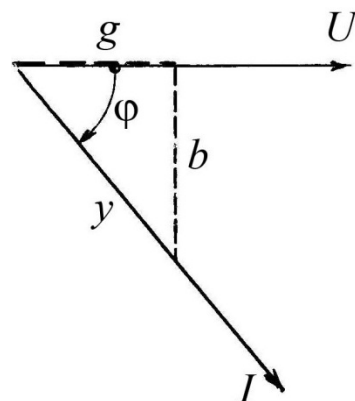


Рис.6.5.4

Сопоставление выражений  $U = Z \cdot I$  и (6.5.6) позволяет установить связь между полным сопротивлением  $Z$  и полной проводимостью  $y$  электрической цепи:

$$y = \frac{1}{Z}. \quad (6.5.9)$$

Активные и реактивные сопротивления и проводимости связаны соотношениями:

$$\begin{cases} g = y \cdot \cos\varphi = \frac{\cos\varphi}{Z}, \\ b = y \cdot \sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{Z}. \end{cases} \quad (6.5.10)$$

Сравнение формул (6.5.8) с соотношениями (6.4.9), полученными для треугольника сопротивлений, позволяет установить связь между активными, а также между реактивными сопротивлениями и проводимостями:

$$\begin{cases} g = \frac{r}{Z^2}, \\ b = \frac{x}{Z^2}. \end{cases}$$

## 6.6. Резонанс в цепи синусоидального тока

### А. Понятие резонанса

**Электрическим резонансом** называют явление в электрических цепях переменного тока, при котором, несмотря на наличие в этих цепях катушек и конденсаторов, ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе. Следовательно, при резонансе электрическая цепь, содержащая катушки и конденсаторы, ведёт себя как резистивная электрическая цепь. Фазовый сдвиг между током и напряжением на входе такой цепи равен нулю. Из выражений для фазового угла (6.4.9) и (6.5.8) ( $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{r}$  и  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{g}$ ) следует, что  $\operatorname{tg}\varphi=0$  при  $x=0$  или  $b=0$ . То есть резонанс в электрической це-

пи возможен только в том случае, когда её реактивное сопротивление или реактивная проводимость равна нулю. При этом полное сопротивление цепи  $Z$  и полная проводимость  $y$  равны соответственно её активному сопротивлению  $r$  и активной проводимости  $g$ :

$$z = \sqrt{r^2 + x^2} = r; y = \sqrt{g^2 + b^2} = g.$$

Электрический резонанс находит широкое применение во многих областях электротехники, начиная от мощных электрических систем и кончая слаботочными электрическими цепями автоматики и телемеханики. Исключительно большое значение имеет резонанс в радиотехнике, поскольку на его основе построена вся система избирательной связи.

Вместе с тем при непредвиденном возникновении резонансных явлений, которые приводят к резким изменениям режима работы электрических цепей, возможны серьёзные нарушения нормальной эксплуатации электротехнических установок.

*Электрические цепи переменного тока, в которых возможны резонансные явления, называются **резонансными цепями**.* Простейшие резонансные цепи содержат, по крайней мере, катушку и конденсатор. При последовательном соединении этих элементов электрическая цепь называется *последовательным резонансным контуром*. Поскольку практически в каждой из таких электрических цепей наблюдаются потери энергии, при рассмотрении резонансных явлений предполагается также наличие идеального резистора.

#### *Б. Резонанс в последовательной электрической цепи*

Условием резонанса в последовательной ( $RLC$ ) электрической цепи (рис. 6.6.1) является равенство нулю реактивного сопротивления ( $x=0$ ). В этом случае  $x = x_L - x_C = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} = 0$ , следовательно,  $\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}$ . Таким образом, при резонансе в последовательной электрической цепи индуктивное сопротивление катушки равно ёмкостному сопротивлению конденсатора. Из последнего равенства следует, что резонанс в цепи -  $RLC$  происходит при определённой частоте, называемой *резонансной частотой*, которая равна:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{или} \quad f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}. \quad (6.6.1)$$

Настройка электрической цепи в резонанс может быть осуществлена не только подбором частоты, но и индуктивности  $L_0$  и ёмкости  $C_0$ , которые равны:

$$L_0 = \frac{1}{\omega^2 \cdot C}, \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 \cdot L}. \quad (6.6.2)$$

Значения  $L_0$  и  $C_0$  называются соответственно резонансной индуктивностью и резонансной ёмкостью.

Построим векторную диаграмму напряжений цепи –  $RLC$ , в которой наблюдается резонанс. Произвольно выберем направление вектора тока  $I$  (рис. 6.62). Поскольку все элементы рассматриваемой резонансной цепи являются идеальными, напряжение  $U_L$  на катушке опережает ток  $I$  на  $90^\circ$ , напряжение  $U_R$  на резисторе совпадает по фазе с током, а напряжение на конденсаторе  $U_C$  отстает от тока на  $90^\circ$ .

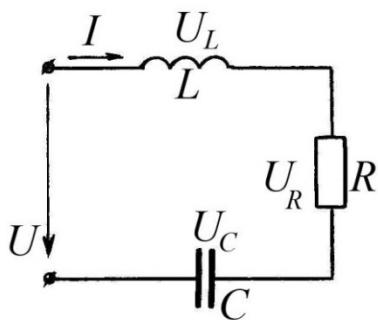


Рис.6.6.1

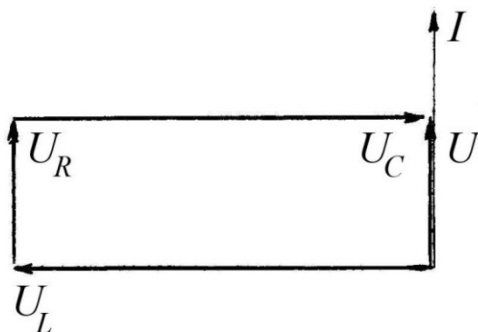


Рис.6.6.2

По определению резонанса в неразветвленной части электрической цепи напряжение совпадает по фазе с током, поэтому модуль напряжения на катушке при резонансе  $U_L = x_L \cdot I$  равен модулю резонансного напряжения на конденсаторе  $U_C = x_C \cdot I$ , а питающее напряжение равно напряжению на резисторе:  $U_R = R \cdot I$  (рис. 6.6.2). Если сопротивление резистора меньше индуктивного и ёмкостного сопротивления ( $R < x_L = x_C$ ), то напряжение на катушке  $U_L$  и конденсаторе  $U_C$  больше входного напряжения электрической цепи (рис. 6.6.2). Напряжение на катушке и конденсаторе может в десятки и даже в сотни раз превышать питающее напряжение, что является наиболее характерной особенностью при резонансе в последовательной цепи  $RLC$ , поэтому такой резонанс называется *резонансом напряжений*.

Индуктивное сопротивление  $x_{L0}$  включённой в контур катушки или ёмкостное сопротивление  $x_{C0}$  конденсатора при резонансе называется *характеристическим*, или *волновым сопротивлением* контура  $RLC$ :

$$\rho = x_\omega = \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C}. \quad (6.6.3)$$

Подстановка соотношения (6.6.3) в уравнение резонансной частоты (6.6.1) показывает, что волновое сопротивление является функцией параметров контура:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (6.6.4)$$

Отношение волнового сопротивления  $\rho$  контура к его активному сопротивлению  $R$  называется *добротностью*  $Q$  последовательного резонансного контура:

$$Q = \frac{\rho}{R}. \quad (6.6.5)$$

Анализ формул (6.6.3) и (6.6.4) показывает, что добротность контура равна отношению напряжения на катушке к напряжению на конденсаторе на входе электрической цепи при резонансе.

Величина, обратная добротности контура, называется затуханием резонансного контура.

В аппаратуре связи и автоматики большое значение имеют зависимости токов и напряжений в контурах от частоты, называемые резонансными кривыми. Резонансная кривая тока (рис. 6.6.3), отражающая зависимость тока в контуре от частоты приложенного к нему напряжения при условии его постоянства ( $U = \text{const}$ ), в соответствии с уравнением  $I = y \cdot U$  графически подобна частотной зависимости проводимости контура.

Полоса частот (вблизи резонансной частоты  $\omega_0$ ), на границах ( $\omega_1$  и  $\omega_2$ ) которой ток уменьшается до значения  $\sqrt{2}$  от резонансного значения тока, называется полосой пропускания (рис. 6.6.3). Полоса пропускания связана с добротностью контура и его затуханием соотношением:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = d. \quad (6.6.6)$$

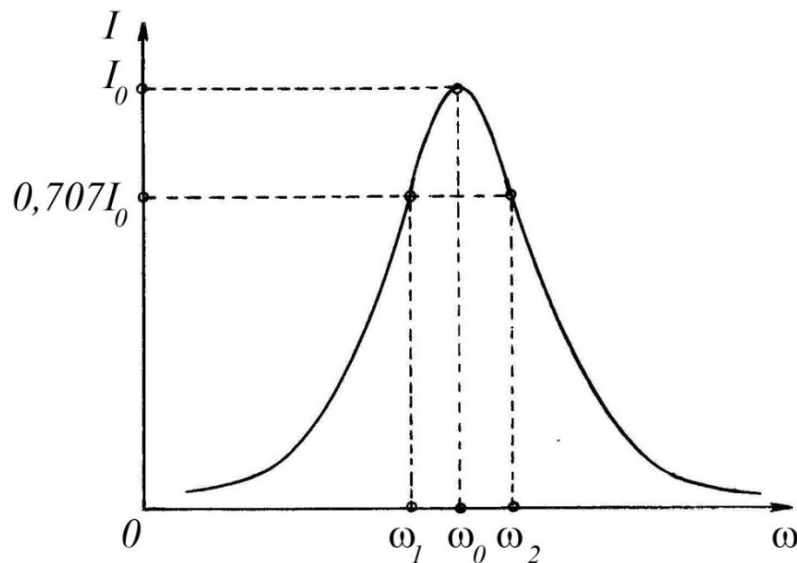


Рис.6.6.3

### В. Резонанс в параллельной электрической цепи

В электрической цепи  $GLC$  условием резонанса является равенство нулю реактивной проводимости цепи:  $b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C = 0$ , то есть

$$\frac{1}{\omega \cdot L} = \omega \cdot C$$

– при резонансе индуктивная и ёмкостная проводимости одинаковы. Резонансная частота параллельной электрической цепи равна:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \text{ или } f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}. \quad (6.6.7)$$

На рис. 6.6.4 приведена векторная диаграмма цепи  $GLC$  при резонансе. Произвольно выбрано направление вектора напряжения  $U$  на зажимах электрической цепи. Ток в катушке  $I_L$  отстаёт от напряжения по фазе на  $90^\circ$ . Ток в конденсаторе  $I_C$  опережает напряжение по фазе на  $90^\circ$  (рис. 6.6.4).

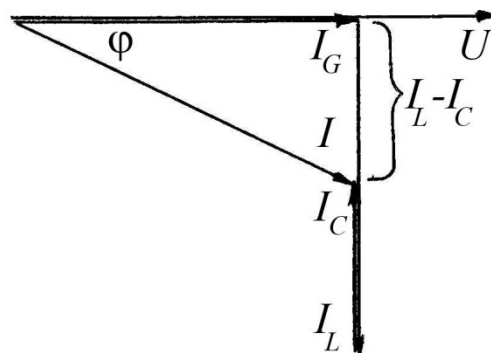


Рис.6.6.4

При резонансе ток в неразветвленной части цепи, равный векторной сумме токов в ветвях цепи, совпадает по фазе с напряжением на зажимах цепи и равен по модулю току в резисторе с проводимостью  $G$ . Поэтому, если проводимость резистора меньше проводимости катушки и конденсатора ( $G < b_L = b_C$ ), токи в катушке и в конденсаторе превышают ток в неразветвленной части цепи (рис. 6.6.5). При резонансе  $b_L = b_C \gg G$ , а следовательно, и токи в катушке и в конденсаторе могут в десятки и даже в сотни раз превышать ток в неразветвленной части цепи, поэтому резонанс в параллельной электрической цепи называют *резонансом токов*.

*Индуктивная проводимость  $b_L$  катушки, включённой в цепь  $GLC$ , или ёмкостная проводимость  $b_C$  конденсатора контура при резонансе называется **характеристической**, или **волновой**, проводимостью параллельного контура:*

$$\gamma = b_{L0} = b_{C0} = \frac{1}{\omega_0 \cdot L} = \omega_0 \cdot C. \quad (6.6.8)$$

Подстановка в равенство (6.6.8) выражения резонансной частоты (6.6.7) позволяет установить зависимость волновой проводимости от параметров элементов контура:

$$\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (6.6.9)$$

Понятия «характеристическая проводимость» (6.6.9) и «волновое сопротивление» (6.6.4) несопоставимы, поскольку характеристическая проводимость описывает параллельную цепь, а волновое сопротивление характеризует последовательный колебательный контур.

Отношение характеристической проводимости к активной проводимости параллельной цепи называется добротностью параллельного резонансного контура:

$$Q = \frac{\gamma}{g}. \quad (6.6.10)$$

Умножая числитель и знаменатель формулы (6.6.10) на напряжение, получим другое выражение добротности:

$$Q = \frac{\gamma}{g} = \frac{\frac{U}{\omega_0 \cdot L}}{U \cdot G} = \frac{I_{L0}}{I},$$

или

$$Q = \frac{\gamma}{g} = \frac{U \cdot \omega_0 \cdot C}{U \cdot G} = \frac{I_{C0}}{I}.$$

Таким образом, добротность параллельного контура показывает, во сколько раз ток в катушке или в конденсаторе при резонансе токов превышает ток в неразветвленной части электрической цепи.

Величина  $d$ , обратная добротности контура

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{g}{\gamma},$$

называется затуханием параллельного резонансного контура.

Полная проводимость параллельной цепи

$$y = \sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2} = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 \cdot L} - \omega_0 \cdot C\right)^2} \quad (6.6.11)$$

при резонансной частоте  $\omega = \omega_0$ , когда индуктивная проводимость равна ёмкостной проводимости цепи, достигает минимального значения, равного проводимости резистора, то есть  $y = G$  (рис. 6.6.5). Уменьшение частоты в область значений  $\omega < \omega_0$  приводит к уменьшению ёмкостной проводимости до нуля при  $\omega \rightarrow 0$  и к резкому увеличению индуктивной проводимости:

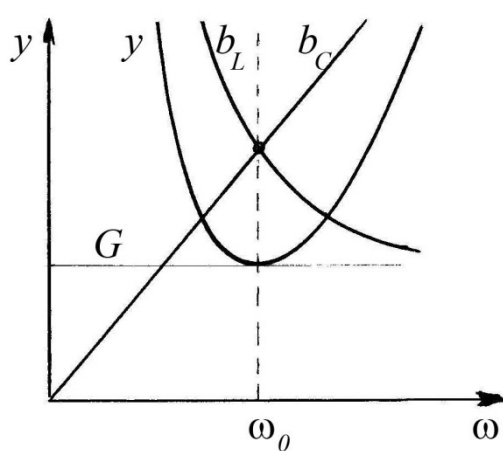


Рис.6.6.5

$$b = b_L - b_C \xrightarrow{\omega_0} b_L = \frac{1}{\omega_0 \cdot L},$$

а следовательно, и полной проводимости  $y$ , стремящейся к бесконечности при  $\omega \rightarrow 0$  (рис. 6.6.5).

Увеличение частоты в области значений  $\omega = \omega_0$  сопровождается уменьшением индуктивной проводимости и возрастанием ёмкостной проводимости, что приводит к появлению отрицательной реактивной проводимости (рис. 6.6.5):

$b = b_L - b_C \xrightarrow{\omega_0} -b_C < 0$ . При этом полная проводимость (6.6.11) возрастает по мере

увеличения модуля ёмкостной проводимости, причём  $y \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \infty$ .

Полное сопротивление

$$Z = \frac{1}{y}$$

электрической цепи -  $GLC$  достигает максимального значения при резонансе (рис. 6.6.5). Согласно закону Ома ( $U = I \cdot Z$ ) при  $I = const$  зависимость напряжения от частоты аналогична зависимости  $Z(\omega)$ .

Таким образом, при резонансе ток в неразветвленной части цепи –  $GLC$  принимает наименьшее значение (рис. 6.6.5) при постоянном действующем значении напряжения  $U$ . Если неизменным поддерживается значение силы тока в неразветвленной части цепи, то напряжение при резонансе достигает максимального значения. Поскольку приёмная антенна в радиоприёмнике представляет собой комбинацию параллельных колебательных контуров, рассмотренные выше закономерности и обеспечивают возможность избирательного приёма одной из множества радиостанций.

## **6.7. Символический метод расчёта линейных электрических цепей синусоидального тока**

### *А. Понятие символического метода*

Рассмотренный выше (в п.п.6.2÷6.6) метод векторных диаграмм позволяет заменить громоздкие аналитические операции над синусоидальными функциями простыми и наглядными операциями геометрического сложения векторов, соответствующих синусоидальным функциям напряжения и тока. Однако недостатком метода векторных диаграмм, как и всех графических методов, является ограниченная точность и невозможность решения общих задач анализа цепей вне связи с конкретными числовыми значениями параметров этих цепей.

Более совершенным методом расчёта электрических цепей синусоидального тока, не обладающим указанными недостатками, является символический метод. Суть *символического метода* состоит в изображении векторов на комплексной плоскости с условной, то есть символической заменой их комплексными числами. Это позволяет заменить геометрические операции над векторами алгебраическими действиями над соответствующими комплексными числами.

Таким образом, символический метод представляет собой следующую стадию математической зашифровки действительных физических процессов в электрических цепях.

Символический метод применим только при линейных соотношениях между напряжениями и токами. Применимость к линейным электрическим цепям принципа суперпозиции позволяет использовать символический метод для расчёта линейных электрических цепей при любых периодических воздействиях.

### Б. Формы записи комплексного числа

На рис. 6.7.1 вектор  $\vec{A}$  изображён в плоскости комплексных величин, то есть в плоскости ортогональных осей  $+I$  и  $+j$ . Здесь по оси  $+I$  откладывают действительные числа, а по оси  $+j$  - мнимые числа.

Проекция вектора  $\vec{A}$  на ось  $+I$  называется действительной частью комплексного числа и обозначается символом  $A_{Re}$ . Проекция вектора  $\vec{A}$  на ось  $+j$  называется мнимой частью комплексного числа и обозначается символом  $A_{Im}$ . Символическое изображение вектора  $\vec{A}$ , представленное в виде

$$\vec{A} = A_{Re} + j \cdot A_{Im} \quad (6.7.1)$$

называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

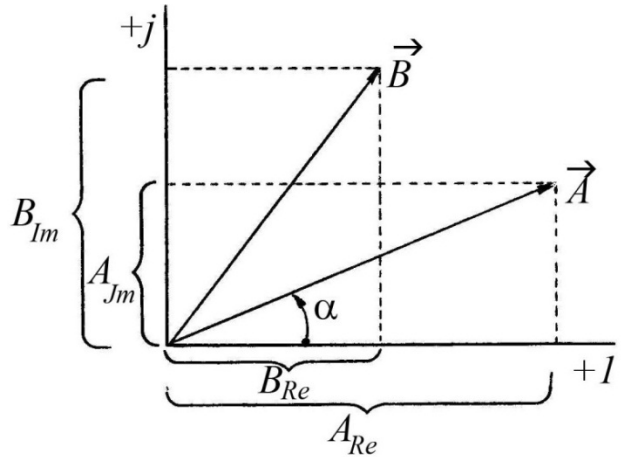


Рис.6.7.1

Каждому вектору в плоскости комплексных величин соответствует определённое комплексное число, и наоборот, заданному комплексному числу  $\vec{B} = B_{Re} + j \cdot B_{Im}$  соответствует единственный вектор, который можно построить в плоскости комплексных величин по элементам  $B_{Re}$  и  $B_{Im}$  этого комплексного числа (рис. 6.7.1).

Наряду с алгебраической формой записи комплексного числа применяется *тригонометрическая форма*:

$$\vec{A} = A \cdot (\cos \alpha + j \cdot \sin \alpha), \quad (6.7.2)$$

где модуль  $A$  и аргумент  $\alpha$  выражают соответственно длину и угол наклона вектора к действительной оси (рис. 6.7.1). Тригонометрическая форма записи может быть преобразована в алгебраическую форму с помощью соотношений:

$$\begin{cases} A_{Re} = A \cdot \cos \alpha, \\ A_{Im} = A \cdot \sin \alpha. \end{cases} \quad (6.7.3)$$

Формулы обратного преобразования (из алгебраической в тригонометрическую форму):

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_{Re}^2 + A_{Im}^2}, \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{A_{Im}}{A_{Re}}. \end{cases} \quad (6.7.4)$$

С помощью формул Эйлера

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2 \cdot j},$$

связывающих тригонометрические и показательные функции с мнимым показателем степени, можно заменить тригонометрическую форму записи показательной формой записи комплексного числа:

$$\dot{A} = A \cdot e^{j\alpha}, \quad (6.7.5)$$

выраженного через те же элементы – модуль  $A$  и аргумент  $\alpha$ , что и тригонометрическая форма.

При решении задач следует иметь в виду три основных частных случая соответствия алгебраической и показательной формы записи комплексного числа:

$$\begin{cases} e^{\pm j \cdot \frac{\pi}{2}} = \pm j; \\ e^{\pm j \cdot \pi} = -1; \\ e^{\pm j \cdot 2 \cdot \pi} = +1. \end{cases}$$

При выполнении инженерных расчётов в электротехнике наиболее широко применяется алгебраическая и показательная форма записи комплексного числа.

### *В. Комплексная амплитуда и комплексное действующее значение*

Произвольную синусоидальную функцию  $v(t) = V_m \cdot \sin(\omega t + \psi_v)$  можно представить в комплексной плоскости вращающимся вектором  $\dot{v}(t) = V_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_v)}$  (рис. 6.7.2). Последнее равенство можно преобразовать к виду:

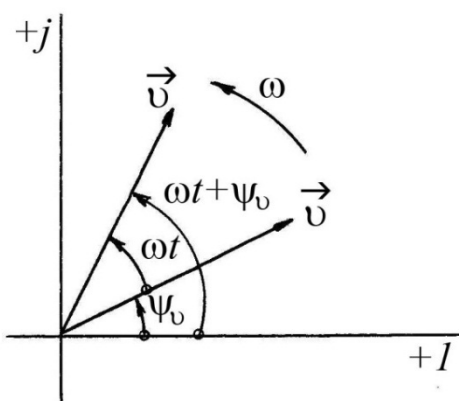


Рис.6.7.2

$$\dot{v}(t) = V_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_v)} = V_m \cdot e^{j\omega \cdot t} \cdot e^{j\psi_v} = \dot{V}_m \cdot e^{j\omega \cdot t}$$

Здесь

$$\dot{V}_m = V_m \cdot e^{j\psi_v} \quad (6.7.6)$$

- комплексная амплитуда. Выражая амплитуду в виде:  $\dot{V}_m = \sqrt{2} \cdot V \cdot e^{j\psi_v}$ , получим

$$\dot{V} = V \cdot e^{j\psi_v} \quad (6.7.7)$$

- комплексное действующее значение функции  $\dot{v}(t)$ .

Синусоидальные функции тока, напряжения и ЭДС в комплексной форме имеют вид:

$$\begin{cases} i = I_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi_i)} = \sqrt{2} \cdot \dot{I} \cdot e^{j\omega \cdot t}; \\ \dot{u} = U_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi_u)} = \sqrt{2} \cdot \dot{U} \cdot e^{j\omega \cdot t}; \\ \dot{e} = E_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi_e)} = \sqrt{2} \cdot \dot{E} \cdot e^{j\omega \cdot t}. \end{cases} \quad (6.7.8)$$

Множители уравнений (6.7.8)

$$\begin{cases} \dot{I} = I \cdot e^{j\psi_i}; \\ \dot{U} = U \cdot e^{j\psi_u}; \\ \dot{E} = E \cdot e^{j\psi_e}; \end{cases} \quad (6.7.9)$$

комплексные действующие значения соответственно тока, напряжения и ЭДС.

#### Г. Комплексное сопротивление

Отношение комплексного напряжения  $\dot{U}$  на участке электрической цепи к комплексному току  $\dot{I}$  этого участка называется **комплексным сопротивлением** участка электрической цепи:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \cdot e^{j\psi_u}}{I \cdot e^{j\psi_i}} = z \cdot e^{j(\psi_u - \psi_i)} = z \cdot e^{j\varphi}. \quad (6.7.10)$$

Здесь

$$z = \frac{U}{I}$$

- модуль сопротивления,  $\varphi$  - аргумент. Алгебраическая форма комплексного сопротивления записывается в виде:

$$\underline{Z} = z \cdot \cos\varphi + j \cdot z \cdot \sin\varphi = r + j \cdot x. \quad (6.7.11)$$

Таким образом, модуль комплексного сопротивления равен полному сопротивлению участка электрической цепи  $Z = \frac{U}{I}$ , действительная часть комплексного сопротивления  $z \cdot \cos\varphi$  равна активному сопротивлению  $r$ , а мнимая часть комплексного сопротивления  $z \cdot \sin\varphi$  равна реактивному сопротивлению  $x$  этого участка цепи.

#### Д. Комплексная проводимость

Отношение комплексного тока  $\dot{I}$  участка электрической цепи к комплексному напряжению этого участка  $\dot{U}$  называется **комплексной проводимостью**:

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I \cdot e^{j\psi_i}}{U \cdot e^{j\psi_u}} = y \cdot e^{j(\psi_i - \psi_u)} = y \cdot e^{-j\varphi}. \quad (6.7.12)$$

Здесь  $y = \frac{I}{U}$  - модуль комплексной проводимости. При расчётах используется также тригонометрическая и алгебраическая форма записи комплексной проводимости:

$$\underline{Y} = y \cdot \cos\varphi - j \cdot y \cdot \sin\varphi = g - j \cdot b. \quad (6.7.13)$$

Следовательно, действительная часть комплексной проводимости  $y \cdot \cos\varphi$  равна активной проводимости  $g$ , а мнимая часть  $y \cdot \sin\varphi$  равна реактивной проводимости  $-b$ , с противоположным знаком.

## 6.8. Законы электрических цепей однофазного тока в комплексной форме

### А. Первый закон Кирхгофа

Подстановка выражения (6.7.8) комплексного тока в уравнение первого закона Кирхгофа позволяет получить первый закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{2} \cdot \dot{I}_k \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = 0.$$

Окончательно, получим:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0. \quad (6.8.1)$$

Формула (6.8.1) отражает первый закон Кирхгофа: *алгебраическая сумма комплексных токов в произвольном узле электрической цепи равна нулю*. Токи, входящие в узел, и токи, вытекающие из узла, имеют противоположные знаки.

### Б. Второй закон Кирхгофа

Для электрического контура, содержащего идеальные резистивные, индуктивные и ёмкостные элементы, в котором действуют источники синусоидальной электродвижущей силы, второй закон Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^n R_k \cdot i_k + \sum_{k=1}^n \int \frac{i_k \cdot dt}{C_k} + \sum_{k=1}^n L_k \cdot \frac{di_k}{dt} = \sum_{k=1}^n e_k.$$

Подстановка в данное выражение формул (6.7.8) позволяет получить второй закон Кирхгофа в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n R_k \cdot \sqrt{2} \cdot \dot{I}_k \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_k} \cdot \sqrt{2} \cdot \dot{I}_k \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} + \\ + \sum_{k=1}^n j \cdot \omega \cdot L_k \cdot \sqrt{2} \cdot \dot{I}_k \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = \sum_{k=1}^n \sqrt{2} \cdot \dot{E}_k \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}. \end{aligned}$$

Деление данного уравнения на множитель  $\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$  позволяет выразить второй закон Кирхгофа в виде:

$$\sum_{k=1}^n R_k \cdot \dot{I}_k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_k} \cdot \dot{I}_k + \sum_{k=1}^n j \cdot \omega \cdot L_k \cdot \dot{I}_k = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k. \quad (6.8.2)$$

Внося все слагаемые левой части последнего равенства под общий знак суммы, получим:

$$\sum_{k=1}^n \left( R_k + j \cdot \omega \cdot L_k + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_k} \right) \cdot \dot{I}_k = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k.$$

Вводя обозначение

$$\sum_{k=1}^n \left( R_k + j \cdot \omega \cdot L_k + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_k} \right) = \underline{Z} \quad -$$

комплексное сопротивление электрической цепи, второй закон Кирхгофа можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k \cdot \underline{Z}_k = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k. \quad (6.8.3)$$

Согласно второму закону Кирхгофа: *«Алгебраическая сумма падений напряжения в контуре равна алгебраической сумме комплексных ЭДС источников контура».*

### В. Закон Ома

Закон Ома для участка электрической цепи в комплексной форме

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} \quad (6.8.4)$$

может быть сформулирован следующим образом: *«Комплексный ток  $\dot{I}$  в ветви электрической цепи равен отношению комплексного напряжения  $\dot{U}$  на некотором участке данной ветви к комплексному сопротивлению  $\underline{Z}$  этого участка».*

Для контура, содержащего синусоидальный источник ЭДС, закон Ома в комплексной форме имеет вид:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z} + \underline{Z}_0},$$

где  $\underline{Z}$  – комплексное сопротивление цепи,  $\underline{Z}_0$  – комплексное сопротивление источника ЭДС. Таким образом, *в случае непосредственного соединения источника с приёмником, комплексный ток в цепи равен отношению комплексной ЭДС источника к сумме комплексного сопротивления приёмника и источника.*

### *Г. Символический метод расчёта линейной однофазной электрической цепи*

Поскольку законы Кирхгофа и Ома справедливы для цепей синусоидального тока, то рассмотренные выше методики, упрощающие расчёт цепей постоянного тока, такие как метод контурных токов, узловых потенциалов и другие методы, применимы и для расчёта цепей с синусоидальными источниками.

При расчёте электрических цепей синусоидального тока символическим методом можно выделить несколько логически самостоятельных этапов.

1. Представить исходные данные о параметрах всех элементов исследуемой цепи в комплексной форме.

2. Произвольно выбрать направления токов в ветвях, обозначив их на схеме электрической цепи.

3. Используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме и упрощающие методики, составить систему уравнений, описывающих режим работы электрической цепи.

4. Решить полученную систему уравнений, то есть определить комплексные токи в ветвях электрической цепи.

5. Правильность решения проверить с помощью закона баланса мощности.

Найденные таким образом токи однозначно определяют соответствующие им мгновенные значения токов в ветвях цепи и напряжений на участках.

### **6.9. Мощность электрической цепи однофазного тока**

*Произведение мгновенного значения напряжения  $u(t)$  на участке электрической цепи на мгновенное значение силы тока  $i(t)$ , протекающего по этому участку, называется **мгновенной мощностью**:*

$$p(t)=u(t) \cdot i(t). \quad (6.9.1)$$

*Среднее значение мгновенной мощности за период называется **активной мощностью**:*

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot i(t) \cdot dt. \quad (6.9.2)$$

Если положить начальную фазу тока равной нулю, то есть  $\psi_i=0$ , то выражения мгновенных значений тока и напряжения (6.1.1) и (6.1.2) преобразуются к виду:  $i(t)=I_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$  и  $u(t)=U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ . Подстановка полученных соотношений в формулу (6.9.2) позволяет выразить активную мощность цепи синусоидального тока:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot dt =$$

$$= \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos \varphi. \quad (6.9.3)$$

Выражая амплитудные значения напряжения через действующие значения ( $U_m = \sqrt{2} \cdot U$ ,  $I_m = \sqrt{2} \cdot I$ ), активную мощность можно представить в виде:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi. \quad (6.9.4)$$

Используя соотношение треугольника мощностей  $U \cdot \cos \varphi = I \cdot R$ , формулу (6.9.4) преобразуем к виду:  $P = I^2 \cdot R$ . Таким образом, активная мощность равна энергии, выделяемой за промежуток времени, равный периоду, на участке электрической цепи с сопротивлением  $R$ . Единица измерения активной мощности – *ватт [Вт]*.

Сомножитель  $\cos \varphi$  в выражении (6.9.4) называется *коэффициентом мощности*. Из уравнения (6.9.4) следует, что при увеличении  $\cos \varphi$  заданная средняя мощность достигается при меньших значениях тока и напряжения. Поэтому актуальной проблемой электротехники является повышение коэффициента мощности.

При энергетической оценке режимов работы цепей переменного тока используют также понятие *реактивной мощности*  $Q$ , равной произведению действующих значений тока и напряжения на участке электрической цепи и синуса фазового угла между током и напряжением:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi. \quad (6.9.5)$$

Реактивную мощность измеряют в *вольт-амперах реактивных [ВАр]*. В отличие от активной мощности, которая не может быть отрицательной, реактивная мощность может быть отрицательной.

*Произведение действующих значений тока и напряжения на участке электрической цепи называется **полной мощностью**:*

$$S = U \cdot I. \quad (6.9.6)$$

Полная мощность равна активной мощности, если коэффициент мощности равен единице. Полную мощность измеряют в *вольт-амперах [ВА]*.

Для установления связи между активной, реактивной и полной мощностью, найдём сумму  $P^2 + Q^2$ , с учётом соотношений (6.9.4), (6.9.5) и (6.9.6):  $P^2 + Q^2 = U^2 \cdot I^2 \cdot \cos^2 \varphi + U^2 \cdot I^2 \cdot \sin^2 \varphi = U^2 \cdot I^2 = S^2$ .

Таким образом,

$$P^2 + Q^2 = S^2. \quad (6.9.7)$$

Уравнению (6.9.7) соответствует прямоугольный треугольник (рис. 6.9.1), называемый треугольник мощности, катетами которого являются активная и реактивная мощность, а гипотенузой - полная мощность.

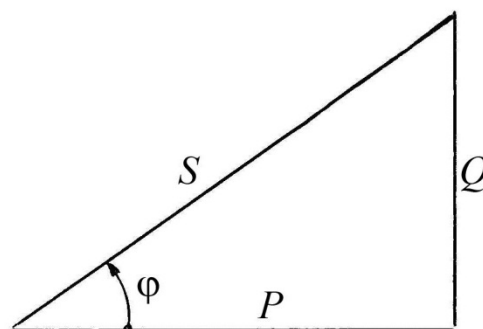


Рис.6.9.1

При символической записи синусоидальных токов и напряжений удобно пользоваться понятием комплексной мощности, равной произведению комплексного напряжения на сопряжённый комплексный ток.

Если по некоторому участку электрической цепи, к которому приложено синусоидальное напряжение  $\dot{U} = U \cdot e^{j\psi_u}$ , течёт ток  $\dot{I} = I \cdot e^{j\psi_i}$ , произведение комплекса напряжения  $\dot{U}$  на сопряжённый комплекс тока  $\dot{I}^* = I \cdot e^{-j\psi_i}$  называется комплексной мощностью:

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \dot{U} \cdot \dot{I}^* = U \cdot e^{j\psi_u} \cdot I \cdot e^{-j\psi_i} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = \\ &= U \cdot I \cdot \cos\varphi + j \cdot U \cdot I \cdot \sin\varphi = P + j \cdot Q.\end{aligned}\quad (6.9.8)$$

Таким образом, активная мощность равна действительной части полной мощности, а реактивная мощность равна мнимой части полной мощности.

Из закона сохранения энергии следует, что для любой электрической цепи должен выполняться закон баланса мощности, согласно которому *активная мощность, генерируемая источниками электрической цепи, равна активной мощности, потребляемой всеми нагрузками цепи.*

Можно доказать, что *сумма отдаваемых в цепь реактивных мощностей равна сумме реактивных мощностей, потребляемых приёмниками цепи.*

## 6.10. Электрические цепи с взаимной индуктивностью

### А. Символический метод расчёта электрической цепи с взаимной индуктивностью

Если синусоидальный ток представить в комплексной форме  $i = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}$ , то ЭДС взаимной индукции при согласном направлении выразится в виде:

$$\dot{e} = -M \cdot \frac{d}{dt} (\dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}) = -j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}.$$

Таким образом, комплексная действующая ЭДС взаимной индукции равна:

$$\dot{e} = -j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I} \quad (6.10.1)$$

Здесь комплексное сопротивление взаимной индукции  $j \cdot \omega \cdot M$  называют *сопротивлением связи*.

Порядок расчёта режима работы электрических цепей с взаимной индуктивностью рассмотрим на примере электрической цепи, приведённой на рис.6.10.1. Катушки электрической цепи связаны индуктивно.

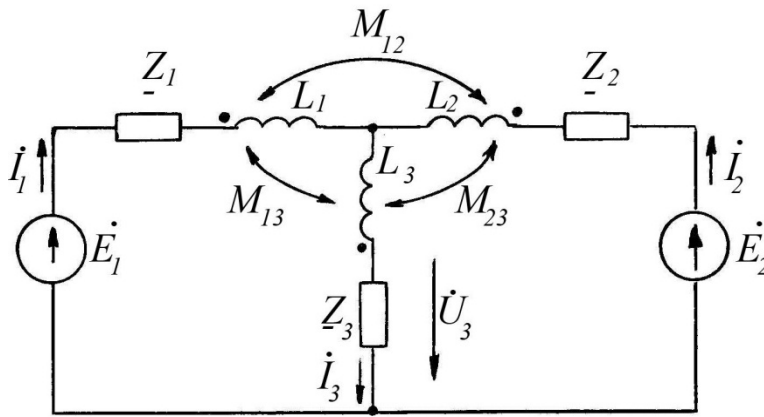


Рис.6.10.1

При решении прямой задачи известны параметры  $Z_1, Z_2, Z_3, L_1, L_2, L_3, M_{12}, M_{13}, M_{23}$ . Требуется определить токи в ветвях электрической цепи.

Для решения задачи необходимо задать направления токов и составить одно уравнение первого закона Кирхгофа и два уравнения второго закона Кирхгофа.

При составлении второго закона Кирхгофа контуры будем обходить в направлении токов  $I_1$  и  $I_2$  и учитывать, что падение напряжения, обусловленное взаимной индукцией, при согласном направлении токов имеет положительный знак  $\dot{U}_M = j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}$ , а при встречном – знак минус  $\dot{U}_M = -j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}$ .

Для узла A:  $I_1 + I_2 = I_3$ .

Для левого контура:

$$\dot{E}_1 = (Z_1 + j \cdot \omega \cdot L_1) \cdot \dot{I}_1 + j \cdot \omega \cdot M_{12} \cdot \dot{I}_2 - j \cdot \omega \cdot M_{13} \cdot \dot{I}_3 + \dot{U}_3.$$

Для правого контура:

$$\dot{E}_2 = (Z_2 + j \cdot \omega \cdot L_2) \cdot \dot{I}_2 + j \cdot \omega \cdot M_{12} \cdot \dot{I}_1 - j \cdot \omega \cdot M_{23} \cdot \dot{I}_3 + \dot{U}_3.$$

Здесь слагаемые с одинаковыми взаимными индуктивностями должны иметь одинаковые знаки, что можно использовать для проверки правильности записи уравнений.

Расчёт разветвлённой электрической цепи с взаимной индуктивностью можно выполнить с помощью рассмотренных во второй главе упрощающих методов расчёта (контурных токов, наложения и других методов), с учётом падений напряжения, обусловленных взаимной индукцией. Однако метод узловых потенциалов непосредственно не применим, поскольку токи в ветвях зависят не только от напряжений между узлами, но и от токов в других ветвях, с которыми исследуемая ветвь индуктивно связана.

В примере, рассмотренном на рис.6.10.1, предполагалось, что все три индуктивности имеют один общий магнитопровод, поэтому их однополярные выводы обозначены одинаковыми точками. Если бы индуктивные элементы располагались на разветвлённом магнитопроводе, однополярные

выводы каждой пары элементов необходимо было бы обозначать разными символами.

### Б. Индуктивность рассеяния

Рассмотрим две индуктивно связанные катушки с индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$ , содержащими соответственно  $w_1$  и  $w_2$  витков (рис. 6.10.2). Обозначим символами  $\Phi_1$  – полный магнитный поток, создаваемый током  $I_1$  первой катушки,  $\Phi_{M1}$  – магнитный поток взаимной индукции первой катушки,  $\Phi_{S1}$  – магнитный поток первой катушки, пронизывающий только витки этой катушки, называемый магнитным потоком рассеяния первой катушки;  $\Phi_2$ ,  $\Phi_{M2}$  и  $\Phi_{S2}$  – аналогичные магнитные потоки, создаваемые током  $I_2$  второй катушки;  $\Phi_M$  – общий поток взаимной индукции, пронизывающий витки обеих катушек таким образом, что

$$\begin{cases} \Phi_M = \Phi_{M1} + \Phi_{M2}, \\ \Phi_1 = \Phi_{M1} + \Phi_{S1}, \\ \Phi_2 = \Phi_{M2} + \Phi_{S2}. \end{cases} \quad (6.3.10)$$

Индуктивность каждой катушки определяется отношением магнитного потока самоиндукции, создаваемого всеми витками, к току данной катушки, то есть:

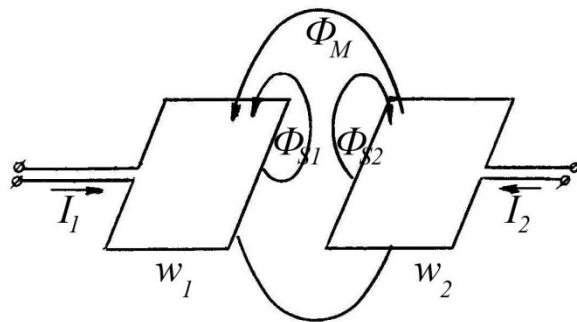


Рис.6.10.2

$$\begin{cases} L_1 = \frac{w_1 \cdot \Phi_1}{I_1} = \frac{w_1 \cdot \Phi_{M1}}{I_1} + \frac{w_1 \cdot \Phi_{S1}}{I_1}; \\ L_2 = \frac{w_2 \cdot \Phi_2}{I_2} = \frac{w_2 \cdot \Phi_{M2}}{I_2} + \frac{w_2 \cdot \Phi_{S2}}{I_2}. \end{cases} \quad (6.10.4)$$

Вторые слагаемые правой части уравнений системы (6.10.4) равны:

$$\begin{cases} L_{S1} = \frac{w_1 \cdot \Phi_{S1}}{I_1}; \\ L_{S2} = \frac{w_2 \cdot \Phi_{S2}}{I_2}; \end{cases} \quad (6.10.5)$$

и называются *индуктивностями рассеяния* катушек. Учитывая формулы (6.10.5) и предполагая, что  $M_{12}=M_{21}=M$ , выражения (6.10.4) индуктивности преобразуем к виду:

$$\begin{cases} L_1 = \frac{w_1}{w_2} \cdot M + L_{S1}; \\ L_2 = \frac{w_2}{w_1} \cdot M + L_{S2}. \end{cases} \quad (6.10.6)$$

Тогда индуктивности рассеяния определяются следующими соотношениями:

$$\begin{cases} L_{S1} = L_1 - \frac{w_1}{w_2} \cdot M; \\ L_{S2} = L_2 - \frac{w_2}{w_1} \cdot M. \end{cases}$$

Степень индуктивной связи двух катушек характеризуется **коэффициентом связи** ( $K$ ), который равен среднему геометрическому отношений потока взаимной индукции ко всему магнитному потоку катушки:

$$K = \sqrt{\frac{\Phi_{M1}}{\Phi_1} \cdot \frac{\Phi_{M2}}{\Phi_2}}. \quad (6.10.8)$$

Выражая полные магнитные потоки из соотношений (6.10.4), определим коэффициент связи через параметры катушки:

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}. \quad (6.10.9)$$

Поскольку  $\Phi_{M1} < \Phi_1$  и  $\Phi_{M2} < \Phi_2$ , из уравнения (6.10.8) следует, что коэффициент связи всегда меньше единицы ( $K < 1$ ). Коэффициент связи увеличивается при уменьшении магнитных потоков рассеяния. Для повышения коэффициента связи применяют бифилярный способ намотки катушек и используют ферромагнитный магнитопровод, поскольку при увеличении магнитной проницаемости магнитопровода магнитные потоки рассеяния уменьшаются. Если оси катушек расположены взаимно перпендикулярно, то коэффициент связи обращается в нуль. Поэтому, перемещая одну из катушек относительно другой, можно плавно изменять коэффициент связи в широких пределах, а при последовательном соединении индуктивно связанных катушек можно плавно изменять их результирующую индуктивность.

## 6.11. Индуктивно связанные катушки. Трансформатор

**Трансформатором** называется статическое устройство, содержащее две или большее число индуктивно связанных обмоток и предназначенное для преобразования посредством электромагнитной индукции одной или нескольких систем переменного тока в одну или несколько других систем переменного тока. Трансформатор изобрёл в 1876 году русский электротехник П.Н. Яблочков, а в дальнейшем усовершенствовал П.Ф. Усагин.

Важной составной частью линейных электротехнических устройств автоматики, измерительной техники и связи является трансформатор без ферромагнитного сердечника, содержащий две обмотки. Если пренебречь распределёнными ёмкостями между витками обмоток трансформатора, то трансформатор можно представить схемой, в которой активные сопротивления обмоток изображены отдельно (рис. 6.11.1).

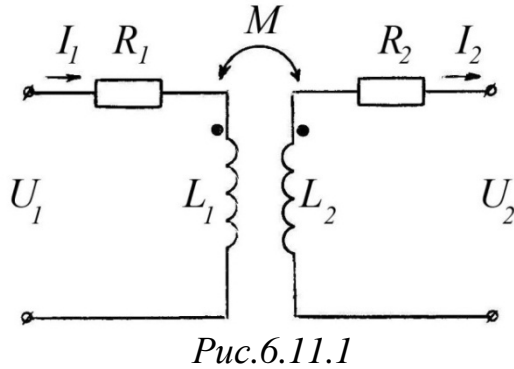


Рис.6.11.1

Обмотка трансформатора, присоединённая к источнику питания, называется *первичной* обмоткой, а обмотка, к которой подключается нагрузка, называется *вторичной* обмоткой. Токи и напряжения на выводах этих обмоток называются соответственно *первичными* ( $i_1$  и  $u_1$ ) и *вторичными* ( $i_2$  и  $u_2$ ) параметрами.

Однако в зависимости от режима работы направление потока энергии в трансформаторе может изменяться, поэтому иногда деление обмоток на первичную и вторичную является условным.

При указанной на рис. 6.11.6 полярности выводов обмоток трансформатора токи  $i_1$  и  $i_2$  направлены встречно, и уравнения обмоток трансформатора в дифференциальной форме имеют вид:

$$\begin{cases} u_1 = R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - M \cdot \frac{di_2}{dt}; \\ -u_2 = R_2 \cdot i_2 + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - M \cdot \frac{di_1}{dt}. \end{cases} \quad (6.11.1)$$

Если напряжения и токи являются гармоническими, то есть  $\dot{u}(t) = \sqrt{2} \cdot \dot{U} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$  и  $i(t) = \sqrt{2} \cdot \dot{I} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ , то уравнения трансформатора запишем в комплексной форме:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1) \cdot \dot{I}_1 - j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_2; & (a) \\ -\dot{U}_2 = (R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2) \cdot \dot{I}_2 - j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_1; & (б) \end{cases} \quad (6.11.2)$$

Добавим и вычтем из правой части уравнения (а) слагаемое  $j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_1$ , а к правой части уравнения (б) добавим и вычтем из неё слагаемое  $j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_2$ . Тогда уравнения (6.11.2) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = [R_1 + j \cdot \omega \cdot (L_1 - M) + j \cdot \omega \cdot M] \cdot \dot{I}_1 - j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_2; \\ -\dot{U}_2 = [R_2 + j \cdot \omega \cdot (L_2 - M) + j \cdot \omega \cdot M] \cdot \dot{I}_2 - j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_1. \end{cases} \quad (6.11.3)$$

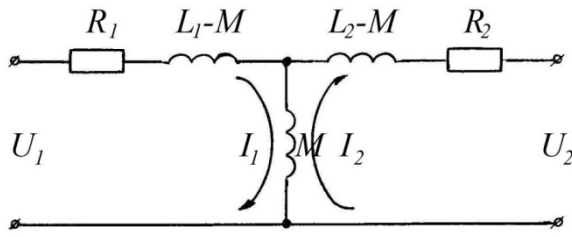


Рис.6.11.2

а гальванически. Это даёт возможность применять упрощающие методы расчёта (контурных токов, узловых потенциалов и другие методы).

Если количество витков первичной и вторичной обмоток трансформатора различно ( $w_1 \neq w_2$ ), работу трансформатора удобно анализировать с помощью схемы, приведённой к первичной обмотке (рис. 6.11.3).

Приведение заключается в том, что напряжение  $\dot{U}_2$  и ток  $\dot{I}_2$  заменяются величинами, приведёнными к первичной обмотке: напряжение  $\dot{U}_2$  умножают на  $n$ , а ток  $\dot{I}_2$  делят на  $n$ . Здесь  $n = \frac{w_1}{w_2}$  — отношение чисел витков обмоток

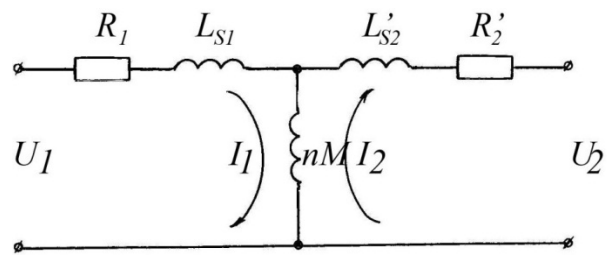


Рис.6.11.3

называют коэффициентом трансформации.

Схема замещения трансформатора (рис. 6.11.3), приведённая к первичной обмотке, содержит следующие элементы: сопротивление  $R_1$  и индуктивность рассеяния  $L_{S1}$  первичной обмотки трансформатора, индуктивность  $\frac{w_1}{w_2} \cdot M$  в поперечной ветви, называемой ветвью намагничивания, сопротивление  $R_2$  и индуктивность рассеяния  $L_{S2}$  вторичной обмотки, приведённые к первичной обмотке, то есть умноженные на  $n^2 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2$ .

Вводя в уравнение (6.11.3) коэффициент трансформации, получим контурные уравнения приведённой схемы замещения (рис. 6.11.3):

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (R_1 + j \cdot \omega \cdot L_{S1}) \cdot \dot{I}_1 + \frac{j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_2}{n}; \\ -\dot{U}_2 = n \cdot (R_2 + j \cdot \omega \cdot L_{S2}) \cdot \dot{I}_2 + j \cdot \omega \cdot n \cdot M \cdot \dot{I}_1. \end{cases} \quad (6.11.4)$$

Здесь контурные сопротивления  $\omega \cdot L_{S1}$  и  $\omega \cdot L_{S2}$  представляют собой сопротивления первичной и вторичной обмоток трансформатора, а  $\omega \cdot n \cdot M$  — сопротивление ветви намагничивания.

Общий магнитный поток, пронизывающий первичную и вторичную обмотку, определяет магнитодвижущую силу, которая в случае встречного направления токов в обмотках, равна:

$$F = i_1 \cdot w_1 - i_2 \cdot w_2 = \left(i_1 - i_2 \cdot \frac{w_2}{w_1}\right) \cdot w_1 = \left(i_1 - \frac{i_2}{n}\right) \cdot w_1.$$

Ток  $\left(i_1 - \frac{i_2}{n}\right)$ , который в схеме замещения трансформатора (6.11.3), приведённой к первичной обмотке, течёт через ветви намагничивания, называют *намагничивающим током трансформатора*.

Режим работы трансформатора удобно анализировать с помощью векторной диаграммы.

Схеме замещения трансформатора, представленной на рис. 6.11.3, соответствует векторная диаграмма, при построении которой в качестве исходных приняты приведённые вторичные напряжения  $n \cdot \dot{U}_2$  и ток  $\frac{i_2}{n}$  (рис. 6.11.4).

Падение напряжения, обусловленное протеканием приведённого тока  $\frac{i_2}{n}$  вторичной обмотки соответственно через активное сопротивление рассеяния  $R_2 \cdot n^2$  и индуктивное сопротивление рассе-

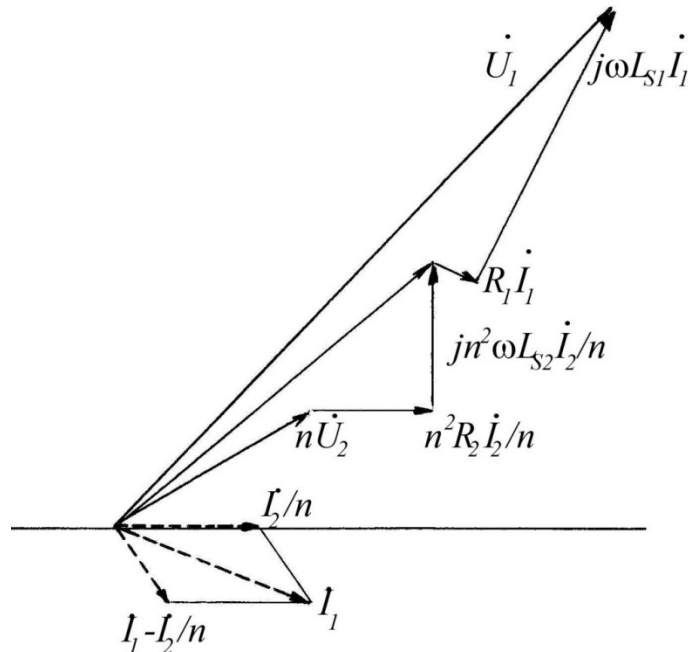


Рис.6.11.4

яния  $\omega \cdot L_{S2} \cdot n^2$ , складывается с приведённым напряжением вторичной обмотки  $n \cdot \dot{U}_2$ . В результате получается напряжение, равное напряжению, обусловленному протеканием намагничивающего тока  $i_1 - \frac{i_2}{n}$  в индуктивном сопротивлении  $j \cdot \omega \cdot n \cdot M$  ветви намагничивания. Намагничивающий ток отстаёт от полученного напряжения  $j \cdot \omega \cdot n \cdot M \left(i_1 - \frac{i_2}{n}\right)$  на угол  $\varphi = 90^\circ$ .

Падение напряжения  $\dot{I}_1 \cdot R_1$  и  $j \cdot \omega \cdot L_{S1} \cdot \dot{I}_1$ , обусловленное протеканием тока  $\dot{I}_1$  соответственно через активное сопротивление  $R_1$ , и индуктивное сопротивление рассеяния первичной обмотки  $\omega \cdot L_{S1}$  геометрически складываются с напряжением ветви намагничивания  $j \cdot \omega \cdot n \cdot M \left(i_1 - \frac{i_2}{n}\right)$ . В результате получается первичное напряжение  $\dot{U}_1$ .

Поскольку вторичные электрические величины – напряжение  $\dot{U}_2$  и ток  $\dot{I}_2$  в схеме на рис. 6.11.3 – приведены к первичной обмотке, данная схема приведённого трансформатора эквивалентна исходной схеме только для идеального трансформатора.

**Идеальным трансформатором** называется трансформатор, обладающий следующими свойствами: 1) при любых условиях отношение первичного напряжения к вторичному ( $\frac{U_1}{U_2} = n$ ) равно отношению вторичного тока к первичному ( $\frac{I_2}{I_1} = n$ ) и определяется коэффициентом трансформации  $n$ ; 2) не имеет потерь энергии, и при разомкнутой вторичной обмотке через его первичную обмотку ток не течёт.

Идеального трансформатора не существует, однако сходными свойствами обладает трансформатор с коэффициентом связи, близким к единице, и настолько большим числом витков, что сопротивление  $\omega \cdot n \cdot M$  его ветви намагничивания стремится к бесконечности.

## 6.12. Входное сопротивление и энергия трансформатора

### А. Входное сопротивление трансформатора

Если нагрузка  $Z_H$  подключена к источнику электроэнергии через трансформатор (рис.6.12.1), то уравнения второго закона Кирхгофа для первичной и вторичной обмотки трансформатора в комплексной форме имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1) \cdot \dot{I}_1 \pm j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_2; & (a) \\ 0 = \pm j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_1 + (R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 + \underline{Z}_H) \cdot \dot{I}_2. & (б) \end{cases} \quad (6.12.1)$$

Из уравнения (б) выразим ток  $\dot{I}_2$ :

$$\dot{I}_2 = \frac{\mp j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_1}{R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 + \underline{Z}_H}. \quad (6.12.2)$$

Входное сопротивление трансформатора  $Z_{1BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$  можно определить подстановкой в данное равенство выражения (6.12.1) и (6.12.2):

$$Z_{1BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = (R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1) \pm j \cdot \omega \cdot M \cdot \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}.$$

Окончательно, получим:

$$Z_{1BX} = R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1 + \frac{(\omega \cdot M)^2}{R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 + \underline{Z}_H}. \quad (6.12.3)$$

Третье слагаемое правой части выражения (6.12.3) представляет собой комплексное сопротивление, вносимое из вторичной цепи в первичную цепь.

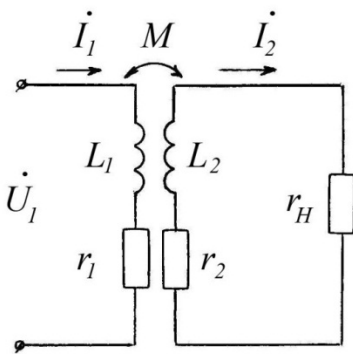


Рис.6.12.1

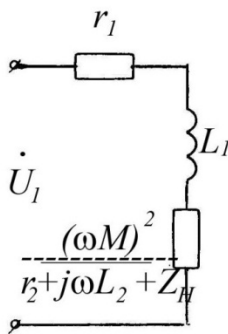


Рис.6.12.2

Электрическая цепь, приведённая на рис. 6.12.2, соответствует выражению (6.12.3) и эквивалентна цепи на рис. 6.12.1. В зависимости от характера нагрузки  $Z_H$  мнимая часть вносимого сопротивления может быть как положительной, так и отрицательной.

Если бы трансформатор исходной электрической цепи (рис. 6.12.1) был идеальным, то с учётом свойства идеального трансформатора

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = n,$$

входное сопротивление трансформатора было бы равно:

$$Z_{1BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n \cdot U_2}{\frac{I_2}{n}} = n^2 \cdot \frac{U_2}{I_2} = n^2 \cdot Z_H. \quad (6.12.4)$$

Таким образом, идеальный трансформатор, включённый между нагрузкой и источником энергии, изменяет сопротивление нагрузки пропорционально второй степени коэффициента трансформации. Это свойство трансформатора используется в различных областях электротехники, проводной связи, радио- и приборостроении, автоматики для согласования сопротивления источника и нагрузки с целью повышения мощности, отдаваемой источником. Поэтому для корректировки сопротивления нагрузки без изменения самой нагрузки используют промежуточный трансформатор, свойства которого подобны свойствам идеального трансформатора.

Из соотношения (6.12.4) следует, что входное сопротивление идеального трансформатора при замкнутых выходных зажимах равно нулю, а при разомкнутых стремится к бесконечности.

### Б. Энергия индуктивно связанных обмоток

Преобразуя дифференциальные уравнения второго закона Кирхгофа (6.11.1) к виду

$$\begin{cases} u_1 = R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - M \cdot \frac{di_2}{dt}; & (a) \\ 0 = u_2 + R_2 \cdot i_2 + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - M \cdot \frac{di_1}{dt}. & (б) \end{cases} \quad (6.12.5)$$

Умножая обе части уравнения (а) на  $i_1$ , а уравнение (б) – на  $i_2$  и складывая эти уравнения, получим:

$$p_1 = u_1 \cdot i_1 = u_2 \cdot i_2 + R_1 \cdot i_1^2 + R_2 \cdot i_2^2 + L_1 \cdot i_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot i_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - M \cdot \left( i_1 \cdot \frac{di_2}{dt} + i_2 \cdot \frac{di_1}{dt} \right).$$

Окончательно:

$$p_1 = R_1 \cdot i_1^2 + R_2 \cdot i_2^2 + \frac{dW_M}{dt} + u_2 \cdot i_2. \quad (6.12.6)$$

Здесь

$$W_M = \frac{L_1 \cdot i_1^2}{2} + \frac{L_2 \cdot i_2^2}{2} - M \cdot i_1 \cdot i_2 \quad (6.12.7)$$

– энергия магнитного поля.

Таким образом, мгновенная мощность  $p_1$ , подводимая к трансформатору через первичные выводы, равна сумме мгновенных значений мощности, расходуемой на нагрев обмоток  $R_1 \cdot i_1^2$  и  $R_2 \cdot i_2^2$ , скорости изменения энергии

$$\frac{dW_M}{dt},$$

накопленной магнитным полем, и мощности  $u_2 \cdot i_2$ , передаваемой нагрузке.

Первое слагаемое правой части уравнения (6.12.7) равно энергии магнитного поля первичной обмотки трансформатора при  $i_2 = 0$ , второе слагаемое равно энергии вторичной обмотки при  $i_1 = 0$ , третье слагаемое равно энергии, зависящей от направления тока в обмотке и взаимного расположения обмоток. При согласном направлении токов третье слагаемое положительно.

Поскольку первое и второе слагаемое правой части уравнения (6.12.6) положительны, а знак третьего слагаемого зависит от направления токов  $i_1$  и  $i_2$ , энергия системы, состоящей из двух индуктивно связанных обмоток, может быть больше или меньше суммы энергии обмоток, взятых отдельно.

## Глава VII. ЧЕТЫРЁХПОЛЮСНИКИ

### 7.1. Классификация четырёхполюсников

Часть электрической цепи или какое-либо электротехническое устройство, имеющее два входных и два выходных зажима, называется четырёхполюсником. Примерами четырёхполюсников являются длинная линия, трансформатор, усилитель и всякое другое устройство с двумя парами выводов, включённое между источником и приёмником электрической энергии, когда требуется определить токи и напряжения на этих выводах, а не внутри самого четырёхполюсника.

Выводы четырёхполюсника, к которым подключается источник электрической энергии, называются входными выводами, а выводы четырёхполюсника, к которым подключается нагрузка, называются выходными выводами.

Четырёхполюсник принято изображать в виде прямоугольника, у которого входные зажимы обозначают символами  $1$  и  $1'$ , а выходные – символами  $2$  и  $2'$  (рис.7.1.1). Возможны случаи, когда обе пары выводов четырёхполюсника являются входными (при двустороннем питании четырёхполюсников) или выходными, если четырёхполюсник содержит независимые источники энергии и нагружен с обеих сторон.

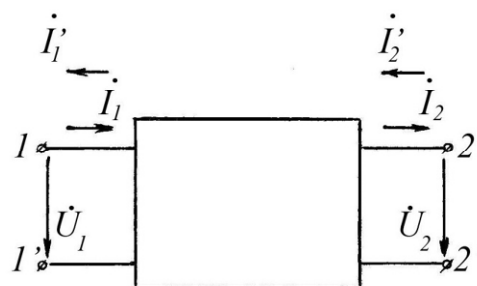


Рис.7.1.1

Четырёхполюсники классифицируют по нескольким признакам.

1. В зависимости от линейности элементов четырёхполюсников их делят на линейные и нелинейные четырёхполюсники.

2. В зависимости от схемы внутренних соединений четырёхполюсников различают  $\Gamma$ -образные (рис. 7.1.2.а),  $T$ -образные (рис. 7.1.2.б),  $\Pi$ -образные (рис. 7.1.2.в), мостовые (рис. 7.1.2.г),  $T$ -образно-мостовые (рис. 7.1.2.д) и другие четырёхполюсники.

3. Четырёхполюсники подразделяют на активные и пассивные четырёхполюсники. Четырёхполюсник, в схеме которого содержатся источники энергии, называется активным четырёхполюсником. Если источники энергии являются независимыми и их действие не компенсируется, то активный четырёхполюсник называется автономным. Если источники внутри четырёхполюсника являются зависимыми, как это, например, имеет место в схемах замещения электронных ламп или транзисторов, то после отключения четырёхполюсника от остальной части электрической цепи напряжение на разомкнутых выводах равно нулю. Такой активный четырёхполюсник называется неавтономным.

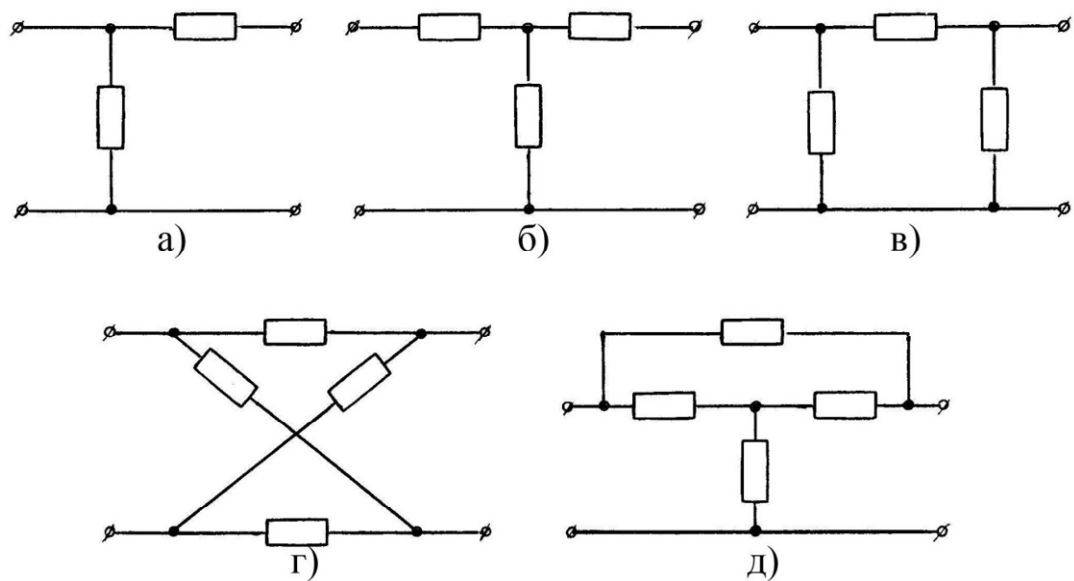


Рис.7.1.2

Четырёхполюсник, в схеме которого не содержится источников энергии, называется *пассивным*. Активный четырёхполюсник обозначается буквой «А» в прямоугольнике, если четырёхполюсник пассивный – буква «А» отсутствует.

4. Четырёхполюсники могут быть симметричными и несимметричными. Четырёхполюсник является *симметричным*, если перемена местами его входных и выходных выводов не приводит к изменению токов и напряжений в электрической цепи, к которой он присоединён. Если данное условие не выполняется, четырёхполюсник является *несимметричным*.

5. Четырёхполюсники бывают обратимыми и необратимыми. Четырёхполюсник называется *обратимым*, если он удовлетворяет *теореме обратимости*, согласно которой отношение напряжения на входе к току на выходе или напряжения на выходе к току на входе (называемые взаимными сопротивлениями входного и выходного контура) не зависит от того, какая пара выводов четырёхполюсника является входной.

Четырёхполюсник, не удовлетворяющий *теореме обратимости*, называется *необратимым четырёхполюсником*. Пассивные линейные четырёхполюсники являются обратимыми. Несимметричные активные (автономные и неавтономные) четырёхполюсники необратимы. Симметричные четырёхполюсники всегда обратимы.

Понятие четырёхполюсника введено, для того чтобы, используя некоторые обобщённые параметры, можно было установить связь между токами и напряжениями на входе и выходе участка электрической цепи, представленной в виде четырёхполюсника. Таким образом, замена участка электрической цепи четырёхполюсником позволяет определить токи и напряжения на входе или выходе участка электрической цепи, не производя расчётов в схеме самого четырёхполюсника.

## 7.2. Системы уравнений четырёхполюсников

Режим работы четырёхполюсника характеризуется двумя напряжениями и двумя токами. Две любые величины из этих четырёх можно определить, если известны две другие. Поскольку сочетание из четырёх величин по 2 равно 6, то можно представить шесть форм записи уравнений пассивного четырёхполюсника (рис.7.1.1).

1. Форма  $\|Y\|$ : токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}'_2$  выражают через напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ :

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11} \cdot \dot{U}_1 + Y_{12} \cdot \dot{U}_2; \\ \dot{I}'_2 = Y_{21} \cdot \dot{U}_1 + Y_{22} \cdot \dot{U}_2. \end{cases} \quad (7.2.1)$$

2. Форма  $\|Z\|$ : напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  выражают через токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}'_2$ :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11} \cdot \dot{I}_1 + Z_{12} \cdot \dot{I}'_2; \\ \dot{U}_2 = Z_{21} \cdot \dot{I}_1 + Z_{22} \cdot \dot{I}'_2. \end{cases} \quad (7.2.2)$$

3. Форма  $\|A\|$ : входные параметры  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  выражают через выходные параметры  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$ :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11} \cdot \dot{U}_2 + A_{12} \cdot \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = A_{21} \cdot \dot{U}_2 + A_{22} \cdot \dot{I}_2. \end{cases} \quad (7.2.3)$$

4. Форма  $\|B\|$ : выходные параметры  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$  выражают через входные параметры  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$ :

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = B_{11} \cdot \dot{U}_1 + B_{12} \cdot \dot{I}_1; \\ \dot{I}_2 = B_{21} \cdot \dot{U}_1 + B_{22} \cdot \dot{I}_1. \end{cases} \quad (7.2.4)$$

5. Форма  $\|H\|$ : параметры  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}'_2$  выражают через параметры  $\dot{I}_1$  и  $\dot{U}_2$ :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11} \cdot \dot{I}_1 + H_{12} \cdot \dot{U}_2; \\ \dot{I}'_2 = H_{21} \cdot \dot{I}_1 + H_{22} \cdot \dot{U}_2. \end{cases} \quad (7.2.5)$$

6. Форма  $\|G\|$ : параметры  $\dot{I}_1$  и  $\dot{U}_2$  выражают через параметры  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}'_2$ :

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = G_{11} \cdot \dot{U}_1 + G_{12} \cdot \dot{I}'_2; \\ \dot{U}_2 = G_{21} \cdot \dot{U}_1 + G_{22} \cdot \dot{I}'_2. \end{cases} \quad (7.2.6)$$

Формы  $\|Y\|$  и  $\|Z\|$ ,  $\|A\|$  и  $\|B\|$ ,  $\|H\|$  и  $\|G\|$  обладают инверсией. Исторически сложилось так, что для различных форм записи уравнений четырёхполюсников направления токов входной и выходной цепи различны (рис.7.1.1).

Коэффициенты каждой системы уравнений четырёхполюсника имеют вполне определённый физический смысл. Например, коэффициенты  $Y_{ij}$  системы уравнений (7.2.1) имеют смысл входных и передаточных проводимостей первого и второго контуров. В общем случае это комплексные

величины, зависящие от частоты и имеющие следующий физический смысл:

$$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad - \text{ входная проводимость со стороны выводов } I \text{ при за-} \\ \text{короченных выводах } 2;$$

$$Y_{22} = \left. \frac{\dot{I}'_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} \quad - \text{ входная проводимость со стороны выводов } 2 \text{ при за-} \\ \text{короченных выводах } I;$$

$$Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}'_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad - \text{ передаточная проводимость при закороченных выво-} \\ \text{дах } 2;$$

$$Y_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} \quad - \text{ передаточная проводимость при закороченных выво-} \\ \text{дах } I.$$

В случае обратимого четырёхполюсника

$$Y_{12} = Y_{21}. \quad (7.2.7)$$

Если четырёхполюсник симметричен, то наряду с уравнением (7.2.7) выполняется условие:

$$Y_{11} = Y_{22} \quad (7.2.8)$$

Коэффициенты и определители каждой системы уравнений четырёхполюсника могут быть выражены через коэффициенты и определители любой другой системы уравнений. Выразим, например, коэффициенты  $A_{ij}$  через коэффициенты  $Y_{ij}$ . Для этого в уравнениях (7.2.1), заменив ток  $\dot{I}'_2$  током  $-\dot{I}_2$ , получим уравнения в параметрах  $Y$ :

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11} \cdot \dot{U}_1 + Y_{12} \cdot \dot{U}_2; \\ -\dot{I}_2 = Y_{21} \cdot \dot{U}_1 + Y_{22} \cdot \dot{U}_2. \end{cases} \quad (7.2.9)$$

Из второго уравнения системы (7.2.9) следует:

$$\dot{U}_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \cdot \dot{U}_2 - \frac{1}{Y_{21}} \cdot \dot{I}_2. \quad (7.2.10)$$

Подстановка равенства (7.2.10) в первое уравнение системы (7.2.9) позволяет выразить ток  $\dot{I}_1$ :

$$\dot{I}_1 = -\frac{|Y|}{Y_{21}} \cdot \dot{U}_2 - \frac{Y_{11}}{Y_{21}} \cdot \dot{I}_2. \quad (7.2.11)$$

Из уравнений (7.2.10) и (7.2.11) можно составить систему:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \cdot \dot{U}_2 - \frac{1}{Y_{21}} \cdot \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = -\frac{|Y|}{Y_{21}} \cdot \dot{U}_2 - \frac{Y_{11}}{Y_{21}} \cdot \dot{I}_2. \end{cases}$$

Полученные уравнения являются системой уравнений формы, где:

$$\begin{cases} A_{11} = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}; \\ A_{12} = -\frac{1}{Y_{21}}; \\ A_{21} = -\frac{|Y|}{Y_{21}}; \\ A_{22} = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}. \end{cases} \quad (7.2.12)$$

Коэффициенты  $A_{ij}$  в общем случае являются комплексными и зависят от частоты, причём параметры  $A_{11}$  и  $A_{22}$  не имеют размерности, коэффициент  $A_{12}$  имеет размерность сопротивления,  $A_{21}$  – имеет размерность проводимости.

Коэффициенты  $A_{ij}$  имеют следующий физический смысл:

$$A_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad - \text{отношение напряжений при разомкнутых выходных выводах};$$

$$A_{22} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad - \text{отношение токов при закороченных выходных выводах};$$

$$A_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad - \text{величина, обратная передаточной проводимости при закороченных выходных выводах};$$

$$A_{21} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad - \text{величина, обратная передаточному сопротивлению при разомкнутых выходных выводах}.$$

Определитель, составленный из коэффициентов  $A_{ij}$ , равен:

$$|A| = A_{11} \cdot A_{22} - A_{12} \cdot A_{21} = \frac{Y_{12}}{Y_{21}}. \quad (7.2.13)$$

В случае обратимого четырёхполюсника  $Y_{12} = Y_{21}$ , следовательно:

$$|A| = A_{11} \cdot A_{22} - A_{12} \cdot A_{21} = 1. \quad (7.2.14)$$

Если четырёхполюсник симметричен, то на основании уравнения (7.2.12) с учётом соотношения (7.2.8) получим:

$$A_{11} = A_{22}. \quad (7.2.15)$$

При изменении направления передачи энергии, то есть при передаче энергии от выводов 2-2' к выводам 1-1' уравнения четырёхполюсника устанавливают соотношения между следующими парами напряжений и токов:  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}'_2$ , также  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}'_1$ . Если в системе уравнений (7.2.3) заменить токи  $\dot{I}_1$  на  $-\dot{I}'_1$  и  $\dot{I}_2$  на  $-\dot{I}'_2$  и решить полученную систему уравнений относительно  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}'_2$ , то получится система уравнений в форме  $\|B\|$ , выраженные через коэффициенты  $A_{ij}$ . Для обратимого четырёхполюсника полученная таким образом система уравнений запишется в виде:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = A_{22} \cdot \dot{U}_1 + A_{12} \cdot \dot{I}'_1; \\ \dot{I}'_2 = A_{21} \cdot \dot{U}_1 + A_{11} \cdot \dot{I}'_1. \end{cases}$$

Сравнение уравнений системы (7.2.16) с системой уравнений (7.2.3), которые характеризуют передачу энергии от выводов 1-1' к выводам 2-2', показывает, что при изменении направления потока энергии коэффициенты  $A_{11}$  и  $A_{22}$ , входящие в систему уравнений (7.2.3), меняются местами.

### 7.3. Параметры холостого хода и короткого замыкания четырёхполюсника

Коэффициенты  $Y_{11}$  и  $Y_{22}$  имеют смысл входных проводимостей четырёхполюсника (рис.7.1.1), измеренные соответственно слева и справа при закороченных противоположных выводах. Параметры  $Z_{11}$  и  $Z_{22}$  имеют смысл входных сопротивлений четырёхполюсника при разомкнутых противоположных выводах. Вводя индексы «к.з.» и «х.х.» для обозначения режимов короткого замыкания (выводы закорочены) и холостого хода (выводы разомкнуты), получим параметры холостого хода и короткого замыкания:

$$\begin{cases} Z_{1 \text{ к.з.}} = \frac{1}{Y_{11}}; \\ Z_{2 \text{ к.з.}} = \frac{1}{Y_{22}}; \\ Z_{1 \text{ х.х.}} = Z_{11}; \\ Z_{2 \text{ х.х.}} = Z_{22}. \end{cases} \quad (7.3.1)$$

Этих параметров достаточно для составления уравнений обратимого четырёхполюсника. Можно доказать, что параметры холостого хода и короткого замыкания (7.3.1) связаны соотношением:

$$\frac{Z_{1 \text{ к.з.}}}{Z_{1 \text{ х.х.}}} = \frac{Z_{2 \text{ к.з.}}}{Z_{2 \text{ х.х.}}}. \quad (7.3.2)$$

Симметричный четырёхполюсник характеризуется двумя параметрами:

$$Z_{1\text{ К.З.}} = Z_{2\text{ К.З.}}; \quad Z_{1\text{ Х.Х.}} = Z_{2\text{ Х.Х.}} \quad (7.3.3)$$

Параметры холостого хода и короткого замыкания можно выразить через любую систему коэффициентов четырёхполюсника, например, через коэффициенты :

$$\begin{cases} Z_{1\text{ К.З.}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}; & Z_{1\text{ Х.Х.}} = \frac{A_{11}}{A_{21}}; \\ Z_{2\text{ К.З.}} = \frac{A_{12}}{A_{11}}; & Z_{2\text{ Х.Х.}} = \frac{A_{22}}{A_{21}}. \end{cases} \quad (7.3.4)$$

Любая система коэффициентов обратимого четырёхполюсника может быть выражена через параметры холостого хода и короткого замыкания. Например, используя соотношения (7.3.4), коэффициенты можно описать следующими выражениями:

$$\begin{cases} A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1\text{ Х.Х.}}}{Z_{2\text{ К.З.}} - Z_{2\text{ Х.Х.}}}}; \\ A_{12} = A_{11} \cdot Z_{2\text{ К.З.}}; \\ A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{1\text{ Х.Х.}}}; \\ A_{22} = A_{11} \cdot \frac{Z_{2\text{ Х.Х.}}}{Z_{1\text{ Х.Х.}}}. \end{cases} \quad (7.3.5)$$

#### 7.4. Входное сопротивление четырёхполюсника

Обозначим символом  $Z_{1\text{ ВХ}}$  входное сопротивление четырёхполюсника со стороны выводов 1-1', когда к выводам 2-2' подключено произвольное комплексное сопротивление  $Z_2$  (рис.7.4.1.а). Символом  $Z_{2\text{ ВХ}}$  обозначим сопротивление четырёхполюсника со стороны выводов 2-2', когда к выводам 1-1' подключено произвольное комплексное сопротивление  $Z_1$  (рис.7.4.1.б).

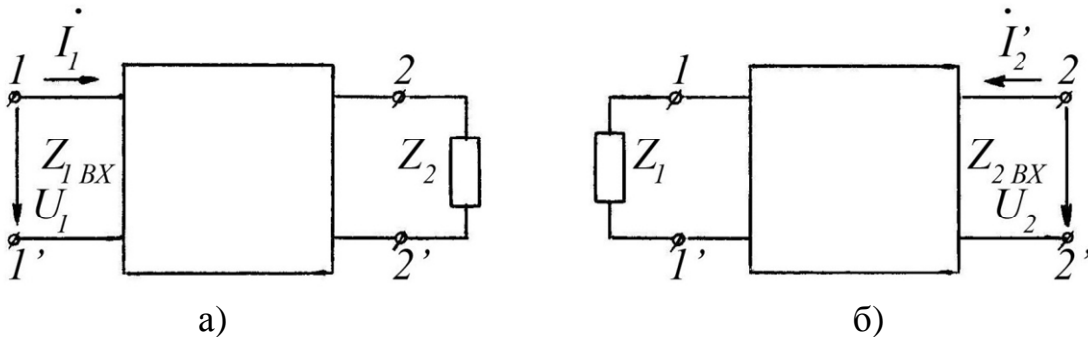


Рис.7.4.1

Тогда входное сопротивление  $Z_{1\text{ ВХ}}$  равно отношению напряжения к силе тока при прямой передаче энергии (от выводов 1-1' к выводам 2-2'):

$$Z_{1 \text{ ВХ}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1},$$

а сопротивление  $Z_{2 \text{ ВХ}}$  равно отношению напряжения  $\dot{U}_2$  к силе тока  $\dot{I}'_2$  при обратной передаче энергии (от выводов 2-2' к выводам 1-1'):

$$Z_{2 \text{ ВХ}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}'_2}.$$

Входные сопротивления четырёхполюсника могут быть выражены через любую систему коэффициентов и комплексные сопротивления нагрузок  $Z_1$  и  $Z_2$ . Например, если воспользоваться системой уравнений (7.2.3), то, разделив первое уравнение этой системы на второе, получим:

$$Z_{1 \text{ ВХ}} = \frac{A_{11} \cdot Z_2 + A_{12}}{A_{21} \cdot Z_2 + A_{22}}. \quad (7.4.1)$$

При передаче энергии в обратном направлении, используя систему уравнений (7.2.16), можно выразить входное сопротивление со стороны зажимов 2-2':

$$Z_{2 \text{ ВХ}} = \frac{A_{22} \cdot Z_1 + A_{12}}{A_{21} \cdot Z_1 + A_{11}}. \quad (7.4.2)$$

Подстановка соотношения (7.3.5) в уравнения (7.4.1) и (7.4.2) позволяет выразить входные сопротивления  $Z_{1 \text{ ВХ}}$  и  $Z_{2 \text{ ВХ}}$  через параметры четырёхполюсника:

$$\begin{cases} Z_{1 \text{ ВХ}} = Z_{1 \text{ Х.Х.}} \cdot \frac{Z_2 + Z_{2 \text{ К.З.}}}{Z_2 + A_{2 \text{ Х.Х.}}}; \\ Z_{2 \text{ ВХ}} = Z_{2 \text{ Х.Х.}} \cdot \frac{Z_1 + Z_{1 \text{ К.З.}}}{Z_1 + A_{1 \text{ Х.Х.}}}. \end{cases}$$

Полученные функции  $Z_{1 \text{ ВХ}} = f_1(Z_2)$  и  $Z_{2 \text{ ВХ}} = f_2(Z_1)$  представляют собой дробно-линейные соотношения, связывающие сопротивления на входах четырёхполюсника, и иллюстрируют свойство четырёхполюсников, которое заключается в возможности преобразования их сопротивлений.

## 7.5. Характеристические параметры четырёхполюсника

Предположим, что сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  в схемах на рис.7.4.1 подобраны так, что  $Z_{1 \text{ ВХ}} = Z_1$  и  $Z_{2 \text{ ВХ}} = Z_2$ , то есть будем считать, что существуют два сопротивления  $Z_1 = Z_{1 \text{ с}}$  и  $Z_2 = Z_{2 \text{ с}}$ , удовлетворяющих следующему условию: 1) входное сопротивление  $Z_{1 \text{ ВХ}}$  четырёхполюсника, нагруженного сопротивлением  $Z_{2 \text{ с}}$ , равно  $Z_{1 \text{ с}}$ ; 2) входное сопротивление  $Z_{2 \text{ ВХ}}$  четырёхполюсника, нагруженного сопротивлением  $Z_{1 \text{ с}}$ , равно  $Z_{2 \text{ с}}$  (рис.7.5.1.а, б).

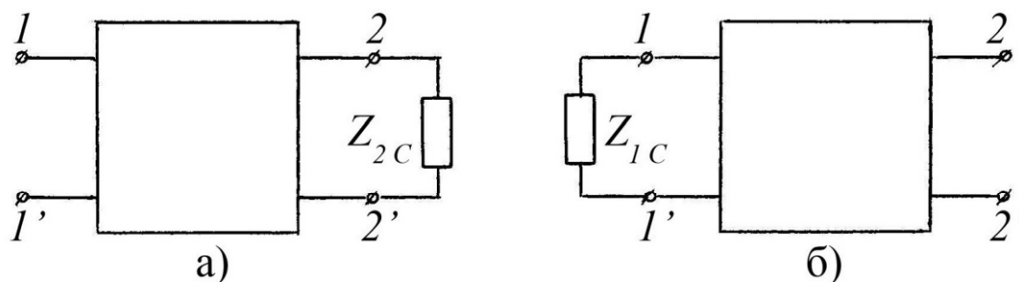


Рис.7.5.1

Сопротивления  $Z_{1C}$  и  $Z_{2C}$  называются *характеристическими сопротивлениями* четырёхполюсника. Если четырёхполюсник нагружен характеристическим сопротивлением, то нагрузка называется *согласованной*.

Подстановка соотношений  $Z_{1BX}=Z_1=Z_{1C}$  и  $Z_{2BX}=Z_2=Z_{2C}$  в уравнения (7.4.1) и (7.4.2) позволяет выразить характеристические сопротивления четырёхполюсника через  $A$  параметры:

$$\begin{cases} Z_{1C} = \frac{A_{11} \cdot Z_{2C} + A_{12}}{A_{21} \cdot Z_{2C} + A_{22}} \\ Z_{2C} = \frac{A_{22} \cdot Z_{1C} + A_{12}}{A_{21} \cdot Z_{1C} + A_{11}} \end{cases}$$

Совместное решение этих уравнений относительно  $Z_{1C}$  и  $Z_{2C}$  даёт возможность выразить характеристические сопротивления через параметры  $A_{ij}$ :

$$Z_{1C} = \sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}}; \quad Z_{2C} = \sqrt{\frac{A_{22} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{11}}}.$$

## 7.6. Передаточная функция

*Передаточной функцией* называется зависимость от частоты отношения комплексных амплитуд или комплексных действующих значений электрических величин на выходе и входе четырёхполюсника при заданном режиме работы. Причём именно выходную электрическую величину делят на входную величину, а не наоборот.

Передаточные функции, соответствующие отношению *одноимённых* величин, называются:

$$k_u = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 \text{ - коэффициентом передачи по напряжению;}$$

$$k_i = \dot{I}_2 / \dot{I}_1 \text{ - коэффициентом передачи по току}$$

и в общем случае являются комплексными величинами, зависящими от частоты. Применительно к усилительным устройствам передаточные функ-

ции называют соответственно коэффициентом усиления по напряжению и коэффициентом усиления по току.

Отношения разноимённых величин называют:

$$Z = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \quad - \text{ передаточным сопротивлением,}$$

$$Y = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \quad - \text{ передаточной проводимостью.}$$

Они имеют размерность соответственно сопротивления и проводимости и также являются комплексными величинами, зависящими от частоты.

*Зависимости от частоты модулей комплексных отношений называются амплитудно-частотными характеристиками, а зависимости от частоты их аргументов называются фазо-частотными характеристиками.*

В общем случае четырёхполосника, нагруженного произвольным сопротивлением  $Z_2$ , передаточные функции могут быть выражены через любую систему коэффициентов и через сопротивление  $Z_2$ .

При прямой передаче энергии коэффициенты усиления удобно выражать через коэффициенты  $A_{ij}$ :

$$k_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{A_{11} \cdot \dot{U}_2 + A_{12} \cdot \dot{I}_2} = \frac{Z_2}{A_{11} \cdot Z_2 + A_{12}};$$

$$k_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_2}{A_{21} \cdot \dot{U}_2 + A_{22} \cdot \dot{I}_2} = \frac{1}{A_{21} \cdot Z_2 + A_{22}}.$$

При холостом ходе и коротком замыкании выражения коэффициентов усиления упрощаются:

$$k_{u \text{ х.х.}} = \frac{1}{A_{11}}; \quad k_{i \text{ к.з.}} = \frac{1}{A_{22}}.$$

В случае передаче энергии в обратном направлении выражения коэффициентов усиления принимают следующий вид:

$$k'_{u \text{ х.х.}} = \frac{1}{A_{22}}; \quad k'_{i \text{ к.з.}} = \frac{1}{A_{11}}.$$

Сравнение последних четырёх соотношений показывает, что для обратимого четырёхполосника коэффициент передачи по напряжению при холостом ходе и прямой передаче энергии равен коэффициенту передачи по току при коротком замыкании и обратном направлении передачи энергии. Коэффициент передачи по току при коротком замыкании и прямом направлении передачи энергии равен коэффициенту передачи по напряжению при холостом ходе и обратном направлении передачи энергии.

## Глава VIII. ТРЁХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

### 8.1. Трёхфазный генератор. Классификация трёхфазных электрических цепей

При использовании электроэнергии исключительное преимущество даёт применение трёхфазных электрических цепей.

Трёхфазные электрические цепи разработаны и внедрены в отечественную электроэнергетику выдающимся русским учёным М.О. Доливо-Добровольским.

*Трёхфазная система электрических цепей представляет собой совокупность трёх сходных по конфигурации электрических цепей переменного тока, в которых действуют три периодические ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе.*

*Отдельные электрические цепи, входящие в трёхфазную систему цепей, называются фазами и обозначаются первыми тремя заглавными буквами латинского алфавита: А, В и С.*

Трёхфазные системы электрических цепей подразделяют на *несвязанные*, отдельные фазы которых электрически не соединены друг с другом, и *связанные*, в которых все три фазы электрически соединены друг с другом и, практически, образуют одну электрическую цепь. Связанную электрическую цепь сокращённо называют трёхфазной цепью.

Различают симметричные и несимметричные трёхфазные электрические цепи. *Трёхфазные электрические цепи, отдельные фазы которых одинаковы не только по конфигурации, но и по всем параметрам входящих в них элементов, называются симметричными трёхфазными цепями.* Электрические цепи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, называются *несимметричными* цепями.

*Генераторы, предназначенные для получения трёх ЭДС строго одинаковой частоты, сдвинутых друг относительно друга по фазе на определённые углы, называются трёхфазными генераторами.*

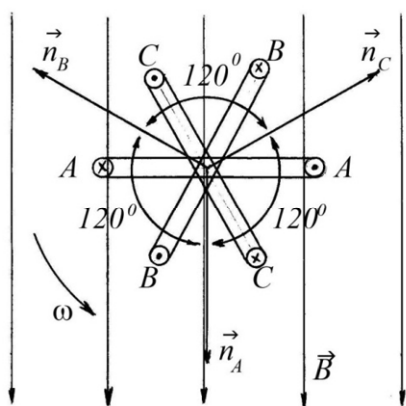


Рис.8.1.1

Трёхфазный генератор содержит три проволочные рамки, жёстко скреплённые между собой и расположенные в однородном магнитном поле индукцией  $\vec{B}$  (рис. 8.1.1, 8.1.2.a). Рамки могут вращаться вокруг общей оси, перпендикулярной линиям магнитной индукции. Плоскости рамок повернуты друг относительно друга на углы, равные  $120^\circ$ .

При вращении такой системы рамок с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в каждой

рамке индуцируется синусоидальная электродвижущая сила. Начальная фаза каждой ЭДС определяется исходным положением рамки относительно

вектора магнитной индукции. При начальном положении системы рамок, показанном на рис. 8.1.1, в рамке  $A$ , нормаль  $n_A$  к плоскости которой совпадает с направлением вектора  $B$ , начальная фаза электродвижущей силы  $e_A$ , индуцируемой в этой рамке, равна нулю, то есть  $e_A(t) = E_{Am} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ . Графически ЭДС может быть представлена в виде синусоиды (линия  $e_A$  на рис. 8.1.2.б) или вектора, совпадающего с действительной осью (рис. 8.1.2.в).

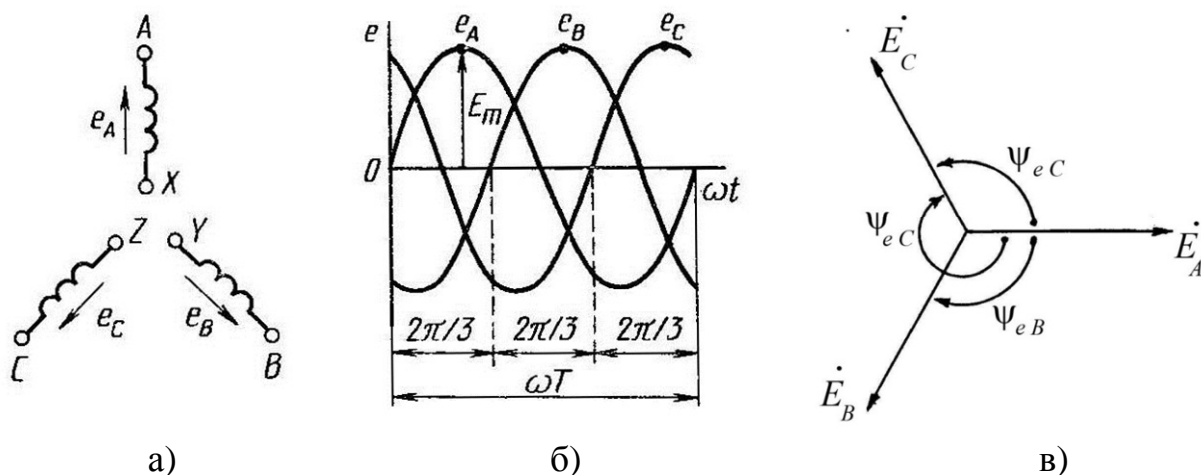


Рис.8.1.2

Поскольку нормаль  $n_B$  к рамке  $B$ , сдвинута на угол  $120^\circ$  относительно  $n_A$  в направлении, противоположном вращению, то ЭДС  $e_B$  отстаёт по фазе от  $e_A$  на  $120^\circ$ , то есть имеет начальную фазу  $\psi_{eB} = -\frac{2}{3} \cdot p$ . Поэтому ЭДС фазы  $B$  характеризуется следующим уравнением:  $e_B(t) = E_{Bm} \cdot \sin(\omega \cdot t - \frac{2}{3} \cdot p)$ .

ЭДС рамки  $C$  отстаёт по фазе от ЭДС рамки  $B$  на угол  $120^\circ$ , или на угол  $240^\circ$  от ЭДС, или, что то же, опережает ЭДС фазы  $A$  на угол  $120^\circ$  (рис. 8.1.2). Таким образом, электродвижущая сила фазы  $C$  описывается уравнением:  $e_C(t) = E_{Cm} \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{2}{3} \cdot p)$ .

Электродвижущие силы, создаваемые трёхфазным генератором, описываются уравнениями:

$$\begin{cases} e_A(t) = E_{Am} \cdot \sin(\omega \cdot t); \\ e_B(t) = E_{Bm} \cdot \sin(\omega \cdot t - \frac{2}{3} \cdot p) \\ e_C(t) = E_{Cm} \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{2}{3} \cdot p) \end{cases} \quad (8.1.1)$$

Совокупность трёх ЭДС трёхфазного генератора (рис. 8.1.1) называется трёхфазной системой ЭДС. В нормально функционирующих трёхфазных генераторах все три синусоидальные ЭДС системы имеют одинаковые амплитудные и, следовательно, действующие значения:

$E_{Am} = E_{Bm} = E_{Cm}$  и  $E_A = E_B = E_C$ . В симметричном трёхфазном генераторе электродвижущие силы сдвинуты друг относительно друга на равные углы (по  $120^\circ$ ) и образуют симметричную систему ЭДС. Если хотя бы одно из перечисленных условий не выполняется, то есть ЭДС различаются по величине или сдвинуты друг относительно друга по фазе на разные углы, то система электродвижущих сил является несимметричной. Под действием системы трёх ЭДС в трёхфазной системе текут три сдвинутых по фазе друг относительно друга тока, составляющих трёхфазную систему токов.

## 8.2. Несвязанная трёхфазная система электрических цепей

На рис. 8.2.1 представлена несвязанная трёхфазная система электрических цепей. Три обмотки трёхфазного генератора, называемые *фазами генератора*, изображены на рисунке тремя катушками, повернутыми на схеме одна относительно другой на  $120^\circ$ , что соответствует конструкции трёхфазных генераторов.

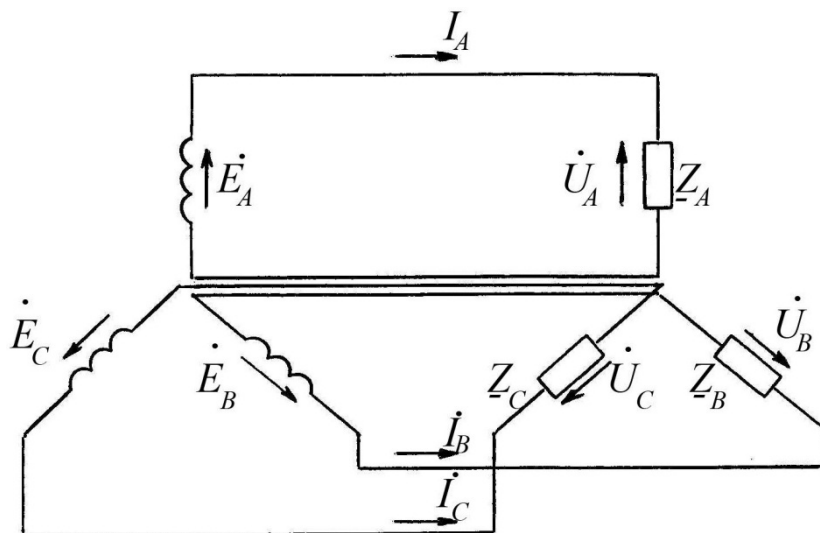


Рис.8.2.1

Три соединённых с катушками приёмника с сопротивлениями  $\underline{Z}_A$ ,  $\underline{Z}_B$ ,  $\underline{Z}_C$ , называемых *фазами приёмника*, образуют в совокупности трёхфазный приёмник. На схеме фазы приёмника изображают повернутыми друг относительно друга на углы по  $120^\circ$ . Полагая внутренние сопротивления фаз генератора и соединительных проводов равными нулю, токи в фазах цепи генератора можно описать выражениями:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{\underline{Z}_A}, \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B}{\underline{Z}_B}, \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C}{\underline{Z}_C}. \quad (8.2.1)$$

В общем случае несимметричной системы трёхфазных электрических цепей, когда комплексные сопротивления отдельных фаз

$$(\underline{Z}_A = z_A \cdot e^{j\varphi_A}; \quad \underline{Z}_B = z_B \cdot e^{j\varphi_B}; \quad \underline{Z}_C = z_C \cdot e^{j\varphi_C})$$

различны, а системы трёх ЭДС генератора также несимметричны (рис. 8.2.2.а), то режим работы электрической цепи можно характеризовать векторной диаграммой, представленной на рис. 8.2.2.б. Здесь токи  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$ ,  $\dot{I}_C$  сдвинуты относительно соответствующих ЭДС на различные фазовые углы  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$ ,  $\varphi_C$  (рис. 8.2.2.б) и образуют несимметричную систему токов.

При симметричной системе ЭДС генератора и симметричном приёмнике ( $Z_A = Z_B = Z_C$ ) токи также образуют симметричную систему (рис. 8.2.2.в), поскольку все токи равны по величине и сдвинуты относительно соответствующих ЭДС на одинаковые углы  $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi$ . Поскольку векторы ЭДС  $\dot{E}_A$ ,  $\dot{E}_B$ ,  $\dot{E}_C$  повернуты друг относительно друга на равные углы (по  $120^\circ$ ), то векторы токов сдвинуты друг относительно друга на такие же углы ( $120^\circ$ ).

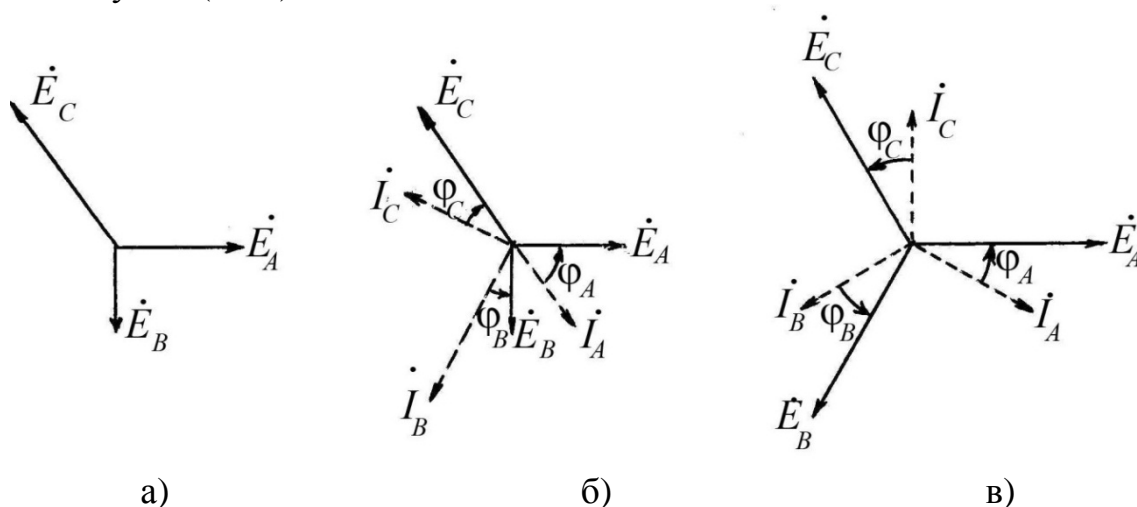


Рис.8.2.2

*Режим работы электрической цепи, при котором как система ЭДС, так и система токов являются симметричными, называется симметричным режимом работы трёхфазной системы электрических цепей.*

Связывание трёхфазных электрических цепей, то есть электрическое соединение между собой отдельных фаз, осуществляется двумя различными способами, приводящими к двум схемам, называемым «звездой» и «треугольником».

### 8.3. Трёхфазная звезда

Трёхфазную электрическую цепь, соединённую звездой, можно получить из несвязанной системы электрических цепей (рис. 8.2.1) путём объединения трёх обратных проводов в один провод, называемый *нейтральным* (или *нулевым*) проводом (рис. 8.3.1.а).

Образовавшиеся при этом узлы  $N$  и  $n$ , в первом из которых ( $N$ ) объединены выводы обмоток генератора, а во втором ( $n$ ) – выводы фаз приёмника, называются *нейтральными точками* соответственно генератора и приёмника. Провод  $Nn$ , соединяющий нейтральные точки генератора и приёмника, называется *нейтральным проводом*.

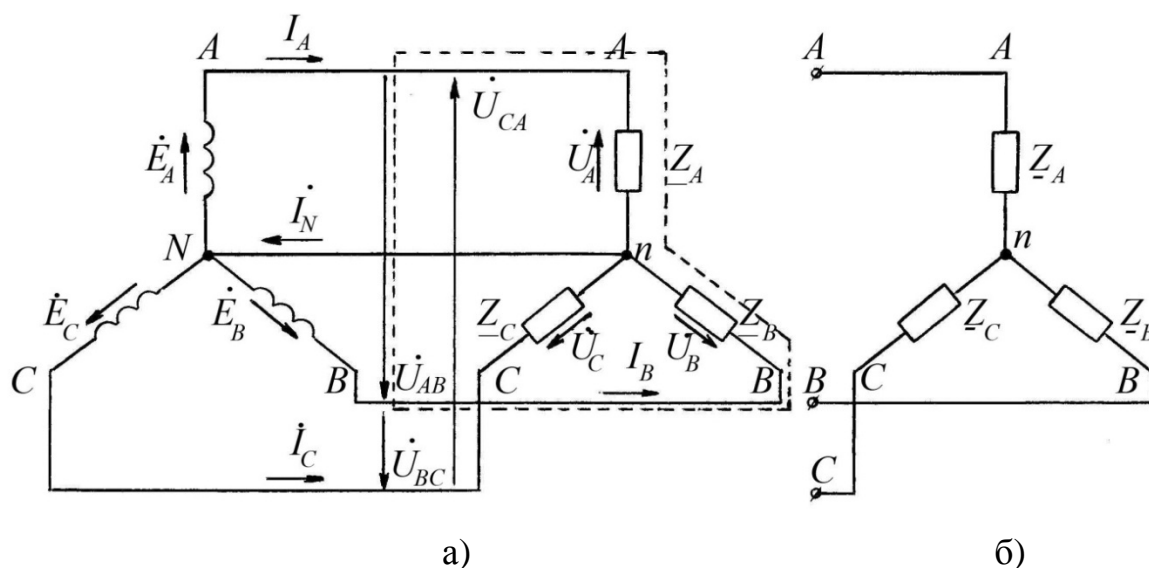


Рис.8.3.1

Провода  $A-A$ ,  $B-B$  и  $C-C$ , соединяющие вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  звёзд генератора и приёмника, называются *линейными проводами*. Преобразование трёхфазной несвязанной электрической цепи в связанную цепь не влечёт за собой изменения режима её работы. Токи  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$ ,  $\dot{I}_C$  в линейных проводах трёхфазной электрической цепи (рис. 8.3.1), называются *линейными токами*. Согласно первому закону Кирхгофа ток  $\dot{I}_N$  в нейтральном проводе равен алгебраической линейных сумме токов:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \quad (8.3.1)$$

Если в трёхфазной звезде система линейных токов симметрична, то есть на векторной диаграмме токи изображаются векторами равной длины, повёрнутыми друг относительно друга на угол  $120^\circ$  (рис. 8.2.2.в), то их геометрическая сумма равна нулю. В этом случае ток в нейтральном проводе отсутствует, и нет необходимости в нейтральном проводе. Трёхфазная электрическая цепь без нейтрального провода называется *трёхпроводной* (рис. 8.3.1.б).

Исключение нейтрального провода в трёхфазной звезде обеспечивает значительную экономию материала соединительных проводов по сравнению с однофазной электрической цепью такой же мощности. Экономия материала проводов в трёхфазных электрических цепях по сравнению с однофазными цепями обеспечивается не только в трёхпроводных, но и в четырёхпроводных цепях. Действительно, даже при относительно резко выраженной асимметрии токов их геометрическая сумма, равная току в нейтральном проводе, практически не достигает значения  $3 \cdot I_L$  ( $I_L$  – линейный ток). Поэтому площадь сечения нейтрального провода значительно меньше утроенного значения сечения линейного провода.

В трёхфазной электрической цепи, соединённой звездой, различают две системы напряжений.

Напряжения  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  на фазах приёмника (рис. 8.3.1.а), то есть напряжения между соответствующими линейными проводами и нейтральной точкой приёмника, называются **фазными** напряжениями.

Напряжения  $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$  между различными парами линейных проводов называются **линейными** напряжениями.

Установим связь между фазными и линейными напряжениями. С этой целью составим уравнение второго закона Кирхгофа для контура, выделенного пунктиром на рис. 8.3.1.а:  $\dot{U}_A - \dot{U}_B - \dot{U}_{AB} = 0$ . Следовательно,  $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B$ . С помощью аналогичных уравнений для контуров, содержащих другие пары фаз приёмника, выразим два других линейных напряжения ( $\dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ ) через фазные напряжения. Таким образом, получим систему трёх уравнений:

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \\ \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \\ \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \end{cases} \quad (8.3.2)$$

Таким образом, система линейных напряжений однозначно определяется системой фазных напряжений электрической цепи.

Соотношения (8.3.2) наглядно иллюстрируются векторной топографической диаграммой напряжений (рис. 8.3.2.а), построенной для принятых на рис. 8.3.1 направлений напряжений.

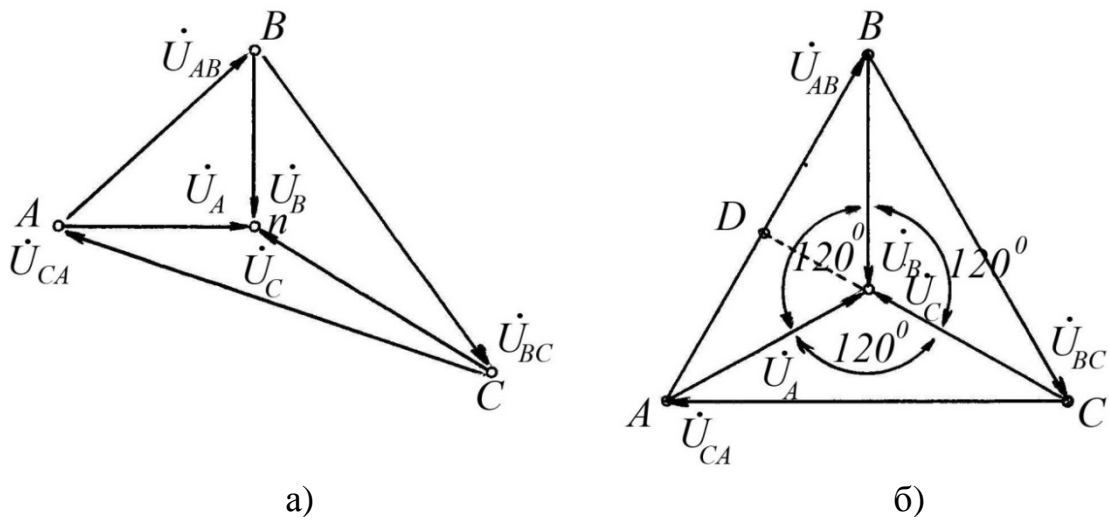


Рис.8.3.2

Векторная диаграмма (рис. 8.3.2.б) построена для общего случая симметричной системы ЭДС генератора и симметричного приёмника. Согласно правилам построения топографических диаграмм три вектора фазных напряжений представлены на диаграмме линиями, сходящимися в одной точке  $n$ , соответствующей нейтральной точке приёмника. Векторы выходят из точек  $A, B$  и  $C$ , являющихся вершинами звезды приёмника.

Векторы линейных напряжений являются сторонами треугольника  $ABC$ , который называют треугольником линейных напряжений.

На рис. 8.3.2.б приведена топографическая векторная диаграмма для частного случая, когда фазные и линейные напряжения представляют собой симметричные системы ( $U_A = U_B = U_C = U_\Phi$ ;  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_L$ ). В этом случае соотношение между фазными и линейными напряжениями может быть получено из рассмотрения, например, прямоугольного треугольника  $nDB$  (рис. 8.3.2.б). Здесь:  $DB = nB \cdot \cos 30^\circ$ . Поскольку

$$DB = \frac{U_L}{2}; \quad nB = U_\Phi; \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{то} \quad \frac{U_L}{2} = U_\Phi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Окончательно:

$$U_L = \sqrt{3} \cdot U_\Phi. \quad (8.3.3)$$

Таким образом, в трёхфазной звезде в симметричном режиме линейные напряжения в  $\sqrt{3}$  раз больше фазных напряжений.

#### 8.4. Трёхфазный треугольник

В трёхфазной электрической цепи, соединённой треугольником, не может быть нейтрального провода, поэтому трёхфазная цепь, соединённая треугольником, является трёхпроводной (рис. 8.4.1).

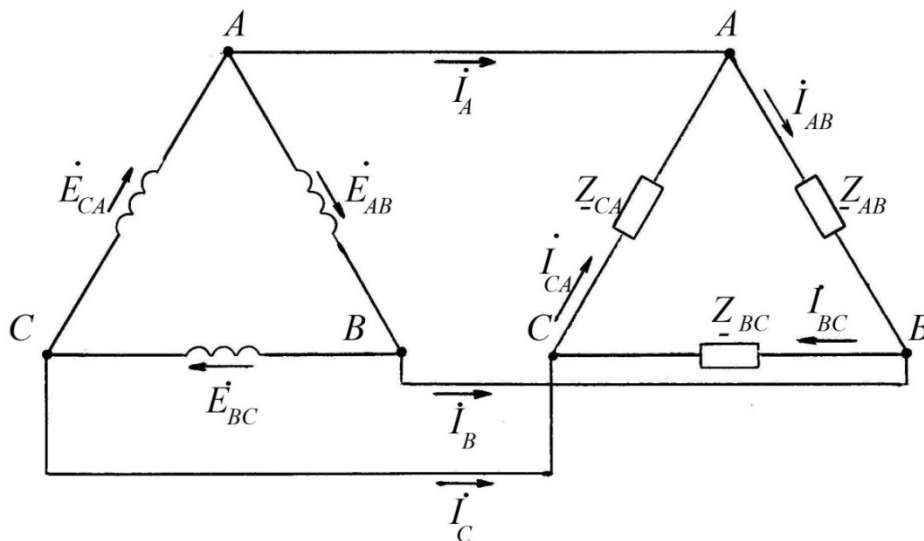


Рис.8.4.1

Во всех правильно сконструированных трёхфазных генераторах система ЭДС всегда является симметричной, поэтому их векторная сумма равна нулю (рис. 8.1.2.б). По этой причине токи в контуре генератора ЭДС отсутствуют.

В трёхфазных электрических цепях, соединённых треугольником, следует различать линейные и фазные токи.

Токи  $I_{AB}$ ,  $I_{BC}$ ,  $I_{CA}$  в фазах приёмника называются **фазными токами**.

Токи  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$ ,  $\dot{I}_C$  в линейных проводах называются **линейными токами**.

Применение первого закона Кирхгофа для узлов  $A$ ,  $B$  и  $C$  позволяет установить связь между фазными и линейными токами. Для направлений токов, указанных на рис. 8.4.1, фазные токи связаны с линейными токами следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \\ \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \\ \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{AB}. \end{cases} \quad (8.4.1)$$

На рис. 8.4.2.а приведена векторная диаграмма, иллюстрирующая построение линейных токов с помощью соотношений (8.4.1).

При симметричном режиме работы электрической цепи системы линейных и фазных токов также симметричны, то есть ( $I_A = I_B = I_C = I_L$ ;  $I_{AB} = I_{BC} = I_{CA} = I_\Phi$ ). Тогда из треугольника  $knt$  на рис. 8.4.2.б можно установить связь между линейными и фазными токами в симметричном режиме:  $nt = kn \cdot \cos 30^\circ$ , где  $nt = \frac{I_L}{2}$ ;  $kn = I_\Phi$ ;  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; следовательно,

$$\frac{I_L}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot I_\Phi$$

Окончательно:

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_\Phi. \quad (8.4.2)$$

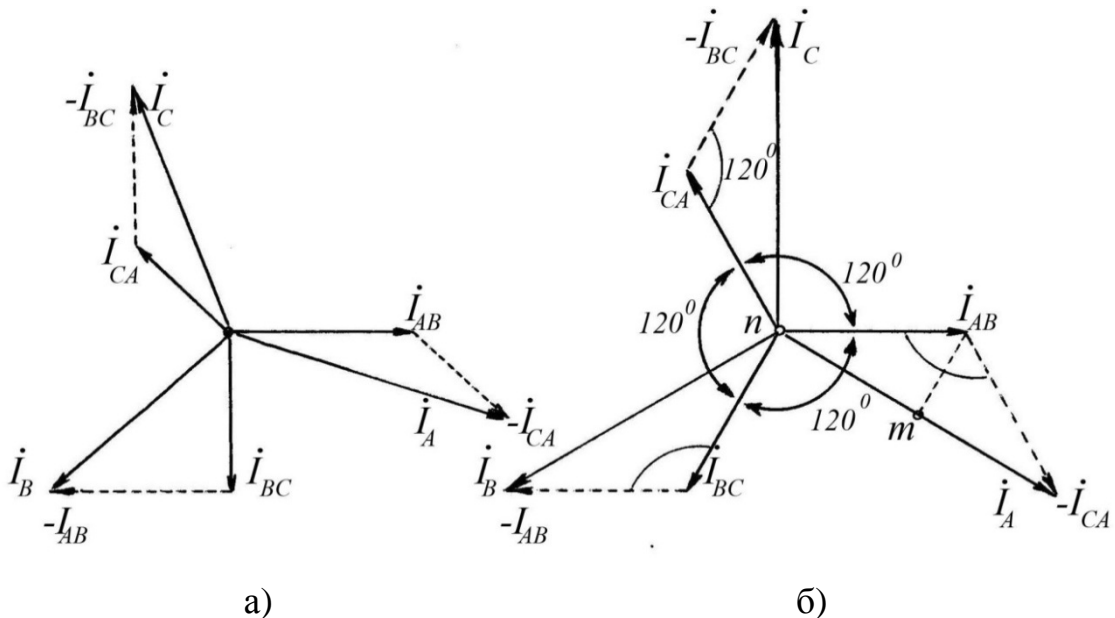


Рис.8.4.2

Таким образом, в трёхфазном треугольнике линейные токи в  $\sqrt{3}$  раз больше фазных токов при симметричном режиме работы.

## 8.5. Особенности расчёта трёхфазных электрических цепей

Поскольку трёхфазная электрическая цепь представляет собой сложную электрическую цепь с тремя источниками, для анализа её работы можно использовать любой метод расчёта сложных электрических цепей синусоидального тока.

**А. Правило круговой перестановки индексов.** Для упрощения расчёта трёхфазных электрических цепей необходимо придерживаться правил единообразия при выборе направлений токов и напряжений в отдельных фазах, токов в линейных проводах и линейных напряжений. Это значит, что, направив ток  $\dot{I}_A$  в линейном проводе  $A$ , например, к приёмнику (рис. 8.5.1.а), токи  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  в двух других линейных проводах следует направить также от источника к приёмнику.

Аналогично, выбрав направление напряжения  $\dot{U}_A$  в фазе звезды, например, от вершины к нейтральной точке, напряжения  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$  также следует направить к нейтральной точке.

Если в фазе  $AB$  треугольника ток  $\dot{I}_{AB}$  направлен от вершины, обозначенной предшествующей по алфавиту буквой, то этой последовательности следует придерживаться и при выборе направлений других фазных токов:  $\dot{I}_{BC}$  и  $\dot{I}_{CA}$ .

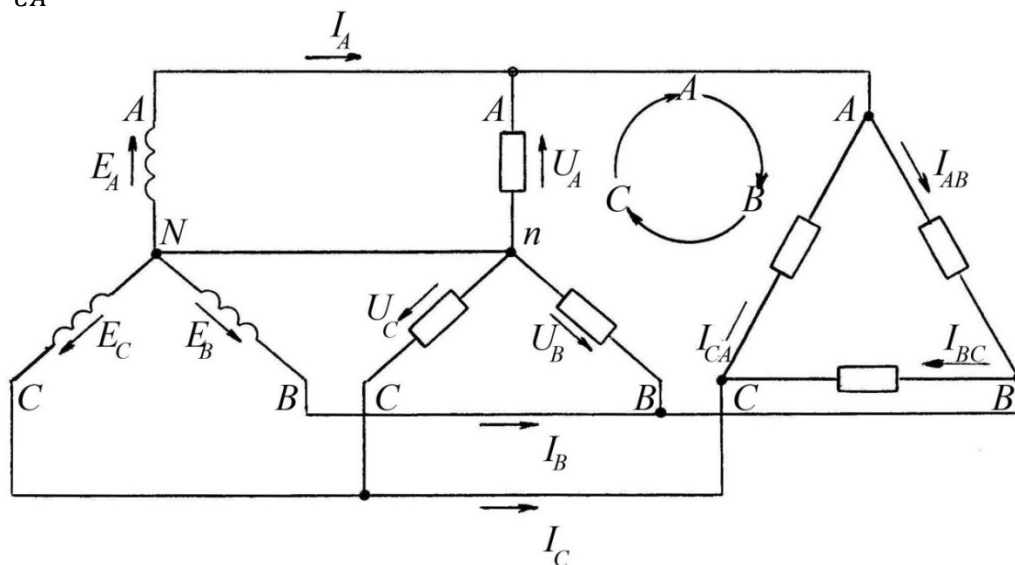


Рис.8.5.1

При соблюдении указанных рекомендаций в трёхфазных электрических цепях достигается полное единообразие формул расчёта режимов работы. Например, сравнение трёх формул системы (8.3.2) или (8.4.1), полученных с учётом требования единообразия выбора направлений, приводит к выводу о том, что каждое уравнение указанных систем может быть получено из предыдущего посредством круговой перестановки индексов. Это означает замену индекса  $A$  на следующий по алфавиту индекс  $B$ , замену  $B$  на  $C$ , замену  $C$  на  $A$ .

**Б. О применимости закона Ома.** В трёхфазных электрических цепях законом Ома могут быть связаны только фазные токи и напряжения. Подстановка в закон Ома линейных токов и напряжений приводит к грубым ошибкам. Неприменимость закона Ома к линейным токам и напряжениям объясняется тем, что три величины, входящие в закон Ома (сила тока, напряжение и сопротивление), должны принадлежать одному и тому же участку или элементу электрической цепи. В трёхфазных электрических цепях понятия линейного сопротивления не существует, а линейные токи и напряжения относятся к различным участкам электрической цепи. Поэтому закон Ома можно применять только для установления связей между фазными величинами.

**В. Оператор трёхфазной системы и его свойства.** Для записи токов, напряжений или ЭДС симметричной системы в комплексной форме удобно использовать комплексное число

$$a = e^{j\frac{2}{3}\pi} = e^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \cdot \sin 120^\circ = -0,5 + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (8.5.1)$$

являющееся оператором поворота векторов на угол  $120^\circ$  в положительном направлении (против часовой стрелки) и называемое *оператором трёхфазной системы*. Умножение вектора на оператор  $a$  означает поворот вектора на угол  $120^\circ$  против часовой стрелки. Соответственно, умножение вектора на множитель  $a^2$  приводит к повороту вектора против часовой стрелки на угол  $240^\circ$ . Очевидно:

$$\begin{aligned} a^2 &= e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ} = 0 - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ a^3 &= e^{j360^\circ} = 1. \\ a^4 &= a^3 \cdot a = a. \end{aligned}$$

Можно доказать, что

$$1 + a + a^2 = 0. \quad (8.5.2)$$

В случае симметричной системы ЭДС электродвижущие силы фаз  $B$  и  $C$  можно выразить через ЭДС фазы  $A$  с помощью оператора поворота:

$$\begin{cases} \dot{E}_B = a^2 \cdot \dot{E}_A; \\ \dot{E}_C = a \cdot \dot{E}_A. \end{cases} \quad (8.5.3)$$

## 8.6. Расчёт несимметричных режимов при непосредственном питании от сети

**А. Треугольник.** Питание приёмника, соединённого треугольником, осуществляется посредством трёхпроводной сети (рис. 8.6.1).

Поскольку заданные при этом линейные напряжения  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{CA}$  электрической цепи являются фазными напряжениями приёмника, их можно использовать для расчёта фазных токов:

$$i_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}; \quad i_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}; \quad i_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}},$$

где  $\underline{Z}_{AB}$ ,  $\underline{Z}_{BC}$ ,  $\underline{Z}_{CA}$  – сопротивления фаз приёмника.

По известным фазным токам с помощью уравнений (8.4.1) определяют линейные токи.

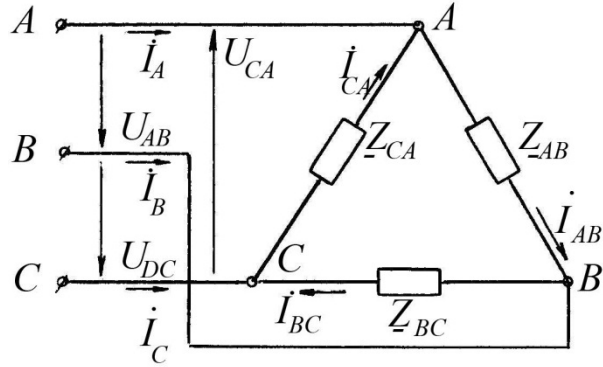


Рис.8.6.1

**Б. Звезда с нейтральным проводом.** В этом случае питание приёмника осуществляется по четырёхпроводной трёхфазной электрической цепи (рис. 8.6.2.а). Необходимые для решения задачи фазные напряжения нагрузки в данном случае равны напряжениям между линейными проводами и нейтральным проводом и могут быть измерены. Тогда фазные токи приёмника, являющиеся и линейными токами, определяют по известным фазным напряжениям и сопротивлениям фаз нагрузки:

$$i_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A}; \quad i_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B}; \quad i_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_C}. \quad (8.6.1)$$

Сила тока в нейтральном проводе  $i_N$  при указанных на рис. 8.6.2.а направлениях линейных токов равна:

$$i_N = i_A + i_B + i_C \quad (8.6.2)$$

**В. Звезда без нейтрального провода.** Расчёт режима работы трёхфазного приёмника, соединённого звездой без нейтрального провода (рис. 8.6.3.а), представляет собой более сложную задачу, чем расчёт четырёхпроводной звезды. Это объясняется тем, что в случае несимметричной нагрузки фазные напряжения приёмника не равны фазным напряжениям генератора. Поэтому требуется рассчитать фазные напряжения приёмника по заданным линейным напряжениям генератора.

Питание приёмника, соединённого звездой без нейтрального провода, осуществляется по трёхпроводной сети, для которой известна система линейных напряжений:  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{CA}$  (рис. 8.6.2.а).

Для расчёта токов и фазных напряжений приёмника необходимо записать первый закон Кирхгофа для нейтральной точки:

$$i_A + i_B + i_C = 0. \quad (8.6.3)$$

Выразив фазные токи приёмника через проводимости его фаз ( $\underline{Y}_A$ ,  $\underline{Y}_B$ ,  $\underline{Y}_C$ ) и фазные напряжения ( $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$ ,  $\dot{U}_C$ ) уравнениями  $i_A = \underline{Y}_A \cdot \dot{U}_A$ ,  $i_B = \underline{Y}_B \cdot \dot{U}_B$ ,  $i_C = \underline{Y}_C \cdot \dot{U}_C$  и подставив их в формулу (8.6.3), получим выражение, связывающее фазные напряжения приёмника:

$$\underline{Y}_A \cdot \dot{U}_A + \underline{Y}_B \cdot \dot{U}_B + \underline{Y}_C \cdot \dot{U}_C = 0. \quad (8.6.4)$$

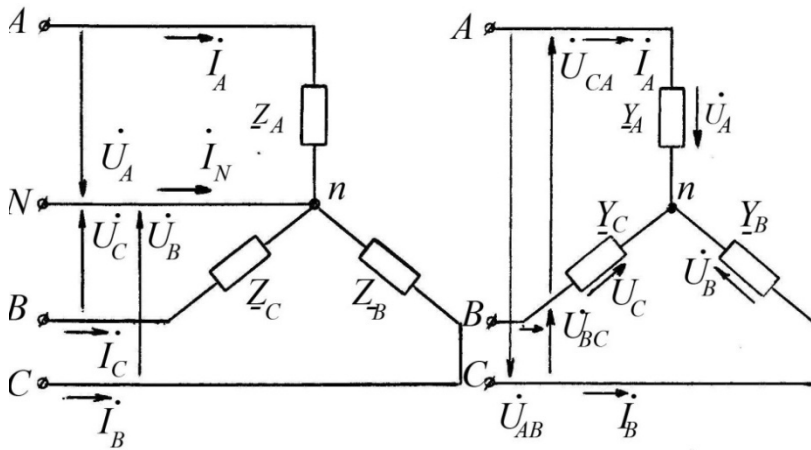
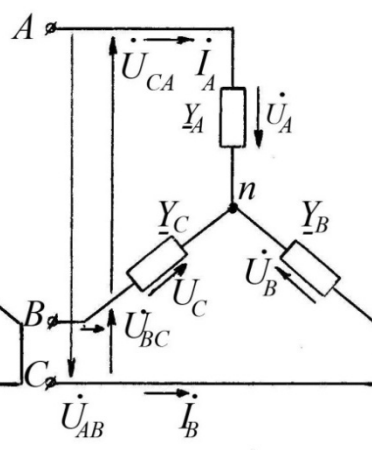
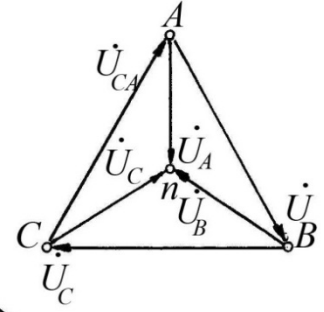


Рис.8.6.2



а)



б)

Рис.8.6.3

Уравнение (2.6.4) содержит три неизвестных фазных напряжения  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ . Для решения поставленной задачи выразим два фазных напряжения, например,  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$ , через напряжение фазы  $A$  приёмника, используя второй закон Кирхгофа:  $\dot{U}_A - \dot{U}_B - \dot{U}_{AB} = 0$ , следовательно,  $\dot{U}_B = \dot{U}_A - \dot{U}_{AB}$ . Аналогичным способом получим  $\dot{U}_C = \dot{U}_A + \dot{U}_{CA}$ . Подстановка этих соотношений в уравнение (8.6.4) позволяет выразить напряжение фазы  $A$  через известные линейные напряжения:

$$\underline{Y}_A \cdot \dot{U}_A + \underline{Y}_B \cdot (\dot{U}_A - \dot{U}_{AB}) + \underline{Y}_C \cdot (\dot{U}_A + \dot{U}_{CA}) = 0.$$

Окончательно получим:

$$\dot{U}_A = \frac{\underline{Y}_B \cdot \dot{U}_{AB} - \underline{Y}_C \cdot \dot{U}_{CA}}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \quad (8.6.5.A)$$

Аналогичным образом, исключая из исходного уравнения другие пары фазных напряжений или используя метод круговых перестановок индексов, выразим напряжения других фаз приёмника:

$$\dot{U}_B = \frac{\underline{Y}_C \cdot \dot{U}_{BC} - \underline{Y}_A \cdot \dot{U}_{AB}}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \quad (8.6.5.B)$$

$$\dot{U}_C = \frac{\underline{Y}_A \cdot \dot{U}_{CA} - \underline{Y}_B \cdot \dot{U}_{BC}}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \quad (8.6.5.C)$$

Подстановка фазных напряжений приёмника (8.6.5) в формулы (8.6.1) позволяет выразить токи.

На рис. 8.6.3.б построена векторная диаграмма напряжений приёмника. Фазные напряжения на диаграмме изображены векторами, выходящими из соответствующих вершин треугольника  $ABC$  линейных напряже-

ний и сходящимися в точке  $n$ , соответствующей нейтральной точке приёмника. Сходимость концов векторов фазных напряжений в одной точке ( $n$ ) является надёжным критерием правильности расчёта фазных напряжений.

## 8.7. Расчёт несимметричных режимов при питании через линию передачи

**А. Звезда без нейтрального провода.** При расчёте режима работы трёхфазного приёмника, соединённого звездой без нейтрального провода, подключённого с питающей сети через линию передачи с сопротивлениями  $\underline{Z}_{ЛА}, \underline{Z}_{ЛВ}, \underline{Z}_{ЛС}$ , отличными от нуля, известные линейные напряжения источника  $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$  не равны линейным напряжениям приёмника  $\dot{U}_{ab}, \dot{U}_{bc}, \dot{U}_{ca}$  (рис. 8.7.1.а). Для расчёта фазных напряжений приёмника  $\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c$  необходимо заменить сопротивления фаз приёмника ( $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$ ) и линии передачи эквивалентными сопротивлениями фаз:  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_{ЛА} + \underline{Z}_a$ ;  $\underline{Z}_B = \underline{Z}_{ЛВ} + \underline{Z}_b$ ;  $\underline{Z}_C = \underline{Z}_{ЛС} + \underline{Z}_c$ . При этом схема на рис. 8.7.1.а преобразуется к виду, представленному на рис. 8.6.3.а. Тогда расчёт фазных напряжений производится по формулам (8.6.5). Токи рассчитывают так же, как и для схемы на рис. 8.6.3.а. Линейные напряжения приёмника и напряжения на сопротивлениях в линейных проводах рассчитывают по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \dot{U}_a - \dot{U}_b; \quad \dot{U}_{bc} = \dot{U}_b - \dot{U}_c; \quad \dot{U}_{ca} = \dot{U}_c - \dot{U}_a; \\ \dot{U}_{ЛА} &= \dot{I}_A \cdot \underline{Z}_{ЛА}, \quad \dot{U}_{ЛВ} = \dot{I}_B \cdot \underline{Z}_{ЛВ}, \quad \dot{U}_{ЛС} = \dot{I}_C \cdot \underline{Z}_{ЛС}. \end{aligned}$$

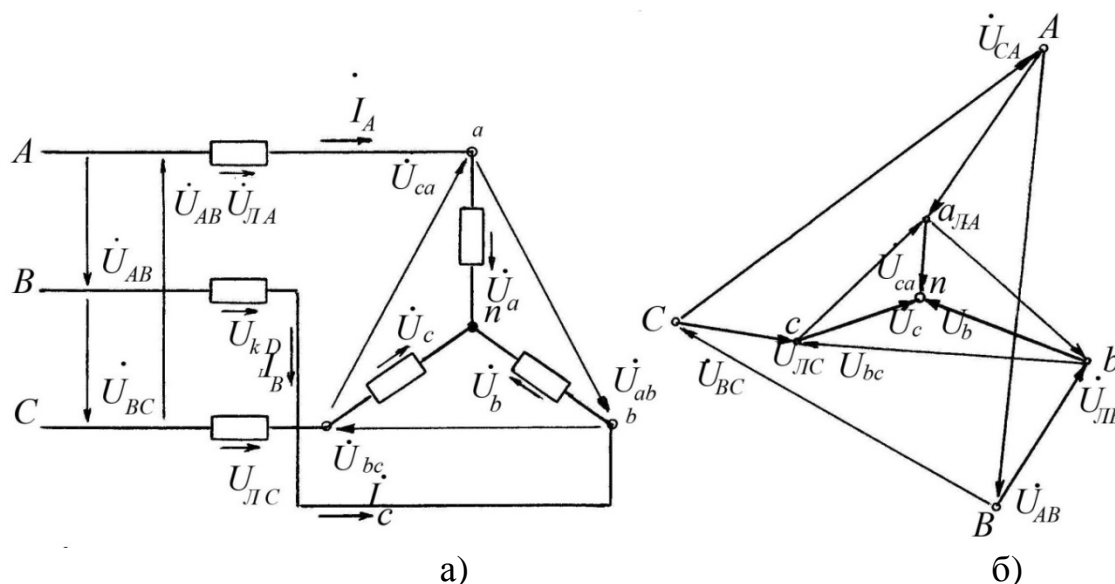


Рис. 8.7.1

На топографической векторной диаграмме напряжений (рис. 8.7.1.б) электрической цепи (рис. 8.7.1.а) векторы напряжений  $\dot{U}_{ЛА}, \dot{U}_{ЛВ}, \dot{U}_{ЛС}$  на сопротивлениях линейных проводов строят из вершин  $A, B$  и  $C$  треугольника линейных напряжений источника. Концы этих векторов определяют

на диаграмме положение точек  $a$ ,  $b$  и  $c$ , соответствующих вершинам звезды приёмника, из которых начинаются векторы его фазных напряжений  $\dot{U}_a$ ,  $\dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$ , сходящихся в нейтральной точке  $n$ . Векторы линейных напряжений приёмника  $\dot{U}_{ab}$ ,  $\dot{U}_{bc}$ ,  $\dot{U}_{ca}$  образуют треугольник  $abc$ .

**Б. Звезда с нейтральным проводом.** Расчёт звезды с нейтральным проводом (рис. 8.7.2.а) можно выполнить по упрощённой схеме (рис. 8.7.2.б). Здесь проводимости фаз равны:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{ЛА}} + \underline{Z}_a}; \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{ЛВ}} + \underline{Z}_b}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{ЛС}} + \underline{Z}_c}.$$

Поскольку нейтральный провод невозможно объединить ни с одной из фаз приёмника, будем характеризовать его проводимостью

$$\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}.$$

Первый закон Кирхгофа для нейтральной точки:  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_N$ .

Выразим токи через проводимости и фазные напряжения:

$$\dot{I}_A = \underline{Y}_A \cdot \dot{U}'_A, \quad \dot{I}_B = \underline{Y}_B \cdot \dot{U}'_B, \quad \dot{I}_C = \underline{Y}_C \cdot \dot{U}'_C.$$

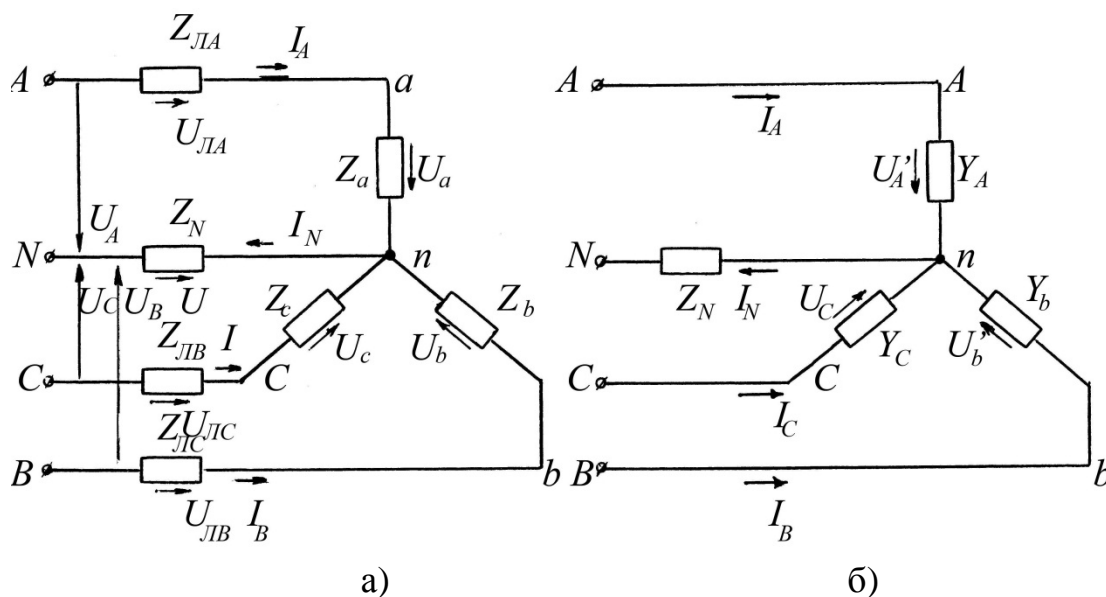


Рис.8.7.2

Подстановка данных выражений в первый закон Кирхгофа даёт:

$$\underline{Y}_A \cdot \dot{U}'_A + \underline{Y}_B \cdot \dot{U}'_B + \underline{Y}_C \cdot \dot{U}'_C = \underline{Y}_N \cdot \dot{U}_N. \quad (8.7.1)$$

Используя второй закон Кирхгофа для контуров, содержащих отдельные фазы, выразим фазные напряжения эквивалентного приёмника (рис. 8.7.2.б) через фазные напряжения источника и напряжение  $\dot{U}_N$ :

$$\dot{U}'_A = \dot{U}_A - \dot{U}_N; \quad \dot{U}'_B = \dot{U}_B - \dot{U}_N; \quad \dot{U}'_C = \dot{U}_C - \dot{U}_N. \quad (8.7.2)$$

Подстановка этих соотношений в уравнение (8.7.1) позволяет выразить напряжение на сопротивлении нейтрального провода:

$$\underline{Y}_A \cdot \dot{U}_A - \underline{Y}_A \cdot \dot{U}_N + \underline{Y}_B \cdot \dot{U}_B - \underline{Y}_B \cdot \dot{U}_N + \underline{Y}_C \cdot \dot{U}_C - \underline{Y}_C \cdot \dot{U}_N = \underline{Y}_N \cdot \dot{U}_N.$$

Окончательно:

$$\dot{U}_N = \frac{\underline{Y}_A \cdot \dot{U}_A + \underline{Y}_B \cdot \dot{U}_B + \underline{Y}_C \cdot \dot{U}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}. \quad (8.7.3)$$

Подстановка напряжения  $\dot{U}_N$ , рассчитанного с помощью формулы (8.7.3), в уравнения (8.7.2) позволяет найти фазные напряжения эквивалентного приёмника (рис. 8.7.2.б) и определить токи в цепи.

**В. Треугольник.** Для расчёта режима работы нагрузки, соединённой треугольником и подключённой к питающей сети через линию передачи (рис. 8.7.3.а), следует заменить треугольник эквивалентной звездой без нейтрального провода (рис. 8.7.3.б). Дальнейший расчёт режима работы электрической цепи выполняется рассмотренным выше методом.

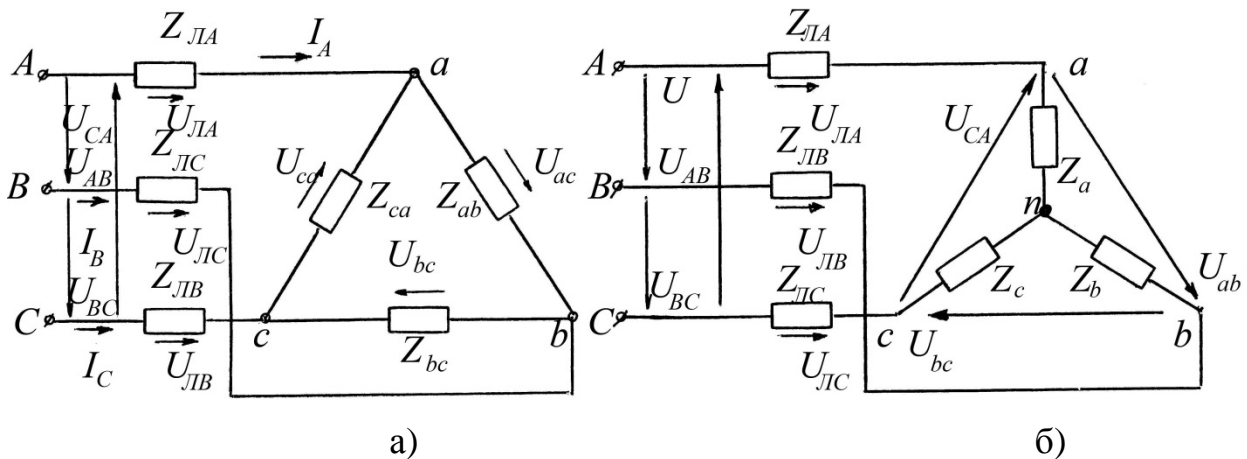


Рис.2.7.3

## 8.8. Мощность трёхфазной электрической цепи

**А. Активная мощность.** Активная мощность трёхфазной электрической цепи является скалярной величиной, отражающей среднюю скорость поступления энергии в электрическую цепь, равна алгебраической сумме активных мощностей отдельных фаз:  $P = P_A + P_B + P_C$ . Выражая слагаемые правой части равенства через действующие значения фазных напряжений и токов, полную активную мощность трёхфазной электрической цепи можно представить в виде:

$$P = U_A \cdot I_A \cdot \cos \varphi_A + U_B \cdot I_B \cdot \cos \varphi_B + U_C \cdot I_C \cdot \cos \varphi_C. \quad (8.8.1)$$

Здесь  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$ ,  $\varphi_C$  – углы сдвига фазных напряжений относительно соответствующих фазных токов в отдельных фазах трёхфазной электрической цепи.

При симметричном режиме работы электрической цепи, когда напряжения, токи и фазовые углы одинаковы, то есть  $U_A = U_B = U_C = U_\Phi$ ;  $I_A = I_B = I_C = I_\Phi$ ;  $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi$ , выражение (8.8.1) активной мощности упрощается:

$$P = 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Phi \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi. \quad (8.8.2)$$

Единицей измерения активной мощности является *ватт* [Вт].

**Б. Реактивная мощность.** Реактивная мощность трёхфазной электрической цепи равна алгебраической сумме реактивных мощностей отдельных фаз:  $Q = Q_A + Q_B + Q_C$ . Выражая слагаемые правой части данного равенства через действующие значения фазных напряжений и токов, реактивную мощность представляем в виде:

$$Q = U_A \cdot I_A \cdot \sin\varphi_A + U_B \cdot I_B \cdot \sin\varphi_B + U_C \cdot I_C \cdot \sin\varphi_C. \quad (8.8.3)$$

При симметричном режиме реактивная мощность трёхфазной электрической цепи описывается выражением:

$$Q = 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Phi \cdot \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi. \quad (8.8.4)$$

Единицей измерения реактивной мощности является *вольт-ампер реактивный* [ВАр].

**В. Полная мощность.** При симметричном режиме работы полная мощность трёхфазной электрической цепи выражается уравнением:

$$S = 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Phi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L. \quad (8.8.5)$$

При несимметричном режиме полная мощность, как и её реактивная составляющая, не даёт объективной характеристики энергетических процессов в электрической цепи и редко используется при практическом анализе. Полную мощность нельзя определить простым суммированием отдельных фаз. Полная мощность вычисляется как геометрическая сумма полной активной и реактивной мощности трёхфазной электрической цепи:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (8.8.6)$$

Единицей измерения полной мощности является *вольт-ампер* [ВА].

**Г. Комплексная мощность.** Комплексная мощность трёхфазной электрической цепи равна алгебраической сумме комплексных мощностей отдельных фаз:  $\tilde{S} = \tilde{S}_A + \tilde{S}_B + \tilde{S}_C$ .

Комплексную мощность можно выразить через комплексные фазные напряжения и сопряжённые комплексные фазные токи:

$$\tilde{S} = \dot{U}_A \cdot \dot{I}_A + \dot{U}_B \cdot \dot{I}_B + \dot{U}_C \cdot \dot{I}_C. \quad (8.8.7)$$

При симметричном режиме трёхфазной электрической цепи её комплексная мощность равна утроенному значению комплексной мощности одной фазы, например, фазы *A*:

$$\tilde{S} = 3 \cdot \tilde{S}_A = 3 \cdot \dot{U}_A \cdot \dot{I}_A. \quad (8.8.8)$$

**Д. Мгновенная мощность.** Мгновенная мощность трёхфазной электрической цепи при произвольном режиме работы равна сумме мгновенных мощностей отдельных фаз:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_A(t) + p_B(t) + p_C(t) = \\ &= u_A(t) \cdot i_A(t) + u_B(t) \cdot i_B(t) + u_C(t) \cdot i_C(t). \end{aligned} \quad (8.8.9)$$

Можно доказать, что в симметричном режиме

$$p(t) = 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Phi \cdot \cos\varphi = P = \text{const.}$$

Таким образом, в симметричном режиме мгновенная мощность не зависит от времени и является постоянной величиной, равной активной мощности трёхфазной электрической цепи. Это даёт существенное преимущество трёхфазным электрическим цепям перед однофазными цепями, в которых мощность, потребляемая нагрузкой, изменяется со временем.

Режим работы трёхфазной электрической цепи, в котором её мгновенная мощность неизменна, называется *уравновешенным режимом*.

### 8.9. Пульсирующее и вращающееся магнитное поле

Круговое вращающееся магнитное поле представляет собой такое магнитное поле, вектор результирующей магнитной индукции которого не изменяется по модулю и вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Вращающееся магнитное поле можно получить вращением подковообразного магнита или вращая проволочный виток, по которому течёт электрический ток.

Вращающееся магнитное поле имеет большое значение в электротехнике, поскольку на его использовании основано действие подавляющего большинства электродвигателей переменного тока. Неподвижные обмотки совместно с магнитопроводами, называемые статорами, создают вращающееся магнитное поле, которое увлекает за собой подвижную часть электродвигателей, называемую ротором. В зависимости от принципа, на котором основано стремление ротора следовать за вращающимся магнитным полем, различают два типа двигателей переменного тока: синхронные и асинхронные двигатели.

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое однофазным током.

Через катушку, условно изображённую на рис. 8.9.1 в виде витка, течёт синусоидальный ток  $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i)$ . Согласно правилу буравчика направлению тока, показанному на рис. 8.9.1, соответствует направление вектора магнитной индукции  $B(t) = B_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i)$ , обозначенное стрелкой. При изменении знака тока  $i$  направление вектора магнитной индукции изменяется на противоположное. Таким образом, расположение линий магнитной индукции в пространстве не меняется. Изменяется на-

правление вектора  $\vec{B}$ , то есть магнитное поле пульсирует вдоль оси катушки и называется *пульсирующим магнитным полем*.

Вращающееся магнитное поле можно получить с помощью двух concentрических обмоток (рис. 8.9.2.а), повернутых одна относительно другой на угол  $90^\circ$ . Если по этим обмоткам пропустить два одинаковых тока  $i_1$  и  $i_2$  указанных на рисунке направлений, то токи создадут два магнитных поля, векторы индукции которых  $B_1$  и  $B_2$  в центре обмоток направлены по нормалям  $n_1$  и  $n_2$  к плоскостям соответствующих обмоток в соответствии с правилом буравчика (рис. 8.9.2.а). Если бы токи  $i_1$  и  $i_2$  были постоянными, то магнитное поле не изменялось бы, то есть  $B = \text{const}$ .

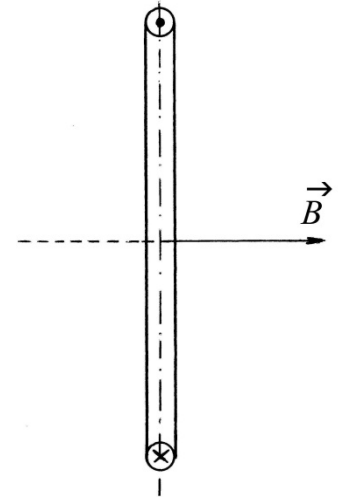


Рис.8.9.1

В рассмотренном случае токи  $i_1$  и  $i_2$  являются синусоидальными с одинаковыми амплитудными значениями, но сдвинуты друг относительно друга по фазе на четверть периода (рис. 8.9.2.б, рис. 8.9.3.а). В этом случае составляющие  $B_1$  и  $B_2$  результирующего магнитного поля двух катушек также будут изменяться со временем по синусоидальному закону, повторяя законы изменения токов  $i_1$  и  $i_2$ .

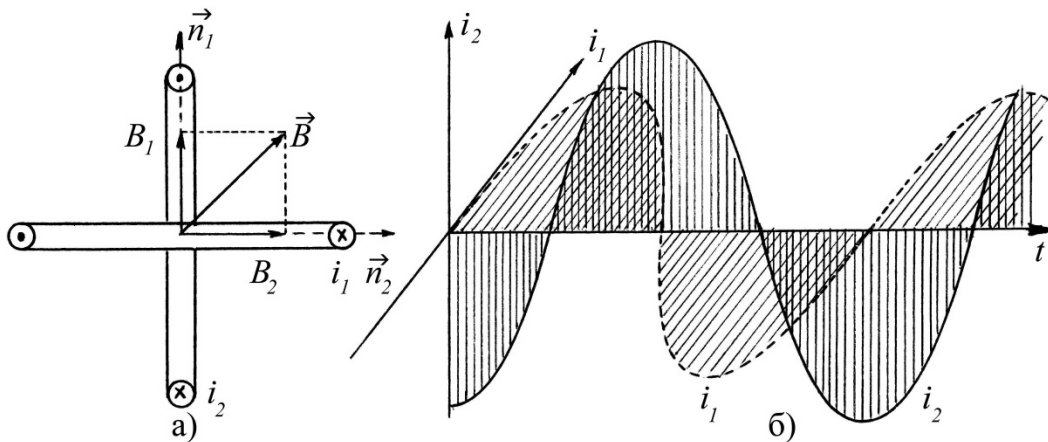


Рис.8.9.2

Направления этих векторов  $B_1$  и  $B_2$  совпадают с осями  $n_1$  и  $n_2$  обмоток. На рис. 8.9.3.б показано изменение со временем результирующего магнитного поля. Например, в момент времени  $t_1$ , когда значение силы тока  $i_1$  максимально, а  $i_2 = 0$ , индукция результирующего магнитного поля равна  $B_1$ , причём  $B = B_1 = B_m$  (рис. 8.9.3.б). При этом  $B_2 = 0$ . Через  $1/8$  часть периода, то есть в момент времени  $t_2$  ток  $i_1$ , а вместе с ним и индукция  $B_1$  уменьшится до значения (рис. 8.9.3.б)

$$B_1 = \frac{B_m}{\sqrt{2}}.$$

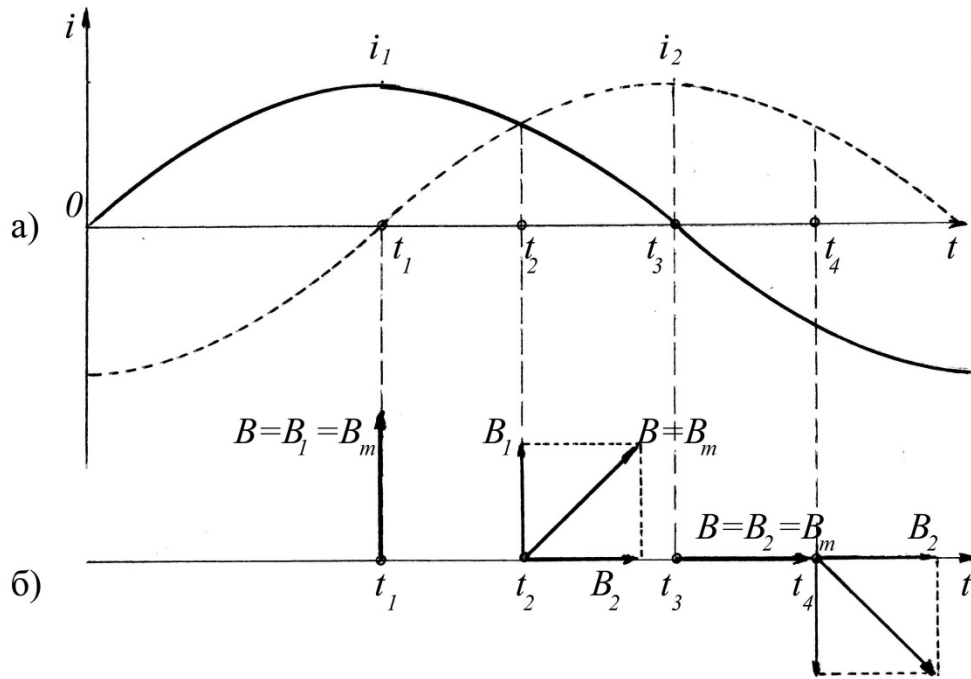


Рис. 8.9.3

К моменту времени  $t_2$  ток  $i_2$  увеличится, и индукция созданного им магнитного поля  $B_2$  достигнет значения  $B_2 = \frac{B_m}{\sqrt{2}}$ . Результирующий вектор магнитной индукции в момент времени  $t_2$  равен  $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = B_m$ .

В момент времени  $t_3$  магнитная индукция  $B_1$ , как и сила тока  $i_1$ , обращается в ноль, а индукция  $B_2$  достигнет максимального значения, равного  $B_m$ .

Таким образом, из рис. 8.9.3.б видно, что результирующий вектор магнитной индукции  $B$ , оставаясь неизменным по модулю, вращается в пространстве с частотой, равной частоте переменного тока в катушках. Поскольку токи  $i_1$  и  $i_2$  описываются гармоническими функциями

$$i_1(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t); i_2(t) = I_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right),$$

индукции создаваемых ими магнитных полей изменяются по закону синуса

$$B_1(t) = B_m \cdot \sin(\omega \cdot t); B_2(t) = B_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда результирующая индукция магнитного поля равна:

$$B = B_1 + B_2 = \sqrt{2} \cdot B_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Вращающееся магнитное поле можно получить с помощью трёхфазного тока. Для этого три одинаковые катушки располагают таким образом, чтобы их оси были сдвинуты на углы, равные  $120^\circ$  (рис. 8.9.4).

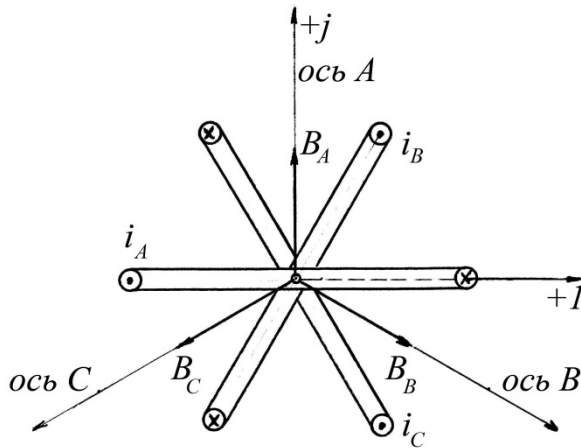


Рис.8.9.4

Если эти катушки подключить к симметричной трёхфазной электрической сети, то по катушкам будут течь токи:

$$\begin{cases} i_A(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t); \\ i_B(t) = I_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{2}{3} \cdot \pi\right); \\ i_C(t) = I_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{2}{3} \cdot \pi\right). \end{cases}$$

Направления токов в катушках, показанных на рис. 8.9.4, соответствуют обозначенным стрелками

направления векторов индукции, создаваемых токами  $i_A$ ,  $i_B$ ,  $i_C$ . Вследствие прямой пропорциональности индукции магнитного поля и силы тока, создающего эти поля, мгновенные значения ЭДС индукции выразятся уравнениями:

$$\begin{cases} B_A = B_m \cdot \sin(\omega \cdot t); \\ B_B = B_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{2}{3} \cdot \pi\right); \\ B_C = B_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{2}{3} \cdot \pi\right). \end{cases} \quad (8.9.1)$$

При выбранном на рис. 8.9.3 направлении действительной и мнимой оси результирующий вектор индукции магнитного поля, равный сумме векторов  $B_A$ ,  $B_B$  и  $B_C$ , описывается уравнением:

$$\dot{B} = j \cdot (B_A + a \cdot B_B + a^2 \cdot B_C). \quad (8.9.2)$$

Подстановка уравнений системы (8.9.1) в соотношение (8.9.2) определяет выражение результирующей магнитной индукции:

$$\dot{B} = 1,5 \cdot B_m \cdot [\cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t)] = 1,5 \cdot B_m \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}. \quad (8.9.3)$$

Из полученного выражения следует, что результирующий вектор индукции магнитного поля, создаваемого симметричной трёхфазной системой токов, имеет постоянный модуль, равный  $1,5 \cdot B_m$ , и равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Для изменения направления вращения магнитного поля достаточно поменять местами токи в любой паре катушек.

При асимметрии токов в катушках или асимметрии питающих напряжений вместо кругового вращающегося магнитного поля получается эллиптическое вращающееся поле, результирующий вектор магнитной индукции которого описывает эллипс и имеет переменную угловую скорость.

## 8.10. Принцип действия синхронных и асинхронных двигателей

В электрических машинах вращающееся магнитное поле создаётся симметричной трёхфазной системой токов, протекающих по обмоткам, размещённым в пазах неподвижной части машины – статора.

Простейшим по устройству и наиболее распространённым типом двигателя переменного тока является асинхронный двигатель, который изобрёл в 1888 г. М.О. Доливо-Добровольский.

Ротором двигателей этого типа может служить замкнутый виток, расположенный на валу, ось вращения которого совпадает с осью вращения магнитного поля (рис. 8.10.1). Линии индукции вращающегося магнитного поля пересекают виток, индуцируя в нём ЭДС. Возникающий в витке ток взаимодействует с магнитным полем, вызывая силу Ампера  $f$ . Под действием пары сил Ампера, приложенной к двум сторонам витка, виток вращается в направлении, определяемом правилом левой руки. Постепенно ускоряя вращение, угловая

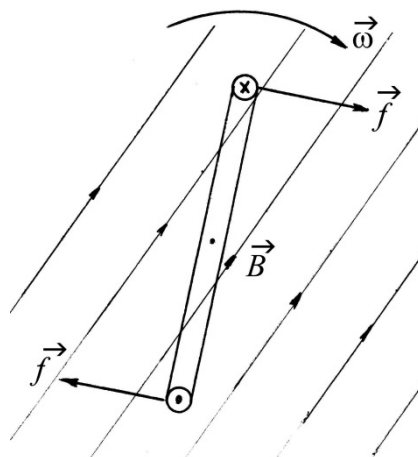


Рис.8.10.2

скорость вращения витка никогда не достигнет угловой скорости вращения магнитного поля. Если бы угловые скорости вращения магнитного поля и витка были одинаковы, исчезло бы их относительное перемещение, что привело бы к исчезновению ЭДС индукции. При этом вращающая виток сила Ампера оказалась бы равна нулю.

Таким образом, вращение вектора индукции магнитного поля и ротора не является синхронным, поэтому рассмотренный двигатель получил название *асинхронного двигателя*. Разность угловых скоростей магнитного поля ( $\omega_1$ ) и ротора ( $\omega$ ), отнесённая к угловой скорости вращения магнитного поля, называется *скольжением*:

$$S = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1} \cdot 100\%.$$

При нормальной нагрузке скольжение асинхронных двигателей составляет 2÷4%.

Трёхфазный генератор, как и многие электрические машины, обладает свойством обратимости, то есть может работать как синхронный двигатель. Поэтому конструктивно синхронный двигатель незначительно отличается от генератора.

Синхронный двигатель можно представить как прямой постоянный магнит  $N$ - $S$ , расположенный на оси  $O$  и расположенный в магнитном поле, перпендикулярном этой оси (рис. 8.10.3). Под действием магнитного поля магнит располагается так, чтобы ось  $N$ - $S$  магнита совпала с направлением магнитного поля.

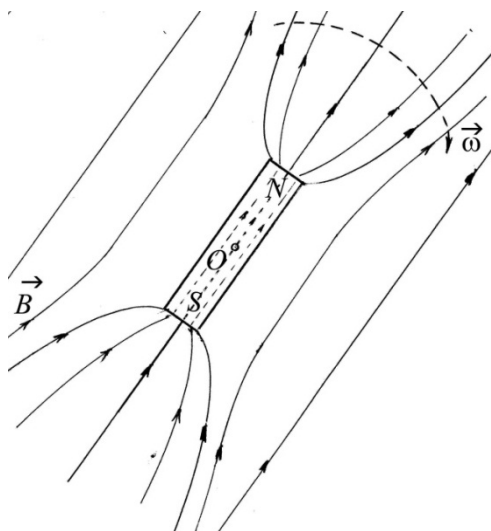


Рис.8.10.3

Если магнитное поле будет вращаться вокруг оси  $O$ , то и магнит будет вращаться синхронно с полем. Поэтому электродвигатели, действие которых основано на указанном принципе, называются *синхронными двигателями*.

В синхронных двигателях малой мощности в качестве ротора используют постоянный магнит. В мощных двигателях в качестве ротора применяют электромагниты, питаемые постоянным током. Если подключить обмотку статора к источнику трёхфазного тока, а обмотку ротора к источнику постоянного тока, то вращающееся магнитное поле статора будет периоди-

чески создавать приложенные к валу моменты сил разных знаков. Поэтому ротор будет не вращаться, а вибрировать. Для пуска такого двигателя необходимо сначала при разомкнутой обмотке ротора привести его во вращение с угловой скоростью, близкой к угловой скорости вращения магнитного поля. Если затем включить обмотку ротора, то двигатель «втянется в синхронизм». Ротор будет вращаться синхронно с магнитным полем статора. Для пуска синхронного двигателя используют специальную пусковую обмотку ротора, действующую так же, как и в асинхронном двигателе.

### 8.11. Метод симметричных составляющих

Для расчёта несимметричных режимов трёхфазных электрических цепей применяют метод симметричных составляющих, основанный на представлении любой трёхфазной несимметричной системы электрических величин (токов, напряжений, ЭДС) в виде суммы трёх симметричных систем. Эти симметричные системы величин, образующие в совокупности несимметричную систему, называются симметричными составляющими прямой, обратной и нулевой последовательности. Под последовательностью понимается порядок следования во времени максимумов фазных величин.

На рис. 8.11.1 представлены симметричные составляющие токов всех трёх последовательностей. Составляющие прямой, обратной и нулевой последовательности обозначаются соответственно индексами  $1$ ,  $2$  и  $0$ .

Система *прямой последовательности* (рис. 8.11.1.а) образует симметричную трёхлучевую звезду  $\dot{I}_{1A}$ ,  $\dot{I}_{1B}$ ,  $\dot{I}_{1C}$ , в которой временная очерёдность следования фаз соответствует алфавитному порядку величин  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Система, в которой последующая в обозначении величина опережает во времени предыдущую величину, называется *обратной последователь-*

ностью (рис. 8.11.1.б). Система обратной последовательности образует трёхлучевую звезду  $\dot{I}_{2A}$ ,  $\dot{I}_{2C}$ ,  $\dot{I}_{2B}$  с порядком следования фаз  $A$ ,  $C$ ,  $B$ .

Система, в которой фазные величины совпадают друг с другом по фазе, называется системой с нулевой последовательностью (рис. 8.11.1.в). Система нулевой последовательности состоит из трёх равных векторов.

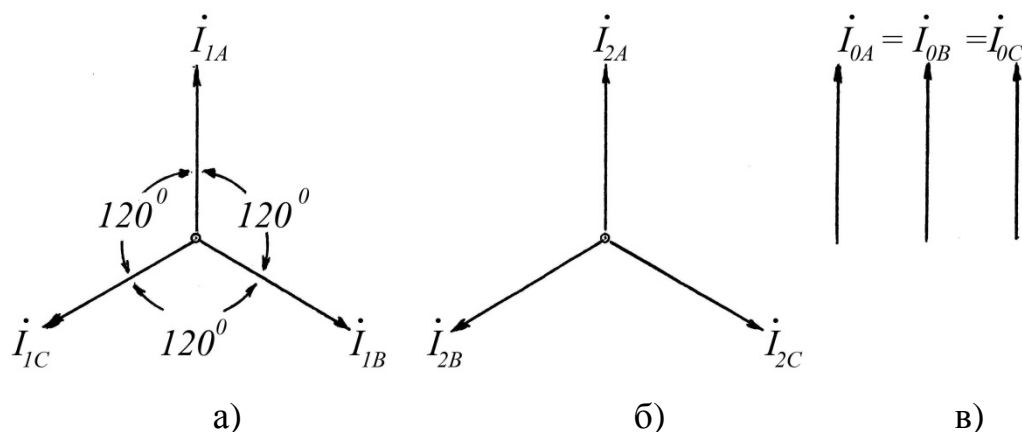


Рис. 8.11.1

Фазные токи прямой, обратной и нулевой последовательности связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{I}_{1B} = a^2 \cdot \dot{I}_{1A}; \\ \dot{I}_{1C} = a \cdot \dot{I}_{1A}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{I}_{2B} = a \cdot \dot{I}_{2A}; \\ \dot{I}_{2C} = a^2 \cdot \dot{I}_{2A}. \end{cases} \quad (8.11.1)$$

Поскольку составляющие несимметричной системы можно представить в виде суммы составляющих трёх симметричных систем – прямой, обратной и нулевой, токи в фазах  $A$ ,  $B$  и  $C$  можно записать в виде сумм:

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_{1A} + \dot{I}_{2A} + \dot{I}_{0A}; \\ \dot{I}_B = \dot{I}_{1B} + \dot{I}_{2B} + \dot{I}_{0B}; \\ \dot{I}_C = \dot{I}_{1C} + \dot{I}_{2C} + \dot{I}_{0C}. \end{cases} \quad (8.11.2)$$

В дальнейшем для упрощения записи индексы  $A$  при симметричных составляющих фазы  $A$  опущены, то есть:

$$\dot{I}_{1A} = \dot{I}_1; \quad \dot{I}_{2A} = \dot{I}_2; \quad \dot{I}_{0A} = \dot{I}_0. \quad (8.11.3)$$

С учётом соотношения (8.11.3) уравнения системы (8.11.2) запишем в виде:

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0; \\ \dot{I}_B = \dot{I}_{1B} + \dot{I}_{2B} + \dot{I}_{0B}; \\ \dot{I}_C = \dot{I}_{1C} + \dot{I}_{2C} + \dot{I}_{0C}. \end{cases} \quad (8.11.4)$$

Подстановка уравнений системы (8.11.1) в (8.11.4) даёт:

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0; \\ \dot{I}_B = a^2 \cdot \dot{I}_1 + a \cdot \dot{I}_2 + \dot{I}_0; \\ \dot{I}_C = a \cdot \dot{I}_1 + a^2 \cdot \dot{I}_2 + \dot{I}_0. \end{cases} \quad (8.11.5)$$

Систему уравнений (8.11.5) используют для нахождения фазных токов по их симметричным составляющим.

Если известны фазные токи, то симметричные составляющие могут быть определены в результате решения системы уравнений (8.11.5). Умножая вторую строку системы уравнений (8.11.5) на оператор  $a$ , а третью – на  $a^2$  и складывая правые и левые части полученных уравнений, с учётом равенства (8.5.2) выразим фазный ток прямой последовательности:

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{3} \cdot (\dot{I}_A + a \cdot \dot{I}_B + a^2 \cdot \dot{I}_C). \quad (8.11.6)$$

Аналогичным образом, умножив вторую строку системы (2.11.5) на оператор  $a^2$ , а третью строку – на оператор  $a$  и сложив их с первым уравнением системы (8.11.5), получим выражение фазного тока обратной последовательности:

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{3} \cdot (\dot{I}_A + a^2 \cdot \dot{I}_B + a \cdot \dot{I}_C). \quad (8.11.7)$$

Простое суммирование уравнений системы (8.11.5) позволяет выразить ток нулевой последовательности:

$$\dot{I}_0 = \frac{1}{3} \cdot (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C). \quad (8.11.8)$$

Таким образом, если трёхфазная электрическая цепь питается от источника с несимметричной системой ЭДС или напряжений, или приёмник несимметричен, то, согласно сделанным выше выводам, эту систему следует разложить на три симметричные составляющие. Далее, используя метод наложения, необходимо разделить задачу о расчёте несимметричной электрической цепи на три задачи. В каждой из полученных задач режим симметричен. Преимущество метода симметричных составляющих особенно ярко проявляется при расчёте электрических цепей, содержащих двигатели, анализ несимметричных режимов которых оказывается наиболее сложным.

## Глава IX. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### Введение

Синусоидальные колебания являются самой простой и распространённой формой периодического процесса. В сетях электрических систем принимают меры для поддержания синусоидальной формы тока и напряжения и устранения различных отклонений формы сигнала от синусоиды. Но в цепях электросвязи, электронных и полупроводниковых устройствах отклонение кривой тока, напряжения или ЭДС от синусоиды обусловлено рабочими процессами, протекающими в этих устройствах. Поэтому для понимания принципов действия устройств автоматики, электроизмерительных приборов и других электронных устройств необходимо знание теории несинусоидальных токов и методов расчёта электрических цепей с сигналами несинусоидальной формы.

*Периодическими несинусоидальными токами и напряжениями называют сигналы, изменяющиеся во времени по периодическому закону.*

Периодические несинусоидальные токи и напряжения возникают в электрических цепях при следующих условиях (или сочетании этих условий):

1) источник ЭДС (или тока) генерирует сигнал несинусоидальной формы, а все элементы электрической цепи – активные сопротивления, индуктивные катушки и конденсаторы – являются линейными элементами, то есть их параметры не зависят от силы электрического тока;

2) источник ЭДС или тока генерирует синусоидальный сигнал, но один или несколько элементов электрической цепи являются нелинейными;

3) источник сигнала генерирует несинусоидальную ЭДС (или ток) и, наряду с этим, электрическая цепь содержит нелинейные элементы;

4) источник генерирует постоянную ЭДС (или ток), а параметры одного или нескольких элементов электрической цепи изменяются по периодическому закону.

Эксплуатация электрических цепей при несинусоидальных напряжениях или токах, как правило, нежелательна, поскольку приводит к снижению эффективности использования электрического оборудования. Однако практически такие режимы нередко имеют место, поскольку не всегда удаётся обеспечить формирование питающих сигналов строго синусоидальной формы. В этой связи вопросы расчёта линейных электрических цепей, питаемых источниками сигналов несинусоидальной формы, представляют не только теоретический, но и практический интерес.

## 9.1. Разложение несинусоидальных токов и напряжений в тригонометрический ряд Фурье

Явления, происходящие в линейной электрической цепи с периодическими несинусоидальными ЭДС, проще всего поддаются исследованию, если эту электродвижущую силу представить в виде суммы постоянной составляющей и гармонических составляющих. Синусоидальные составляющие называют *гармониками*. Затем, используя изученные методы расчёта линейных электрических цепей постоянного и синусоидального тока, следует определить напряжения и токи в этих электрических цепях, вызванные каждой составляющей сигнала. Далее, с помощью метода наложения, необходимо просуммировать полученные величины. Рассчитанные таким образом токи и напряжения представляют собой периодические несинусоидальные функции времени, причём их период равен периоду заданной несинусоидальной ЭДС.

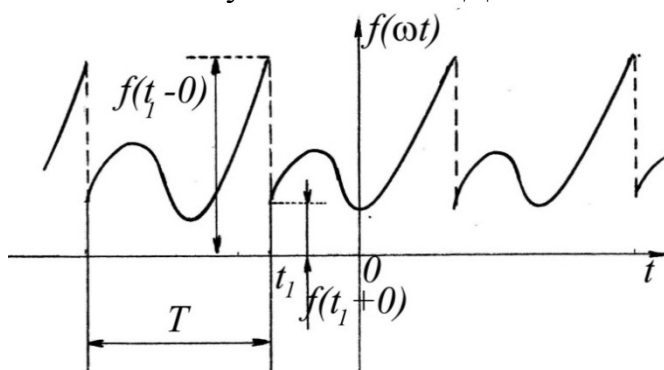


Рис.9.1.1

На рис. 9.1.1 представлена периодическая несинусоидальная функция времени с периодом  $T$ :  $f(\omega \cdot t) = f(\omega \cdot t + T)$ . В течение временного интервала, равного периоду  $T$ , функция  $f(\omega \cdot t)$  может быть либо непрерывной, либо имеет точки разрыва непрерывности как справа, так и слева:  $f(\omega \cdot t_l + 0)$  и  $f(\omega \cdot t_l - 0)$  (рис. 9.1.1).

Любая периодическая функция  $f(\omega \cdot t)$ , удовлетворяющая условиям Дирихле, то есть имеющая на конечном интервале конечное число максимумов и минимумов, а также конечное число точек разрыва непрерывности первого рода, может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(\omega \cdot t) = A_0 + A_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_1) + A_{2m} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + \psi_2) + A_{3m} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + \psi_3) + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_{km} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + \psi_k). \quad (9.1.1)$$

Здесь при  $k=0$   $A_{km} = A_0$ ;  $\psi_k = \psi_0 = \frac{\pi}{2}$ . Выражение (9.1.1) называется тригонометрическим рядом Фурье с начальными фазами. В этом уравнении:

- первый член ряда  $A_0$  называется *постоянной составляющей* или *нулевой гармоникой*;
- второе слагаемое ряда  $A_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_1)$  называется *основной волной* или *первой гармоникой*;

- все остальные члены ряда  $A_{km} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + \psi_k)$  называются *высшими гармониками*;

- параметр  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – *основная частота*,  $T$  – *период* несинусоидальной периодической функции.

Если в выражениях гармоник раскрыть синусы сумм по известной тригонометрической формуле  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ , то  $k$ -й член тригонометрического ряда можно представить в виде:

$$A_{km} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + \psi_k) = A_{km} \cdot \cos\psi_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) + \\ + A_{km} \cdot \sin\psi_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t),$$

или, вводя обозначения:

$$\begin{cases} B_{km} = A_{km} \cdot \cos\psi_k; \\ C_{km} = A_{km} \cdot \sin\psi_k, \end{cases} \quad (9.1.2)$$

получим:

$$A_{km} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + \psi_k) = B_{km} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) + C_{km} \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t). \quad (9.1.3)$$

Используя выражения (9.1.2) и (9.1.3) тригонометрический ряд Фурье (9.1.1) можно записать в форме без начальных фаз:

$$f(\omega \cdot t) = A_0 + B_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t) + B_{2m} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) + \dots + B_{km} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) + \dots + \\ + C_{1m} \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_{2m} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) + \dots + C_{km} \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) + \dots = \\ = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [B_{km} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) + C_{km} \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t)]. \quad (9.1.4)$$

Обратный переход от формы ряда без начальных фаз (9.1.4) к форме с начальными фазами (9.1.1) выполняется с помощью следующих равенств:

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2}; \quad \operatorname{tg}\psi_k = \frac{C_{km}}{B_{km}}. \quad (9.1.5)$$

Коэффициенты разложения периодической функции  $f(\omega \cdot t)$  в тригонометрический ряд Фурье без начальных фаз (9.1.4) выражаются следующими уравнениями:

$$\left\{ \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(\omega \cdot t) \cdot dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\omega \cdot t) \cdot d(\omega \cdot t); \\ B_{km} &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(\omega \cdot t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(k \cdot \omega \cdot t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot d(\omega \cdot t); \\ C_{km} &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(\omega \cdot t) \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(k \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) \cdot d(\omega \cdot t); \end{aligned} \right. \quad (9.1.6)$$

## 9.2. Приближённый метод разложения

Часто периодическая функция, подлежащая разложению в тригонометрический ряд Фурье, задаётся не аналитическим выражением, а в виде графика. В этих случаях используют приближённые методы вычисления коэффициентов ряда. Один из наиболее распространённых приближённых методов заключается в замене интегралов (9.1.6), определяющих коэффициенты ряда Фурье, соответствующими конечными суммами. Этот способ разложения называют *методом Перри*. Представим рассматриваемую периодическую зависимость как функцию угла  $\theta = \omega \cdot t$ , положив её период равным  $2 \cdot \pi$  (рис. 9.2.1).

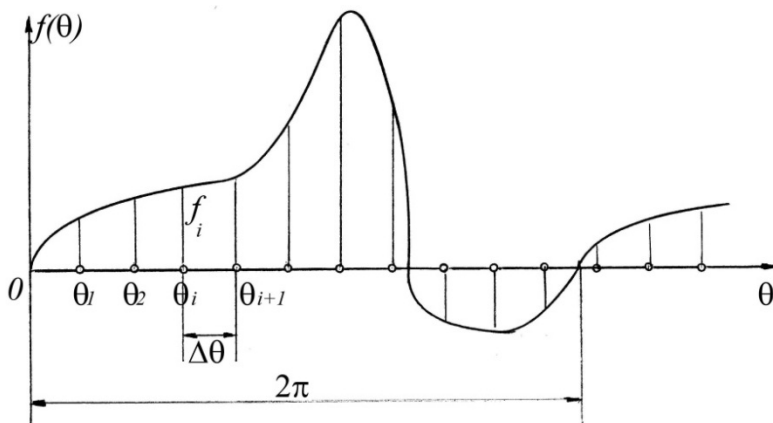


Рис. 9.2.1

Точное определение постоянной составляющей  $A_0$  предполагает вычисление следующего интеграла:

$$A_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta) \cdot d\theta.$$

Это соответствует суммированию в пределах периода бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых  $f(\theta) \cdot d\theta$ . Каждое

слагаемое представляет собой произведение ординаты  $f(\theta)$  кривой тока в точке  $\theta$  на бесконечно малое приращение аргумента  $\Delta\theta$ .

Метод Перри предполагает деление периода  $2\cdot\pi$  на конечное число  $p$  равных отрезков длиной

$$\Delta\theta = \frac{2\cdot\pi}{p}$$

и переход к приближённому вычислению коэффициента  $A_0$ . При этом интегрирование заменяют суммированием конечного числа слагаемых  $f(\theta_i) \cdot \Delta\theta$ :

$$A_0 \approx \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \sum_{i=1}^p f(\theta_i) \cdot \frac{2\cdot\pi}{p} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^p f(\theta_i).$$

Здесь  $f(\theta_i)$  - ординаты разлагаемой кривой в точках деления. Таким образом, *приближённое значение постоянной составляющей равно среднему арифметическому из ординат в точках деления периода этой кривой на «р» равных частей.*

Рассуждая аналогично, получим приближённые выражения и для определения коэффициентов  $B_{km}$  и  $C_{km}$  тригонометрического ряда Фурье:

$$\begin{cases} B_{km} \approx \frac{2}{p} \cdot \sum_{i=1}^p f(\theta_i) \cdot \sin(k \cdot \theta_i), \\ C_{km} \approx \frac{2}{p} \cdot \sum_{i=1}^p f(\theta_i) \cdot \cos(k \cdot \theta_i). \end{cases}$$

Таким образом, значения  $B_{km}$  и  $C_{km}$  равны удвоенным значениям средних арифметических ординат  $f(\theta_i)$  во всех точках деления периода функции на значения соответственно  $\sin(k \cdot \theta_i)$  и  $\cos(k \cdot \theta_i)$  при данных значениях угла  $\theta_i$ .

Очевидно, что точность приближённых вычислений коэффициентов ряда Фурье повышается при увеличении числа точек деления и зависит от сложности исследуемой зависимости. В общем случае, как правило, при выполнении инженерных расчётов удовлетворительная точность достигается при делении периода на  $15\div 20$  частей.

Наряду с методом Перри, существует множество других приёмов приближённого разложения периодических функций в тригонометрический ряд Фурье. Эти методы основаны на аналитической, графо - аналитической или графической обработке исследуемой зависимости.

Разложение в ряд Фурье может быть выполнено также с помощью электронных устройств, называемых гармоническими анализаторами. Коэффициенты ряда Фурье для заданной кривой определяются непосредственно по шкалам гармонических анализаторов после сканирования исследуемой кривой.

### 9.3. Разложение в тригонометрический ряд Фурье периодических функций, обладающих симметрией

Реальные напряжения и токи в подавляющем большинстве случаев представляют собой периодические функции, обладающие той или иной симметрией. Это существенно упрощает их разложение в ряд Фурье.

Рассмотрим три основных случая симметрии функций.

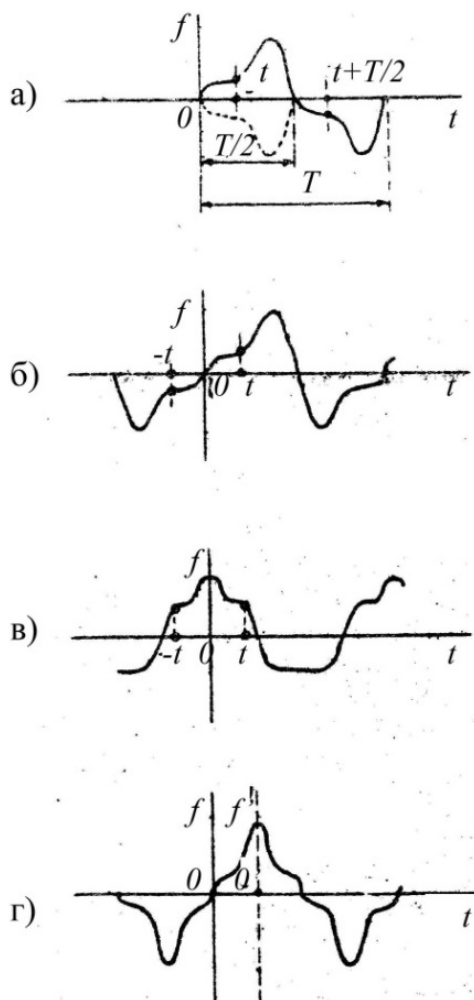


Рис.9.3.1

Наибольшее распространение получили кривые напряжения и тока, симметричные относительно оси абсцисс. Условие такой симметрии математически выражается в виде:  $f(t) = f\left(t + \frac{T}{2}\right)$  и проявляется в том, что нижняя полуволна кривой, будучи смещена вдоль оси абсцисс на полпериода, оказывается зеркальным отражением верхней полуволны относительно этой оси (рис. 9.3.1.а). В разложении таких кривых всегда отсутствуют чётные гармоники и постоянная составляющая. Таким образом, ряд Фурье функции, симметричной относительно оси абсцисс, имеет вид:

$$f(\omega \cdot t) = A_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_1) + A_{3m} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + \psi_3) + A_{5m} \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t + \psi_5) + \dots$$

Функция, симметричная относительно начала координат, то есть удовлетворяющая условию  $f(t) = -f(-t)$ , называется нечётной (рис. 9.3.1.б). Поскольку постоянная составляющая и косинусоиды не удовлетворяют этому условию, для нечётных функций ряд Фурье запишется в виде:

$$f(\omega \cdot t) = B_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t) + B_{2m} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) + B_{3m} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t) + \dots$$

Таким образом, нечётная функция содержит только синусоиды.

Если функция симметрична относительно оси ординат, то есть  $f(t) = +f(-t)$ , то она называется чётной функцией (рис. 9.3.1.в). Поскольку синусоиды любых частот являются нечётными функциями, то они не входят в состав тригонометрического ряда, то есть

$$f(\omega \cdot t) = A_0 + C_{1m} \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_{2m} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) + C_{3m} \cdot \cos(3 \cdot \omega \cdot t) + \dots$$

Таким образом, чётная функция содержит только косинусоиды и постоянную составляющую.

В реальных напряжениях и токах возможны совмещения нескольких случаев симметрии. Например, кривая, приведённая на рис. 9.3.1.г, сим-

метрична относительно оси абсцисс и одновременно симметрична относительно начала координат. При разложении такой кривой в ряд Фурье относительно начала координат ряд Фурье содержит только слагаемые с синусоидами нечётных гармоник

$$f(\omega \cdot t) = B_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t) + B_{3m} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t) + B_{5m} \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t) + \dots$$

При разложении функции относительно системы координат с началом в точке  $O'$  ряд Фурье содержит только слагаемые с синусоидами нечётных гармоник:  $f(\omega \cdot t) = C_{1m} \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_{3m} \cdot \cos(3 \cdot \omega \cdot t) + C_{5m} \cdot \cos(5 \cdot \omega \cdot t) + \dots$

В заключение рассмотрим общий случай разложения несинусоидальной функции напряжения и тока в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} u(\omega \cdot t) &= U_0 + U_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_{u1}) + U_{2m} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + \psi_{u2}) + U_{3m} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + \psi_{u3}) + \dots, \\ i(\omega \cdot t) &= I_0 + I_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_{i1}) + I_{2m} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + \psi_{i2}) + I_{3m} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + \psi_{i3}) + \dots \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

#### 9.4. Характеристики несинусоидальных токов и напряжений

Периодические несинусоидальные величины  $i(\omega \cdot t)$  и  $u(\omega \cdot t)$  помимо своих гармонических составляющих характеризуются также среднеквадратичным за период или действующим значением, средним по модулю значением, а также коэффициентами, определяющим форму кривых.

По определению квадрат действующего значения тока выражается через мгновенное значение тока  $i$  соотношением:

$$I^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) \cdot dt. \quad (9.4.1)$$

С учётом формул (9.3.1) для сходящегося ряда можно записать:

$$\begin{aligned} i^2 &= I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2 \cdot \sin^2(k \cdot \omega \cdot t + \psi_{ik}) + \\ &+ \sum_{p=0, q=0, p \neq q}^{\infty} I_{pm} \cdot I_{qm} \cdot \sin(q \cdot \omega \cdot t + \psi_{iq}) \cdot \sin(p \cdot \omega \cdot t + \psi_{ip}). \end{aligned}$$

Подстановка выражения  $i^2$  в формулу (9.4.1) позволяет выразить среднее квадратичное значение тока:

$$I^2 = \frac{1}{T} \cdot \left[ \int_0^T I_0^2 \cdot dt + \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2 \cdot \sin^2(k \cdot \omega \cdot t + \psi_{ik}) \cdot dt + \right.$$

$$+ \int_0^T \sum_{p=0, q=0, p \neq q}^{\infty} I_{pm} \cdot I_{qm} \cdot \sin(p \cdot \omega \cdot t + \psi_{ip}) \cdot \sin(q \cdot \omega \cdot t + \psi_{iq}) dt \Bigg].$$

Учитывая значения табличных интегралов

$$\begin{cases} \int_0^T \sin^2(k \cdot \omega \cdot t + \psi_{ik}) \cdot dt = \frac{T}{2}; \\ \int_0^T \sin(p \cdot \omega \cdot t + \psi_{ip}) \cdot \sin(q \cdot \omega \cdot t + \psi_{iq}) dt = 0, \end{cases} \quad (9.4.2)$$

выражение действующего значения тока можно преобразовать к следующему виду:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \frac{I_{3m}^2}{2} + \dots}$$

Поскольку амплитуда  $k$ -й гармоники в  $\sqrt{2}$  раз больше её действующего значения, то есть

$$\frac{I_{km}^2}{2} = I_k^2,$$

то действующее значение несинусоидального периодического тока можно представить в следующем виде:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}. \quad (9.4.3)$$

Следовательно, действующее значение несинусоидального тока равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей силы тока и действующих значений отдельных гармоник, причём действующее значение не зависит от угла сдвига фаз между напряжением и током.

Аналогично определяется действующее значение периодического несинусоидального напряжения:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}. \quad (9.4.4)$$

Высшие гармоники, как правило, играют второстепенную роль в формировании действующего значения реальных несинусоидальных периодических сигналов. Например, высшая гармоника, составляющая по величине 20% от основной гармоники, увеличивает действующее значение от действующего значения основной гармоники на 2%:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_k^2} = I_1 \cdot \sqrt{1^2 + 0,2^2} = I_1 \cdot \sqrt{1,04} = 1,02 \cdot I_1.$$

Среднее по модулю значение периодической несинусоидальной функции равно среднему за период значению этой функции

$$I_{\text{СРЕД.МОД.}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |i(t) \cdot dt| = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} |i(\omega \cdot t) \cdot d(\omega \cdot t)|.$$

Несинусоидальные токи и напряжения измеряют приборами различных систем.

На действующее значение реагируют приборы электромагнитной, электродинамической и тепловой системы.

Действующее значение переменной составляющей измеряют приборами индукционной системы.

Средние по модулю величины измеряют приборами магнитоэлектрической системы с выпрямителем.

Постоянную составляющую измеряют приборами магнитоэлектрической системы без выпрямителя.

Максимальные значения напряжения измеряют электронными вольтметрами.

### 9.5. Мощность электрической цепи несинусоидального периодического тока

*Активной мощностью (P) периодического несинусоидального тока называют среднее значение мгновенной мощности за период первой гармоники, то есть*

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot i(t) \cdot dt.$$

Если ряды Фурье для напряжения и тока (3.3.1) представить в виде:

$$u(t) = U_0 + U_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_{u1}) + U_{2m} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + \psi_{u2}) + U_{3m} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + \psi_{u3}) + \dots ,$$

$$i(t) = I_0 + I_{1m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_{u1} - \varphi_1) + I_{2m} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + \psi_{u2} - \varphi_2) + I_{3m} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + \psi_{u3} - \varphi_3) + \dots ,$$

а затем подставить в формулу активной мощности, то с учётом равенства (3.4.2), получим выражение активной мощности:

$$P = U_0 \cdot I_0 + U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 + U_3 \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3 + \dots . \quad (9.5.1)$$

Таким образом, активная мощность периодического несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник и постоянной составляющей.

Аналогично определяют реактивную мощность:

$$Q = U_1 \cdot I_1 \cdot \sin \varphi_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \sin \varphi_2 + U_3 \cdot I_3 \cdot \sin \varphi_3 + \dots \quad (9.5.2)$$

Полная мощность электрической цепи периодического несинусоидального тока равна:

$$S = U \cdot I = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} \cdot \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots} \quad (9.5.3)$$

При несинусоидальных токах и напряжениях нарушается привычная связь между активной, реактивной и полной мощностью (треугольник мощностей). Даже в отсутствие постоянных составляющих электрических сигналов указанные мощности связаны неравенством:

$$S > \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (9.5.4)$$

Поэтому при несинусоидальных напряжениях и токах для записи уравнения, связывающего активную, реактивную и полную мощность, вводят понятие **мощности искажений** ( $T$ ):

$$S^2 - T^2 = P^2 + Q^2. \quad (9.5.5)$$

В электрических цепях с несинусоидальными напряжениями и токами коэффициент мощности обозначают символом  $\chi$  и определяют как отношение активной мощности цепи к её полной мощности:

$$\chi = \frac{P}{S}. \quad (9.5.6)$$

В электрических цепях с несинусоидальными токами обозначение коэффициента мощности символом  $\cos \varphi$  не употребляется, поскольку разность фаз между напряжением и током для различных гармоник не одинакова. Как и при синусоидальных напряжениях и токах, коэффициент мощности электрической цепи, не содержащей индуктивностей и ёмкостей, при условии её линейности равен единице.

## 9.6. Коэффициенты формы несинусоидальных периодических функций

Для оценки формы линий, изображающих несинусоидальные функции токов и напряжений, в электротехнике пользуются рядом коэффициентов.

**Коэффициентом амплитуды**  $k_A$  называется отношение максимального значения  $I_m$  данной величины к её действующему значению  $I$ :

$$k_A = \frac{I_m}{I}.$$

Для синусоиды коэффициент амплитуды равен  $\sqrt{2}$ , для прямоугольных сигналов, когда понятия максимального ( $I_m$ ), действующего ( $I$ ) и среднего значения ( $I_{CP}$ ) совпадают, коэффициент амплитуды равен единице. В общем случае коэффициент амплитуды может принимать любые значения, большие единицы. Причём коэффициент  $k_A$  тем больше, чем острее форма кривой.

**Коэффициент формы  $k_F$**  устанавливает связь между действующим ( $I$ ) и средним по модулю ( $I_{CP. \text{ мод.}}$ ) значением несинусоидальной функции:

$$k_F = \frac{I}{I_{CP. \text{ мод.}}}$$

Для синусоиды коэффициент формы равен 1,11... , для сигнала прямоугольной формы  $k_F=1$ . В общем случае коэффициент формы, оставаясь больше единицы, принимает тем большее значение, чем острее форма кривой.

**Коэффициент гармоник  $k_H$**  служит для оценки относительного содержания высших гармоник в несинусоидальной функции по сравнению с основной гармоникой и определяется отношением действующего значения всех высших гармоник вместе взятых к действующему значению первой гармоники:

$$k_H = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1}$$

Здесь  $I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_k^2 + \dots$ , то есть  $I^2 - I_1^2 = I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \dots + I_k^2 + \dots$ . Для синусоиды числитель формулы  $k_H$ , а следовательно, и коэффициент гармоник равен нулю. Для сигнала прямоугольной формы  $k_H=0,483$ .

**Коэффициент искажения  $k_{\text{и}}$**  также характеризует содержание высших гармоник в разложении данной величины в ряд Фурье:

$$k_{\text{и}} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I}$$

**Коэффициент синусоидальности  $\lambda$**  определяет степень приближения формы кривой к синусоиде:

$$\lambda = \frac{I_1}{I}$$

Коэффициент синусоидальности широко применяется в электроэнергетике для вычисления мощности нелинейных электрических цепей переменного тока.

## 9.7. Применение принципа наложения для расчёта линейных электрических цепей с несинусоидальными источниками

Расчёт режима работы линейной электрической цепи, содержащей один или несколько несинусоидальных источников, выполняют в три этапа.

1. ЭДС или токи несинусоидальных источников представляют в виде суммы постоянной составляющей и синусоидальных составляющих.
2. Применяют принцип наложения для расчёта токов и напряжений, вызываемых постоянной составляющей и каждой гармоникой отдельно.
3. Суммируют результаты решений, полученных для каждой составляющей сигнала.

Первый этап решения представляет собой разложение несинусоидальных периодических функций тока или напряжения на постоянную составляющую и гармоники и описан в параграфах 9.1, 9.2 и 9.3 настоящего пособия. Поэтому анализ решения начнём со второго этапа. При этом следует различать прямую и обратную задачу.

*Прямая задача:* задана действующая в электрической цепи несинусоидальная ЭДС. Требуется определить токи в цепи. Если ЭДС представлена в виде суммы постоянной составляющей и гармоник, то источник несинусоидальной ЭДС можно рассматривать как соединённые последовательно источники синусоидальных ЭДС с различными частотами и источник постоянной ЭДС. Например, если в электрической цепи действует источник несинусоидальной ЭДС (рис. 9.7.1.а):

$$e(t) = E_0 + E_{1m} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \psi_1) + E_{2m} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \psi_2),$$

то действие такой электродвижущей силы аналогично действию трёх соединённых последовательно ЭДС (рис. 9.7.1.б):

$$e_0 = E_0;$$

$$e_1(t) = E_{1m} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \psi_1);$$

$$e_2(t) = E_{2m} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \psi_2).$$

Применяя принцип наложения и рассчитывая токи, вызываемые каждой составляющей ЭДС в отдельности,

общий ток  $i(t)$  рассчитывают как сумму:  $i(t) = I_0 + i_1(t) + i_2(t)$ . Здесь  $I_0$ ,  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  – токи, вызываемые соответственно источниками с ЭДС  $E_0$ ,  $e_1(t)$  и  $e_2(t)$ . Таким образом, расчёт линейной электрической цепи с несинусоидальными источниками электродвижущей силы сводится к решению  $n$  задач расчёта цепей с синусоидальными источниками, где  $n$  – число синусоидальных составляющих ЭДС различных частот, и одной задачи с постоянной ЭДС.

*Обратная задача:* заданы токи несинусоидальных источников. Требуется определить напряжения на участках электрической цепи.

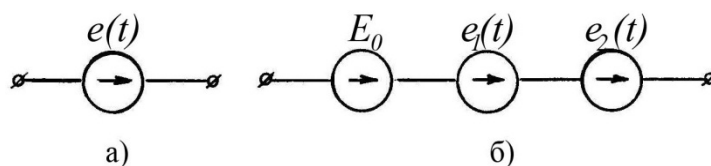


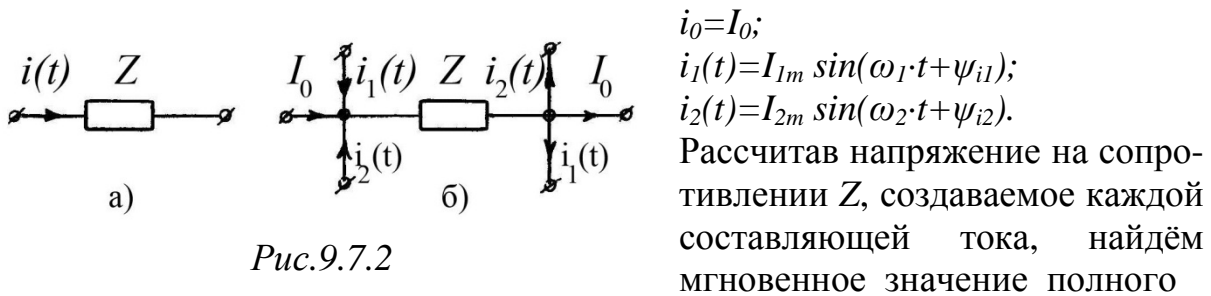
Рис.9.7.1

Источник несинусоидального тока всегда можно представить в виде источников, соединённых параллельно. Ток каждого источника равен току соответствующей составляющей несинусоидального тока.

Например, если к узлам нелинейной электрической цепи подвести несинусоидальный ток (рис. 9.7.2.а)

$$i(t) = I_0 + I_{1m} \sin(\omega_1 \cdot t + \psi_{i1}) + I_{2m} \sin(\omega_2 \cdot t + \psi_{i2}),$$

то источник такого тока действует подобно трём источникам тока, соединённым параллельно (рис. 9.7.2.б):



## 9.8. Символический метод расчёта линейных электрических цепей с несинусоидальными источниками ЭДС

При расчёте каждой гармоники можно пользоваться символическим методом. В этом случае ряд Фурье целесообразно преобразовать из тригонометрической формы в комплексную форму.

Используя формулы Эйлера:

$$\cos(k \cdot \omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j \cdot k \cdot \omega \cdot t} + e^{-j \cdot k \cdot \omega \cdot t});$$

$$\sin(k \cdot \omega \cdot t) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (e^{j \cdot k \cdot \omega \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot \omega \cdot t}),$$

выражение в скобках ряда (9.1.4) преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned} B_{km} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) + C_{km} \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) &= \\ = B_{km} \cdot \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (e^{j \cdot k \cdot \omega \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot \omega \cdot t}) + C_{km} \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{j \cdot k \cdot \omega \cdot t} + e^{-j \cdot k \cdot \omega \cdot t}) &= \\ = (C_{km} - j \cdot B_{km}) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega \cdot t} + (C_{km} + j \cdot B_{km}) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega \cdot t}. \end{aligned}$$

Тогда тригонометрический ряд (9.1.4) запишется в показательной форме:

$$f(\omega \cdot t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (C_{km} - j \cdot B_{km}) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega \cdot t} + \right.$$

$$+ (C_{km} + j \cdot B_{km}) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega \cdot t} \Big]. \quad (9.8.1)$$

Из соотношений (9.1.6) следует, что функция  $C_{km}$  – чётная, а функция  $B_{km}$  – нечётная относительно  $k$ , то есть  $C_{km}$  сохраняет свой знак,  $B_{km}$  меняет знак при отрицательных значениях параметра  $k$ :  $C_{km} = C_{-km}$ ;  $B_{km} = -B_{-km}$ . Учитывая сделанное замечание и соотношение (9.8.1), ряд Фурье можно записать в комплексной форме:

$$f(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{F}_{km} \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega \cdot t}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \dot{F}_{km} &= C_{km} - j \cdot B_{km} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\omega \cdot t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega \cdot t} d(\omega \cdot t), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, при расчёте каждой гармоники можно пользоваться символическим методом и строить векторные диаграммы для каждой гармоники отдельно. При определении мгновенных значений тока по его символическому выражению необходимо вектор, изображающий комплексную амплитуду гармоники, вращать со своей угловой скоростью  $k \cdot \omega$  и строить зависимость от времени его проекции на мнимую ось. Поскольку скорости вращения различных гармоник не одинаковы, то не имеет смысла геометрическое суммирование векторов, изображающих их комплексные амплитуды. Такое суммирование определяет мгновенное значение результирующего вектора в момент времени  $t=0$ .

### 9.9. Метод эквивалентных синусоид

Иногда для упрощения приближённых расчётов режимов работы электрических цепей с несинусоидальными токами и напряжениями применяют метод эквивалентных синусоид. *Метод эквивалентных синусоид заключается в том, что вместо заданных величин, изменяющихся не по закону синуса, вводят эквивалентные синусоиды, под которыми величины, изменяющиеся по гармоническому закону.* Действующие значения полученных синусоид равны действующим значениям исходных несинусоидальных функций. Дальнейший расчёт выполняют одним из методов расчёта линейных электрических цепей синусоидального тока.

Вычисление действующего значения  $I$  функции  $i(\omega \cdot t)$  выполняют с помощью известного соотношения:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(\omega \cdot t) \cdot dt}.$$

Если функция  $i(\omega \cdot t)$  задана графически, что имеет место при выполнении многих электротехнических расчётов, то для определения действующего значения  $I$  используют приближённые методы.

В этом случае период исследуемой функции делят на конечное число  $n$  равных частей (рис. 9.9.1). Длительность промежутка времени  $\Delta t = \frac{T}{n}$ . В точках деления оси абсцисс определяют ординаты  $i_k$  кривой. Приближённое действующее значение функции определяют, заменяя интегрирование суммированием:

$$I \approx \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \sum_{k=1}^n i_k^2 \cdot \Delta t} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{i_k^2}{n}}.$$

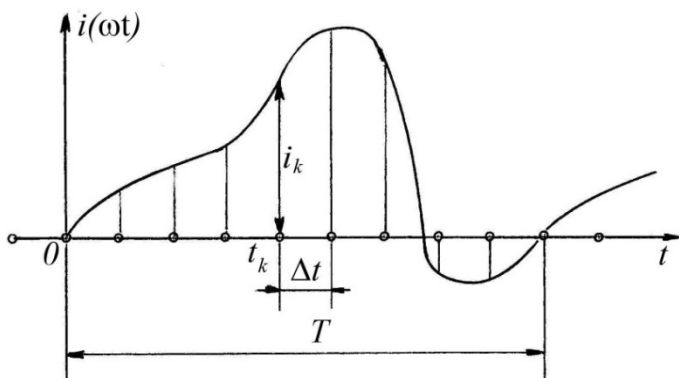


Рис.9.9.1

Амплитудное значение эквивалентной синусоиды в  $\sqrt{2}$  раз больше полученного действующего значения.

Точность результата возрастает с увеличением числа  $n$ , которое в общем случае принимают равным  $15 \div 20$ . Использование эквивалентных синусоид вместо несинусоидальных функций позволяет

иллюстрировать режимы работы электрических цепей с несинусоидальными токами и напряжениями с помощью векторных диаграмм. Часто процессы в электрических цепях с несинусоидальными сигналами анализируют, заменяя их эквивалентными синусоидами, и даже не указывая на такие замены.

Для использования метода эквивалентных синусоид необходимо определить угол  $\varphi$  сдвига фаз между векторами, изображающими эквивалентные действующие значения тока и напряжения. Угол  $\varphi$  определяют с помощью соотношения:  $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$ . Здесь  $P$  - активная мощность.

Таким образом, эквивалентные синусоиды напряжения и тока, а следовательно, и их векторы сдвигают друг относительно друга на угол, определяющий при приближённых расчётах по эквивалентным синусоидам действительную мощность в цепи.

### 9.10. Влияние характера электрической цепи на форму кривой тока

Экспериментально установлено, что при питании электрической цепи несинусоидальным напряжением форма кривой тока в ней в общем случае отличается от формы кривой напряжения, то есть электрическая

цепь оказывает определённое влияние на форму кривой тока при заданной форме кривой питающего напряжения.

В электрической цепи, состоящей из идеального резистора с сопротивлением  $R$ , форма кривой тока практически совпадает с формой кривой напряжения. Это следует из пропорциональности мгновенных значений тока в такой электрической цепи и мгновенного значения напряжения, приложенного к цепи:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Этот факт часто используют в измерительной технике, когда вместо сложной задачи осциллографирования кривой тока обращаются к более простой задаче снятия кривой напряжений на резисторе, по которому течёт ток, форму которого требуется исследовать.

В электрической цепи с идеальной катушкой мгновенные значения напряжения  $u(t)$  и тока  $i(t)$  связаны дифференциальной зависимостью:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt},$$

поэтому функции тока и напряжения различаются, за исключением случая чисто синусоидальных сигналов.

Индуктивная цепь уменьшает содержание высших гармоник в кривой тока по сравнению с их содержанием в кривой питающего напряжения. Действительно, чем выше номер  $k$  гармоники, то есть чем выше её частота  $k \cdot \omega$ , тем большее индуктивное сопротивление  $x_{Lk} = k \cdot \omega \cdot L$  оказывает этой гармонике электрическая цепь. Следовательно, гармоника более высокой частоты слабее проявляется в функции тока. Таким образом, форма кривой тока в индуктивной катушке всегда ближе к синусоиде, чем форма кривой питающего цепь напряжения. Это можно показать, сравнивая функции тока и напряжения в индуктивной катушке, используя коэффициент гармоник.

Рассмотрим, например, случай, когда функция питающего напряжения содержит основную гармонику и одну высшую гармонику. При этом коэффициент гармоник для напряжения выразится следующей формулой:

$$k_{\Gamma.u} = \frac{U_k}{U_1},$$

где  $U_k$  и  $U_1$  – действующие значения напряжения  $k$ -й и основной гармоники соответственно.

Ток  $k$ -й гармоники и основной волны определяются из закона Ома:

$$I_k = \frac{U_k}{Z_k} = \frac{U_k}{x_{Lk}} = \frac{U_k}{k \cdot \omega \cdot L},$$

и

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{U_1}{x_{L1}} = \frac{U_1}{\omega \cdot L}.$$

Следовательно, коэффициент гармоник тока

$$k_{Г.и} = \frac{I_k}{I_1} = \frac{U_k}{k \cdot U_1} = \frac{k_{Г.н}}{k}$$

в  $k$  раз меньше, чем коэффициент гармоник напряжения. Это свидетельствует о меньшем искажении кривой тока по сравнению с кривой напряжения. Таким образом, всякая индуктивная цепь сглаживает форму кривой тока по сравнению с кривой питающего напряжения.

В идеальном конденсаторе ток и напряжение связаны интегральной зависимостью:

$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt.$$

Поэтому, если напряжение, питающее электрическую цепь, является несинусоидальной функцией, то формы кривых тока и напряжения должны существенно различаться. Однако ток в конденсаторе будет искажён сильнее, чем приложенное к цепи напряжение, поскольку ёмкостное сопротивление  $x_C$  конденсатора уменьшается при повышении частоты, то есть при увеличении номера  $k$  гармоники. Поэтому в конденсаторе высшие гармоники выражены более ярко, чем в приложенном к электрической цепи напряжении.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим процессы в идеальном конденсаторе, к которому приложено напряжение, содержащее кроме основной гармоники одну высшую, например,  $k$ -ю гармонику. Действующие значения токов высшей гармоники и основной волны в конденсаторе определяются выражениями:

$$I_k = \frac{U_k}{Z_k} = \frac{U_k}{x_{Ck}} = U_k \cdot k \cdot \omega \cdot C;$$

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{U_1}{x_{C1}} = U_1 \cdot \omega \cdot C.$$

Здесь  $U_k$  и  $U_1$  - действующие значения напряжения соответственно  $k$ -й гармоники и основной волны.

Следовательно, коэффициент гармоник тока связан с коэффициентом гармоник напряжения соотношением:

$$k_{Г.и} = \frac{I_k}{I_1} = \frac{U_k}{U_1/k} = k_{Г.н} \cdot k.$$

То есть коэффициент гармоник тока в  $k$  раз больше коэффициента гармоник напряжения, приложенного к конденсатору. Это указывает на большее

искажение формы кривой тока по сравнению с формой кривой приложенного напряжения.

Таким образом, ёмкостная цепь усиливает искажения формы кривой тока по сравнению с формой кривой напряжения, приложенного к ёмкостной электрической цепи.

### 9.11. Понятие о частотных фильтрах

Зависимость формы кривой тока в электрической цепи, питаемой периодическим несинусоидальным напряжением, от вида содержащихся в цепи элементов и способа их соединения широко используется для управления гармоническим составом тока и напряжения в цепи приёмника. С этой целью между приёмником и источником включают промежуточное устройство, представляющее собой четырёхполюсник со специально подобранной схемой и называемое частотным электрическим фильтром. Обладая определёнными частотными характеристиками, такой фильтр осуществляет подавление или, наоборот, усиление отдельных гармоник тока и напряжения, а также распределение их по участкам электрической цепи.

В силовой электронике с помощью фильтров решают следующие основные задачи:

а) улучшение формы кривой тока или напряжения, то есть возможное приближение её формы к синусоиде;

б) сглаживание пульсаций тока и напряжения, которое заключается в подавлении их переменных составляющих.

Для решения этих задач используются, например, прозрачные, заграждающие и сглаживающие фильтры.

*Прозрачные фильтры* предназначены для выделения требуемой гармоники из несинусоидального сигнала.

*Заграждающие фильтры* предназначены для подавления определённой гармоники.

*Сглаживающие фильтры* служат для подавления переменной составляющей пульсирующих сигналов.

***Прозрачный фильтр  $k$ -й гармоники*** представляет собой устройство, пропускающее ток  $k$ -й гармоники и препятствующее прохождению через него токов других гармоник.

Схема прозрачного фильтра представляет собой последовательный колебательный контур (рис. 9.11.1). Фильтр включают между источником и приёмником. Он настроен в резонанс на частоту  $k$ -й гармоники. При использовании идеальной катушки индуктивностью  $L$  и идеального конденсатора ёмкостью  $C$  резонансная частота  $k$ -й гармоники определяется из условия

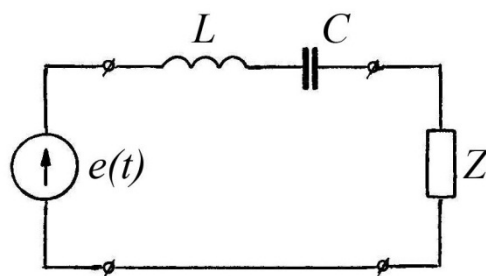


Рис.9.11.1

$$k \cdot \omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

Полное сопротивление фильтра для  $k$ -й гармоники равно нулю:

$$Z_k = x_k = x_{Lk} - x_{Ck} = k \cdot \omega \cdot L - \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C} = 0.$$

Таким образом, при резонансе фильтр не препятствует прохождению тока этой гармоники (не оказывает никакого сопротивления!). Для всех других гармоник фильтр обладает конечным реактивным сопротивлением, абсолютная величина которого тем больше, чем больше номер гармоники отличается от числа  $k$ .

Реальный прозрачный фильтр оказывает сопротивление  $k$ -й гармонике, приблизительно равное активному сопротивлению катушки. При высокой добротности катушки это сопротивление значительно меньше полного сопротивления фильтра токам других гармоник.

**Заграждающий фильтр  $k$ -й гармоники** должен, не препятствуя прохождению токов других гармоник, преградить путь току  $k$ -й гармоники. С этой целью в качестве фильтра используют параллельный колебательный контур, настроенный в резонанс на частоту  $k$ -й гармоники (рис. 9.11.2). Фильтр включают последовательно с приёмником.

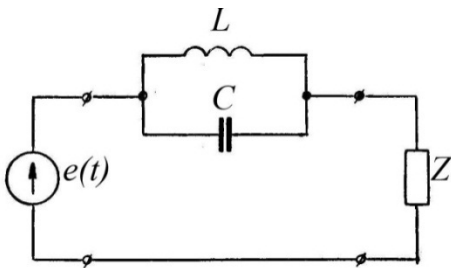


Рис.9.11.2

Если элементы контура идеальны, а их параметры удовлетворяют условию

$$k \cdot \omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}},$$

то полная проводимость фильтра для  $k$ -й гармоники равна нулю:

$$y_k = b_k = b_{Lk} - b_{Ck} = \frac{1}{k \cdot \omega \cdot L} - k \cdot \omega \cdot C = 0.$$

Таким образом, фильтр не пропустит ток  $k$ -й гармоники.

Для всех других гармоник фильтр обладает конечной реактивной проводимостью, абсолютная величина которой тем больше, чем дальше номер гармоники отстоит от числа  $k$ .

Для  $k$ -й гармоники проводимость фильтра, составленного из реальных элементов, практически равна активной проводимости индуктивной катушки. То есть такой фильтр всё же пропускает ток  $k$ -й гармоники, но при достаточно высокой добротности катушки его полное сопротивление току этой гармоники значительно больше полных сопротивлений токам остальных гармоник.

**Составные фильтры.** Для повышения эффективности реальных прозрачных и заграждающих фильтров схемы усложняют, используя комбинации из последовательных и параллельных резонансных контуров.

Например, для усиления действия прозрачного фильтра  $k$ -й гармоники (рис. 9.11.3) на его выходе параллельно приёмнику включают колебательный контур  $L_2C_2$ , настроенный в резонанс на частоту той же гармоники (рис. 9.11.3). Поскольку сопротивление контура  $L_2C_2$  току  $k$ -й гармоники очень велико, эта гармоника пойдёт через приёмник  $Z$ . Токи других гармоник, «просочившиеся» через контур  $L_1C_1$ , замыкаются через контур  $L_2C_2$ , который оказывает им незначительное сопротивление, и минуют приёмник  $Z$ .

Для усиления действия заграждающего фильтра  $k$ -й гармоники (рис. 9.11.2) параллельно приёмнику на выходе включают настроенный в резонанс на ту же гармонику последовательный  $L_1C_1$  контур (рис. 9.11.4). Оказывая незначительное сопротивление току  $k$ -й гармоники, такая ветвь замыкает на себя почти весь «просочившийся» через контур  $L_2C_2$  ток этой гармоники, то есть дополнительно защищает от неё приёмник.

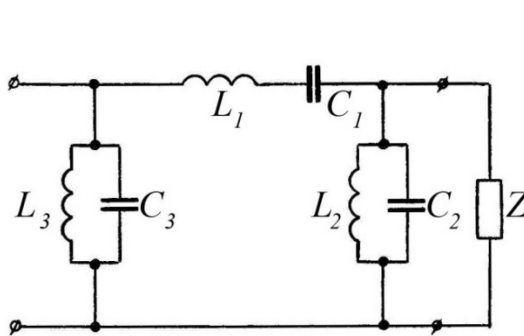


Рис. 9.11.3

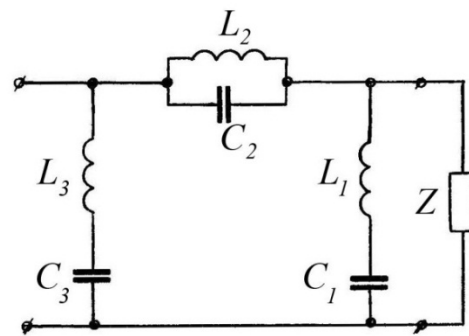


Рис. 9.11.4

Приведённые на рис. 9.11.3 и рис. 9.11.4 фильтры называются *Г-образными* фильтрами.

Если источник, питающий электрическую цепь, обладает большим внутренним сопротивлением, параллельные ветви в фильтрах целесообразно включать не только на выходе, но и на входе фильтра (контур  $L_3C_3$  на рис. 9.11.3, 4). Такие фильтры называются *П-образными* фильтрами.

Если ставится задача исключить токи всех высших гармоник, пропустив лишь ток первой гармоники, используют *прозрачные фильтры первой гармоники*.

В таких фильтрах контур  $L_1C_1$  является прозрачным для первой гармоники и не пропускает другие гармоники (рис. 9.11.5). На выходе фильтра  $L_1C_1$  включают фильтры, прозрачные для всех других гармоник ( $L_2C_2, L_3C_3, \dots$ ).

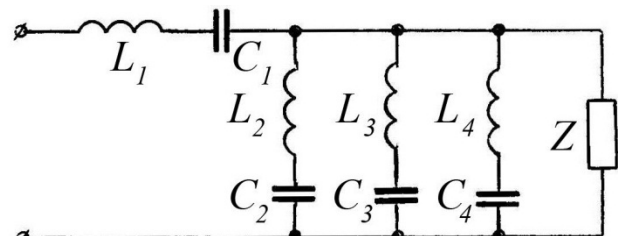


Рис. 9.11.5

Настраивая эти фильтры в резонанс на гармоники, наиболее ярко выраженные в кривой питающего напряжения, пропускают эти гармоники

через соответствующие им прозрачные фильтры и ограждают от них нагрузку  $Z$ .

**Цепные фильтры.** Дальнейшее повышение эффективности фильтров можно достигнуть последовательным соединением нескольких одинаковых фильтров (рис. 9.11.6). Такие фильтры называют *цепными*, а отдельные повторяющиеся в схеме составные части называют *звеньями* фильтра.

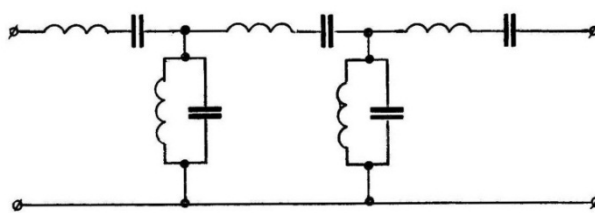


Рис.9.11.6

На рис. 9.11.6 в качестве примера приведена схема трёхзвенного прозрачного фильтра  $k$ -й гармоники с  $\Gamma$ -образными звеньями. Все резонансные контуры этого фильтра настроены в резонанс на одну и ту же частоту.

## 9.12. Высшие гармоники в трёхфазных электрических цепях

В трёхфазных электрических цепях кривые напряжения в фазах  $B$  и  $C$ , как правило, точно воспроизводят форму кривой напряжения фазы  $A$ , но со сдвигом на треть периода. Например, если напряжение  $U_A$  фазы  $A$  представлено функцией времени в виде:

$$u_A(t)=f(t) \quad \text{или} \quad u_A(\omega \cdot t)=f(\omega \cdot t), \quad (9.12.1)$$

то для двух других фаз временные зависимости напряжения опишутся такими же функциями, но сдвинутыми на треть периода:

$$u_B(t) = f\left(t - \frac{T}{3}\right), \quad \text{или} \quad u_B(\omega \cdot t) = f\left(\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right); \quad (9.12.2)$$

$$u_C(t) = f\left(t + \frac{T}{3}\right), \quad \text{или} \quad u_C(\omega \cdot t) = f\left(\omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right). \quad (9.12.3)$$

Здесь  $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$  — период основной частоты  $\omega$ .

Рассмотрим  $k$ -ю гармонику функции  $f(t)$  во всех трёх фазах. Если напряжение фазы  $A$  изменяется по следующему закону:

$$u_{Ak}(t) = U_{km} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + \psi_k), \quad (9.12.4)$$

то, учитывая, что  $\omega \cdot T = 2 \cdot \pi$  и подставляя в уравнения (9.12.2) и (9.12.3) вместо  $t$  соответственно  $\left(t - \frac{T}{3}\right)$  и  $\left(t + \frac{T}{3}\right)$ , выразим напряжения фазы  $B$  и фазы  $C$ :

$$u_{Bk}(t) = U_{km} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t + \psi_k - \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{3}\right); \quad (9.12.5)$$

$$u_{Ck}(t) = U_{km} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t + \psi_k + \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{3}\right). \quad (9.12.6)$$

Сравнение выражений (9.12.4)÷(9.12.6) показывает, что напряжения гармоник, кратных трём ( $k=3 \cdot n$ , где  $n$  – любое целое число), имеют одинаковую величину и направление. Номера этих гармоник равны: 3, 6, 9, 12, 15, ... .

При  $k=3 \cdot n+1$  гармоники трёх фаз образуют симметричную систему напряжений, последовательность которой совпадает с последовательностью фаз первой гармоники. Эти гармоники имеют номера 1, 4, 7, 10, 13, ... .

При  $k=3 \cdot n-1$  гармоники образуют симметричную систему напряжений с последовательностью, обратной основной. Номера этих гармоник: 2, 5, 8, 11, ... .

Таким образом, гармоники с номерами:

1, 4, 7, 10, ... - образуют систему напряжений *прямой* последовательности;

2, 5, 8, 11, ... - образуют систему напряжений *обратной* последовательности;

3, 6, 9, 12, ... - образуют систему напряжений *нулевой* последовательности.

При наличии постоянной составляющей в напряжении каждой фазы эту составляющую можно рассматривать, как нулевую гармонику, кратную трём ( $k=3 \cdot 0$ ), то есть образует нулевую последовательность.

В большинстве практически важных случаев в функции напряжения отсутствует постоянная составляющая и чётные гармоники. Поэтому дальнейший анализ можно ограничить случаем нечётных гармоник.

Рассмотрим частные случаи соединения трёхфазных систем.

А. *Фазы генератора соединены звездой.* В этом случае при несинусоидальном фазном напряжении линейные напряжения, равные разностям напряжений двух смежных фаз, не содержат гармоник напряжений, номера которых кратны трём. Тогда фазное и линейное напряжение равно соответственно:

$$U_{\Phi} = \sqrt{U_{\Phi 1}^2 + U_{\Phi 3}^2 + U_{\Phi 5}^2 + U_{\Phi 7}^2 + \dots};$$

$$U_L = \sqrt{3} \cdot \sqrt{U_{\Phi 1}^2 + U_{\Phi 5}^2 + U_{\Phi 7}^2 + U_{\Phi 11}^2 + \dots}.$$

То есть отношение линейного напряжения к фазному напряжению меньше, чем  $\sqrt{3}$ :  $U_L < \sqrt{3} \cdot U_{\Phi}$ .

Б. *Трёхфазная звезда с нейтральным проводом.* Ток в нейтральном проводе может быть отличен от нуля даже при симметрии токов в фазах. Основные синусоиды токов в фазах и все высшие гармоники, за исключением гармоник, номера которых кратны трём, образуют системы прямой и обратной последовательности и в сумме дают нуль. Гармоники, номера которых кратны трём, образуют систему нулевой последовательности, то есть в любой момент времени имеют одну и ту же величину и фазу. Поэтому ток в нейтральном проводе равен утроенной сумме токов высших гармоник нулевой последовательности:

$$I_n = 3 \cdot \sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + I_{21}^2 + \dots}$$

В. *Звезда без нейтрального провода.* Токи в каждой фазе не могут иметь гармоник, кратных трём, так как в отсутствие нейтрального провода векторная сумма токов фаз в любой момент времени должна быть равна нулю, что невозможно при наличии высших гармоник с номерами, кратными трём. Поскольку в этом случае в нагрузке нет падений напряжения от токов нулевой последовательности, то между нулевыми точками генератора и нагрузки может появиться значительное напряжение, содержащее только гармоники, кратные трём.

Г. *Фазы генератора соединены треугольником.* При несинусоидальных фазных ЭДС, сумма электродвижущих сил, действующих в незамкнутом контуре, не равна нулю, что имело место при синусоидальных ЭДС обмоток генератора. В этом случае сумма ЭДС равна *утроенной* сумме высших гармоник, кратных трём. Если к генератору подключить вольтметр, он будет измерять результат действия гармоник ЭДС с частотами, кратными трём (рис. 9.12.1):

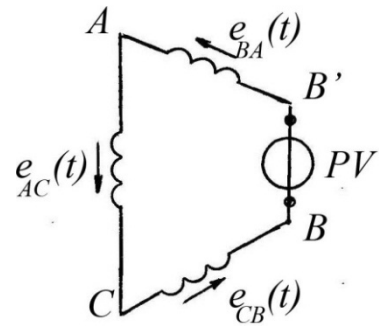


Рис.9.12.1

$$U = 3 \cdot \sqrt{E_3^2 + E_9^2 + E_{15}^2 + E_{21}^2 + \dots}$$

Если фазы соединены в замкнутый треугольник, то эти ЭДС вызывают внутренний ток в генератора. Этот ток течёт в замкнутом контуре генератора, даже если внешняя цепь генератора разомкнута.

### 9.13. Резонансные явления в электрических цепях с несинусоидальными ЭДС и токами

При несинусоидальных токах и ЭДС явление резонанса усложняется, поскольку возможны проявления резонанса отдельных составляющих.

Рассмотрим линейную электрическую цепь, содержащую соединённые последовательно резистор с сопротивлением  $R$ , катушку индуктивностью  $L$ , конденсатор ёмкостью  $C$  и источник несинусоидальной ЭДС:  $e(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t)$  (рис. 9.13.1). Ток  $k$ -й гармоники равен:

$$I_k = \frac{E_k}{\sqrt{R^2 + \left(k \cdot \omega \cdot L - \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C}\right)^2}}$$

Если величину индуктивности  $L$  изменять от нуля до бесконечности, то действующее значение каждой из составляющих тока будет изменяться в соответствии с резонансной кривой от значения

$$I_{k0} = \frac{E_k}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(k \cdot \omega \cdot C)^2}}} \quad \text{при } L = 0$$

до

$$I_k = \frac{E_k}{R} \quad \text{при } L = L_k = \frac{1}{(k \cdot \omega \cdot C)^2}$$

и далее до нуля при  $L = \infty$ .

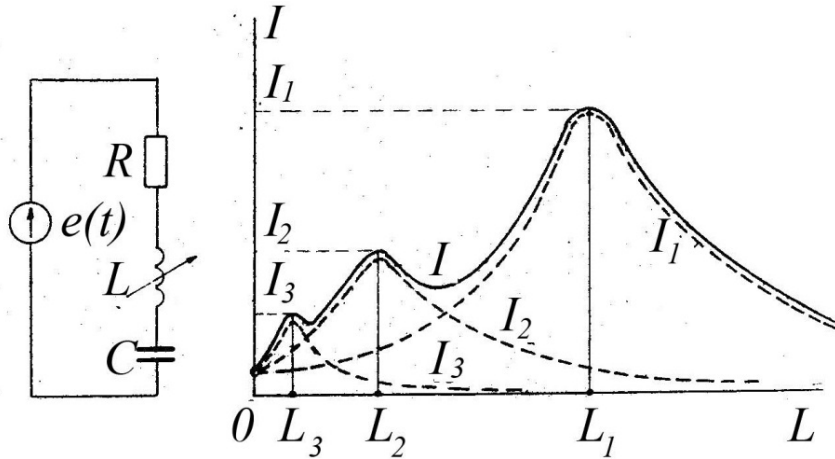


Рис.9.13.1

Рис.9.13.2

На рис. 9.13.2 построены резонансные кривые для трёх гармонических составляющих периодического несинусоидального тока. Значения индуктивности, соответствующей резонансу ( $L_k$ ), обратно пропорциональны второй степени номера гармоник:

$$L_k = \frac{1}{k^2 \cdot \omega^2 \cdot C}.$$

Действующее значение результирующего тока равно:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}.$$

При достаточно малом значении сопротивления  $R$  резонансная кривая  $I(L)$  имеет три резко выраженных максимума, соответствующих резонансным значениям индуктивности.

Аналогичные зависимости получаются и при изменении ёмкости или частоты, если форма кривой ЭДС остаётся неизменной.

В электрических цепях, содержащих несинусоидальные источники ЭДС, резонансные явления можно применять как для выделения требуемых частот, так и для подавления нежелательных частот.

## Глава X. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### 10.1. Классификация нелинейных элементов

*Нелинейными электрическими цепями переменного тока называют электрические цепи, в состав которых входит одно или несколько нелинейных сопротивлений.*

Поскольку сопротивление переменному току оказывает не только активное сопротивление, но и индуктивные катушки, и конденсаторы, в цепях переменного тока выделяют три группы сопротивлений: активные, индуктивные и ёмкостные. В каждой из трёх групп можно выделить управляемые и неуправляемые элементы.

При исследовании нелинейных электрических цепей переменного тока необходимо учитывать характеристики составляющих их элементов. Для активных нелинейных элементов, типичным примером которых является нелинейный резистор, основной является вольтамперная характеристика (рис.10.1.1.а). Основной характеристикой нелинейных индуктивных элементов, типичным представителем которых является индуктивная катушка с ферромагнитным сердечником, является зависимость потокосцепления  $\psi$  от силы тока  $I$  (рис.10.1.1.б). Характеристикой, раскрывающей поведение ёмкостного элемента, например, конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено сегнетоэлектриком, является зависимость заряда пластин  $q$  от напряжения  $u$  между ними (рис.10.1.1.в).

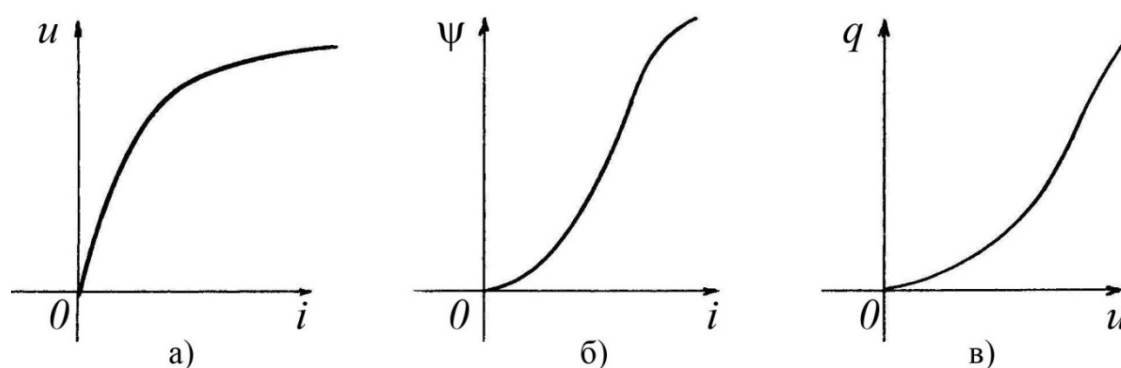


Рис.10.1.1

В приведённых примерах рассмотрены связи между *мгновенными* значениями напряжений, токов, потокосцеплений и электрических зарядов.

При анализе работы нелинейных элементов в электрических цепях переменного тока необходимо дифференцировать понятия характеристик этих элементов, различая:

1) *статические характеристики*, определяемые при медленном изменении режима работы нелинейных элементов и поэтому совпадающие с характеристиками, снимаемыми при постоянном токе;

2) *динамические характеристики*, определяемые при конечной, заранее определённой скорости изменения режима.

Различие между статическими и динамическими характеристиками нелинейных элементов, как правило, вызвано их инерционностью. Элементы, с различающимися статической и динамической характеристикой, называется **инерционным элементом**. Если статическая характеристика и динамическая характеристика совпадают, элемент называется **безынерционным элементом**. Инерционность элемента определяется влиянием температуры на его характеристику. Поскольку тепловые процессы (нагревание, охлаждение) являются инерционными, то сопротивления, нелинейность вольтамперных характеристик которых обусловлена в основном изменением температуры элемента, являются инерционными. К инерционным элементам относят, например, лампы накаливания, бареттеры, термисторы. Сопротивления, нелинейность вольтамперных характеристик которых обусловлена нетепловыми процессами, являются безынерционными. К ним относятся, например, электронные лампы, полупроводниковые диоды, термисторы.

## 10.2. Нелинейные резисторы в цепи переменного тока

Примером резистивного нелинейного инерционного элемента является лампа накаливания, нелинейность статической вольтамперной характеристики которой (линия 1 на рис.10.2.1.а) объясняется увеличением удельного сопротивления нити накаливания при повышении температуры в результате увеличения силы тока. При питании такой лампы током относительно высокой частоты, вследствие тепловой инерции нити, её температура не изменяется существенно в течение периода. Поэтому динамическая вольтамперная характеристика лампы на высокой частоте является почти линейной и изображается прямой линией 2 на рис.10.4.1.а. Наклон динамической вольтамперной характеристики лампы зависит от амплитудного значения переменного тока  $I_m$ . При уменьшении значения  $I_m$  средняя температура нити понижается, и угол наклона динамической характеристики уменьшается (линия 3 на рис.10.2.1.а).

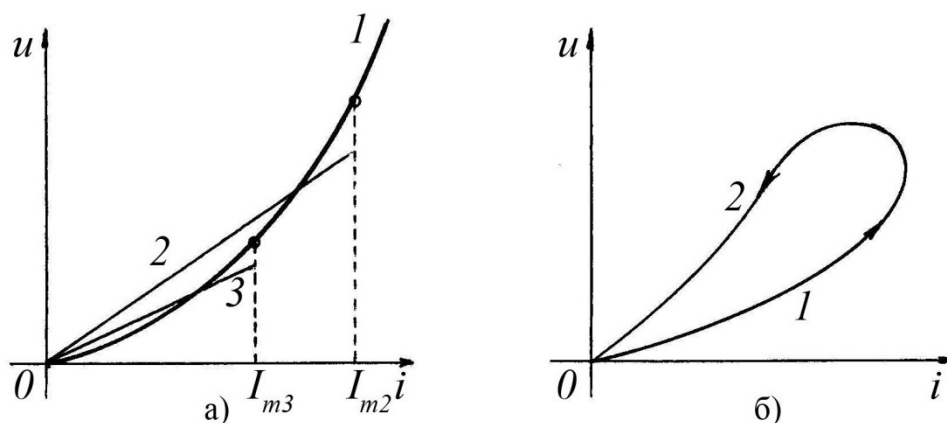


Рис.10.2.1

При пониженной частоте переменного тока температура нити лампы изменяется в течение периода. В этом случае при возрастании силы тока характеристика идёт ниже (участок 1 на рис.10.2.1.б), чем при его уменьшении (участок 2 на рис.10.2.1.б), так как на первом участке средняя температура нити ниже, чем на втором. В результате динамическая характеристика имеет форму петли. Подобные явления наблюдаются в лампах накаливания малой мощности при промышленной частоте  $f=50$  Гц.

Таким образом, *динамическая характеристика инерционных нелинейных элементов в общем случае зависит как от частоты, так и от амплитуды тока*. В широком диапазоне частот многие нелинейные элементы являются безынерционными, то есть их нелинейная характеристика отражает зависимость между мгновенными значениями тока и напряжения.

Рассмотрим влияние безынерционного элемента на форму кривых тока и напряжения. Если нелинейный безынерционный резистор присоединить к генератору синусоидального напряжения, то проходящий через сопротивление ток будет иметь несинусоидальную форму, поэтому безынерционный резистор является генератором высших гармоник тока.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим электрическую цепь, состоящую из одного безынерционного нелинейного резистора и источника синусоидального напряжения (рис.10.2.2.а).

Для удобства построения кривой тока оси функций  $u(t)$  и  $i(t)$  следует расположить соответственно по вертикальной и горизонтальной осям временных зависимостей.

При этом необходимо построить: 1) нелинейную характеристику  $i(u)$  (рис.10.2.2.б); 2) синусоиду  $u(t)$  (рис.10.2.2.г); 3) по полученным выше характеристикам  $i(u)$  и  $u(t)$  зависимость тока от времени  $i(t)$  (рис.10.2.2.в). Для выполнения данных построений необходимо, выбрав на оси времени графика  $u(t)$  несколько точек, соответствующих произвольным моментам времени, включая  $t_m$ , когда напряжение

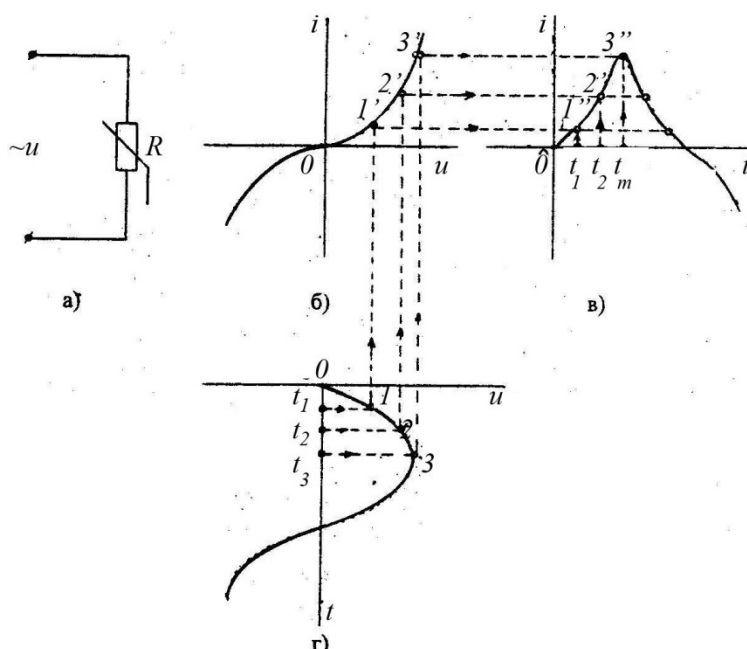


Рис.10.2.2

максимально  $u=u_m$ , найти токи  $i_i$  резистора, соответствующие этим напряжениям в этот момент времени. Если резистор симметричный, то при синусоидальном напряжении и кривая тока  $i(t)$  будет симметричной.

Выполнив аналогичные построения, можно показать, что при пропускании синусоидального тока через резистор напряжение на резисторе будет несинусоидальным.

Таким образом, *нелинейный резистор обладает способностью преобразовывать спектр воздействующих на него колебаний: 1) в функции тока появляются гармонические составляющие, которые отсутствуют в приложенном напряжении (рис.10.2.2.в, г); 2) в функции напряжения появляются гармонические составляющие, которые отсутствуют в функции тока, пропускаемого через нелинейный резистор.* Эта важная особенность нелинейных резисторов широко используется в автоматике и радиотехнике.

Одним из основных энергетических показателей электрических цепей является коэффициент мощности. Коэффициент мощности электрической цепи, состоящей из нелинейного резистора и источника синусоидального напряжения  $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega \cdot t)$  (рис.10.2.2.а) определяется выражением (9.5.6):

$$\chi = \frac{P}{U \cdot I}.$$

Поскольку в рассматриваемой электрической цепи наблюдается искажение формы кривой тока и появление в ней высших гармоник, мощность электрической цепи следует рассматривать как сумму мощностей отдельных гармоник:  $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 + U_3 \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3 + \dots$  Поскольку питающее напряжение изменяется по закону синуса и не содержит высших гармоник, в выражении мощности остаётся только одно (первое) слагаемое:  $P = P_1 = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 = U_1 \cdot I_1 = U_1 \cdot I$ , так как  $U_1 = U$ ;  $\cos \varphi_1 = 1$ , поскольку активное сопротивление не даёт сдвига между напряжением и током основной гармоники ( $\varphi_1 = 0$ ). С учётом сделанных преобразований коэффициент мощности выражается в виде:

$$\chi = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{I_1 \cdot U}{U \cdot I} = \frac{I_1}{I}. \quad (10.2.1)$$

Таким образом, коэффициент мощности электрической цепи, содержащей нелинейный резистор, равен коэффициенту синусоидальности тока, который при искажении формы кривой тока меньше единицы.

### 10.3. Общая характеристика нелинейных индуктивностей

*Нелинейными индуктивностями называют катушки с обмотками, намотанными на замкнутые сердечники из ферромагнитного материала, для которых зависимость магнитного потока в сердечнике от тока в обмотках не линейна.* Индуктивное сопротивление переменному току таких катушек зависит от частоты и силы тока. Индуктивную катушку со стальным сердечником иногда называют дросселем со стальным сердечником. Различают управляемые и неуправляемые нелинейные катушки. По-

скольку нелинейность катушек с ферромагнитным сердечником обусловлена свойствами материала сердечника, а не тепловыми эффектами, такие катушки являются безынерционными устройствами.

Обозначение нелинейной индуктивности приведено на рис.10.3.1.

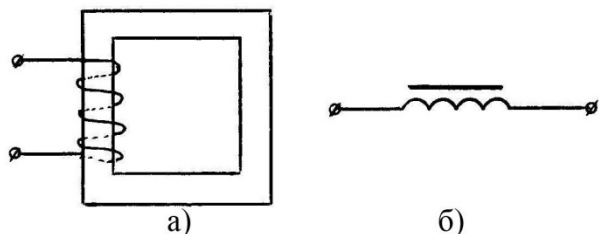


Рис.10.3.1

Сердечники нелинейных индуктивностей, предназначенных для работы при относительно низких частотах, могут быть двух типов: пакетные и спиральные. Спиральные сердечники выполняют из тонкой ферромагнитной ленты в форме туго навитой часовой пружины.

Пакетные сердечники состоят из тонких пластин ферромагнитного материала кольцевой, *П*- или *Ш*-образной формы. Пластины пакетного и отдельные витки спирального сердечника электрически изолируют друг от друга эмалевым лаком, жидким стеклом или иным изолирующим материалом и запекают. Изоляция необходима для уменьшения потерь энергии в сердечнике вследствие протекания вихревых токов. Поскольку при повышении частоты переменного тока резко возрастают потери энергии в листовых сердечниках, для работы на высоких частотах сердечники изготавливают из феррита.

При протекании переменного тока по обмотке катушки в её сердечнике возникает переменный магнитный поток, под действием которого в листах сердечника возникают вихревые токи. Обусловленные вихревыми токами потери энергии пропорциональны второй степени: а) амплитуды индукции магнитного поля, б) частоты, и в) толщины листа сердечника. Распространены следующие два способа уменьшения потерь энергии в листовом сердечнике катушки, обусловленные вихревыми токами: 1) сердечник изготавливают из тонких изолированных друг от друга листов; 2) в материал сердечника добавляют примеси, которые увеличивают его электрическое сопротивление. Для использования катушки в цепи переменного тока частотой  $50 \text{ Гц}$  толщина листов сердечника составляет  $0,35 \div 0,5 \text{ мм}$ , на высоких частотах толщина листов составляет  $0,005 \text{ мм}$ .

Наряду с потерями вследствие вихревых токов в сердечнике следует учитывать также потери, обусловленные гистерезисом и магнитной вязкостью. Явление магнитной вязкости в ферромагнитных сердечниках заключается в затягивании процесса установления магнитного поля в них при быстрых изменениях напряжённости внешнего магнитного поля.

Гистерезис обуславливает дополнительные потери энергии в ферромагнитном сердечнике. Площадь петли гистерезиса, снятой при достаточно медленном изменении магнитного поля, то есть когда вихревые токи пренебрежимо малы, характеризует энергию, выделяющуюся в единице

объёма ферромагнитного материала за один период переменного тока (за один цикл перемагничивания). Потери энергии в сердечнике, обусловленные гистерезисом, пропорциональны: а) объёму сердечника, б) первой степени частоты, в) площади петли гистерезиса. Вызванные гистерезисом потери энергии в сердечнике не зависят от толщины листов, из которых изготовлен сердечник. Петля гистерезиса, полученная при быстром изменении магнитного поля, называется динамической петлёй гистерезиса. Динамическая петля гистерезиса шире статической петли за счёт вихревых токов и магнитной вязкости.

При расчёте режимов работы и параметров электрических цепей, содержащих нелинейную индуктивность, её целесообразно заменять эквивалентной схемой (рис.10.3.2).

В эквивалентной схеме, приведённой на рис.10.3.2, параллельно идеализированной катушке, то есть катушке без потерь энергии, включено сопротивление  $R_{г.в}$  для учёта потерь энергии в сердечнике вследствие гистерезиса и вихревых токов.

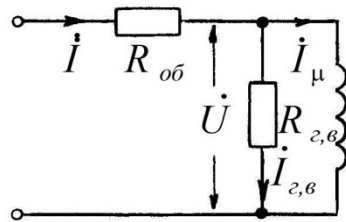


Рис.10.3.2

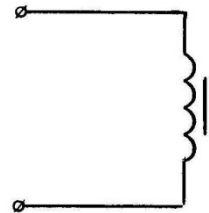


Рис.10.3.3

Сопротивление обмотки учитывает резистор  $R_{об.}$ ,  $\dot{U}$  – напряжение на катушке.

Если сердечник изготовлен из низкокачественного материала, то потери в нём относительно велики, что обуславливает малое значение сопротивления  $R_{г.в}$ . Вследствие малости сопротивления  $R_{г.в}$  сила тока

$$\dot{i}_{г.в.} = \frac{\dot{U}}{R_{г.в.}}$$

может оказаться соизмеримой с силой тока  $\dot{i}_{\mu}$ . Поэтому необходимо учитывать ветвь с сопротивлением  $R_{г.в}$ .

Если же сердечник изготовлен из тонких листов высококачественно магнитного материала, то потери энергии в сердечнике незначительны, что обуславливает большое значение сопротивления  $R_{г.в}$ . В этом случае в данном сопротивлении течёт незначительный ток  $\dot{i}_{г.в.}$ , и ветвь с сопротивлением  $R_{г.в}$  можно не учитывать. Если и активное сопротивление обмотки  $R_{об.}$  настолько мало, что можно пренебречь падением напряжения на этом сопротивлении, то эквивалентная схема нелинейной индуктивной катушки принимает вид, представленный на рис.10.3.3.

#### 10.4. Общая характеристика нелинейных ёмкостных сопротивлений

Конденсаторы, обкладки которых разделены диэлектриком с постоянной диэлектрической проницаемостью, не зависящей от приложенного напряжения, называют *линейными* конденсаторами. Зависимость заряда на

пластинах конденсатора от напряжения между ними линейного конденсатора является линейной (рис.10.4.1.а).

Конденсатор, между обкладками которого находится сегнетоэлектрик, является *нелинейным* и называется *варикондом*. **Сегнетоэлектриками** называют вещества, диэлектрическая проницаемость которых является функцией напряжённости электрического поля. Сегнетоэлектрики, подобно ферромагнетикам, обладают гистерезисом, но не магнитным, а электрическим (рис.10.4.1.б). **Электрическим гистерезисом** называется явление отставания электрического смещения  $D$  от напряжённости  $E$  электрического поля. Площадь петли гистерезиса сегнетоэлектрика, полученная при медленном изменении напряжённости внешнего электрического поля, характеризует потери энергии.

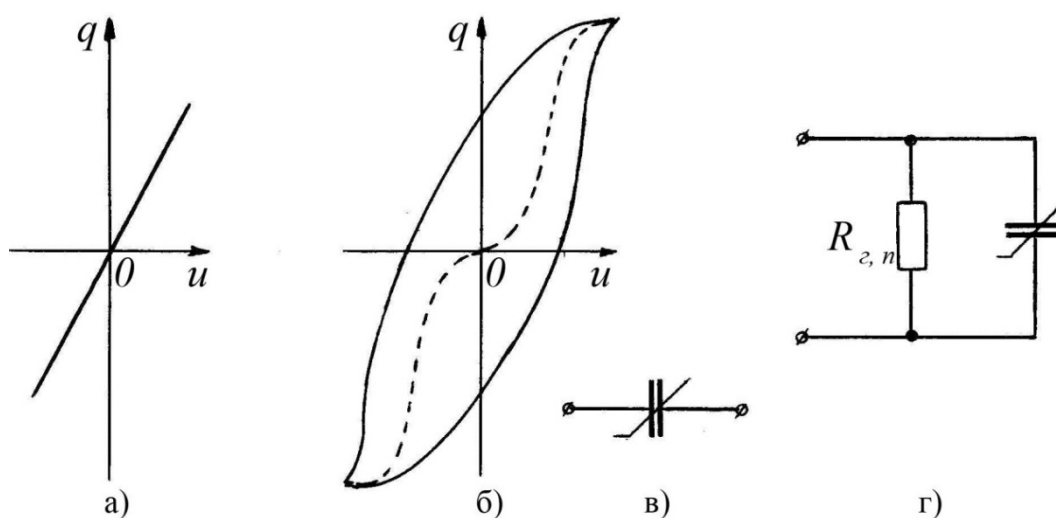


Рис.10.4.1

В вариконде потери энергии обусловлены не только электрическим гистерезисом, но и электрической проводимостью материала сегнетоэлектрика, а также диэлектрической вязкостью. На рис.10.4.1.г изображено условное обозначение вариконда на электрических схемах. Схема замещения вариконда наряду с нелинейным конденсатором содержит активное сопротивление  $R_{г.п.}$ , которое учитывает потери активной энергии в вариконде (рис.10.4.1.г).

### 10.5. Общая характеристика методов анализа нелинейных электрических цепей переменного тока

Анализ процессов, протекающих в нелинейных электрических цепях переменного тока, более сложен и трудоёмок, чем расчёт режимов работы линейных электрических цепей. Как правило, в нелинейных электрических цепях содержатся нелинейные индуктивности, нелинейные конденсаторы и нелинейные безынерционные сопротивления. Токи и напряжения в таких электрических цепях имеют форму, отличную от синусоиды. В нелинейных электрических цепях, нелинейными элементами которых являются

только активные сопротивления, функции напряжения и тока описываются законом, близким к гармоническому закону.

Все методы расчёта нелинейных электрических цепей можно разделить на три основные группы:

- 1) графические;
- 2) аналитические;
- 3) графо-аналитические.

Преимущество аналитических методов состоит в том, что они в отличие от графических методов расчёта позволяют проводить анализ в общем виде, а не только для частных значений параметров и электрических схем. Недостатком аналитических методов является необходимость выражать аналитически характеристики нелинейных элементов, что всегда приводит к погрешностям. Таким образом, расчёт сложных электрических цепей можно выполнять лишь приближённо.

## 10.6. Графический метод

Графический метод применяют, как правило, для расчёта режимов работы нелинейных электрических цепей, для которых известен закон изменения во времени какой-либо величины, определяющей работу нелинейного элемента цепи, например, тока, напряжения или заряда.

Расчёт режимов работы нелинейных электрических цепей графическим методом выполняют в следующей последовательности:

- 1) исходя из условий задачи устанавливают закон изменения со временем одной из величин, определяющих работу нелинейного элемента;
- 2) используя характеристику нелинейного элемента, полученную для мгновенных значений, с помощью графических построений устанавливают закон изменения со временем второй величины, определяющей работу нелинейного элемента;

3) по результатам пункта «2» путём вспомогательных графических построений и с помощью расчётов определяют искомую величину или соотношение между параметрами.

Например, рассмотрим электрическую цепь переменного тока, содержащую индуктивную катушку со стальным сердечником.

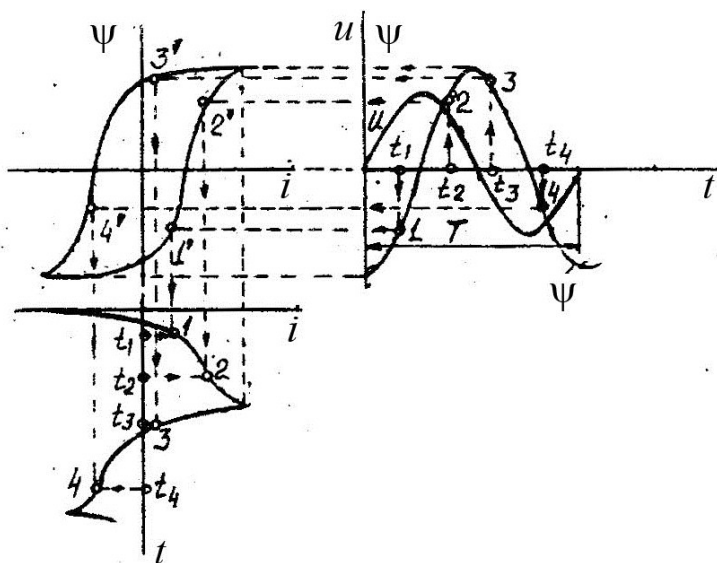


Рис.10.6.1

Дано: напряжение на катушке изменяется по закону синуса:  $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ; зависимость потокосцепления  $\psi$  от силы тока  $i$  в катушке задана в виде петли гистерезиса (рис.10.6.1).

Определить: зависимость тока в катушке от времени. Активным сопротивлением и потокосцеплением рассеяния пренебречь.

*Первый этап расчёта.* При заданных условиях напряжение на катушке  $u$ , ЭДС индукции  $e$  и потокосцепление  $\psi$  связаны соотношением:

$$u = -e = \frac{d\psi}{dt},$$

следовательно:

$$\psi(t) = \int u(t) \cdot dt = \int U_m \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot dt = -\frac{U_m}{\omega} \cdot \cos(\omega \cdot t) + A.$$

Учитывая, что в отсутствие постоянного подмагничивания постоянная интегрирования  $A$  равна нулю ( $A=0$ ), из последнего соотношения выразим потокосцепление:

$$\psi(t) = -\psi_m \cdot \cos(\omega \cdot t). \quad (10.6.1)$$

*Второй этап расчёта.* Используя известные зависимости  $\psi(i)$  и  $u(i)$ , а также полученное на первом этапе расчёта соотношение (10.6.1), строят график зависимости  $i(t)$  (рис.10.6.1).

На *третьем этапе расчёта* с помощью установленной зависимости  $i(t)$  определяют ток в катушке в требуемый момент времени.

## 10.7. Аналитические методы

Характеристики нелинейных элементов задаются обычно в виде кривых, полученных экспериментально. Замена заданной графически нелинейной характеристики аналитической функцией, приближённо выражающей исследуемую зависимость, называется аппроксимацией нелинейной характеристики. Точная аппроксимация характеристик обычно приводит к сложным математическим выражениям, что существенно затрудняет анализ. Кроме того, и сами нелинейные характеристики не являются абсолютно точными и стабильными. Они могут зависеть от различных внешних воздействий: температуры, электрических и магнитных полей, причём характеристики разных образцов одного и того же элемента не идентичны. Поэтому не имеет смысла стремиться к очень точной аппроксимации характеристик. Аппроксимация нелинейной характеристики достаточно простой аналитической функцией позволяет аналитически исследовать процессы, протекающие в нелинейном элементе.

Наиболее широко распространены следующие способы аппроксимации нелинейной характеристики: аппроксимация степенным полиномом, кусочно-линейная аппроксимация и другие.

**10.7.1. Аппроксимация степенным полиномом.** Если функция  $i(u)$  непрерывна и при  $u=u_0$  имеет производные  $i'(u_0), i''(u_0), \dots$ , то она может быть представлена в виде ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} i(u) &= i(u_0) + \frac{1}{1!} \cdot (u - u_0) \cdot i'(u_0) + \frac{1}{2!} \cdot (u - u_0)^2 \cdot i''(u_0) + \dots = \\ &= a_0 + a_1 \cdot (u - u_0) + a_2 \cdot (u - u_0)^2 + \dots. \end{aligned} \quad (10.7.2)$$

При  $u_0=0$  функция может быть представлена рядом Мак-Лорена:

$$i(u) = a_0 + a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^2 + a_3 \cdot u^3 + \dots. \quad (10.7.2)$$

Степенной ряд, выражаемый соотношением (10.7.1) или (10.7.2), при большом числе слагаемых точно аппроксимирует действительную характеристику. Для упрощения преобразований ограничиваются степенью полинома не выше третьей.

Если к нелинейному элементу, характеристика которого аппроксимирована полиномом третьей степени, подключить синусоидальное напряжение  $u(t)=U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$ , то, с учётом соотношения (10.7.2), временная зависимость тока может быть описана выражением:

$$\begin{aligned} i(t) &= a_0 + a_1 \cdot U_m \cdot \sin(\omega \cdot t) + a_2 \cdot U_m^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + \\ &+ a_3 \cdot U_m^3 \cdot \sin^3(\omega \cdot t). \end{aligned}$$

Применение известных тригонометрических соотношений

$$\sin^2(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \quad \text{и}$$

$$\sin^3(\omega \cdot t) = \frac{3}{4} \cdot \sin(\omega \cdot t) - \frac{1}{4} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t)$$

позволяет преобразовать временную зависимость тока к следующему виду:

$$\begin{aligned} i(t) &= \left( a_0 + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot U_m^2 \right) + \left( a_1 \cdot U_m + \frac{3}{4} \cdot a_3 \cdot U_m^3 \right) \cdot \sin(\omega \cdot t) - \\ &- \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot U_m^2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) - \frac{1}{4} \cdot a_3 \cdot U_m^3 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t). \end{aligned} \quad (10.7.3)$$

Следовательно, ток содержит постоянную составляющую и гармоники частот, кратные частоте приложенного синусоидального напряжения, причём наивысший коэффициент кратности равен степени аппроксимирующего полинома. Из уравнения (10.7.3) следует, что постоянная составляющая

$$I_0 = a_0 + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot U_m^2$$

и амплитуды чётных гармоник

$$I_{2m} = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot U_m^2$$

зависят от коэффициентов при чётных степенях полинома. Амплитуды нечётных гармоник

$$I_{1m} = a_1 \cdot U_m + \frac{3}{4} \cdot a_3 \cdot U_m^3 \quad \text{и} \quad I_{3m} = \frac{1}{4} \cdot a_3 \cdot U_m^3$$

зависят от коэффициентов при нечётных степенях.

### 10.7.2. Кусочно-линейная аппроксимация

Метод кусочно-линейной аппроксимации заключается в замене заданной нелинейной характеристики ломаной линией с одной или несколькими точками излома. Такая замена нелинейной характеристики позволяет вести расчёт аналитически с помощью линейных уравнений. Для прямолинейных участков записывают линейные уравнения, решения которых должны удовлетворять следующему требованию: значения электрических величин конца одного участка должны быть равны соответствующим значениям начала следующего участка.

Наиболее целесообразно применение кусочно-линейной аппроксимации для расчёта электрических цепей с нелинейными элементами, нелинейность характеристики которых мала или когда участок характеристики, в пределах которого работает элемент, известен и может быть аппроксимирован прямой линией без излома. В этом случае нелинейный элемент заменяют источником постоянной ЭДС и линейным сопротивлением, равным дифференциальному сопротивлению этого элемента.

В общем случае при замене нелинейной характеристики ломаной линией, схема замещения нелинейного сопротивления наряду с источниками и линейными резисторами включает в себя идеализированные выпрямительные диоды (один или несколько). Идеальный диод имеет сопротивление, равное нулю, при прямом включении и бесконечно большое сопротивление при обратном включении диода. Вольтамперная характеристика идеального диода имеет излом в точке  $[u=0, \quad i=0]$  и приведена на рис.10.7.1.

Методом кусочно-линейной аппроксимации вольтамперных характеристик нелинейных сопротивлений, содержащихся в исследуемой электрической цепи, можно получить эквивалентную схему замещения всей цепи.

Например, построим вольтамперную характеристику электрической цепи, приведённой на рис.10.7.2.

В точке излома вольтамперной характеристики диода  $VD$  ток и напряжение равны нулю. Поскольку ток в сопротивлении  $R_I$  равен нулю, ветвь с этим сопротивлением можно разомкнуть. В этом случае идеальный диод  $VD$  открыт и через него течёт ток

$$i_2 = \frac{E}{R_2}.$$

Поскольку напряжение на диодах  $VD$  и  $VDI$  и на сопротивлении  $R_1$  равно нулю, напряжение на входе также равно нулю. Следовательно, первый излом вольтамперной характеристики находится в точке с координатами  $[u=0, i=0]$ .

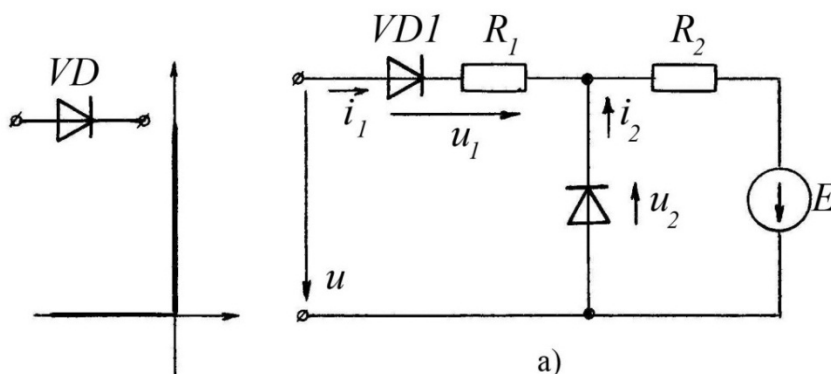


Рис.10.7.1

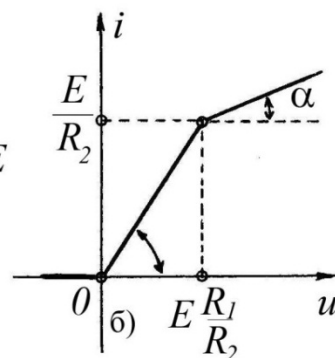


Рис.10.7.2

Для диода  $VD$  при  $u_2=0$  ток  $i_2=0$ . При этих условиях через сопротивление  $R_2$  течёт ток, равный  $\frac{E}{R_2}$ . Поскольку ток  $i_2=0$ , должно соблюдаться условие  $i_1 = \frac{E}{R_2}$ , причём вентиль  $VDI$  должен быть открыт, то есть  $u_1=0$ , следовательно

$$u = R_1 \cdot i_1 = E \cdot \frac{R_1}{R_2}.$$

Таким образом, второй излом вольтамперной характеристики имеет координаты:  $\left[ u = E \cdot \frac{R_1}{R_2}; i = \frac{E}{R_2} \right]$ . Между двумя изломами характеристика прямолинейна (рис.10.7.2.б). Слева от первой точки излома диод  $VDI$  закрыт, и  $i=0$ , и характеристика совпадает с отрицательной полуосью напряжения.

При напряжениях, превышающих значение  $E \cdot \frac{R_1}{R_2}$ , то есть правее второй точки излома характеристики, диод  $VD$  закрыт, а диод  $VDI$  открыт. Поэтому характеристика составляет с осью напряжения угол  $\alpha = \arctg\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$ .

Аналитические методы расчёта нелинейных электрических цепей переменного тока содержат следующие основные этапы:

1) замена вольтамперной (вебер-амперной или кулон-вольтной) характеристики нелинейного элемента для мгновенных значений отрезками прямых линий;

2) подстановка в нелинейные дифференциальные уравнения законов Кирхгофа для исследуемой электрической цепи уравнений прямых, полу-

ченных на первом этапе расчёта. Это позволяет заменить нелинейные дифференциальные уравнения линейными уравнениями, причём число линейных уравнений, соответствующих каждому нелинейному уравнению, равно числу отрезков, заменяющих характеристику нелинейного элемента;

3) решение системы линейных дифференциальных уравнений. Каждому линейному участку характеристики нелинейного элемента соответствует решение постоянными интегрирования, которые необходимо определить;

4) определение постоянных интегрирования исходя из необходимости согласования решений на двух линейных участках характеристики в точке перегиба.

Аналитический метод наиболее эффективен, если характеристику нелинейного элемента с известной степенью приближения можно заменить отрезками прямых линий, расположенных таким образом, что когда одна величина, определяющая режим работы нелинейного элемента, например, ток меняется, а другая величина, например, потокосцепление, неизменна. Данный метод эффективен также, когда отрезки прямых линий, заменяющие вольтамперную характеристику нелинейного элемента, совпадают с осями координат.

### 10.8. Графо-аналитический метод

Рассмотрим пример, когда к нелинейному элементу электрической цепи приложено переменное напряжение, изменяющееся по закону косинуса:  $u(t) = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$ . Вольтамперная характеристика нелинейного элемента приведена на рис.10.8.1.

Ограничиваясь тремя слагаемыми тригонометрического ряда Фурье, выражение переменного тока следует представить в виде

$$i(t) = I_0 + I_{1m} \cdot \cos(\omega \cdot t) + I_{2m} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t).$$

Неизвестные значения  $I_0$ ,  $I_{1m}$  и  $I_{2m}$  определяют по трём ординатам характеристики  $u(i)$ , соответствующим фазам приложенного напряжения  $\omega \cdot t = 0; \pi/2; \pi$ :

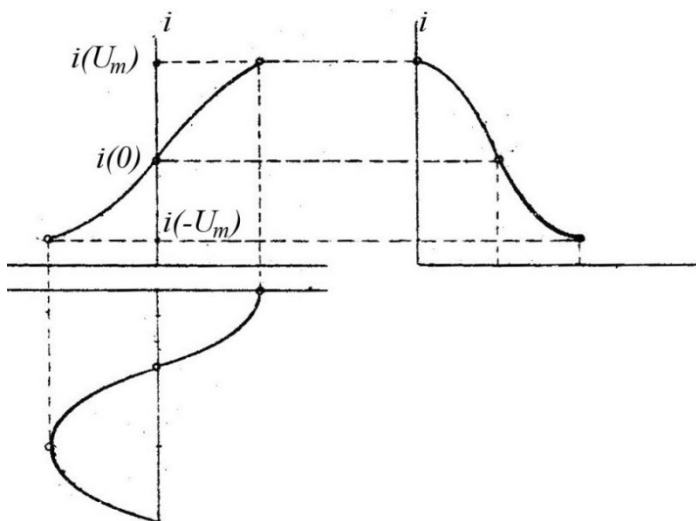


Рис.10.8.1

$$\begin{cases} i(U_m) = I_0 + I_{1m} + I_{2m} & \text{при } \omega \cdot t = 0; \\ i(0) = I_0 - I_{2m} & \text{при } \omega \cdot t = \frac{\pi}{2}; \\ i(-U_m) = I_0 - I_{1m} + I_{2m} & \text{при } \omega \cdot t = \pi. \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений относительно токов  $I_0$ ,  $I_{1m}$  и  $I_{2m}$  даёт:

$$\begin{cases} I_0 = \frac{1}{4} \cdot [i(U_m) + i(-U_{1m})] + \frac{1}{2} \cdot i(0); \\ I_{1m} = \frac{1}{2} \cdot [i(U_m) - i(-U_{1m})]; \\ I_{2m} = \frac{1}{4} \cdot [i(U_m) + i(-U_{1m})] - \frac{1}{2} \cdot i(0). \end{cases}$$

Дальнейшее решение производится в соответствии с пунктами 2 и 3 на стр.193.

Если точность аппроксимации, выполненной по методу трёх ординат, недостаточна и требуется определить амплитуду гармоник более высокого порядка, составляется большее число уравнений.

### 10.9. Метод последовательных приближений

Применение метода последовательных приближений для расчёта режима работы нелинейных электрических цепей переменного тока наиболее обосновано в тех случаях, когда нелинейные элементы соединены с общим узлом. Потенциал этого узла принимают равным нулю.

Пусть, например, необходимо исследовать режим работы электрической цепи, приведённой на рис.10.9.1. Здесь нелинейные элементы  $\Pi 1$  и  $\Pi 2$  характеризуются неизменными значениями потребляемых активных мощностей.

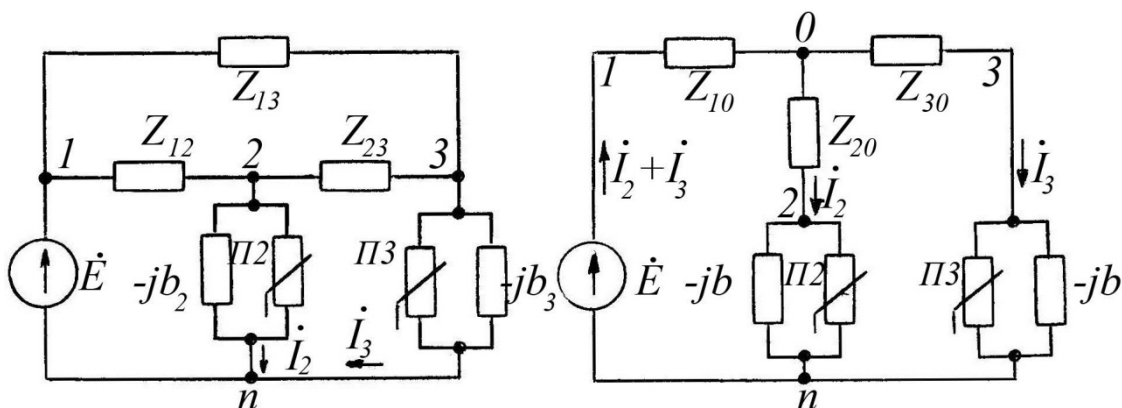


Рис.10.9.1

Рис.10.9.2

Для упрощения расчёта следует преобразовать схему на рис.10.9.1, заменив треугольник сопротивлений  $Z_{13}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{23}$  эквивалентной звездой  $Z_{10}$ ,  $Z_{20}$ ,  $Z_{30}$  (рис.10.9.2). Токи  $I_2$  и  $I_3$  в нелинейных элементах зависят от

напряжения  $\dot{U}_2$  и  $\dot{U}_3$  соответственно на втором и третьем узлах относительно точки  $n$  с нулевым потенциалом.

Для расчёта методом последовательных приближений необходимо выполнить следующие операции:

1) произвольно задать значения напряжений  $\dot{U}_2$  и  $\dot{U}_3$  и рассчитать токи:

$$\begin{cases} i_2 = \frac{P_2}{\dot{U}_2} - j \cdot b_2 \cdot \dot{U}_2; \\ i_3 = \frac{P_3}{\dot{U}_3} - j \cdot b_3 \cdot \dot{U}_3. \end{cases}$$

Эти данные являются нулевым приближением.

2) определяют уточнённые значения напряжения на втором и третьем узлах по формулам, полученным на основании принципа наложения для линейной части схемы замещения:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{E} - i_2 \cdot (Z_{10} + Z_{20}) - i_3 \cdot Z_{10}; \\ \dot{U}_3 = \dot{E} - i_3 \cdot (Z_{10} + Z_{30}) - i_2 \cdot Z_{10}. \end{cases}$$

Таким образом, получаются данные первого приближения. Уточнение, то есть получение последующих приближений, производится по тем же формулам до тех пор, пока погрешности не достигнут приемлемых значений.

Поскольку на каждом этапе приближения схему замещения рассматривают как линейную схему, для расчёта соответствующего рабочего режима можно применять такие же методы расчёта, как и для линейных электрических цепей.

### 10.10. Основные явления в ферромагнитных катушках

Ферромагнитная катушка является наиболее распространённым нелинейным элементом цепи переменного тока. Её нелинейность является следствием нелинейности характеристики намагничивания  $B=f(H)$  ферромагнитных материалов и выражается в нелинейности магнитной характеристики катушки  $\psi=f(i)$ .

На принципиальных электрических схемах нелинейность ферромагнитных катушек подчёркивается с помощью общего принципа нелинейности (рис.10.10.1.а). Однако чаще применяется обозначение, приведённое на рис.10.10.1.б.

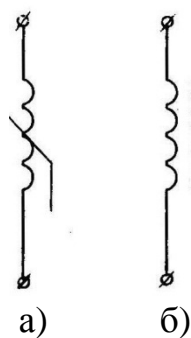


Рис.10.10.1

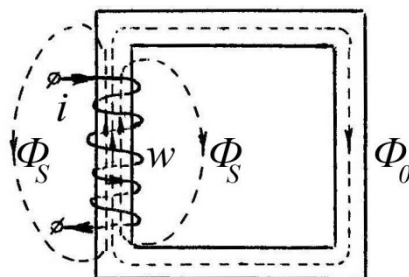


Рис.10.10.2

Магнитное поле катушки с магнитопроводом можно разделить на две части: *основное поле*, полностью локализованное в магнитопроводе, и

поле рассеяния, линии индукции которого полностью или частично замыкаются в окружающем пространстве (рис.10.10.2). Соответственно на две составляющие можно разделить и потокосцепление обмотки:  $\psi = \psi_0 + \psi_s$ . Составляющая  $\psi_0$  называется *основным потокосцеплением*, слагаемое  $\psi_s$  называется *потокосцеплением рассеяния*. Основное потокосцепление определяется основным магнитным потоком  $\Phi_0$  и числом витков  $w$  обмотки  $\psi_0 = w \cdot \Phi_0$ . Поскольку основной магнитный поток замыкается в материале сердечника, основное потокосцепление и основной магнитный поток являются нелинейными функциями тока в случае ферромагнитного магнитопровода. Потокосцепление рассеяния линейно зависит от индукции магнитного поля, поскольку пространство, окружающее магнитный сердечник, как правило, характеризуется постоянной магнитной проницаемостью.

Анализ работы индуктивной катушки с сердечником из ферромагнитного материала осложнён и рядом других явлений. Существенное влияние на параметры катушки оказывают вихревые токи в сердечнике катушки. Они, как и всякие индуцированные токи, ослабляют магнитное поле катушки и вызывают нагревание сердечника. Потери энергии в сердечнике усиливаются также гистерезисом, а кроме того, выделением тепла в активном сопротивлении обмотки.

Одновременный учёт всех перечисленных явлений затруднителен, поэтому анализ работы катушки начинают с изучения процессов в идеальной катушке со стальным сердечником в цепи переменного тока. **Идеальная ферромагнитная катушка** представляет собой нелинейный элемент, активное сопротивление обмотки которого и поток рассеяния равны нулю; в материале сердечника катушки не наблюдается гистерезиса, и отсутствуют вихревые токи.

Одним из основных уравнений, характеризующих работу ферромагнитной катушки и трансформатора, является формула средней ЭДС, индуцируемой при периодическом изменении потокосцепления. Предположим, что потокосцепление контура в течение полупериода монотонно изменяется в пределах от  $\psi_{max}$  до  $\psi_{min}$  (рис.10.10.3). Мгновенная электродвижущая сила, индуцируемая этим потокосцеплением в рассматриваемый промежуток времени, соответствует положительной полуволне, так как в начале интервала времени при  $\psi = \psi_{max}$  и в конце интервала при  $\psi = \psi_{min}$  ЭДС индукции равна нулю, а в остальные моменты времени в этом интервале ЭДС положительна в соответствии с правилом Ленца, поскольку потокосцепление непрерывно уменьшается. Таким образом, среднее значение электродвижущей силы самоиндукции за данный полупериод описывается выражением:

$$E_{CP} = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e(t) \cdot dt = -\frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{d\psi}{dt} \cdot dt = -\frac{2}{T} \cdot \int_{\psi_{max}}^{\psi_{min}} d\psi.$$

Интегрирование данного выражения позволяет выразить среднее значение ЭДС индукции в более явном виде:

$$E_{CP} = \frac{2}{T} \cdot (\psi_{min} - \psi_{max}) = 2 \cdot f \cdot (\psi_{max} - \psi_{min}).$$

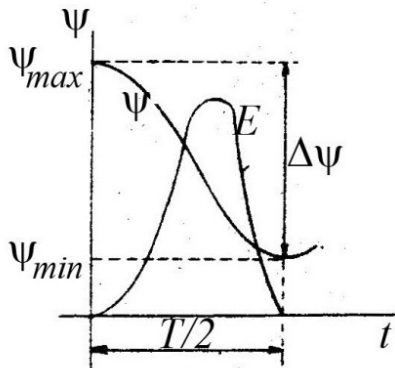


Рис.10.10.3

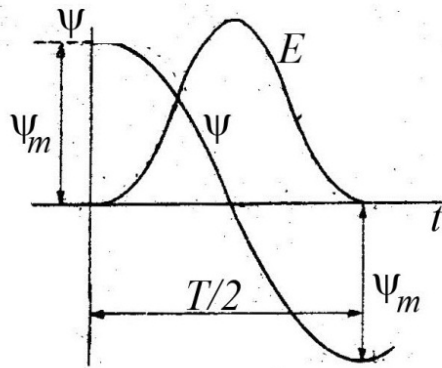


Рис.10.10.4

Вводя обозначение  $\Delta\psi = \psi_{max} - \psi_{min}$ , выражение средней электродвижущей силы индукции преобразуем к виду:

$$E_{CP} = 2 \cdot f \cdot \Delta\psi. \quad (10.10.1)$$

В частном случае, когда потокосцепление изменяется по гармоническому закону (рис.10.10.4), между значениями  $\psi_{max} = +\psi_m$  и  $\psi_{min} = -\psi_m$  средняя электродвижущая сила индукции выражается соотношением:

$$E_{CP} = 4 \cdot f \cdot \psi_m. \quad (10.10.2)$$

Среднюю электродвижущую силу в ферромагнитной катушке, индуцируемую основным магнитным потоком  $\Phi_{0m}$ , с учётом равенства  $\psi_m = \Phi_{0m} \cdot w$  и формулы (10.10.2) выразим соотношением:

$$E_{0CP} = 4 \cdot \Phi_{0m} \cdot w \cdot f \quad \text{или} \quad E_{0CP} = 4 \cdot B_m \cdot S \cdot w \cdot f. \quad (10.10.3)$$

Здесь  $\Phi_{0m}$  и  $B_m$  – максимальные значения соответственно основного магнитного потока и магнитной индукции в сердечнике катушки;  $S$  – площадь поперечного сечения магнитопровода;  $w$  – число витков в обмотке.

Действующее значение электродвижущей силы индукции катушки можно определить с помощью выражений средней ЭДС (10.10.3) и коэффициента формы  $k_{\Phi e}$ :  $E = k_{\Phi e} \cdot E_{CP}$ . Подстановка в данное выражение формулы (10.10.2) позволяет получить действующее значение ЭДС индукции катушки:

$$E = 4 \cdot k_{\Phi.e} \cdot f \cdot \psi_m. \quad (10.10.4)$$

Аналогично определяется действующее значение электродвижущей силы, индуцируемой в обмотке катушки основным магнитным потоком:

$$\begin{cases} E_0 = 4 \cdot k_{\Phi.e} \cdot f \cdot w \cdot \Phi_{0m}, & (a) \\ \text{или} & \\ E_0 = 4 \cdot k_{\Phi.e} \cdot f \cdot w \cdot S \cdot B_m. & (б) \end{cases} \quad (10.10.5)$$

Точное действующее значение ЭДС удаётся получить с помощью этих формул только в частном случае синусоидальной электродвижущей силы, когда коэффициент формы равен 1,11. В этом случае формулы (10.10.5) принимают вид:

$$\begin{cases} E_0 = 4,44 \cdot f \cdot w \cdot \Phi_{0m}, & (a) \\ \text{или} & \\ E_0 = 4,44 \cdot f \cdot w \cdot S \cdot B_m. & (б) \end{cases} \quad (10.10.6)$$

Если коэффициент формы неизвестен, нельзя использовать приведённые выше формулы для расчёта действующего значения ЭДС индукции. Однако, полагая, что форма сигнала близка к синусоиде, можно довольствоваться приближёнными вычислениями с помощью формул (10.10.6).

Катушка с ферромагнитным сердечником является генератором высших гармоник тока в цепи с синусоидальным напряжением, или генератором высших гармоник напряжения при протекании через неё синусоидального тока. Таким образом, ферромагнитная катушка искажает форму сигнала. Поэтому применение векторных диаграмм при анализе работы ферромагнитных катушек возможно только при условии замены несинусоидальных сигналов эквивалентными синусоидами. Магнитные потоки и потокосцепления на векторных диаграммах изображают векторами не действующих, а максимальных значений этих величин.

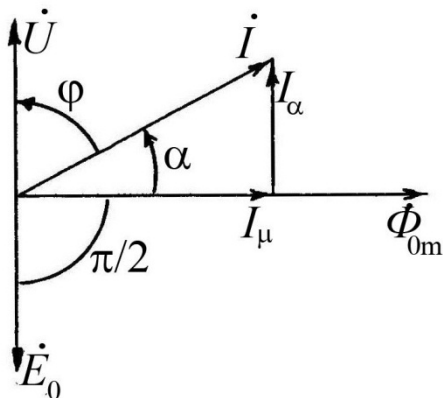


Рис.10.10.5

Построим векторную диаграмму идеальной ферромагнитной катушки с учётом явления гистерезиса в сердечнике катушки. В этом случае её потокосцепление и основной магнитный поток  $\Phi_0$  отстают по фазе от тока.

Построение векторной диаграммы начинают с изображения вектора основного магнитного потока  $\Phi_0$ , который располагают, как это принято, горизонтально (рис.10.10.5). Вектор тока  $\dot{I}$  опережает

вектор основного магнитного потока на угол  $\alpha$ , называемый *углом магнитного запаздывания*. Вектор ЭДС  $E_0$ , индуцируемой в обмотке основным

магнитным потоком, отстаёт от вектора основного магнитного потока на угол  $90^\circ$  и на векторной диаграмме направлен вертикально вниз. Так как ЭДС индукции катушки и напряжение на ней равны по величине и противоположны по знаку, то есть  $\dot{U} = -\dot{E}_0$ , то вектор напряжения направлен противоположно вектору  $\dot{E}_0$ . При анализе диаграммы вектор тока  $\dot{I}$  представляется в виде суммы двух составляющих: составляющей  $I_\mu$ , перпендикулярной вектору напряжения и называемой реактивным током катушки, и составляющей  $I_\alpha$ , перпендикулярной вектору основного магнитного потока. Составляющая  $I_\alpha$  тока совпадает по фазе с напряжением и называется активным током катушки. Из векторной диаграммы следует, что угол  $\varphi$  между эквивалентными синусоидами тока и напряжения меньше  $90^\circ$ . Следовательно, мощность, потребляемая ферромагнитной катушкой, равна:

$$P_\Gamma = U \cdot I \cdot \cos\varphi. \quad (10.10.7)$$

Для идеальной катушки, сопротивление обмотки которой равно нулю, активная мощность катушки может быть обусловлена только явлением гистерезиса в сердечнике, что и отражено в обозначении активной мощности индексом «Г». Учитывая, что углы  $\varphi$  и  $\alpha$  дополняют друг друга до  $90^\circ$  (рис.10.10.5), формулу (10.10.7) можно использовать для определения угла магнитного запаздывания:

$$\sin\alpha = \cos\varphi = \frac{P_\Gamma}{I \cdot U}. \quad (4.10.8)$$

### 10.11. Влияние вихревых токов и гистерезиса на режим работы и параметры ферромагнитной катушки

#### *А. Влияние вихревых токов на магнитные свойства катушки*

Индукцируемые в сердечнике вихревые токи оказывают на работу катушки двойственное влияние.

Во-первых, протекая по магнитопроводу, вихревые токи вызывают его нагревание и, следовательно, дополнительный расход энергии в катушке, называемый мощностью потерь на вихревые токи  $P_B$ . Следовательно, согласно формуле (10.10.8), вихревые токи приводят к увеличению угла магнитного запаздывания, величина которого при совместном проявлении гистерезиса и вихревых токов определяется выражением:

$$\sin\alpha = \frac{P_m}{I \cdot U}. \quad (10.11.1)$$

Здесь числитель представляет собой сумму мощностей потерь, обусловленных гистерезисом  $P_\Sigma$  и вихревыми токами  $P_B$ , и называется *мощностью полных магнитных потерь катушки*:

$$P_m = P_\Sigma + P_B. \quad (10.11.2)$$

Во-вторых, вихревые токи создают в сердечнике катушки собственное магнитное поле, которое, согласно правилу Ленца, ослабляет основное

магнитное поле катушки, так как именно оно является причиной возникновения вихревых токов. Таким образом, вихревые токи оказывают на катушку размагничивающее действие.

### *Б. Влияние вихревых токов и гистерезиса на параметры катушки*

Гистерезис и вихревые токи влияют не только на магнитный режим работы катушки, но и на её электрические параметры, в частности, на активное и реактивное сопротивление катушки. Гистерезис и вихревые токи являются причиной возникновения активного сопротивления индуктивной катушки с пренебрежимо малым активным сопротивлением обмотки. По определению активное сопротивление элемента электрической цепи переменного тока равно отношению активной мощности  $P$  данного элемента к второй степени действующего значения тока в нём, то есть  $R = \frac{P}{I^2}$ . Замена в данном выражении активной мощности  $P$  мощностью полных магнитных потерь катушки  $P_m$ , обусловленной гистерезисом и вихревыми токами, позволяет найти активное сопротивление катушки:  $R = \frac{P_m}{I^2}$ . Следовательно, увеличение мощности потерь приводит к увеличению активного сопротивления катушки.

Вихревые токи оказывают влияние и на реактивное сопротивление катушки. Например, при работе катушки в условиях неизменного тока, то есть неизменной МДС обмотки, вихревые токи приводят к уменьшению результирующей магнитодвижущей силы катушки и, следовательно, к уменьшению её магнитного потока. Это вызывает снижение ЭДС в обмотке:

$$E_0 = 4 \cdot k_\Phi \cdot f \cdot w \cdot \Phi_{0m}. \quad (10.11.3)$$

Поскольку напряжение  $U$  в идеальной катушке равно по модулю индуцируемой в ней ЭДС, вихревые токи вызывают также уменьшение падения напряжения в катушке. Если катушка включена в сеть с заданным действующим значением напряжения  $U$ , то неизменной должна быть и основная ЭДС  $E_0$ . Согласно формуле (10.11.3) и основной магнитный поток  $\Phi_{0m}$  не может изменяться. Это значит, что, несмотря на размагничивающее действие вихревых токов, результирующая магнитодвижущая сила катушки должна сохраняться. Это возможно лишь при условии увеличения силы тока в обмотке. С учётом закона Ома

$$Z = \frac{U}{I}$$

это означает уменьшение полного сопротивления катушки.

Поскольку вихревые токи и гистерезис вызывают увеличение активного сопротивления катушки, уменьшение её полного сопротивления возможно только при уменьшении реактивного сопротивления катушки.

Таким образом, вихревые токи и гистерезис вызывают уменьшение реактивного и полного сопротивления катушки и увеличение её активного сопротивления.

### В. Вольтамперная характеристика катушки

Для оценки поведения ферромагнитной катушки в цепи переменного тока исключительно важную роль играет её вольтамперная характеристика, связывающая действующее значение тока  $I$  и напряжения  $U$  катушки.

Для установления характера этой зависимости используют формулу (10.10.5.6):  $E_0 = 4 \cdot k_{\Phi.e} \cdot f \cdot w \cdot S \cdot B_m$ , принимая во внимание, что напряжение идеальной катушки равно её электродвижущей силе, то есть согласно формуле (10.11.3):  $U = E_0 = 4 \cdot k_{\Phi.e} \cdot f \cdot w \cdot S \cdot B_m$ , то есть  $U \sim B_m$ .

С другой стороны, действующее значение силы тока в обмотке катушки со стальным сердечником можно описать выражением:

$$I = I_m = \frac{w \cdot I_m}{w \cdot k_{ai}} = \frac{\ell \cdot H_m}{w \cdot k_{ai}} \sim H_m,$$

то есть  $I \sim H_m$ .

Таким образом, напряжение  $U$  на катушке пропорционально максимальной индукции  $B_m$ , а действующее значение тока  $I$  пропорционально максимальной напряжённости  $H_m$  магнитного поля в сердечнике. Следовательно, вольтамперная характеристика катушки  $U \sim f(I)$  должна быть подобна зависимости  $B_m = f(H_m)$ , которая представляет собой (рис.10.11.1) основную кривую намагничивания материала сердечника. Следовательно, вольтамперная характеристика катушки со стальным сердечником подобна кривой первоначального намагничивания материала.

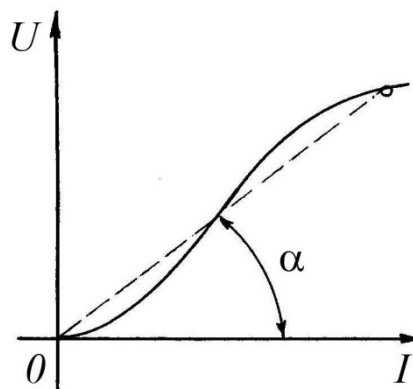


Рис.10.11.1

### Г. Эквивалентная индуктивность

Поскольку индуктивность ферромагнитной катушки существенно зависит от силы тока, при работе катушки в цепи переменного тока, когда её индуктивность непрерывно изменяется в течение периода, приходится вводить понятие **эквивалентной индуктивности**, представляющей собой усреднённое значение индуктивности за период. Эквивалентную индуктивность определяют по действующим значениям тока и напряжения, исходя из известных соотношений для линейных индуктивных катушек:

$$x = \omega \cdot L_{\Sigma} \quad \text{и} \quad x = \frac{U_p}{I}.$$

Следовательно:

$$L_{\Sigma} = \frac{x}{\omega} = \frac{U_p}{\omega \cdot I}.$$

Пренебрегая обычно незначительным отличием реактивного напряжения  $U_p$  катушки от её полного напряжения  $U$ , эквивалентную индуктивность можно выразить соотношением:

$$L_{\Sigma} = \frac{U}{\omega \cdot I} = \frac{1}{\omega} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (10.11.4)$$

Значение  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{U}{I}$  зависит от режима работы катушки (рис.10.11.1), поэтому эквивалентная индуктивность катушки также является функцией её полного тока или напряжения.

## 10.12. Анализ работы реальных катушек

### *А. Уравнение и векторная диаграмма реальной катушки*

Рассмотрим работу катушки, активное сопротивление обмотки которой и магнитный поток рассеяния равны нулю, а в магнитопроводе наблюдаются гистерезис и вихревые токи. Переходя к эквивалентным синусоидам тока, напряжения и ЭДС, второй закон Кирхгофа для контура обмотки (рис.10.12.1) в символической форме запишется в виде:

$$-\dot{U} + R_0 \cdot \dot{I} = \dot{E}_0 + \dot{E}_S.$$

Здесь  $\dot{E}_0$  – основная ЭДС,  $\dot{E}_S$  – ЭДС рассеяния, индуцируемая в обмотке потокоцеплением рассеяния,  $R_0$  – активное сопротивление обмотки. Это уравнение, называемое уравнением катушки, обычно записывается в следующем виде:

$$\dot{U} = -\dot{E}_0 - \dot{E}_S + R_0 \cdot \dot{I}. \quad (10.12.1)$$

Таким образом, приложенное к катушке напряжение складывается из трёх составляющих, первая из которых уравнивает основную ЭДС, вторая уравнивает ЭДС рассеяния, а третья представляет собой падение напряжения на активном сопротивлении обмотки.

Уравнение (10.12.1) наглядно иллюстрируется векторной диаграммой катушки, построение которой обычно начинают с изображения вектора основного магнитного потока  $\Phi_0 m$ , который располагают горизонтально (рис.10.12.2).

Относительно вектора основного магнитного потока строят вектор тока  $\dot{I}$  в обмотке, который, вследствие потерь энергии в магнитопроводе, обусловленных гистерезисом и вихревыми токами, опережает основной магнитный поток на угол магнитного запаздывания  $\alpha$ . Потокосцепление рассеяния  $\psi_{mS}$  совпадает по фазе с током  $\dot{I}$  в обмотке. Это обусловлено прохождением магнитного потока рассеяния, в основном вне магнитопровода, где магнитная проницаемость постоянна и равна единице. Таким об-

разом, на векторной диаграмме направление магнитного потока рассеяния совпадает с направлением вектора тока  $\dot{I}$  в обмотке. Основная электродвижущая сила  $\dot{E}_0$  и ЭДС рассеяния  $\dot{E}_S$  изображаются векторами, отстающими от векторов соответствующих магнитных потоков  $\Phi_{0m}$  и  $\Phi_{mS}$  на  $90^\circ$ .

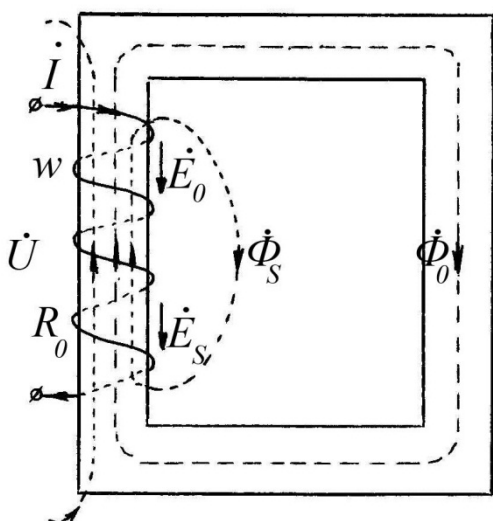


Рис.10.12.1

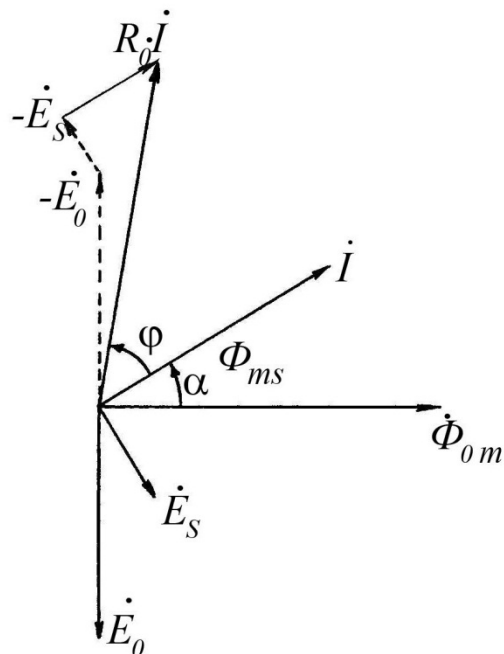


Рис.10.12.2

Для построения вектора напряжения  $\dot{U}$  согласно уравнению (10.12.1) необходимо сложить перевёрнутый вектор  $\dot{E}_0$  с вектором  $-\dot{E}_S$  и прибавить к этой сумме вектор  $R_0 \cdot \dot{I}$ , совпадающий по направлению с током  $\dot{I}$ .

#### Б. Электродвижущая сила и напряжение катушки

Из диаграммы реальной катушки (рис.10.12.2) следует, что приложенное к катушке напряжение  $\dot{U}$  не равно её основной ЭДС  $\dot{E}_0$ , как это имело место для идеальной катушки. Соотношение длин векторов, изображённых на рис.10.12.2, не соответствует соотношениям реальных величин. В действительности ЭДС рассеяния  $\dot{E}_S$  и падение напряжения  $R_0 \cdot \dot{I}$  значительно меньше основной ЭДС  $\dot{E}_0$  по модулю. Поэтому различие между напряжением и основной ЭДС обычно не превышает нескольких процентов и при приближённых расчётах может не учитываться.

Формы кривых напряжения на катушке и её основной ЭДС должны принципиально отличаться друг от друга, поскольку напряжение наряду с основной ЭДС содержит ЭДС рассеяния и падение напряжения на активном сопротивлении.

При практических расчётах вследствие малости модулей величин  $\dot{E}_S$  и  $R_0 \cdot \dot{I}$  основная ЭДС незначительно отличается от полного напряжения, как по модулю, так и по форме кривой.

### В. Индуктивность и сопротивление рассеяния

Потокосцепление рассеяния пропорционально силе тока в обмотке, поэтому мгновенные значения этих величин связаны соотношением:  $\psi_S = L_S \cdot I$ , где коэффициент пропорциональности  $L_S$  называется *индуктивностью рассеяния* катушки. Подстановка выражения для потокосцепления рассеяния в закон электромагнитной индукции позволяет получить уравнение мгновенной ЭДС рассеяния:

$$e_S = - \frac{d\psi_S}{dt} = -L_S \cdot \frac{di}{dt}.$$

Переходя к символической форме записи, получим:

$$\dot{E}_S = -j \cdot \omega \cdot L_S \cdot \dot{I} = -j \cdot x_S \cdot \dot{I}.$$

Здесь величина  $x_S = \omega \cdot L_S$  представляет собой индуктивное сопротивление рассеяния катушки. Как и всякий вектор напряжения на идеальном индуктивном элементе, вектор  $-\dot{E}_S$  опережает вектор тока  $\dot{I}$  на  $90^\circ$ .

### Г. Эквивалентная схема реальной катушки

Эквивалентная схема ферромагнитной катушки (рис.10.12.3) содержит четыре идеальных элемента: два резистора и две катушки. Резистор  $R_0$ , сопротивление которого выбирают равным сопротивлению обмотки, предназначен для воспроизведения эффекта нагревания обмотки током. Индуктивность  $L_S$  учитывает магнитное поле рассеяния реальной катушки. Поэтому индуктивность  $L_S$  принимают равной индуктивности рассеяния реальной катушки.

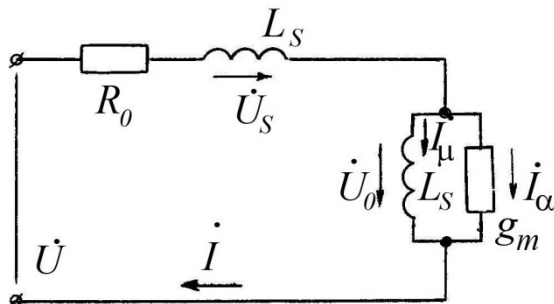


Рис.4.12.3

Контур  $L_0$ - $g_m$  введён для учёта физических явлений в магнитопроводе. Индуктивность  $L_0$  катушки, предназначенной для воспроизведения основного магнитного потока реальной катушки, и, следовательно, её индуктивность удовлетворяет условию:  $\dot{E}_0 = \omega \cdot L_0 \cdot \dot{I}_\mu$ . То есть реактивная составляющая

тока  $\dot{I}_\mu$  должна индуцировать в этой катушке ЭДС катушки  $\dot{E}_0$ , равную основной ЭДС катушки. Проводимость  $g_m$  резистора учитывает потери энергии в сердечнике вследствие вихревых токов и гистерезиса. Проводимость  $g_m$  резистора должна быть такой, чтобы выделяемая в нём мощность была равна мощности потерь в магнитопроводе:  $P_m = g_m \cdot U_0^2$ .

### 10.13. Физические явления в трансформаторе

Трансформатор с магнитопроводом представляет собой совокупность двух изолированных друг от друга обмоток  $w_1$  и  $w_2$ , расположенных на общем замкнутом магнитопроводе, изготовленном из ферромагнитного материала

(рис. 10.13.1). Обмотка, к которой подводится электромагнитная энергия, называется *первичной обмоткой*. Обмотка, от которой энергия отводится к приёмнику, называется *вторичной обмоткой*. Соответственно первичными и вторичными называются токи и напряжения обмоток.

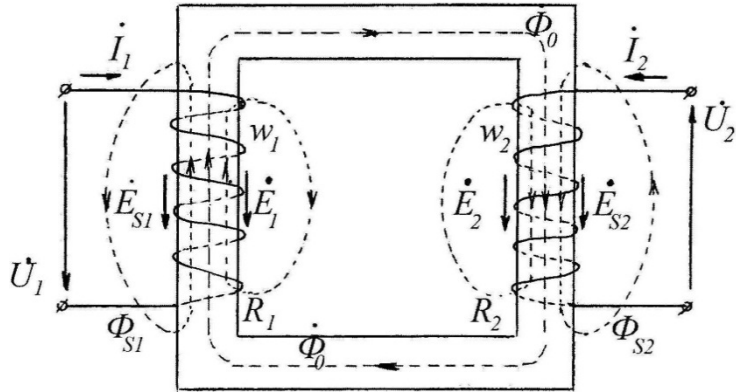


Рис.10.13.1

При анализе электромагнитных процессов в трансформаторе с ферромагнитным сердечником нельзя пользоваться собственными индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  и взаимной индуктивностью  $M$  обмоток, так как эти величины зависят от токов в обмотках трансформатора и не могут быть приняты в качестве параметров трансформатора.

Магнитный поток трансформатора равен сумме трёх составляющих: основного магнитного потока  $\Phi_0$ , который полностью замыкается в магнитопроводе, и, следовательно, сцепляющегося с обеими обмотками, индуцируя в них основные ЭДС  $E_1$  и  $E_2$ ; а также потоков рассеяния  $\Phi_{S1}$  и  $\Phi_{S2}$ . Магнитные потоки рассеяния индуцируют в обмотках электродвижущие силы рассеяния  $E_{S1}$  и  $E_{S2}$ .

Существенное влияние на работу трансформатора оказывают гистерезис и вихревые токи в магнитопроводе, приводящие к его нагреванию и ослаблению основного магнитного потока. При анализе работы трансформатора необходимо также принимать во внимание активные сопротивления его обмоток  $R_1$  и  $R_2$ , которые определяют потери на нагревание протекающими по ним токами.

Действующие значения основных электродвижущих сил трансформатора равны:

$$\begin{cases} E_1 = 4 \cdot k_\Phi \cdot w_1 \cdot f \cdot \Phi_{0m}; \\ E_2 = 4 \cdot k_\Phi \cdot w_2 \cdot f \cdot \Phi_{0m}. \end{cases}$$

Из этих уравнений следует важный в теории трансформаторов вывод: *основные ЭДС относятся друг к другу как числа витков соответствующих обмоток:*

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1}{w_2}. \quad (10.13.1)$$

Отношение числа витков первичной обмотки  $w_1$  к числу витков вторичной обмотки  $w_2$  трансформатора называют коэффициентом трансформации:

$$k = \frac{w_1}{w_2}. \quad (10.13.2)$$

Более точно коэффициент трансформации определяется отношением напряжений обмоток в режиме холостого хода. Для идеального трансформатора это отношение определяется также формулой (10.13.2).

Мгновенные значения электродвижущих сил рассеяния  $e_{S1}$  и  $e_{S2}$  определяются через изменения соответствующих потокоцеплений рассеяния с помощью закона электромагнитной индукции:

$$e_{S1} = -\frac{d\psi_{S1}}{dt}; \quad e_{S2} = -\frac{d\psi_{S2}}{dt}.$$

Поскольку потокоцепления рассеяния пропорциональны токам соответствующих обмоток, то есть  $\psi_{S1} = L_{S1} \cdot i$ ;  $\psi_{S2} = L_{S2} \cdot i$ , где  $L_{S1}$  и  $L_{S2}$  - индуктивности рассеяния соответственно первичной и вторичной обмотки. Индуктивности рассеяния можно считать практически постоянными величинами, поэтому

$$e_{S1} = -L_{S1} \cdot \frac{di_1}{dt}; \quad e_{S2} = -L_{S2} \cdot \frac{di_2}{dt}. \quad (10.13.3)$$

Переходя к эквивалентным синусоидам ЭДС и токов, электродвижущие силы рассеяния (10.13.3) запишем в комплексной форме:

$$\dot{E}_{S1} = -j \cdot \omega \cdot L_{S1} \cdot \dot{I}_1; \quad \dot{E}_{S2} = -j \cdot \omega \cdot L_{S2} \cdot \dot{I}_2. \quad (10.13.4)$$

Система уравнений для идеального трансформатора, то есть для трансформатора, удовлетворяющего условиям  $\mu=\infty$ ;  $\psi_{S1}=\psi_{S2}=0$ ;  $R_1=R_2=x_{S1}=x_{S2}=0$ , запишется в виде:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -\dot{E}_1; & (a) \\ \dot{E}_2 = -\dot{U}_2; & (б) \\ 0 = w_1 \cdot \dot{I}_1 + w_2 \cdot \dot{I}_2. & (в) \end{cases}$$

Из соотношения (а) и (б) с учётом (10.12.1) и (10.13.2) следует:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1}{w_2} = k.$$

То есть отношение первичной обмотки к напряжению вторичной обмотки равно коэффициенту трансформации  $k$ .

Из соотношения (в) следует:  $w_1 \cdot \dot{I}_1 = -w_2 \cdot \dot{I}_2$ . Это означает равенство действующих значений МДС первичной и вторичной обмоток  $w_1 \cdot I_1 = w_2 \cdot I_2$ , то есть

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{k}.$$

Таким образом, отношение токов первичной и вторичной обмоток равно обратному отношению чисел их витков. Следовательно, если, например, в понижающем трансформаторе  $U_2 < U_1$ , то ток во вторичной обмотке больше тока в первичной обмотке в  $\frac{U_1}{U_2}$  раз. В этом отношении трансформатор можно сравнить с механическим рычагом, в котором выигрыш в силе сопровождается соответствующим проигрышем в перемещении.

В реальных трансформаторах полученные соотношения между напряжениями и токами двух обмоток соблюдается лишь приблизительно. При точных расчётах нельзя не учитывать влияние гистерезиса, вихревых токов и сопротивления обмоток. Их воздействие на работу трансформатора изучается с помощью векторных диаграмм.

#### 10.14. Уравнения трансформатора

Для анализа работы трансформатора необходимо записать его уравнения. Два из них представляют собой уравнения второго закона Кирхгофа для контуров первичной и вторичной обмоток:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 \cdot R_1 - \dot{U}_1 &= \dot{E}_1 + \dot{E}_{S1}; \\ \dot{I}_2 \cdot R_2 + \dot{U}_2 &= \dot{E}_2 + \dot{E}_{S2}. \end{aligned}$$

Подстановка выражений ЭДС рассеяния (4.13.4) в эти уравнения позволяет преобразовать их к виду:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -\dot{E}_1 + \dot{I}_1 \cdot R_1 + j \cdot x_{S1} \cdot \dot{I}_1; & (a) \\ \dot{E}_2 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 \cdot R_2 + j \cdot x_{S2} \cdot \dot{I}_2. & (б) \end{cases} \quad (10.14.1)$$

В теории трансформаторов эти выражения называются *уравнениями ЭДС*.

Уравнение второго закона Кирхгофа для магнитной цепи имеет вид:

$$\dot{\Phi}_{0m} \cdot R_{m\Delta} = w_1 \cdot \dot{I}_1 + w_2 \cdot \dot{I}_2. \quad (10.14.2)$$

Левая часть этого уравнения описывает падение магнитного напряжения вдоль контура магнитопровода, равное произведению комплексного основного магнитного потока на магнитное сопротивление  $R_m$  контура.

Правая часть этого выражения представляет собой комплексную результирующую магнитодвижущую силу двух обмоток:

$$\dot{F}_0 = w_1 \cdot \dot{I}_1 + w_2 \cdot \dot{I}_2. \quad (10.14.3)$$

Выражение (10.14.3) называется *уравнением магнитопровода трансформатора*. Уравнения (10.14.1) и (10.14.3) составляют систему уравнений трансформатора.

### 10.15. Приведение обмоток трансформатора

Построение векторной диаграммы для трансформатора, коэффициент трансформации которого значительно отличается от единицы, затруднительно, так как напряжения и токи первичной и вторичной обмоток изобразятся векторами несопоставимой длины. Поэтому при использовании векторных диаграмм для анализа работы трансформаторов их необходимо заменить *приведёнными трансформаторами*, числа витков в обеих обмотках которых искусственно уравниены. Обычно вторичную обмотку приводят к первичной, условно приравнивая в приведённом трансформаторе число витков вторичной обмотки числу витков первичной обмотки, то есть полагая, что  $w'_2 = w_1$ . Здесь  $w'_2$  – число витков вторичной обмотки после приведения трансформатора. В этом случае основная ЭДС приведённой вторичной обмотки равна основной ЭДС первичной обмотки, то есть:  $E'_2 = E_1 = k \cdot E_2$ . Следовательно, ЭДС приведённой вторичной обмотки в  $k$  раз превышает её значение в реальном трансформаторе.

Операция приведения вторичной обмотки к первичной не должна повлечь за собой изменения магнитного режима магнитопровода и режима работы контура вторичной обмотки. Первое требование означает, что магнитодвижущая сила трансформатора не изменяется. Для этого необходимо, чтобы приведённый ток вторичной обмотки  $I'_2$  удовлетворял условию:  $w'_2 \cdot I'_2 = w_2 \cdot I_2$ . Таким образом, в результате приведения трансформатора ток во вторичной обмотке должен уменьшиться в  $k$  раз по сравнению с током вторичной обмотки исходного трансформатора:

$$I'_2 = I_2 \cdot \frac{w_2}{w'_2} = I_2 \cdot \frac{w_2}{w_1} = \frac{I_2}{k}.$$

Второе требование означает, что изменение ЭДС и силы тока во вторичной обмотке приведённого трансформатора не должно привести к изменению параметров вторичной обмотки. Подставим в уравнение (10.14.1.б) формулы электродвижущей силы и тока вторичной обмотки, выраженные через соответствующие приведённые значения:

$$\frac{\dot{E}'_2}{k} = \dot{U}_2 + k \cdot R_2 \cdot I'_2 + j \cdot x_{S2} \cdot k \cdot I'_2.$$

Умножив данное выражение на  $k$ , получим:

$$\dot{E}'_2 = k \cdot \dot{U}_2 + k^2 \cdot R_2 \cdot I'_2 + j \cdot x_{S2} \cdot k^2 \cdot I'_2.$$

Уравнение, полученное для приведённого трансформатора, можно записать в форме, не отличающейся от исходного уравнения (10.14.1.б):

$$\dot{E}'_2 = \dot{U}'_2 + R'_2 \cdot I'_2 + j \cdot x'_{S2} \cdot I'_2 \quad (10.15.1)$$

Здесь  $\dot{U}'_2 = k \cdot \dot{U}_2$  – приведённое вторичное напряжение,  $R'_2 = k^2 \cdot R_2$  – приведённое активное сопротивление вторичной обмотки,  $x'_{S2} = x_{S2} \cdot k^2$  – приведённое индуктивное сопротивление рассеяния вторичной обмотки.

Таким образом, *приведённые сопротивления вторичной обмотки трансформатора в  $k^2$  раз больше действительных сопротивлений вторичной обмотки.*

Можно доказать, что в процессе приведения вторичной обмотки в  $k^2$  раз изменяются не только её сопротивления, но и *все* сопротивления цепи вторичной обмотки. Например, приведённое сопротивление приёмника вторичной обмотки равно отношению приведённого напряжения вторичной обмотки к приведённому току вторичной обмотки, то есть:

$$Z'_\Pi = \frac{\dot{U}'_2}{I'_2} = \frac{k \cdot \dot{U}_2}{I'_2/k} = k^2 \cdot \frac{\dot{U}_2}{I_2} = k^2 \cdot Z_\Pi.$$

Здесь  $Z_\Pi$  – действительное сопротивление приёмника.

Подводя итог сказанному, можно сделать следующий вывод: *в результате приведения вторичной обмотки трансформатора к первичной обмотке:*

*1) ток вторичной обмотки уменьшается в  $k$  раз; 2) ЭДС и напряжения во вторичной обмотке увеличиваются в  $k$  раз; 3) все сопротивления вторичной цепи, включая сопротивление приёмника, возрастают в  $k^2$  раз. При этом мощности во всех элементах вторичной цепи не изменяются. Например, мощность нагрева приведённой вторичной обмотки*

$$P'_2 = R'_2 \cdot I'^2_2 = k^2 \cdot R_2 \cdot \left(\frac{I_2}{k}\right)^2 = R_2 \cdot I_2^2$$

*равна мощности вторичной обмотки реального трансформатора.*

### 10.16. Намагничивающий ток трансформатора

Учитывая, что приведение вторичной обмотки трансформатора не приводит к изменению её магнитодвижущей силы, уравнение (10.14.3) для приведённого трансформатора можно записать в виде:

$$\dot{F}_0 = w_1 \cdot \dot{I}_1 + w'_2 \cdot \dot{I}'_2.$$

Поскольку  $w'_2 = w_1$ , последнее выражение преобразуется к виду:

$$\dot{F}_0 = w_1 \cdot \dot{I}_1 + w'_2 \cdot \dot{I}'_2 = w_1 \cdot (\dot{I}_1 + \dot{I}'_2) = w_1 \cdot \dot{I}_0.$$

В этом выражении сумма комплексных токов

$$\dot{I}_1 + \dot{I}'_2 = \dot{I}_0 \quad (10.16.1)$$

называется *намагничивающим током трансформатора*.

Для выяснения физического смысла намагничивающего тока трансформатора учтём, что  $\dot{F}_0 = w_1 \cdot \dot{I}_0$ , и вместо трансформатора рассмотрим катушку с одной обмоткой  $w_1$  на том же магнитопроводе. Намагничивающий ток равен такому току этой обмотки, который создаёт в магнитопроводе такой же магнитный поток, который создают в реальном трансформаторе обе его обмотки. В режиме холостого хода, когда его вторичная обмотка разомкнута, то есть  $I_2 = 0$ , намагничивающий ток, как следует из равенства (10.16.1), равен току первичной обмотки  $\dot{I}_1$ . Поэтому намагничивающий ток является током холостого хода первичной обмотки трансформатора.

Используя понятие намагничивающего тока, уравнение (10.14.2) магнитодвижущей силы трансформатора можно преобразовать к виду:

$$w_1 \cdot \dot{I}_0 = w_1 \cdot \dot{I}_1 + w_2 \cdot \dot{I}_2. \quad (10.16.2)$$

Результирующая магнитодвижущая сила двух обмоток  $\dot{F}_0$  равна произведению намагничивающего тока  $\dot{I}_0$  на число витков  $w_1$  первичной обмотки.

## 10.17. Векторная диаграмма трансформатора

Векторная диаграмма трансформатора служит наглядной иллюстрацией его уравнений и поэтому помогает устанавливать основные закономерности работы трансформатора в различных режимах. Построение векторной диаграммы возможно только для эквивалентных синусоид переменных величин.

Построение диаграммы начинают с изображения вектора  $\Phi_{0m}$  основного магнитного потока, который располагают горизонтально (рис.10.17.1).

Намагничивающий ток  $\dot{I}_0$ , как и ток ферромагнитной катушки, опережает магнитный поток на угол магнитного запаздывания  $\alpha$ , который определяется потерями в магнитопроводе на вихревые токи и гистерезис. Вектор  $\dot{I}_0$  удобно представить в виде суммы двух взаимно перпендикуляр-

ных составляющих  $\dot{I}_\mu$  и  $\dot{I}_\alpha$ , первая из которых совпадает с вектором основного магнитного потока и называется реактивной составляющей. Второе слагаемое  $\dot{I}_\alpha$  перпендикулярно реактивной составляющей и называется активным током (рис.10.17.1).

Электродвижущая сила  $\dot{E}_1$  первичной обмотки трансформатора и ЭДС  $\dot{E}'_2$  приведённой вторичной обмотки изображаются двумя одинаковыми векторами, отстающими по фазе от основного магнитного потока  $\dot{\Phi}_{0m}$  на угол  $90^\circ$ .

Полагая, что вторичная обмотка трансформатора имеет индуктивный характер, вектор тока  $\dot{I}'_2$  в ней следует направить в сторону отставания от создавшей его ЭДС.

Дальнейшее построение векторной диаграммы основано на использовании уравнений трансформатора. Согласно выражению (10.16.1) намагничивающего тока  $\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}'_2$  для построения вектора тока  $\dot{I}_1$  первичной обмотки необходимо сложить вектор, направленный противоположно току вторичной обмотки  $\dot{I}'_2$  с намагничивающим током:  $\dot{I}_0: \dot{I}_1 = -\dot{I}'_2 + \dot{I}_0$ .

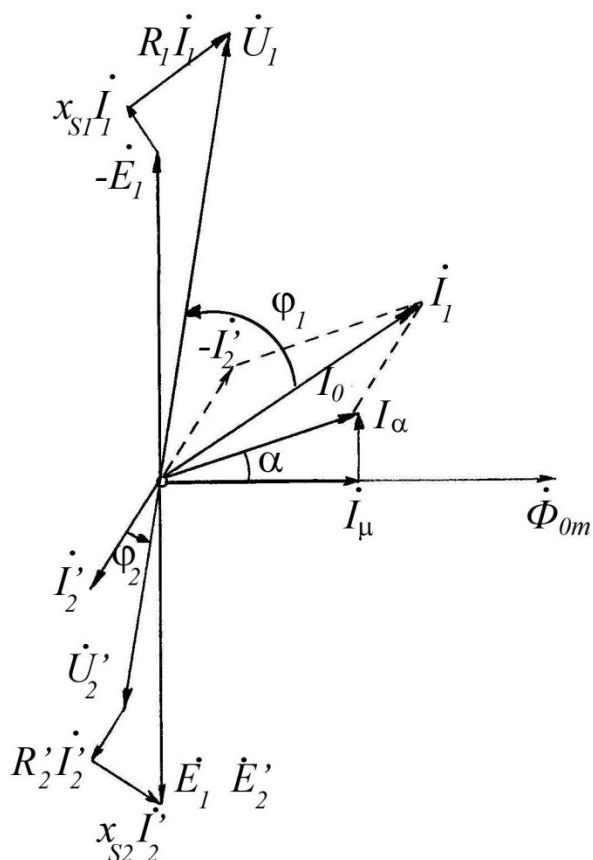


Рис.10.17.1

Уравнение второго закона Кирхгофа для первичной обмотки трансформатора  $\dot{U}_1 = -\dot{E}_1 + j \cdot x_{s1} \cdot \dot{I}_1 + \dot{I}_1 \cdot R_1$  указывает на то, что для построения вектора напряжения первичной обмотки трансформатора необходимо к вектору ЭДС первичной обмотки, взятой с противоположным знаком, прибавить напряжение  $x_{s1} \cdot \dot{I}_1$ , обусловленное индуктивным сопротивлением рассеяния, и падение напряжения  $\dot{I}_1 \cdot R_1$ . Последнее слагаемое обусловлено активным сопротивлением первичной обмотки трансформатора. Первое слагаемое данного уравнения опережает по фазе ток  $\dot{I}_1$  на  $90^\circ$ , а второе – совпадает по фазе с этим током. Символом  $\varphi_1$  на диаграмме (рис.10.17.1) обозначен угол фазового сдвига между током и напряжением первичной обмотки.

Электродвижущая сила вторичной обмотки приведённого трансформатора определяется с помощью уравнения (10.15.1) и представлена на векторной диаграмме в виде суммы трёх слагаемых. Первое слагаемое – напряжение  $\dot{U}'_2$  на зажимах вторичной обмотки приведённого трансформатора.

матора. Второе слагаемое  $R'_2 \cdot I'_2$  учитывает падение напряжения на активном сопротивлении  $R'_2$ . Третье слагаемое  $x'_{s2} \cdot I'_2$  обусловлено индуктивным сопротивлением рассеяния  $x'_{s2}$  вторичной обмотки приведённого трансформатора. Фазовый угол  $\varphi_2$  характеризует приёмник, подключённый к трансформатору, и не связан с параметрами самого трансформатора.

Из векторной диаграммы следует, что отличие векторов напряжения от соответствующих векторов ЭДС определяется падением напряжения на активных и индуктивных сопротивлениях обмоток. Поскольку эти падения напряжения пропорциональны токам трансформатора, отношение напряжения первичной обмотки к напряжению вторичной обмотки не является постоянным числом, а зависит от параметров нагрузки.

В реальных трансформаторах падения напряжения на сопротивлениях обмоток не превышает нескольких процентов от величины основной ЭДС. Поэтому отношение напряжений обмоток реальных трансформаторов незначительно отличается от коэффициента трансформации. В режиме холостого хода это отношение равно коэффициенту трансформации, поскольку в этом случае напряжение вторичной обмотки равно основной электродвижущей силе вторичной обмотки.

### 10.18. Эквивалентная схема трансформатора

Для приведённого трансформатора, как и для ферромагнитной катушки, можно построить эквивалентную схему из идеальных элементов: резистора и катушек, которые индуктивно не связаны друг с другом.

В цепи переменного тока эквивалентная схема характеризуется параметрами приведённого трансформатора (рис.10.18.1).

На эквивалентной схеме  $R_1$  и  $R'_2$  – активные сопротивления первичной и приведённой вторичной обмотки, учитываю

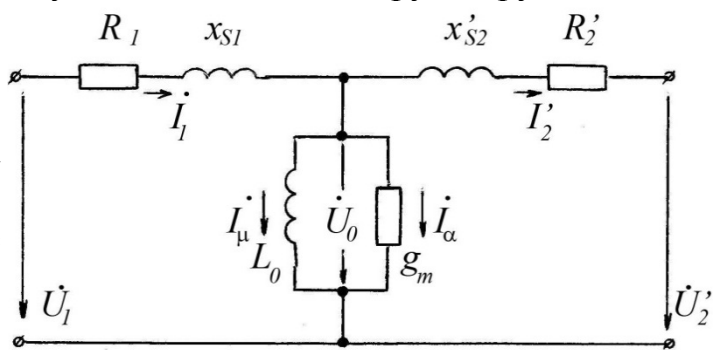


Рис.10.18.1

щие потери энергии, вызванные нагревом обмоток; катушки  $L_{S1}$  и  $L_{S2}$  с индуктивными сопротивлениями  $x_{S1}$  и  $x_{S2}$  воссоздают магнитное поле рассеяния трансформатора; катушка  $L_0$  отражает эквивалентное основное магнитное поле трансформатора; проводимость  $g_m$  учитывает потери энергии в магнитопроводе, обусловленные гистерезисом и вихревыми токами.

Напряжение  $\dot{U}_0$  намагничивающего контура  $L_0 - g_m$  эквивалентной схемы равно основной ЭДС трансформатора. Ток  $\dot{I}_\alpha$  резистора  $g_m$  и ток  $\dot{I}_\mu$  индуктивной катушки  $L_0$  соответствуют основной и реактивной составляющей намагничивающего тока трансформатора.

## Глава XI. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

### 11.1. Законы коммутации.

Рассмотренные ранее установившиеся процессы в цепях постоянного и переменного тока характеризуются тем, что токи в ветвях или напряжения на участках цепи или остаются неизменными, или изменяются по одному и тому же закону в течение сколь угодно длительного времени. Такие режимы работы электрических цепей называются вынужденными.

Любая электрическая цепь может находиться в различных состояниях: выключенном или включённом при различных значениях силы тока в ветвях и напряжениях на её участках. *Процесс перехода электрической цепи из одного режима работы в другой называется **переходным процессом***. При переходном процессе напряжения и токи изменяются *не периодически*. Переход из одного режима работы в другой может быть вызван изменением или параметров, или схемы электрической цепи и называется *коммутацией*.

Переходные процессы протекают относительно быстро и заканчиваются в доли секунды. Вместе с тем токи и напряжения в течение переходных процессов могут иногда достигать величин, многократно превосходящих их значения в установившемся режиме. Поэтому даже кратковременные переходные процессы могут вызвать повреждение и даже полное разрушение элементов электрических цепей. Поэтому для обеспечения безотказного функционирования электрооборудования в реальных условиях работы при его частых пусках и остановках необходим расчёт токов и напряжений в результате коммутации.

Переходный процесс возникает в момент коммутации в электрической цепи. При *математическом описании* переходного процесса за начало отсчёта времени принимают момент коммутации ( $t=0$ ).

Однако при физической постановке задачи вместо одного момента времени  $t=0$  необходимо рассматривать два момента времени, бесконечно близких друг к другу, но тем не менее описывающих различные физические состояния. Первый момент времени, который обозначают индексом «минус» ( $t=0_-$ ), является последним моментом, предшествующим коммутации, то есть моментом времени, когда переходный процесс ещё не начался. Следующий непосредственно за ним момент времени, который обозначается индексом «плюс» ( $t=0_+$ ), представляет собой первый момент после коммутации, то есть момент времени, когда переходный процесс уже начался. Таким образом, начальные условия, с помощью которых определяются постоянные интегрирования при расчёте конкретной схемы, должны принадлежать рассматриваемому процессу, то есть относиться к моменту времени  $t=0_+$ . При этом возникает вопрос, как определить эти условия, если сам процесс является предметом исследования, то есть неиз-

вестен. Выход из этого затруднения возможен с помощью законов коммутации.

**Первый закон коммутации.** *В начальный момент времени после коммутации ток в индуктивности  $i_L(0_+)$  остаётся таким же, каким он был непосредственно перед коммутацией  $i_L(0_-)$ , а затем плавно изменяется*, то есть

$$i_L(0_+) = i_L(0_-). \quad (11.1.1)$$

**Второй закон коммутации.** *В начальный момент времени после коммутации напряжение конденсатора  $u_C(0_+)$  остаётся таким же, каким оно было непосредственно перед коммутацией  $u_C(0_-)$ , а затем плавно изменяется*, то есть

$$u_C(0_+) = u_C(0_-). \quad (11.1.2)$$

Законы коммутации являются следствием закона сохранения энергии. Поскольку энергия магнитного поля катушки с индуктивностью  $L$  зависит от силы тока в катушке  $i_L$ , а энергия электрического поля конденсатора ёмкостью  $C$  определяется напряжением  $u_C$ , то есть

$$W_{\text{Э}} = \frac{C \cdot u_C^2}{2}; \quad W_M = \frac{L \cdot i_L^2}{2},$$

то из невозможности мгновенных скачков энергии вытекает и невозможность мгновенных скачков силы тока в индуктивной катушке и напряжения на конденсаторе.

Значения тока в индуктивной катушке и напряжения на конденсаторе в момент коммутации называются *независимыми начальными условиями*.

В цепях с идеальными сосредоточенными параметрами скачкообразно может изменяться сила тока в резисторах и конденсаторах и напряжение на резисторах и индуктивных катушках.

Начальные условия в электрической цепи в момент коммутации отражают уравнения (11.1.1) и (11.1.2).

При нулевых начальных условиях, то есть когда  $i_L(0_-) = 0$  и  $u_C(0_-) = 0$ , индуктивная катушка непосредственно после коммутации равносильна разрыву электрической цепи, а конденсатор – короткому замыканию.

В случае ненулевых начальных условий, то есть когда  $i_L(0_-) \neq 0$  и  $u_C(0_-) \neq 0$ , индуктивность в начальный момент времени после коммутации ведёт себя как источник тока  $i_L(0_-)$ , а конденсатор – как источник ЭДС  $u_C(0_-)$ .

Независимые начальные условия характеризуют энергию магнитного и электрического поля, запасённую к моменту коммутации. Для расчёта переходного процесса необходимо знание этих начальных условий, причём безразлично, каким образом эти начальные условия были созданы.

При расчёте переходных процессов в разветвлённых электрических цепях наряду с независимыми начальными условиями используют так

называемые зависимые начальные условия. К ним относятся значения токов, напряжений и их производных в момент, предшествующий коммутации ( $t=0_+$ ).

## 11.2. Классический метод расчёта переходных процессов

Расчёт переходных процессов в линейной электрической цепи состоит из следующих основных этапов:

- 1) выбора направлений токов в ветвях,
- 2) определения значений напряжений и токов непосредственно перед коммутацией,
- 3) составления характеристического уравнения и определения его корней,
- 4) получения выражений искомых токов и напряжений как функций времени.

Наиболее распространёнными методами расчёта переходных процессов являются классический метод, расчёт с помощью интеграла Дюамеля и операторный метод. Для перечисленных методов расчёта все четыре операции являются обязательными, причём первые три операции выполняются обязательно. Различие методов проявляется на наиболее трудоёмком четвертом этапе.

Принципиально методика расчёта переходных процессов не отличается от исследования установившихся режимов и основана на использовании законов Кирхгофа. Однако, поскольку при переходных процессах токи и напряжения не являются постоянными величинами или периодически изменяющимися функциями, применение законов Кирхгофа для расчёта переходных процессов приводит не к алгебраическим, а к дифференциальным уравнениям.

*Метод расчёта, который заключается в интегрировании дифференциальных уравнений, связывающих токи и напряжения при переходном процессе, называется классическим методом.*

При составлении уравнения второго закона Кирхгофа для произвольного контура, содержащего в общем случае резисторы ( $R$ ), индуктивные катушки ( $L$ ) и конденсаторы ( $C$ ), необходимо алгебраически суммировать напряжения, которые связаны с токами в этих элементах соотношениями:

$$\begin{cases} u_R = R \cdot i; \\ u_L = L \cdot \frac{di}{dt}; \\ u_C = \frac{q_C}{C} = \frac{\int i \cdot dt}{C} \end{cases}.$$

Подстановка этих выражений в уравнение второго закона Кирхгофа приведёт к интегро-дифференциальному уравнению, которое после диф-

ференцирования по времени приведёт к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка.

В целом для всей электрической цепи будет составлена система уравнений с несколькими неизвестными, которая может быть приведена к одному линейному дифференциальному уравнению с одним неизвестным, но более высокого порядка.

Для линейной электрической цепи в общем случае дифференциальное уравнение переходного процесса имеет вид:

$$P_n \cdot \frac{d^n i}{dt^n} + P_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + P_{n-2} \cdot \frac{d^{n-2} i}{dt^{n-2}} + \dots P_1 \cdot \frac{di}{dt} + P_0 \cdot i = Q(t). \quad (11.2.1)$$

Свободный член этого уравнения  $Q(t)$  представляет собой функцию ЭДС источников электрической цепи. В случае постоянной ЭДС свободный член также является постоянной величиной, а при наличии синусоидального источника ЭДС одной частоты свободный член будет синусоидальной функцией той же частоты.

Порядок  $n$  дифференциального уравнения (11.2.1) равен суммарному числу катушек и конденсаторов в электрической цепи. Например, для электрической цепи, представленной на рис.11.2.1, порядок дифференциального уравнения равен трём. При подсчёте числа конденсаторов и катушек в схеме следует учитывать только независимые реактивные элементы. Таким образом, группу параллельно соединённых конденсаторов следует рассматривать как один реактивный элемент, а группу последовательно соединённых катушек – также как один элемент. Поэтому порядок дифференциального уравнения переходного процесса в электрической цепи на рис.11.2.2, содержащей четыре реактивных элемента, равен двум.

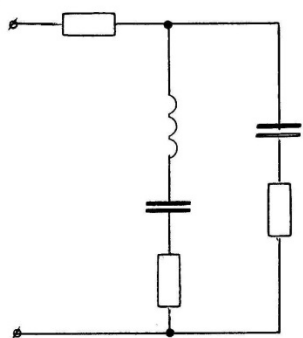


Рис.11.2.1

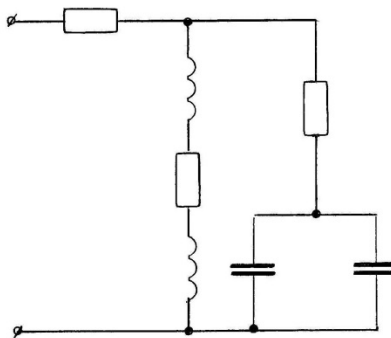


Рис.11.2.2

В общем случае порядок  $n$  дифференциального уравнения (11.2.1) оценивается с помощью выражения

$$n = n_L + n_C - y_L - y_C ,$$

где  $n_L$  - число индуктивностей в схеме,  $n_C$  - число конденсаторов,  $y_L$  - число индуктивностей, токи в которых могут быть заданы произвольно,  $y_C$  - число конденсаторов, напряжения на которых могут быть задано произвольно.

Общее решение дифференциального уравнения (11.2.1) представляет собой сумму частного решения  $i'$  этого уравнения и общего решения  $i''$  соответствующего ему однородного уравнения, то есть того же уравнения, но без свободного члена ( $Q(t)=0$ ), то есть

$$i=i'+i''. \quad (11.2.2)$$

Решение однородного уравнения представляет собой сумму показательных функций

$$i'' = A_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + A_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + \dots A_n \cdot e^{\alpha_n t}, \quad (11.2.3)$$

где  $A_1, A_2, \dots A_n$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$  – некрратные корни характеристического уравнения.

*Характеристическим* называется алгебраическое уравнение, полученное из интегрируемого однородного дифференциального уравнения путём замены производной величиной  $\alpha$ , возведённой в степень, равную порядку производной. Например, для дифференциального уравнения (11.2.1) характеристическое уравнение имеет вид:

$$P_n \cdot \alpha^n + P_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + P_{n-2} \cdot \alpha^{n-2} + \dots + P_1 \cdot \alpha + P_0 = 0. \quad (11.2.4)$$

Составляющие  $i'$  и  $i''$  решения (11.2.2) дифференциального уравнения (11.2.1) переходного процесса имеют вполне определённый физический смысл. Поскольку свободный член  $Q(t)$  уравнения (11.2.1) представляет собой функцию ЭДС электрической цепи, то решение  $i''$  однородного уравнения характеризует процесс в электрической цепи, не содержащей источников. Такой процесс может протекать только за счёт запасённой энергии и вследствие потерь энергии будет затухать до полного исчезновения. Поэтому общее решение дифференциального уравнения будет стремиться к частному решению, то есть

$$i = i' + i'' \rightarrow i' \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Поскольку величина  $i''$  является решением уравнения без свободного члена, то есть является решением уравнения, описывающего процессы в цепи, свободной от воздействия источников энергии, эта составляющая общего решения называется *свободной составляющей*  $i''=i_{CB}$ .

Установившаяся величина, определяемая включёнными в цепь источниками, называется *принуждённой составляющей*  $i'=i_{ПР}$ .

Таким образом, решение дифференциального уравнения (11.2.1) можно записать в виде:

$$i=i_{ПР}+i_{CB}. \quad (11.2.5)$$

### 11.3. Свойства корней характеристического уравнения

Число корней характеристического уравнения (11.2.4) равно степени этого уравнения.

Уравнение первой степени всегда имеет один отрицательный действительный корень (не мнимый и не комплексный).

Уравнение второй степени может иметь:

- а) два действительных неравных отрицательных корня,
- б) два действительных равных отрицательных корня,
- в) два комплексно-сопряжённых корня с отрицательной действительной частью.

Уравнение третьей степени может иметь:

- а) три действительных неравных отрицательных корня,
- б) три действительных отрицательных корня, из которых два равны друг другу,
- в) три действительных равных отрицательных корня,
- г) один действительный отрицательный корень и два комплексно-сопряжённых корня с отрицательной действительной частью.

Действительные части корней во всех случаях отрицательны, поскольку свободный процесс в электрической цепи, не содержащей источника ЭДС, описывается затухающим слагаемым  $A \cdot e^{\alpha t}$ , то есть  $\alpha < 0$ .

#### 11.4. Определение постоянной интегрирования

Рассмотрим методику определения постоянных интегрирования  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , полагая известными величины  $i_{CB}(0_+), i'_{CB}(0_+), i''_{CB}(0_+), \dots$  и значения корней  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Если характеристическое уравнение электрической цепи является уравнением первой степени, то есть

$$i_{CB} = A_1 \cdot e^{\alpha_1 t},$$

то полагая  $t=0_+$ , постоянную интегрирования определяем из соотношения:

$$i_{CB}(0_+) = A \cdot e^0 = A.$$

Для характеристического уравнения второй степени с двумя неравными действительными корнями

$$i_{CB} = A_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + A_2 \cdot e^{\alpha_2 t}. \quad (11.4.1)$$

Продифференцировав это уравнение, получим

$$i'_{CB} = A_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + A_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{\alpha_2 t}. \quad (11.4.2)$$

Подставляя в уравнения (11.4.1) и (11.4.2) значение  $t=0_+$  и учитывая, что при  $t=0$

$$e^{\alpha_1 t} = e^{\alpha_2 t} = 1,$$

получим:

$$\begin{cases} i_{CB}(0_+) = A_1 + A_2, \\ i'_{CB} = A_1 \cdot \alpha_1 + A_2 \cdot \alpha_2. \end{cases}$$

Эта система содержит две неизвестные величины  $A_1$  и  $A_2$ . Решение данной системы уравнений позволяет определить постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{i'_{CB}(0_+) - i_{CB}(0_+) \cdot \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}; \\ A_2 = i_{CB}(0_+) - A_1. \end{cases}$$

Если корни характеристического уравнения являются комплексными, то свободный ток определяется выражением:

$$i_{CB} = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t + \nu). \quad (11.4.3)$$

Угловая частота  $\omega_0$  и коэффициент затухания  $\delta$  получены из решения характеристического уравнения. Для определения постоянных интегрирования  $A$  и  $\nu$  необходимо продифференцировать уравнение (11.4.3):

$$i'_{CB} = -A \cdot \delta \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t + \nu) + A \cdot \omega_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_0 t + \nu). \quad (11.4.4)$$

Подстановка в уравнения (11.4.3) и (11.4.4) значений  $t=0$ ,  $i_{CB}(0_+)$  и  $i'_{CB}(0_+)$  и совместное решение этих уравнений позволяет определить постоянные интегрирования  $A$  и  $\nu$ .

Для электрической цепи с характеристическим уравнением третьего порядка свободная составляющая описывается выражением

$$i_{CB} = A_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + A_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + A_3 \cdot e^{\alpha_3 t}. \quad (11.4.5)$$

Для определения постоянных интегрирования необходимо найти первую и вторую производную по времени выражения (11.4.5):

$$i'_{CB} = A_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + A_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + A_3 \cdot \alpha_3 \cdot e^{\alpha_3 t}. \quad (11.4.6)$$

$$i''_{CB} = A_1 \cdot \alpha_1^2 \cdot e^{\alpha_1 t} + A_2 \cdot \alpha_2^2 \cdot e^{\alpha_2 t} + A_3 \cdot \alpha_3^2 \cdot e^{\alpha_3 t}. \quad (11.4.7)$$

При  $t=0_+$  уравнения (11.4.5)÷(11.4.7) преобразуются в систему уравнений

$$\begin{cases} i_{CB}(0_+) = A_1 + A_2 + A_3, \\ i'_{CB}(0_+) = A_1 \cdot \alpha_1 + A_2 \cdot \alpha_2 + A_3 \cdot \alpha_3, \\ i''_{CB}(0_+) = A_1 \cdot \alpha_1^2 + A_2 \cdot \alpha_2^2 + A_3 \cdot \alpha_3^2, \end{cases}$$

из которой можно определить постоянные интегрирования.

## 11.5. Переходные процессы в цепи RC

Пусть в электрической цепи RC в результате замыкания ключа SA в положение 1 конденсатор подключается к источнику постоянного напряжения  $U$ . В этом случае второй закон Кирхгофа запишется в виде:  $U_R + U_C = U$ , где  $U_R = R \cdot i$ . Следовательно,  $R \cdot i + U_C = U$ . Напряжение и ток конденсатора связаны соотношением:

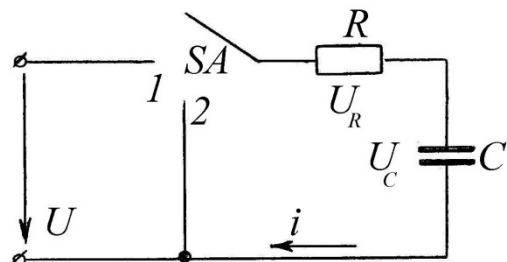


Рис.11.5.1

$$U_C = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt,$$

следовательно,

$$i = C \cdot \frac{dU_C}{dt}.$$

Тогда уравнение переходного процесса принимает вид:

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} + U_C = U. \quad (11.5.1)$$

Решение этого уравнения следует искать в виде:

$$U_C = U_{C_{CB}} + U_{C_{ПР}}. \quad (11.5.2)$$

$$U_{C_{CB}} = A \cdot e^{\alpha t}$$

- общее решение однородного дифференциального уравнения. Характеристическое уравнение

$$R \cdot C \cdot \alpha + 1 = 0.$$

имеет корень

$$\alpha = -\frac{1}{R \cdot C}.$$

Таким образом,

$$U_{C_{CB}} = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Используя начальные условия  $U(0_-) = U(0_+) = 0$ , определим принуждённую составляющую.

$$0 = U_{C_{ПР}} + A \cdot e^{-\frac{0}{RC}}.$$

Поэтому  $U_{C_{ПР}} = -A$ .

Тогда напряжение на обкладках конденсатора изменяется по закону

$$U_C = U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

График этой зависимости показан на рис.11.5.2.а. После замыкания ключа в соответствии со вторым законом коммутации напряжение на обкладках конденсатора плавно увеличивается, стремясь к значению  $U$ .

Ток зарядки конденсатора определяется из выражения

$$i = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

В первый момент после коммутации

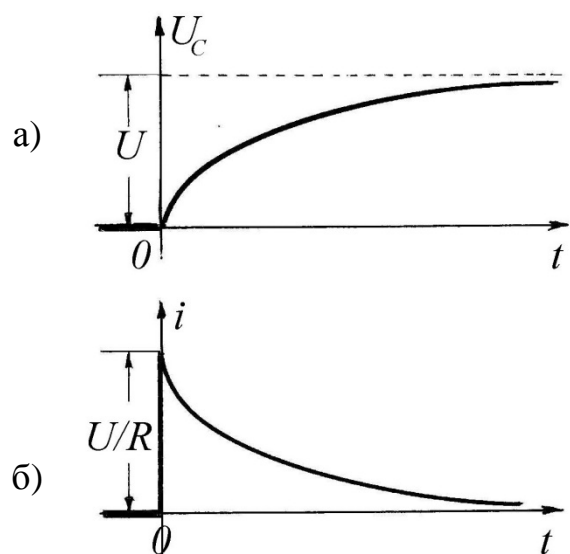


Рис.11.5.2

ток резко возрастает, поскольку конденсатор ведёт себя как перемычка в момент коммутации. Затем сила тока монотонно уменьшается до нуля.

После переключения ключа  $SA$  в положение 2 начнётся разряд конденсатора. В этом случае принуждённая составляющая напряжения на конденсаторе равна нулю, и решение дифференциального уравнения переходного процесса принимает вид (рис.11.5.3.а):

$$U_C = U \cdot e^{\frac{-t}{RC}}.$$

Закон изменения силы тока через конденсатор (рис.11.5.3.б)

$$i = -\frac{U}{R} \cdot e^{\frac{-t}{RC}}.$$

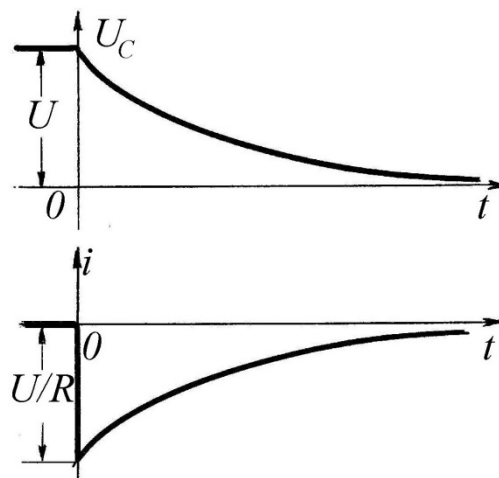


Рис.11.5.3

Токи зарядки и разрядки конденсатора достигают максимального значения в самом начале переходных процессов и ограничены лишь сопротивлением цепей. Поэтому, если коммутируемые цепи с конденсаторами имеют малое сопротивление, то токи переходных процессов достигают огромных значений и называются ударными токами. Процесс коммутации сопровождается большими искрами, треском, обгоранием контактов. Поэтому короткое замыкание заряженных конденсаторов недопустимо.

## 11.5. Переходные процессы в цепи $RC$

При замыкании ключа  $SA$  в положение 1 электрическая цепь подключается к источнику постоянного напряжения. Уравнение второго закона Кирхгофа  $U_R + U_L = U$ . Здесь  $U_R = R \cdot i$ ,

$$U_L = L \cdot \frac{di}{dt}.$$

Тогда уравнение переходного процесса примет вид:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = U.$$

Решение этого уравнения ищем в виде:

$$i = i_{\text{ДП}} + i_{\text{СВ}}.$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения ищем в виде:

$$i_{\text{СВ}} = A \cdot e^{\alpha t},$$

где  $A$  – постоянная интегрирования,  $\alpha$  – корень характеристического уравнения  $\alpha \cdot L + R = 0$ , или

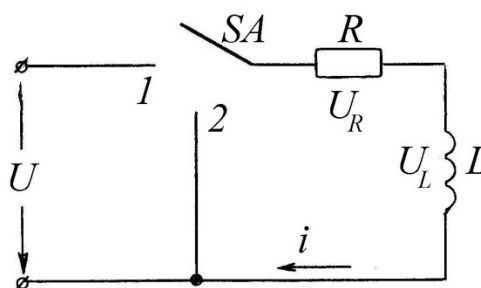


Рис.11.5.4

$$\alpha = -\frac{R}{L}$$

Полное решение дифференциального уравнения переходного процесса

$$i = i_{\text{пр}} + A \cdot e^{-\frac{R}{L}t},$$

Принуждённая составляющая

$$i_{\text{пр}} = \frac{U}{R}.$$

Поэтому полное решение уравнения переходного процесса (рис.11.5.5.а)

$$i = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Напряжение на катушке в момент коммутации меняется скачкообразно (рис.11.5.5.б)

$$U_L = U \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

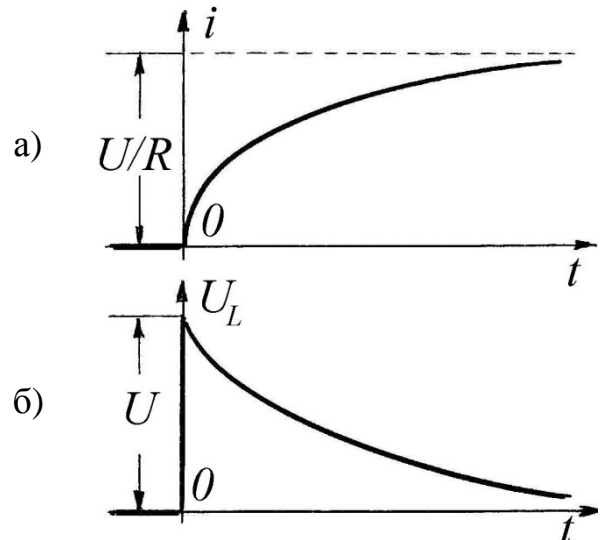


Рис.11.5.5

При установке переключателя  $SA$  в положение 2 происходит короткое замыкание  $RL$  цепи. В этом случае принуждённая составляющая тока равна нулю  $i_{\text{пр}} = 0$ . Изменение силы тока описывается выражением

$$i = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

## 11.6. Переходные процессы в цепи $RLC$

При подключении цепи  $RLC$  к источнику с постоянным напряжением  $U$  дифференциальное уравнение переходного процесса содержит три меняющихся слагаемых:

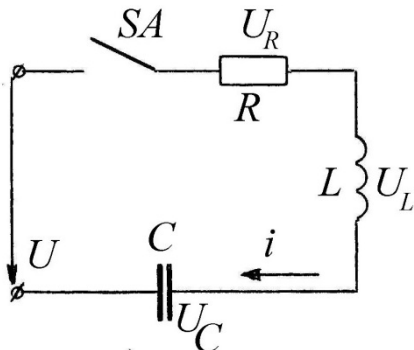


Рис.11.6.1

$$U_R + U_L + U_C = U. \quad (11.6.1)$$

Напряжения на элементах цепи связаны с силой тока соотношениями

$$\begin{cases} U_R = R \cdot i, \\ U_L = L \cdot \frac{di}{dt}, \\ U_C = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt. \end{cases}$$

С учётом данных соотношений дифференциальное уравнение переходного процесса цепи  $RLC$  можно записать в виде:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = U.$$

В результате дифференцирования получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = \frac{dU}{dt}. \quad (11.6.2)$$

Решение уравнения (11.6.2) следует искать в виде:

$$i = i_{\text{ПР}} + i_{\text{СВ}}. \quad (11.6.3)$$

Свободная составляющая является решением однородного дифференциального уравнения

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = 0. \quad (11.6.4)$$

Для решения данного дифференциального уравнения необходимо найти решение соответствующего ему характеристического уравнения:

$$L \cdot \alpha^2 + R \cdot \alpha + \frac{1}{C} = 0. \quad (11.6.5)$$

Решение этого уравнения следует искать в виде

$$\alpha = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (11.6.6)$$

где

$$\delta = \frac{R}{2L} \text{ — коэффициент затухания,}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ — резонансная угловая частота цепи.}$$

При различающихся корнях  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  решение однородного дифференциального уравнения (11.6.4) имеет вид

$$i_{\text{СВ}} = A_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + A_2 \cdot e^{\alpha_2 t}, \quad (11.6.7)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные интегрирования.

При равных корнях уравнения  $\alpha_1 = \alpha_2 = -\delta = \alpha$  (в случае  $\delta = \omega_0$ ) решение однородного дифференциального уравнения может быть записано в виде:

$$i_{\text{СВ}} = (A_3 + A_4 \cdot t) \cdot e^{-\delta t}, \quad (11.6.8)$$

где  $A_3$  и  $A_4$  — также являются постоянными интегрирования.

В случае комплексных корней переходный процесс приобретает колебательный характер, поскольку показательная функция с комплексным показателем степени описывает синусоидальный процесс с переменной амплитудой.

### 11.7. Переходные процессы в ферромагнитных катушках

Дифференциальное уравнение процесса в ферромагнитной катушке, подключённой к синусоидальному источнику, имеет вид:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = u. \quad (11.7.1)$$

Поскольку

$$i = \frac{\psi}{L},$$

уравнение переходного процесса преобразуется к виду:

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{R}{L} \cdot \psi = u. \quad (11.7.2)$$

Отличие уравнения (11.7.2) от уравнения (11.7.1) заключается, в частности, в том, что индуктивность  $L$  в уравнении (11.7.1) входит в первое, а в уравнении (11.7.2) – во второе слагаемое левой части. По относительному значению эти слагаемые неравноценны. Первое слагаемое, равное ЭДС самоиндукции катушки, обычно на порядок больше, чем второе, равное падению сопротивления на активном сопротивлении обмотки. Поэтому допущение постоянства индуктивности вызывает меньшую погрешность уравнения (11.7.2) по сравнению с уравнением (11.7.1).

Решение уравнения (11.7.2) следует искать в виде:

$$\psi = \psi_{\text{пр}} + \psi_{\text{св}},$$

где

$$\psi_{\text{св}} = A \cdot e^{\alpha t}.$$

Здесь  $A$  – постоянная интегрирования,  $\alpha$  – корень характеристического уравнения:

$$\alpha + \frac{R}{L} = 0, \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{R}{L}.$$

Поэтому

$$\psi = \psi_{\text{пр}} + A \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

При синусоидальном напряжении на катушке

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_U)$$

её потокосцепление также является синусоидальной функцией

$$\psi_{\text{пр}} = \psi_m \cdot \sin(\omega t + \psi_U - \varphi),$$

совпадающей по фазе с током катушки.

Поэтому полное потокосцепление ферромагнитной катушки при переходном процессе

$$\psi = \psi_m \cdot \sin(\omega t + \psi_U - \varphi) + A \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Пренебрегая остаточным потокоцеплением катушки, положим, что до включения катушки потокоцепление было равно нулю, можно выразить постоянную интегрирования  $A = -\psi_m \cdot \sin(\psi_U - \varphi)$ .

Полное потокоцепление ферромагнитной катушки при переходном процессе:

$$\psi = \psi_m \cdot \sin(\omega t + \psi_U - \varphi) - \psi_m \cdot \sin(\psi_U - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

## 11.8. Операторный метод расчёта переходных процессов.

### Оригинал и изображение функции. Интеграл Лапласа

Основная цель операторного метода применительно к переходным процессам состоит в облегчении расчёта переходных процессов путём упрощения решения дифференциальных уравнений, описывающих эти процессы. Для этого операции над реальными физическими величинами, являющимися функциями времени, заменяют операциями над их изображениями, которые являются функциями другой переменной. В результате за счёт особого подбора функциональных связей между оригиналами и их изображениями дифференциальные уравнения заменяются алгебраическими уравнениями, что упрощает расчёт.

Связь между оригиналом  $f(t)$ , являющимся действительной функцией времени и его изображением  $F(p)$ , устанавливается с помощью *интеграла Лапласа*:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt, \quad (11.8.1)$$

где  $p=a+jb$  – аргумент новой функции, называемый оператором, представляет собой в общем случае комплексную величину, имеющую размерность, обратную времени  $[c^{-1}]$ . Размерность изображения  $F(p)$  совпадает с размерностью оригинала  $f(t)$ , умноженной на время. Сомножитель  $e^{-pt}$  не имеет размерности.

Соответствие между функциями  $F(p)$  и  $f(t)$  записывается с помощью символа:

$$F(p) \rightleftharpoons f(t), \quad (1.8.2)$$

знак  $\rightleftharpoons$  называется знаком соответствия, а интеграл (11.8.1) называется *прямым преобразованием Лапласа*.

Для того чтобы интеграл Лапласа (11.8.1) имел конечное значение, функция  $f(t)$  должна удовлетворять ряду требований.

1. Функция  $f(t)$  должна удовлетворять условиям Дирихле.
2. Модуль функции  $f(t)$  должен возрастать не быстрее показательной функции, то есть функция  $f(t)$  должна удовлетворять условию  $|f(t)| < A \cdot e^{\alpha t}$ , где  $A$  и  $\alpha$  – положительные числа.

Все реальные токи и напряжения удовлетворяют указанным требованиям.

### 11.9. Изображения простейших функций

1. *Изображение постоянной величины  $A$ .* Для определения изображения функции  $f(t)=A$ , где  $A$  – постоянная величина, необходимо подставить  $f(t)$  в формулу (11.8.1):

$$F(p) = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-p \cdot t} dt = A \cdot \left(-\frac{1}{p}\right) \cdot \int_0^{\infty} d(e^{-p \cdot t}) = -\frac{A}{p} \cdot e^{-p \cdot t} = \frac{A}{p}.$$

Следовательно, изображение постоянной величины равно этой постоянной, делённой на  $p$ :

$$A \rightleftharpoons \frac{A}{p}.$$

2. *Изображение показательной функции  $e^{-\alpha \cdot t}$ .* Подстановка показательной функции в интеграл Лапласа даёт:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha \cdot t} \cdot e^{-p \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha) \cdot t} dt = \frac{1}{p - \alpha}.$$

Для нахождения изображений используют таблицу соответствий оригиналов и изображений.

Таблица соответствий

№	Оригинал	Изображение
1	$A$	$\frac{A}{p}$
2	$A \cdot e^{\alpha \cdot t}$	$\frac{A}{p - \alpha}$
3	$A \cdot e^{-\alpha \cdot t}$	$\frac{A}{p + \alpha}$
4	$1 - e^{-\alpha \cdot t}$	$\frac{A}{p \cdot (p + \alpha)}$
5	$t$	$\frac{t}{p^2}$

6	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
7	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
8	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \cdot \sin\varphi + \omega \cdot \cos\varphi}{p^2 + \omega^2}$
9	$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \cdot \sin\varphi - \omega \cdot \cos\varphi}{p^2 + \omega^2}$
10	$e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$
11	$t \cdot e^{-\delta \cdot t}$	$\frac{1}{(p + \delta)^2}$

### 11.10. Изображение производной и интеграла, напряжения на конденсаторе и катушке

1. Изображение первой производной

$$\frac{df(t)}{dt} \doteq p \cdot F(p) - f(0). \quad (11.10.1)$$

2. Изображение напряжения на индуктивности

$$L \cdot \frac{di}{dt} \doteq L \cdot p \cdot I(p) - L \cdot i(0). \quad (11.10.2)$$

3. Изображение второй производной

$$\frac{d^2i}{dt^2} \doteq p^2 \cdot I(p) - p \cdot i(0) - i'(0). \quad (11.10.3)$$

4. Изображение интеграла

$$\int_0^t f(t) \cdot dt \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (11.10.4)$$

5. Изображение напряжения на конденсаторе

$$u_C(t) \doteq \frac{I(p)}{C \cdot p} + \frac{u_C(0_-)}{p}. \quad (11.10.5)$$

### 11.11. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

На рис.11.11.1 изображена часть сложной электрической цепи. Ветвь  $ab$  этой цепи содержит элементы  $R$ ,  $L$  и  $C$  и источник ЭДС  $e(t)$ . По ветви течёт ток  $i$ . До коммутации, то есть до замыкания ключа  $SA$  в ветви протекал ток силой  $i(0_-)$ , а напряжение на конденсаторе было равно  $u_C = u_C(0_-)$ .

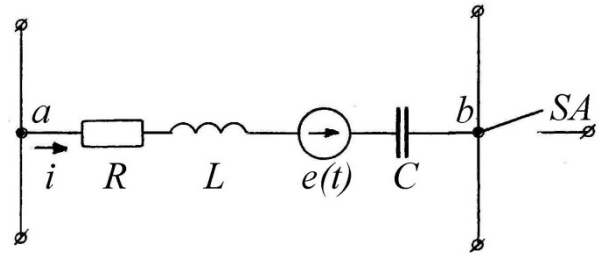


Рис.11.11.1

Замыкание ключа приводит к переходному процессу. Выразим потенциал точки  $a$  и напряжение на ветви  $ab$  после коммутации:

$$\begin{aligned}\varphi_a &= \varphi_b + u_C + u_L + u_R - e(t), \\ u_{ab} &= \varphi_a - \varphi_b = u_C + u_L + u_R - e(t).\end{aligned}$$

Выразим напряжения на отдельных элементах при переходном процессе:

$$\begin{cases} u_R = i \cdot R; \\ u_L = L \cdot \frac{di}{dt}; \\ u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i \cdot dt. \end{cases} \quad (11.11.1)$$

Подстановка соотношений (11.11.1) в формулу для  $u_{ab}$  позволяет выразить напряжение на ветви  $ab$ :

$$u_{ab} = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} + u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i \cdot dt - e(t). \quad (11.11.2)$$

Применим к слагаемым уравнения (11.11.2) преобразования Лапласа.

$$\begin{cases} i \cdot R \rightleftharpoons R \cdot I(p); \\ u_{ab} \rightleftharpoons U_{ab}(p); \\ L \cdot \frac{di}{dt} \rightleftharpoons L \cdot p \cdot I(p) - L \cdot i(0); \\ u_C(0) \rightleftharpoons \frac{u_C(0)}{p}; \\ \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i \cdot dt \rightleftharpoons \frac{I(p)}{C \cdot p}; \\ e(t) \rightleftharpoons E(p). \end{cases} \quad (11.11.3)$$

Подстановка равенств (11.11.3) в уравнение (11.11.2) позволяет записать дифференциальное уравнение переходного процесса в операторной форме.

$$U_{ab}(p) = I(p) \cdot \left( R + p \cdot L + \frac{1}{C \cdot p} \right) - L \cdot i(0) + \frac{u_c(0)}{p} - E(p). \quad (11.11.4)$$

Из уравнения (11.11.4) выразим силу тока в операторной форме:

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + L \cdot i(0) - \frac{u_c(0)}{p} + E(p)}{R + p \cdot L + \frac{1}{C \cdot p}}. \quad (11.11.5)$$

Здесь

$$Z(p) = R + p \cdot L + \frac{1}{C \cdot p} \quad (11.11.6)$$

- операторное сопротивление участка цепи между точками  $a$  и  $b$ . Уравнение (11.11.5) называют *законом Ома в операторной форме*.

Слагаемое  $L \cdot i(0)$  представляет собой внутреннюю ЭДС, обусловленную энергией магнитного поля индуктивной катушки вследствие протекания через неё тока  $i(0)$  непосредственно до коммутации.

Слагаемое

$$\frac{u_c(0)}{p}$$

представляет собой внутреннюю ЭДС, обусловленную энергией электрического поля конденсатора вследствие наличия напряжения  $u_c(0)$  на конденсаторе до коммутации.

В соответствии с законом Ома на рис.11.11.2 изображена *операторная схема замещения* участка  $ab$  ветви (рис.11.11.1). Здесь сопротивления резистора, катушки и конденсатора заменены операторными сопротивлениями:

$$R, \quad p \cdot L \quad \text{и} \quad \frac{1}{C \cdot p}.$$

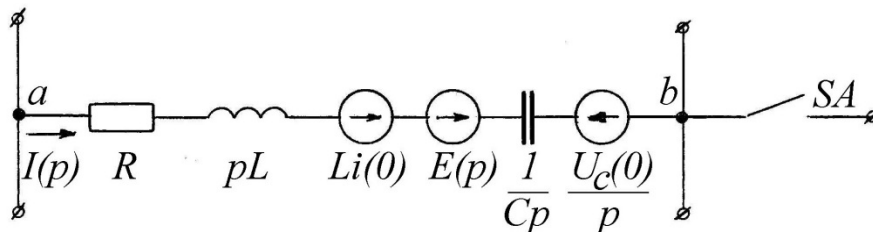


Рис.11.11.2

В частном случае, когда на участке  $ab$  отсутствует ЭДС и к моменту коммутации  $i(0)=0$  и  $u_C(0)=0$ , уравнение (11.11.5) принимает более простой вид:

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p)}{Z(p)}. \quad (11.11.7)$$

Уравнение (11.11.7) представляет собой математическую запись закона Ома в операторной форме для участка цепи, не содержащего источника ЭДС и при нулевых начальных условиях.

Уравнение

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0 \quad (11.11.8)$$

выражает первый закон Кирхгофа в операторной форме.

Составим уравнение второго закона Кирхгофа в операторной форме при обходе контура (рис.11.11.3) по часовой стрелке.

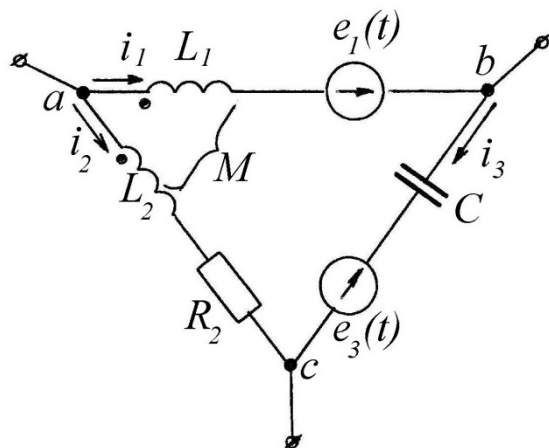


Рис.11.11.3

Учтём, что между индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  существует магнитная связь  $M$ . При выбранном направлении токов  $i_1$  и  $i_2$  индуктивные катушки соединены согласно. Поэтому падения напряжения на катушках  $L_1$  и  $L_2$  равны соответственно:

$$L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \text{ и } L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt}.$$

Обозначим начальное напряжение на конденсаторе символом  $u_C(0)$  и будем считать, что оно направлено согласно с током  $i_3$ . Начальные значения

токов в ветвях, содержащих индуктивности, обозначим символами  $i_1(0)$  и  $i_2(0)$ . Тогда уравнение второго закона Кирхгофа для данного контура запишется в виде:

$$L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} + u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_3 \cdot dt - i_2 \cdot R_2 - L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - M \cdot \frac{di_1}{dt} = e_1(t) - e_3(t). \quad (11.11.9)$$

Каждое слагаемое уравнения (11.11.9) представим в операторной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} \doteq L_1 \cdot p \cdot I_1(p) - L_1 \cdot i_1(0); \\ M \cdot \frac{di_2}{dt} \doteq M \cdot p \cdot I_2(p) - M \cdot i_2(0); \\ \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_3 \cdot dt \doteq \frac{I_3(p)}{C \cdot p}; \\ i_2 \cdot R_2 \doteq R_2 \cdot I_2(p); \\ L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \doteq L_2 \cdot p \cdot I_2(p) - L_2 \cdot i_2(0); \\ M \cdot \frac{di_1}{dt} \doteq M \cdot p \cdot I_1(p) - M \cdot i_1(0); \\ e_1(t) \doteq E_1(p); \\ e_3(t) \doteq E_3(p). \end{array} \right. \quad (11.11.10)$$

Подстановка соотношений (11.11.10) в уравнение второго закона Кирхгофа (11.11.9) позволяет получить второй закон Кирхгофа в операторной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} \doteq L_1 \cdot p \cdot I_1(p) - L_1 \cdot i_1(0); \\ M \cdot \frac{di_2}{dt} \doteq M \cdot p \cdot I_2(p) - M \cdot i_2(0); \\ \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_3 \cdot dt \doteq \frac{I_3(p)}{C \cdot p}; \\ i_2 \cdot R_2 \doteq R_2 \cdot I_2(p); \\ L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \doteq L_2 \cdot p \cdot I_2(p) - L_2 \cdot i_2(0); \\ M \cdot \frac{di_1}{dt} \doteq M \cdot p \cdot I_1(p) - M \cdot i_1(0); \\ e_1(t) \doteq E_1(p); \\ e_3(t) \doteq E_3(p). \end{array} \right. \quad (11.11.10)$$

Подстановка соотношений (11.11.10) в уравнение второго закона Кирхгофа (11.11.9) позволяет получить второй закон Кирхгофа в операторной форме:

$$\begin{aligned} I_1(p) \cdot Z_1(p) + I_2(p) \cdot Z_2(p) + I_3(p) \cdot Z_3(p) = \\ = E_1(p) - E_3(p) + E_{BH}(p). \end{aligned} \quad (11.11.11)$$

Здесь

$$\begin{cases} Z_1(p) = p \cdot (L_1 - M); \\ Z_2(p) = p \cdot (M - L_2) - R_2; \\ Z_3(p) = \frac{1}{C \cdot p}; \\ E_{BH}(p) = (L_1 - M) \cdot i_1(0) + (M - L_2) \cdot i_2(0) - \frac{u_C(0)}{p} \end{cases} \quad (11.11.12)$$

Уравнение (11.11.11) можно записать в более общем виде:

$$\sum_{k=1}^n Z_k(p) \cdot I_k(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p). \quad (11.11.13)$$

Уравнение (11.11.13) представляет собой математическую запись второго закона Кирхгофа в операторной форме.

## 11.12. Переход от изображения к функции времени. Теорема разложения

Расчёт переходных процессов операторным методом состоит из следующих основных этапов.

1. Составить уравнения законов Кирхгофа в операторной форме с учётом начальных условий.
2. Решить эти уравнения относительно изображения функции.
3. Найти оригинал, то есть перейти от изображения к функции времени.

Первые два этапа подробно рассмотрены ранее. Третий этап, то есть переход от изображения к функции времени, можно осуществить несколькими способами.

Первый способ состоит в применении формул соответствия между функциями оператора  $p$  и функциями времени. Некоторые из этих формул приведены в таблице соответствий.

Второй способ состоит в применении теоремы разложения.

Третий способ – это применение формулы обратного преобразования Лапласа.

В тех случаях, когда изображение представляет собой отношение двух многочленов, для нахождения оригинала применяют теорему разложения.

Пусть изображение представляет собой отношение двух многочленов:

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}, \quad (11.12.1)$$

причём степень  $m$  многочлена  $M(p)$  в числителе меньше степени  $n$  многочлена  $N(p)$  в знаменателе.

Если уравнение  $N(p) = 0$  не имеет кратных корней и не имеет корней, равных корням уравнения  $M(p)=0$ , то отношение многочленов (11.12.1) можно разложить на простейшие дроби:

$$\frac{M(p)}{N(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{p - p_i}; \quad (11.12.2)$$

где  $p_i$  – корни уравнения  $N(p) = 0$ , обычно называемые *нулями* знаменателя  $N(p)$  или *полюсами* функции  $F(p)$ .

Для определения коэффициентов  $A_i$  воспользуемся следующим приёмом. Умножим обе части равенства (11.12.2) на  $(p - p_i)$  и положим  $p = p_i$ . При этом в правой части равенства останется одно слагаемое, равное коэффициенту  $A_i$ , так как все другие слагаемые обратятся в ноль. Коэффициент  $A_i$  выразится в виде:

$$A_i = \left. \frac{M(p) \cdot (p - p_i)}{N(p)} \right|_{p=p_i}. \quad (11.12.3)$$

Поскольку многочлен  $N(p)$  при  $p = p_i$  обращается в ноль, то полученное выражение представляет собой неопределённость типа  $0/0$ . Раскрывая эту неопределённость по правилу Лопиталя, получим:

$$A_i = M(p_i) \cdot \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{(p - p_i)'}{N'(p)} = \frac{M(p_i)}{N'(p_i)}. \quad (11.12.4)$$

Тогда для всей дроби в целом можно записать:

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{p - p_i} = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{N'(p_i)} \cdot \frac{1}{p - p_i}. \quad (11.12.5)$$

Учитывая, что преобразование Лапласа обладает свойством линейности и что оригиналов дроби

$$\frac{1}{p - p_i}$$

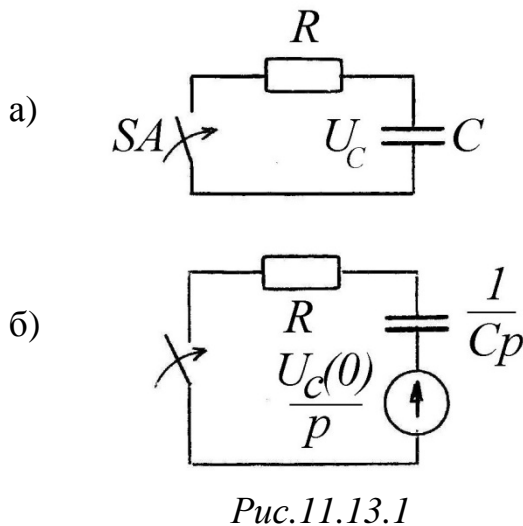
является функция  $e^{p_i t}$ , оригинал, соответствующий изображению  $F(p)$ , выражается формулой

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{N'(p_i)} \cdot e^{p_i \cdot t}. \quad (11.12.6)$$

Формула (11.12.6) выражает *теорему разложения*. В частном случае, если знаменатель этого выражения имеет корень, равный нулю, то есть  $N(p) = p \cdot N_1(p)$ , то оригинал следует определять с помощью формулы:

$$f(t) = \frac{M(0)}{N_1(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{p_i \cdot N'(p_i)} \cdot e^{p_i \cdot t}. \quad (11.12.7)$$

### 11.13. Примеры расчёта переходных процессов операторным методом



Применим операторный метод для расчёта переходного процесса при заряде конденсатора  $C$  через резистор с сопротивлением  $R$  (рис.11.13.1.а). На рис.11.13.б приведена операторная схема замещения. Для этой схемы уравнение второго закона Кирхгофа в операторной форме запишется в виде:

$$\left(R + \frac{1}{p \cdot C}\right) \cdot I(p) = -\frac{u_C(0)}{p}.$$

Из данной формулы можно выразить силу тока в операторной форме:

$$I(p) = -\frac{u_C(0)}{\left(R + \frac{1}{p \cdot C}\right) \cdot p} = -\frac{u_C(0)}{R} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{1}{R \cdot C}\right)}.$$

Используя формулы соответствия

$$\frac{1}{\left(p + \frac{1}{R \cdot C}\right)} \doteq e^{-\frac{t}{R \cdot C}}, \quad (11.13.1)$$

определим оригинал силы тока:

$$i(t) = -\frac{u_c(0)}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}.$$

Изображение напряжения на конденсаторе:

$$\begin{aligned} U_c(p) &= \frac{I(p)}{p \cdot C} + \frac{u_c(0)}{p} = -\frac{u_c(0)}{R \cdot p \cdot C} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{1}{R \cdot C}\right)} + \frac{u_c(0)}{p} = \\ &= \frac{u_c(0)}{p} \cdot \left[1 - \frac{1}{R \cdot C \cdot \left(p + \frac{1}{R \cdot C}\right)}\right] = \frac{u_c(0)}{p} \cdot \frac{p \cdot R \cdot C + 1 - 1}{R \cdot C \cdot \left(p + \frac{1}{R \cdot C}\right)} = \\ &= \frac{u_c(0)}{p} \cdot \frac{p \cdot R \cdot C}{R \cdot C \cdot \left(p + \frac{1}{R \cdot C}\right)} = u_c(0) \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{1}{R \cdot C}\right)}. \end{aligned}$$

Используя формулу соответствия (11.13.1), выразим оригинал напряжения на конденсаторе:

$$u_c(t) = u_c(0) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}. \quad (11.13.2)$$

Используем операторный метод для расчёта переходного процесса при подключении к источнику электрической цепи  $RL$  (рис.11.13.2). Для этого запишем второй закон Кирхгофа в операторной форме.

$$I(p) \cdot (R + L \cdot p) = \frac{E}{p}.$$

Сила тока в операторной форме:

$$I(p) = \frac{E}{p \cdot (p + L \cdot p)}.$$

Вводя обозначение  $M(p) = E$  и  $N(p) = p \cdot (p + L \cdot p)$ , оригинал удобно искать с помощью теоремы разложения.

Найдём ток переходного процесса при подключении  $RLC$  электрической цепи к источнику постоянного напряжения  $U$  (рис.11.13.3). Нулевые начальные условия позволяют воспользоваться законом Ома в операторной форме в виде:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}.$$

Следовательно,

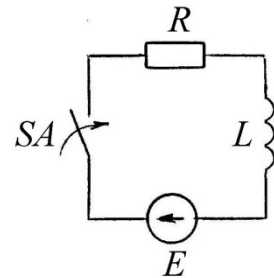


Рис.11.13.2

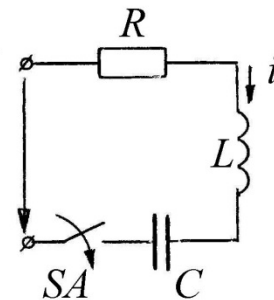


Рис.11.13.3

$$I(p) = \frac{\frac{U}{p}}{R + L \cdot p + \frac{1}{p \cdot C}} = \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{R \cdot p}{L} + \frac{1}{L \cdot C}}.$$

Оригинал тока, соответствующий этому изображению, будем искать с помощью теоремы разложения. Для этого сначала необходимо определить нули знаменателя

$$p^2 + \frac{R \cdot p}{L} + \frac{1}{L \cdot C} = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения следует искать в виде:

$$p = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2 \cdot L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \text{ Здесь } \delta = \frac{R}{2 \cdot L}.$$

Тогда выражение изображения силы тока можно преобразовать к виду:

$$I(p) = \frac{\frac{U}{L}}{p^2 + \frac{R \cdot p}{L} + \frac{1}{L \cdot C}} = \frac{M(p)}{N(p)}.$$

$$N'(p) = 2 \cdot p + \frac{R}{L} = 2 \cdot (p + \delta).$$

Оригинал тока выражаем с помощью теоремы разложения

$$\begin{aligned} i(t) &= \sum_{i=1}^2 \frac{M(p_i)}{N'(p_i)} \cdot e^{p_i \cdot t} = \frac{U}{L} \cdot \left[ \frac{e^{p_1 \cdot t}}{2 \cdot (p_1 + \delta)} + \frac{e^{p_2 \cdot t}}{2 \cdot (p_2 + \delta)} \right] = \\ &= \frac{U}{L} \cdot \left[ \frac{e^{p_1 \cdot t}}{2 \cdot (-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} + \delta)} + \frac{e^{p_2 \cdot t}}{2 \cdot (-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} + \delta)} \right] = \\ &= \frac{U}{2 \cdot L \cdot \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \cdot (e^{p_1 \cdot t} - e^{p_2 \cdot t}). \end{aligned}$$

## Глава XII. ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 12.1. Параметры длинной линии

Рассмотренные ранее закономерности относятся к электрическим цепям с сосредоточенными параметрами, то есть к цепям, представляющим собой совокупность отдельных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ , сосредоточенных в отдельных её точках. Напряжения и токи этих элементов связаны соотношениями

$$u_R = R \cdot i; \quad u_L = L \cdot \frac{di}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt,$$

полученными в предположении, что ток, входящий в каждый из элементов цепи, равен току, выходящему из него. Решение этих уравнений позволяет установить закон изменения исследуемой величины в зависимости от времени, но не от координаты.

Однако не всегда удаётся рассматривать участки электрической цепи как элементы с сосредоточенными параметрами. Например, рассматривая электромагнитные процессы, происходящие в электрических линиях, предназначенных для передачи электроэнергии или электрических сигналов на большие расстояния, необходимо учитывать, что электрические и магнитные поля распределены по всей длине линии и превращение электрической энергии в тепло также происходит по всей длине линии. Такая цепь является линией с распределёнными параметрами.

*Линии, в которых для одного и того же момента времени ток и напряжение непрерывно изменяются при переходе от одной её точки к другой, называются линиями с распределёнными параметрами.*

*Магнитными линиями с распределёнными параметрами называют такие линии, магнитное напряжение и магнитный поток вдоль которых непрерывно изменяются при переходе от одной точки линии к другой.*

Эффект непрерывного изменения силы тока и напряжения вдоль линии обусловлен тем, что линии обладают *продольными* и *поперечными* сопротивлениями (рис.12.1.1). На рис.12.1.1 представлен участок линии с распределёнными параметрами, где символом  $dx$  обозначен элемент бесконечно малой длины.

Сопротивления  $Z_1$ ,  $Z_3$ ,  $Z_5, \dots$  называются **продольными** сопротивлениями и включают в себя сопротивления прямого и обратного проводов.

Сопротивления  $Z_2$ ,  $Z_4$ ,  $Z_6, \dots$  называются **поперечными** сопротивлениями.

В результате утечки тока через поперечные сопротивления, например через  $Z_2$ , ток  $i_1 \neq i_3$ , аналогично  $i_3 \neq i_5$  и так далее. Поэтому напряжения  $u_{ab} \neq u_{cd}$  и так далее.

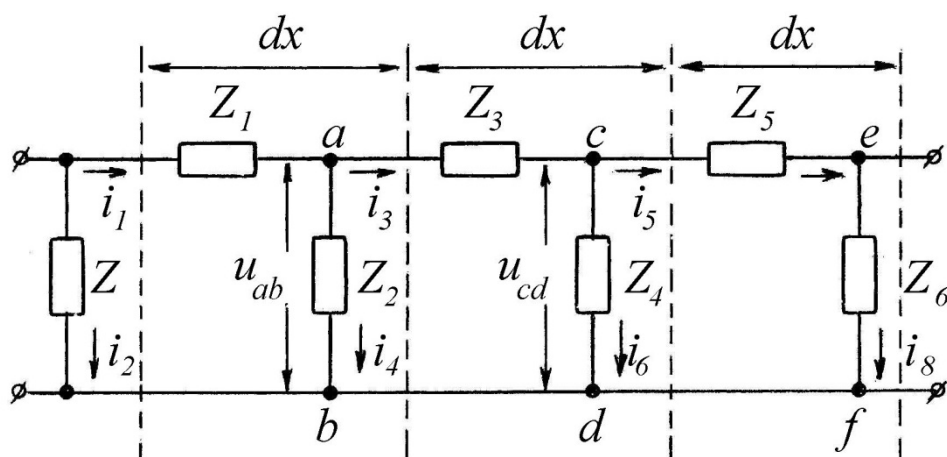


Рис.12.1.1

В электрических линиях с распределёнными параметрами *продольные сопротивления* обусловлены активными сопротивлениями ( $R$ ) проводов линии и индуктивностями ( $L$ ) противостоящих друг другу участков линии. *Поперечные сопротивления* состоят из сопротивлений утечки, обусловленных проводимостью ( $G$ ), вызванной несовершенством изоляции между проводами и ёмкостей ( $C$ ), образованных противостоящими друг другу участками линии.

Электрические параметры  $R$ ,  $L$ ,  $G$  и  $C$ , отнесённые к единице длины линии, называются **первичными параметрами** линии и обозначаются символами  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $G_0$  и  $C_0$ . Первичные параметры имеют размерность

$$R_0 \left[ \frac{\text{Ом}}{\text{м}} \right], \quad L_0 \left[ \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right], \quad G_0 \left[ \frac{\text{См}}{\text{м}} \right], \quad C_0 \left[ \frac{\text{Ф}}{\text{м}} \right].$$

Линия с распределёнными параметрами называется **однородной**, если равны друг другу все продольные сопротивления участков линии одинаковой длины  $Z_1=Z_3=Z_5=\dots$  и если равны между собой все поперечные сопротивления участков равной длины  $Z_2=Z_4=Z_6=\dots$

Линия с распределёнными параметрами называется **линейной**, если продольные и поперечные сопротивления линии не зависят от величины протекающей по ней тока.

Наиболее распространёнными являются однородные двухпроводные линии с распределёнными параметрами, выполненные в виде двух параллельных проводов (рис.12.1.2.а) или коаксиального кабеля (рис.12.1.2.б).

Однако и компактные элементы, на первый взгляд представляющие себя элементами с сосредоточенными параметрами, могут проявлять свойства длинной линии. Например, индуктивная катушка на высоких частотах представляет собой линию с распределёнными параметрами. Ёмкостное сопротивление обратно пропорционально частоте, поэтому при высоких частотах ёмкостное сопротивление может оказаться небольшим, что вызовет существенный ток через межвитковые ёмкости и корпус прибора. По-

этому в приведённой на рис.12.1.2.в схеме замещения индуктивной катушки учтены её ёмкости.

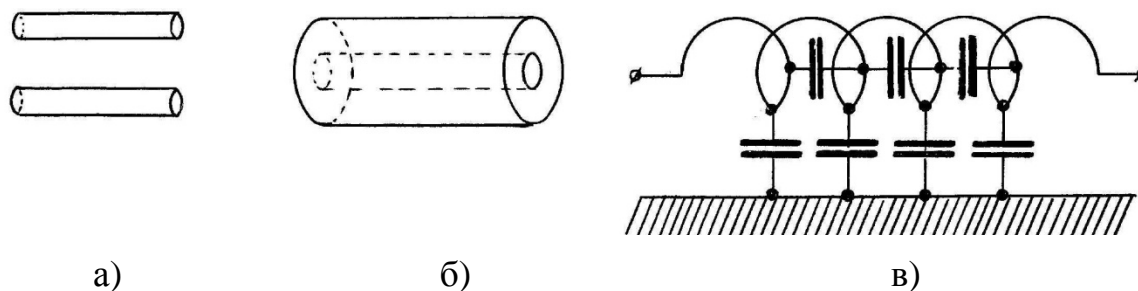


Рис.12.1.2

Анализ однородных линейных магнитных линий с распределёнными параметрами осуществляется аналогично рассмотренному ниже анализу однородных линейных электрических цепей с распределёнными параметрами. Но вместо тока в уравнения следует подставить магнитный поток, вместо электрического напряжения – магнитное напряжение, вместо продольного активного сопротивления – продольное магнитное сопротивление, вместо поперечной электрической проводимости – поперечную магнитную проводимость.

## 12.2. Дифференциальные уравнения однородной линии с распределёнными параметрами

Рассмотрим однородную линию с распределёнными параметрами, представленную на рис.12.2.1.

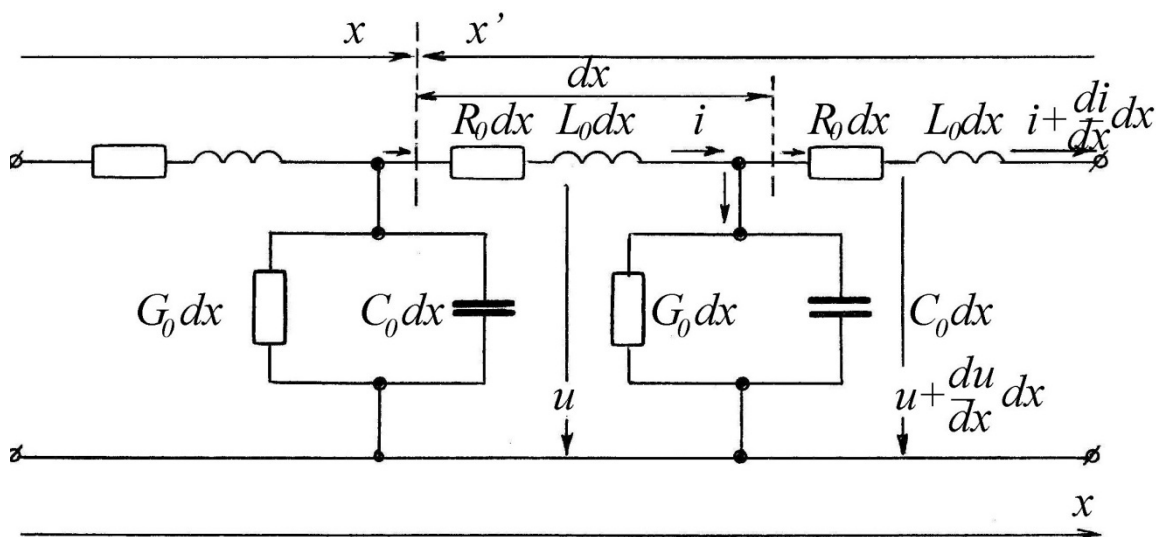


Рис.12.2.1

Здесь:

$R_0$  – продольное активное сопротивление единицы длины линии,  
 $L_0$  – индуктивность единицы длины линии,

$C_0$  – ёмкость единицы длины линии,

$G_0$  – поперечная проводимость единицы длины линии. Причём поперечная проводимость  $G_0$  не является величиной, обратной продольному сопротивлению  $R_0$ .

Напряжение и ток в линии являются функциями двух независимых переменных: пространственной координаты  $x$ , определяющей место наблюдения, и времени  $t$ , определяющего момент наблюдения.

Необходимо установить пространственно-временное распределение тока  $i(x, t)$  и напряжения  $u(x, t)$  между проводами.

Выберем направление тока в линии, например, слева направо и условимся называть «началом» левый конец, а «концом» – правый конец линии.

Мысленно разделим линию на участки длиной  $dx$  и обозначим расстояние от начала линии до произвольной точки символом  $x$ , а расстояние от этой точки до конца – символом  $x'$ . Тогда вся длина линии  $\ell = x + x'$ .

На участке линии длиной  $dx$ :

- активное сопротивление равно  $R_0 dx$ ;
- индуктивность равна  $L_0 dx$ ;
- проводимость равна  $G_0 dx$ ;
- ёмкость равна  $C_0 dx$ .

Обозначим ток в начале рассматриваемого участка символом  $i$ , а напряжение между проводами линии символом  $u$ .

В результате утечки через поперечный элемент ток в конце участка в тот же момент времени равен

$$i + \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx ,$$

где

$$\frac{\partial i}{\partial x} - \text{скорость изменения тока в направлении } x.$$

Величина

$$\frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx - \text{приращение тока на участке } dx.$$

Аналогично, напряжение в конце участка в тот же момент времени равно

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx.$$

Составим уравнение второго закона Кирхгофа для контура, образованного участком линии длиной  $dx$ , обходя его по часовой стрелке.

$$-u + R_0 \cdot dx \cdot i + L_0 \cdot dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right) = 0.$$

После упрощения и деления на  $dx$  получим:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 \cdot i. \quad (12.2.1)$$

Составим уравнение первого закона Кирхгофа для узла «0»:

$$i = di + \left( i + \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx \right). \quad (12.2.2)$$

Здесь ток  $di$  равен сумме токов, проходящих через проводимость  $G_0 dx$  и ёмкость  $C_0 dx$ :

$$di = \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot G_0 \cdot dx + \frac{\partial}{\partial t} \left[ C_0 \cdot dx \cdot \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right) \right].$$

$$di = u \cdot G_0 \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot (dx)^2 \cdot G_0 + C_0 \cdot dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + C_0 \cdot (dx)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Пренебрегая членами второго порядка малости (вторым и четвёртым слагаемыми правой части), преобразуем последнее выражение к виду:

$$di = u \cdot G_0 \cdot dx + C_0 \cdot dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (12.2.3)$$

Выразим силу тока  $i$  подстановкой уравнения (12.2.3) в соотношение (12.2.2):

$$i = u \cdot G_0 \cdot dx + C_0 \cdot dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + i + \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx. \quad (12.2.4)$$

После упрощения этого выражения и деления на  $dx$  получим:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 \cdot u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (12.2.5)$$

Уравнения (12.2.1) и (12.2.5) являются основными дифференциальными уравнениями линии с распределёнными параметрами

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 \cdot i, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 \cdot u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (12-I)$$

и называются **телеграфными уравнениями**.

Если за начало отсчёта принять конец линии, то есть ввести координату  $x'$ , то телеграфные уравнения (12-I) запишутся в виде:

$$\begin{cases} + \frac{\partial u}{\partial x'} = L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 \cdot i, \\ + \frac{\partial i}{\partial x'} = G_0 \cdot u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (12-I)'$$

Уравнения (12-I) или (12-I)' могут быть решены однозначно при использовании начальных и граничных условий.

В данном случае:

- *начальными условиями* являются значения напряжения и тока в начале или в конце линии в момент времени, принятый за ноль,
- *граничные условия* определяются связями между напряжением и током в начале или в конце линии, зависящими от заданного режима работы линии.

Решение уравнений (12-I) или (12-I)' даёт функциональную зависимость напряжения и тока в линии от переменных  $x$  или  $x'$  и времени  $t$ .

### 12.3. Установившийся режим в однородной линии

Если к линии приложено синусоидальное напряжение, то вследствие линейности уравнений (12-I) и (12-I)' напряжение и ток в произвольной точке линии изменяются синусоидально с частотой входного сигнала:

$$\begin{cases} i(x, t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i); \\ u(x, t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_u). \end{cases}$$

Применяя символический метод, изображения тока и напряжения на комплексной плоскости можно представить в виде:

$$\begin{cases} i \rightarrow \dot{I} \cdot e^{j\omega t} \\ u \rightarrow \dot{U} \cdot e^{j\omega t} \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} \dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_i}; \\ \dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_u}. \end{cases}$$

Таким образом, комплексные действующие значения тока и напряжения являются функциями координат  $\dot{I} = \dot{I}(x)$ ,  $\dot{U} = \dot{U}(x)$ ; а множитель  $e^{j\omega t}$  – функцией времени.

Представление тока и напряжения в виде произведения двух сомножителей, из которых один является функцией только координаты  $x$ , а другая – функцией только времени  $t$ , даёт возможность перейти от уравнений в частных производных (12-I) или (12-I)' к уравнениям в простых производных. Для этого найдём изображения слагаемых телеграфных уравнений (12-I) на комплексной плоскости:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow e^{j\omega t} \cdot \frac{d\dot{U}}{dx}; \\ L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \rightarrow L_0 \cdot \dot{I} \cdot \frac{d}{dt}(e^{j\omega t}) = j \cdot \omega \cdot L_0 \cdot \dot{I} \cdot e^{j\omega t}; \\ \frac{\partial i}{\partial x} \rightarrow e^{j\omega t} \cdot \frac{d\dot{I}}{dx}; \\ C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow j \cdot \omega \cdot C_0 \cdot \dot{U} \cdot e^{j\omega t}. \end{cases} \quad (12.3.1)$$

Подстановка изображений (12.3.1) в телеграфные уравнения (12-1) позволяет получить уравнения в простых производных:

$$\begin{cases} -e^{j\omega t} \cdot \frac{d\dot{U}}{dx} = j \cdot \omega \cdot L_0 \cdot \dot{I} \cdot e^{j\omega t} + R_0 \cdot \dot{I} \cdot e^{j\omega t}; \\ -e^{j\omega t} \cdot \frac{d\dot{I}}{dx} = G_0 \cdot \dot{U} \cdot e^{j\omega t} + j \cdot \omega \cdot C_0 \cdot \dot{U} \cdot e^{j\omega t}. \end{cases} \quad (12.3.2)$$

Разделив уравнения системы (12.3.2) на множитель  $e^{j\omega t}$ , получим:

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = \dot{I} \cdot (R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0); \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = \dot{U} \cdot (G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0). \end{cases} \quad (12.3.3)$$

Вводя обозначения

$$\begin{cases} Z_0 = R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0; \\ Y_0 = G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0; \end{cases} \quad (12.3.4)$$

систему уравнений (12.3.3) можно упростить:

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = Z_0 \cdot \dot{I}; \end{cases} \quad (12.3.5)$$

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{I}}{dx} = Y_0 \cdot \dot{U}. \end{cases} \quad (12.3.6)$$

Выражая из уравнения (12.3.5) ток

$$\dot{I} = -\frac{1}{Z_0} \cdot \frac{d\dot{U}}{dx}$$

и подставляя в формулу (12.3.6), получим уравнение с одной переменной в простых производных

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 \cdot Y_0 \cdot \dot{U}. \quad (12.3.7.a)$$

Аналогичным образом, исключая из системы уравнений (12.3.5) и (12.3.6) напряжение  $\dot{U}$ , получим уравнение относительно тока  $\dot{I}$ :

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = Z_0 \cdot Y_0 \cdot \dot{I}. \quad (12.3.7.6)$$

Квадратный корень из комплексного множителя при  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  обозначим символом

$$\gamma = \sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = \sqrt{(R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot (G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0)} = \alpha + j \cdot \beta \quad (12.3.8)$$

и называется **коэффициентом распространения**.

Здесь величина  $\alpha$ , характеризующая изменение амплитуды волны на единицу длины линии, называется **коэффициентом ослабления**, а величина  $\beta$ , равная изменению фазы на единицу длины линии, называется **коэффициентом фазы**.

С учётом обозначения (12.3.8) уравнения (12.3.7) можно упростить:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \gamma^2 \cdot \dot{U}; \\ \frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = \gamma^2 \cdot \dot{I}. \end{cases} \quad (12.3.9)$$

Соотношения (12.3.9) представляют собой одинаковые однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Решение первого из этих уравнений следует искать в виде:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 \cdot e^{+\gamma x} + \dot{A}_2 \cdot e^{-\gamma x}. \quad (12.3.10)$$

Выражение для тока  $\dot{I}$  получается подстановкой формулы (12.3.10) в уравнение (12.3.5):

$$\dot{I} = -\frac{1}{Z_0} \cdot \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\dot{A}_2 \cdot e^{-\gamma x} - \dot{A}_1 \cdot e^{+\gamma x}}{Z_0 / \gamma}. \quad (12.3.11)$$

Отношение в знаменателе формулы (12.3.11) имеет размерность сопротивления и называется **волновым сопротивлением**:

$$Z_B = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0}{G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0}} = z_B \cdot e^{j \cdot \varphi_B}, \quad (12.3.12)$$

где  $z_B$  – модуль,  $\varphi_B$  – аргумент волнового сопротивления  $Z_B$ .

Следовательно,

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_2}{Z_B} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_1}{Z_B} \cdot e^{+\gamma x}. \quad (12.3.13)$$

Коэффициент ослабления  $\alpha$ , коэффициент фазы  $\beta$  и волновое сопротивление  $Z_B$  называются вторичными параметрами линии с распределёнными параметрами.

#### 12.4. Комплексы напряжения и тока в произвольной точке линии

Установим связь комплексов напряжения и тока в произвольной точке линии с комплексами напряжения и тока в начале линии.

Обозначим в начале линии, то есть в точке с координатой  $x=0$ , напряжение и ток символами  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$ . Определим постоянные интегрирования  $\dot{A}_1$  и  $\dot{A}_2$ .

Из уравнений (12.3.10) и (12.3.13) следует, что при  $x=0$

$$\begin{cases} \dot{U}(x=0) = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 = \dot{U}_1; \\ Z_B \cdot \dot{I}(x=0) = \dot{A}_2 - \dot{A}_1 = \dot{I}_1 \cdot Z_B. \end{cases} \quad (12.4.1)$$

$$\quad (12.4.2)$$

Для определения множителя  $\dot{A}_1$  вычтем из уравнения (12.4.1) уравнение (12.4.2). Получим:

$$\dot{A}_1 = 0,5 \cdot (\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \cdot Z_B) = \dot{A}_1 \cdot e^{j\varphi_0}. \quad (12.4.3)$$

Для определения  $\dot{A}_2$  сложим уравнения (12.4.1) и (12.4.2). Получим:

$$\dot{A}_2 = 0,5 \cdot (\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \cdot Z_B) = \dot{A}_2 \cdot e^{j\varphi_n}. \quad (12.4.4)$$

Подстановка формул (12.4.3) и (12.4.5) в уравнение (12.3.10) позволяет выразить напряжение в произвольной точке с координатой  $x$  длиной линии:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \cdot \frac{e^{+\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \dot{I}_1 \cdot Z_B \cdot \frac{e^{+\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}.$$

Учитывая, что гиперболический синус и косинус определяются выражениями

$$\begin{cases} chx = \frac{1}{2} \cdot (e^{+x} + e^{-x}) \\ shx = \frac{1}{2} \cdot (e^{+x} - e^{-x}) \end{cases}, \quad (12.4.5)$$

комплексное напряжение можно описать выражением:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \cdot ch(\gamma x) - \dot{I}_1 \cdot Z_B \cdot sh(\gamma x). \quad (12.4.6)$$

Аналогичным образом можно выразить комплексный ток в произвольной точке линии:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 \cdot ch(\gamma x) - \frac{\dot{U}_1}{Z_B} \cdot sh(\gamma x). \quad (12.4.7)$$

## 12.5. Падающие и отражённые волны в линии

Подстановка в формулу (12.4.1)  $A_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_0}$  вместо  $\dot{A}_1$  и  $A_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_{\Pi}}$  вместо  $\dot{A}_2$ , а также замена  $\gamma$  на  $\alpha + j \cdot \beta$  позволяет описать напряжение в произвольной точке линии уравнением:

$$\dot{U} = A_1 \cdot e^{+\alpha \cdot x} \cdot e^{j \cdot (\varphi_0 + \beta \cdot x)} + A_2 \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{j \cdot (\varphi_{\Pi} - \beta \cdot x)}. \quad (12.5.1)$$

Аналогичные действия с формулой (12.4.2) позволяют выразить комплексный ток в произвольной точке длинной линии:

$$\dot{i} = -\frac{A_1}{Z_B} \cdot e^{+\alpha \cdot x} \cdot e^{j \cdot (\varphi_0 + \beta \cdot x - \varphi_B)} + \frac{A_2}{Z_B} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{j \cdot (\varphi_{\Pi} - \beta \cdot x - \varphi_B)}. \quad (12.5.2)$$

Мгновенное значение напряжения и тока в точке длинной линии с координатой  $x$  равно мнимой части выражений, то есть

$$u(x, t) = A_1 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{+\alpha \cdot x} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0 + \beta \cdot x) + \\ + A_2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{\Pi} - \beta \cdot x). \quad (12.5.3)$$

$$i(x, t) = -\frac{A_1}{Z_B} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{+\alpha \cdot x} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0 + \beta \cdot x - \varphi_B) + \\ + \frac{A_2}{Z_B} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{\Pi} - \beta \cdot x - \varphi_B). \quad (12.5.4)$$

Падающей электромагнитной волной называется процесс распространения электромагнитной волны от источника энергии к приёмнику, то есть в направлении увеличения координаты  $x$ . Падающая электромагнитная волна образована падающей волной напряжения (второе слагаемое уравнения (12.5.3) и падающей волной тока (второе слагаемое уравнения (12.5.4)).

Отражённой электромагнитной волной называется процесс распространения электромагнитной волны от приёмника к источнику. Отражённая волна образована отражённой волной напряжения (первое слагаемое уравнения (12.5.3) и отражённой волной тока (первое слагаемое уравнения (12.5.4)).

Знак «минус» формулы отражённой волны тока свидетельствует о том, что волна переносит энергию в направлении, противоположном потоку энергии падающей волны.

Отношение напряжения отражённой волны в конце линии к напряжению падающей волны в этой же точке называется коэффициентом отражения:

$$k_U = \frac{\dot{A}_1 \cdot e^{+\gamma \cdot \ell}}{\dot{A}_2 \cdot e^{-\gamma \cdot \ell}} = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B},$$

где  $Z_H$  – сопротивление нагрузки. Если  $Z_H = Z_B$ , то нагрузка называется согласованной.

Скорость распространения фазы колебания называется фазовой скоростью волны:

$$v_\Phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Расстояние, на которое распространяется волна за один период  $T = 1/f$ , называется длиной волны:

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{f}.$$

Линия с распределёнными параметрами, как правило, служит в качестве промежуточного звена между источником энергии и нагрузкой.

## 12.6. Линия без искажений

*Линия, вдоль которой волны всех частот распространяются с одинаковой фазовой скоростью и затухают в равной степени, называется линией без искажений.*

При распространении электромагнитной волны по линии без искажений волны амплитуда напряжения и тока уменьшается, но форма волн напряжения и тока в процессе распространения не изменяется.

Линии без искажений находят применение в телефонии. При телефонном разговоре по таким линиям не искажается спектральный состав, то есть тембр голоса.

Для того чтобы линия была неискажающей, коэффициент затухания  $\alpha$  и фазовая скорость  $v_\Phi$  должны быть независимы от частоты. Параметры  $\alpha$  и  $v_\Phi$  не зависят от частоты, если первичные параметры линии связаны соотношением:

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}. \quad (12.6.1)$$

Обозначим это отношение символом

$$k = \frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}. \quad (12.6.2)$$

По определению  $\gamma = \sqrt{Z_0 \cdot Y_0} = \alpha + j \cdot \beta$ , где

$$\begin{cases} Z_0 = R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0 = L_0 \cdot (k + j \cdot \omega); \\ Y_0 = G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0 = C_0 \cdot (k + j \cdot \omega). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\gamma = (k + j \cdot \omega) \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}.$$

Поэтому коэффициент затухания  $\alpha = k \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0} = k \cdot \sqrt{R_0 \cdot G_0}$  и фазовая скорость

$$v_{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}$$

не зависят от частоты.

В линии без искажений волновое сопротивление

$$Z_B = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

является действительным числом и также не зависит от частоты.

## 12.7. Линия без потерь

*Линия, активным сопротивлением и проводимостью которой можно пренебречь по сравнению с соответствующими реактивными составляющими, называется линией без потерь.*

Таким образом, основным требованием к линиям без потерь является выполнение условий:  $R_0 \approx 0$  и  $G_0 \approx 0$ .

В этом случае вторичные параметры линии описываются соотношениями:

$$\gamma = \sqrt{(0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot (0 + j \cdot \omega \cdot C_0)} = j \cdot \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0},$$

$$\alpha = 0,$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0},$$

$$Z_B = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Следовательно, в линии без потерь ослабление отсутствует, а вследствие постоянства фазовой скорости отсутствуют также и фазовые искажения.

Выражения для коэффициента фазы, фазовой скорости и волнового сопротивления линии без потерь совпадают с выражениями, полученными для линии без искажений. Поэтому всё сказанное о линии без искажений справедливо и для линии без потерь.

В предельном случае, когда линия разомкнута, падающая волна встречает бесконечно большое сопротивление. В результате ток в конце линии обращается в нуль, напряжение на разомкнутом конце линии удваивается, возникает отражённая волна того же знака, что и падающая.

В другом предельном случае, когда конец линии замкнут накоротко, падающая волна встречает сопротивление, равное нулю. Поэтому напряжение в конце линии обращается в нуль, ток в конце линии удваивается, возникает отражённая волна, знак которой противоположен знаку падающей волны.

## 12.8. Преломление и отражение волн

Рассмотрим переход волны с линии, обладающей волновым сопротивлением  $Z_1$ , на линию с волновым сопротивлением  $Z_2$  (рис.12.8.1). Такой переход связан с изменением параметров волны и перераспределением энергии электрического и магнитного полей. Энергия электрического и магнитного поля равна соответственно:

$$W_{\text{Э}} = \frac{C_0 \cdot u^2}{2}; \quad W_{\text{М}} = \frac{L_0 \cdot i^2}{2}; \quad \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{м}} \right]$$

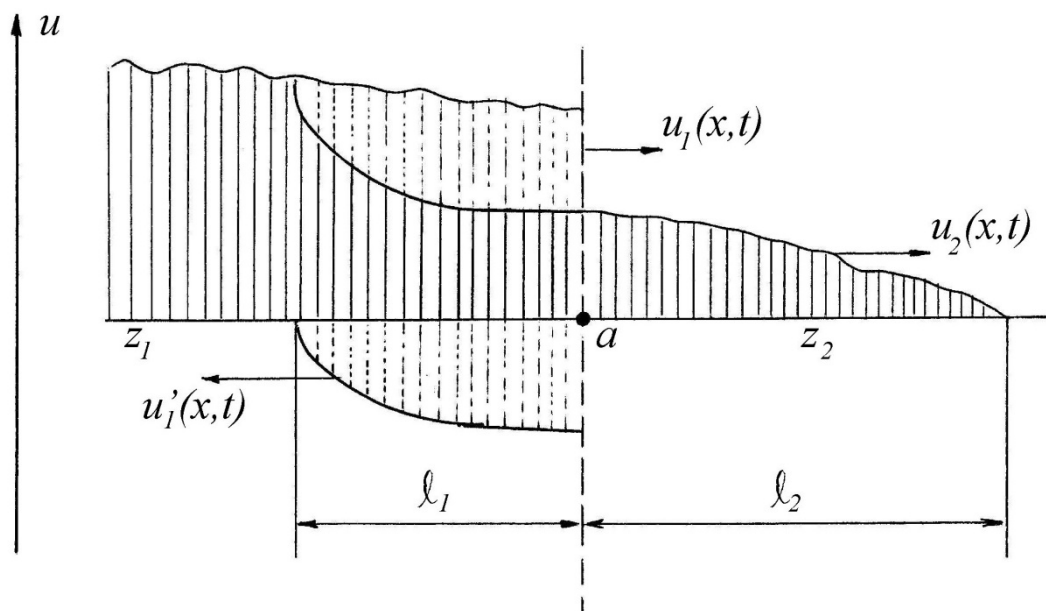


Рис.12.8.1

На линии за узловой точкой «а» возникает преломлённая волна  $u_2(x,t)$ , а вдоль первой линии распространяется отражённая волна  $u_1'(x,t)$ . На участке  $\ell_1$  пробега отражённой волны результирующий потенциал  $u_{\text{PEЗ}}(x,t)$  равен алгебраической сумме потенциалов падающей и отражённой волны (сплошные вертикальные линии слева от границы раздела на рис.12.8.1).

Длина пробега преломлённой ( $\ell_2$ ) и отражённой волны ( $\ell_1$ ) могут быть не равны друг другу, если скорости распространения волн по разные стороны от узловой точки «а» различны.

Поскольку в узловой точке «а» в любой момент времени может быть только одно значение потенциала, то есть  $u_{\text{PEЗ}}(x,t) = u_2(x,t)$ , волны напряжения и тока связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} u_1 + u_1' = u_2; \\ i_1 + i_1' = i_2. \end{cases} \quad (12.8.1)$$

Выразим ток через напряжение. При этом необходимо учесть, что отражённой волне напряжения соответствует волна тока противоположного знака, поэтому отражённый ток второго уравнения системы (12.8.1) имеет отрицательный знак:

$$\frac{u_1}{z_1} - \frac{u_1'}{z_1} = \frac{u_2}{z_2}. \quad (12.8.2)$$

Разделив первое уравнение системы (12.8.1) на  $z_1$ , запишем:

$$\frac{u_1}{z_1} + \frac{u_1'}{z_1} = \frac{u_2}{z_1}. \quad (12.8.3)$$

Складывая правые и левые части уравнений (12.8.2) и (12.8.3)

$$\frac{u_1}{z_1} - \frac{u_1'}{z_1} + \frac{u_1}{z_1} + \frac{u_1'}{z_1} = \frac{u_2}{z_2} + \frac{u_2}{z_1},$$

выразим напряжение  $u_2$  через напряжение  $u_1$ :

$$u_2 = \frac{2 \cdot z_2}{z_1 + z_2} \cdot u_1 = \alpha_u \cdot u_1. \quad (12.8.4)$$

Подставляя уравнение (12.8.4) в первую формулу системы (12.8.1), установим связь между напряжением отражённой и падающей волны:

$$u_1' = u_2 - u_1 = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} \cdot u_1 = \beta_u \cdot u_1. \quad (12.8.5)$$

Аналогичным образом найдём соотношения между токами:

$$\begin{cases} i_2 = \frac{2 \cdot z_1}{z_1 + z_2} \cdot i_1 = \alpha_i \cdot i_1, \\ i_1' = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \cdot i_1 = \beta_i \cdot i_1. \end{cases} \quad (12.8.6)$$

Коэффициенты  $\alpha_u$  и  $\alpha_i$  называются *коэффициентами преломления* для волн соответственно напряжения и тока.

Коэффициенты  $\beta_u$  и  $\beta_i$  называются *коэффициентами отражения* для волн соответственно напряжения и тока.

Коэффициенты преломления всегда положительны. Знак коэффициентов отражения зависит от соотношения величин  $z_1$  и  $z_2$ .

Коэффициенты  $\alpha_u$  и  $\beta_u$  связаны соотношением:

$$1 + \beta_u = \alpha_u. \quad (12.8.7)$$

Рассмотрим преломление и отражение волн в частных случаях.

## 12.9. Падение волны напряжения на конец разомкнутой линии

В этом случае  $z_2 = \infty$ , и уравнения (12.8.4) и (12.8.5) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{cases} u_2 = \frac{2 \cdot z_2}{z_1 + z_2} \cdot u_1 = 2 \cdot u_1; \\ u'_1 = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} \cdot u_1 = u_1. \end{cases} \quad (12.9.1)$$

Из соотношений (12.9.1) следует, что напряжение на конце разомкнутой линии удваивается, причём отражённая волна имеет тот же знак, что и падающая (рис.12.9.1).

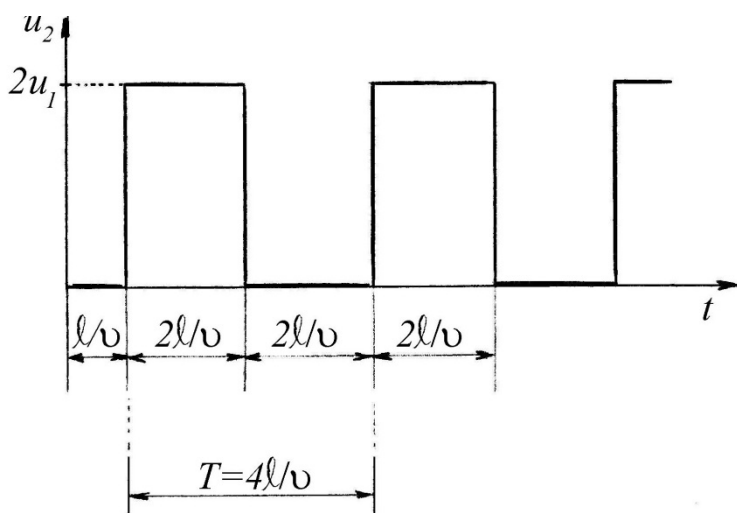


Рис.12.9.1

Если на вход линии длиной  $\ell$  подать бесконечно продолжительную волну с прямым фронтом  $u_1$ , то потенциал на конце линии будет изменяться в пределах от нуля до значения  $2u_1$  (рис.12.9.1). Начало колебательного процесса наступит в момент времени  $t = \ell/v$ . Период колебаний будет равен  $T = 4\ell/v$ , а колебания будут незатухающими.

Этот случай эквивалентен включению генератора с постоянным напряжением  $u_1$  и внутренним сопротивлением, равном нулю, на длинную линию без потерь.

## 12.10. Падение волны напряжения на конец линии, замкнутой накоротко

В этом случае  $z_2 = 0$ , и уравнения (12.8.4) и (12.8.5) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{cases} u_2 = \frac{2 \cdot z_2}{z_1 + z_2} \cdot u_1 = 0; \\ u'_1 = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} \cdot u_1 = -u_1. \end{cases} \quad (12.10.1)$$

Поэтому напряжение на конце короткозамкнутой линии всегда равно нулю. Отражённая волна по модулю равна падающей волне и имеет проти-

воположный знак. Выражение преломлённого тока (верхняя формула системы (12.8.6)) преобразуется к виду:

$$i_2 = \frac{2 \cdot z_1}{z_1 + z_2} \cdot i_1 = 2 \cdot i_1 = \frac{2 \cdot u_1}{z_1}. \quad (12.10.2)$$

Если рассмотреть включение генератора с постоянным выходным напряжением  $u_1$  на короткозамкнутую линию без потерь, то согласно формуле (12.10.2) ток в конце линии будет нарастать степенями высотой  $2 \cdot u_1/z_1$  через промежутки времени длительностью  $2\ell/v$ . В линии без потерь ток в конце линии достигает бесконечно большого значения. Поскольку напряжение на зажимах генератора равно  $u_1$ , в середине линии напряжение изменяется (колеблется) между значением  $u_1$ , и нулём. Период колебаний  $T = 2\ell/v$ .

### 12.11. Переход волны с воздушной на кабельную линию

Этот процесс является частным случаем перехода волны с линии с большим волновым сопротивлением  $z_1$  на линию с меньшим волновым сопротивлением  $z_2$ . Напряжение преломлённой волны описывается уравнением:

$$u_2 = \frac{2 \cdot z_2}{z_1 + z_2} \cdot u_1 \ll u_1$$

так как  $z_1 \gg z_2$ .

Например, если  $z_2=5 \div 40 \text{ Ом}$ , а  $z_1=450 \div 500 \text{ Ом}$ , то в предельном случае

$$u_2 = \frac{2 \cdot 5}{500 + 5} \cdot u_1 = 0,02 \cdot u_1.$$

Согласно уравнению (12.8.5) напряжение отражённой волны:

$$u'_1 = u_2 - u_1 = 0,02u_1 - u_1 = -0,098 \cdot u_1.$$

Преломлённая волна в кабельной линии распространяется на расстояние вдвое меньшее, чем отражённая волна в воздушной линии.

Таким образом, *кабельная линия, резко уменьшая преломлённую волну, представляет собой средство защиты от волны перенапряжения.*

Наоборот, переход волны  $u_1$  с кабельной на воздушную линию ведёт к появлению отражённой волны, амплитуда которой равна приблизительно  $u_1$ , и к повышению потенциала в узловой точке «а» почти до значения  $2u_1$ . Это может представлять опасность для кабельной муфты и изоляции кабеля.

## РАЗДЕЛ II. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОНИКИ

### Глава XIII. ОСНОВЫ ЗОННОЙ ТЕОРИИ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

#### 13.1. Энергетическая диаграмма металлов и полупроводников

В зависимости от удельного электрического сопротивления твёрдые тела можно разделить на проводники ( $10^{-8} \div 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ ), полупроводники ( $10^{-6} \div 10^8 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ ) и диэлектрики ( $10^8 \div 10^{13} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ ).

Объяснение электрических свойств твёрдых тел можно дать на основе зонной теории. Согласно этой теории энергия электрона в атоме квантована, то есть электрон может двигаться только по определённой орбите, которой соответствует определённая энергия. Следовательно, каждый отдельный атом кристалла можно охарактеризовать энергетическим спектром, состоящим из дискретных энергетических уровней. Чем более удалена орбита от ядра, тем больше энергия электрона, то есть тем выше его энергетический уровень. Согласно принципу запрета Паули две тождественные частицы не могут одновременно находиться в одном состоянии, то есть на одном энергетическом уровне. Поэтому при сближении атомов их энергетические уровни расщепляются, образуя энергетические зоны, которые называются **разрешёнными** (I, III и IV на рис.13.1.1).

В кубическом сантиметре кристалла содержится  $10^{22} \div 10^{23}$  атомов. Такого же порядка и число энергетических уровней содержится в разрешённых зонах (каждый атом вносит в зону свой уровень).

Ширина каждой энергетической зоны составляет несколько электрон-вольт ( $1 \text{ эВ} = q \cdot U = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ), следовательно, разность между энергиями соседних уровней, расположенных в одной энергетической зоне, порядка  $10^{-22} \text{ эВ}$ , то есть уровни внутри одной зоны образуют практически непрерывный спектр.

Каждая разрешённая зона занимает определённую область энергии и характеризуется минимальным и максимальным значениями энергии, которые называются соответственно **дном** и **потолком** зоны.

Разрешённые зоны, в которых электроны отсутствуют, называются **свободными** (I). Свободная зона, в которой при температуре, равной абсолютному нулю, нет электронов, а при более высокой температуре они могут в ней находиться, называется зоной **проводимости** (I). Она находится выше **валентной зоны** (III) – верхней из заполненных зон, в которой все уровни энергии заняты электронами при температуре  $0 \text{ К}$ .

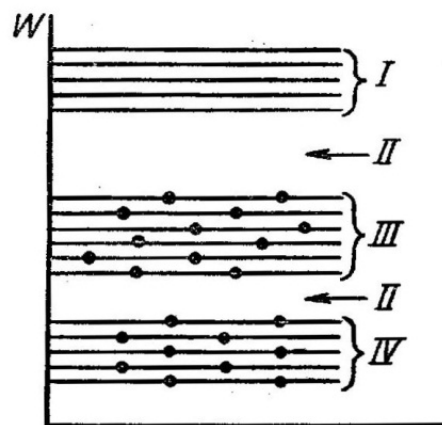


Рис.13.1.1.

Энергетические уровни разделены энергетическими интервалами, в которых электроны не могут находиться и которые называются *запрещёнными зонами* (II).

В зонной теории подразделение твёрдых тел на проводники, полупроводники и диэлектрики обусловлено различием ширины  $\Delta W$  запрещённой зоны между валентной зоной и зоной проводимости (рис.13.1.2). Ширина запрещённой зоны называется *энергией активации собственной электропроводности*. Металлы характеризуются наличием в валентной зоне свободных уровней, на которые могут переходить электроны, получающие дополнительную энергию, например, вследствие ускорения в электрическом поле. У металлов валентная зона (III) и зона проводимости (I) совпадают, то есть  $\Delta W=0$  (рис.13.1.2.а). Электроны, энергия которых соответствует зоне проводимости, теряют связь с ядром атома, то есть становятся свободными электронами и обеспечивают электропроводность.

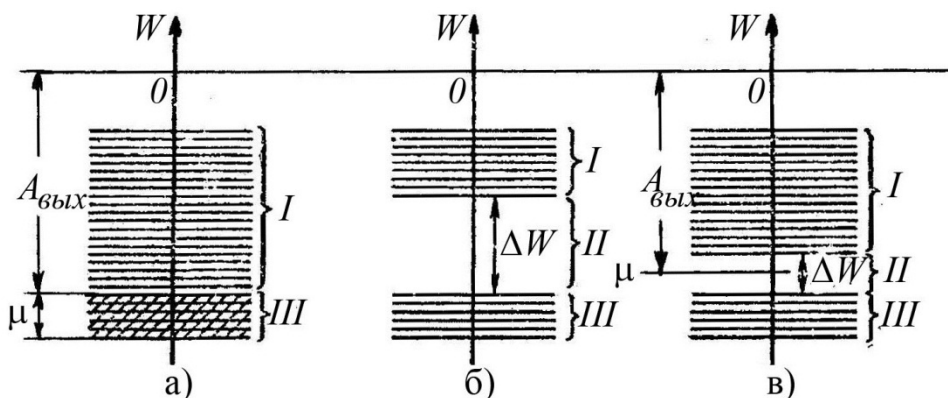


Рис.13.1.2

Наибольшая полная энергия электронов кристалла при температуре абсолютного нуля называется энергией Ферми ( $W_\Phi$ ) или химическим потенциалом ( $\mu$ ). Для того чтобы электрон мог выйти за пределы кристалла, то есть за пределы потенциальной ямы, он должен преодолеть потенциальный барьер. Высота потенциального барьера для электронов, находящихся на уровне Ферми, называется *работой выхода* ( $A_{\text{вых}}$ ) электронов из кристалла. То есть работа выхода – это минимальная энергия, которая необходима, чтобы вырвать электрон из кристалла при температуре, равной абсолютному нулю.

В диэлектриках ширина запрещенной зоны  $\Delta W > 2 \text{ эВ}$ , поэтому электроны не переходят из валентной зоны в зону проводимости (рис.13.1.2.б), и в зоне проводимости нет свободных электронов.

Ширина запрещённой зоны полупроводников сравнительно невелика ( $\Delta W < 2 \text{ эВ}$ ), например, у германия  $\Delta W = 0,66 \text{ эВ}$ , а у кремния  $\Delta W = 1,12 \text{ эВ}$ . Поэтому даже при комнатной температуре часть электронов валентной зоны (III) переходит в зону проводимости (I).

## 13.2. Электропроводность полупроводников.

### Собственная проводимость

Наиболее широко в полупроводниковых приборах используются кристаллы германия и кремния. Атомы германия и кремния четырёхвалентные, то есть содержат по четыре валентных электрона на внешней электронной оболочке и связаны друг с другом валентными электронами. Такая связь называется **ковалентной**. Вокруг каждой пары атомов движутся по орбитам два валентных электрона, показанные на рис.13.2.1. жирными точками. В таком условном плоскостном изображении кристаллической решётки (рис.13.2.2) ковалентные связи показаны прямыми линиями, а электроны – в виде точек.

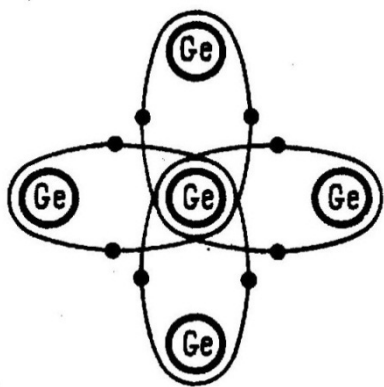


Рис.13.2.1

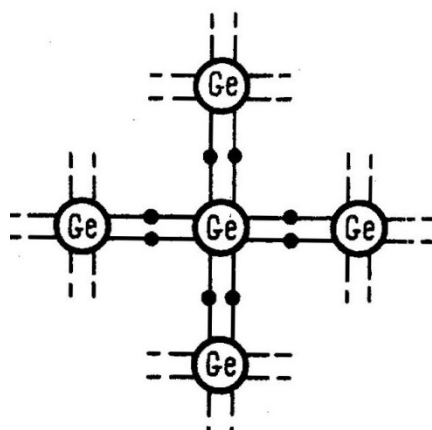


Рис.13.2.2

**Собственной электропроводностью**, или электропроводностью типа *i* (от слова “*intrinsic*” – «**внутренний**»), называют направленное перемещение зарядов в химически чистых полупроводниках, не имеющих дефектов в кристаллической решётке. Собственная электропроводность полупроводников обусловлена разрывами ковалентных связей и переходом валентных электронов в зону проводимости. Положительно заряженные вакансии, образовавшиеся в результате перехода электронов из валентной зоны в зону проводимости, называют «**дырками**» (рис.13.2.3). Поэтому ток в полупроводниках с собственной электропроводностью создаётся направленным движением электронов и дырок. Причём направленное перемещение дырок является следствием движения электронов в валентной зоне, но направление дырочного тока совпадает с направлением перемещения дырок и противоположно действительному направлению перемещения электронов в валентной зоне. Концентрация дырок в полупроводнике типа *i* равна концентрации свободных электронов.

Собственная электропроводность равна нулю при  $0\text{ K}$  и сравнительно мала при комнатной температуре, но резко увеличивается при температурах  $60\div 200^\circ\text{C}$ , поскольку при повышении температуры существенно возрастает количество свободных электронов и дырок.

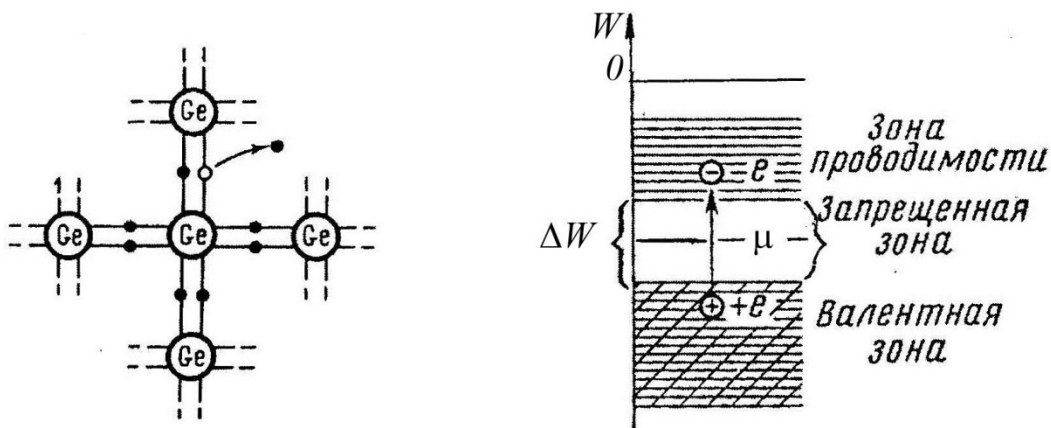


Рис.13.2.3

Свободные электроны и дырки называются **носителями заряда**, поскольку их направленное перемещение приводит к появлению тока в полупроводнике. Процесс появления свободных электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне называется **генерацией носителей зарядов**. Процесс возвращения электронов в валентную зону, сопровождающийся исчезновением дырок, называется **рекомбинацией**. В полупроводниках между процессами генерации и рекомбинации носителей зарядов устанавливается динамическое равновесие, при котором концентрация свободных электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне остаётся неизменной при постоянной температуре полупроводника.

Причинами направленного движения носителей зарядов могут быть внешнее электрическое поле и неравномерность концентрации носителей зарядов.

Направленное движение носителей зарядов, вызванное действием внешнего электрического поля, называется **дрейфом носителей зарядов**. В этом случае ток в полупроводнике называется **дрейфовым** током.

Направленное движение носителей зарядов, вызванное неравномерностью концентрации носителей зарядов, называется **диффузией**, а ток в этом случае называется **диффузионным** током.

Таким образом, ток в полупроводнике складывается из четырёх составляющих:

$$I = I_{n \text{ ДР}} + I_{n \text{ ДИФ}} + I_{p \text{ ДР}} + I_{p \text{ ДИФ}}, \quad (13.2.1)$$

где  $I_{n \text{ ДР}}$  – дрейфовая составляющая электронного тока,  $I_{n \text{ ДИФ}}$  – диффузионная составляющая электронного тока,  $I_{p \text{ ДР}}$  – дрейфовая составляющая дырочного тока,  $I_{p \text{ ДИФ}}$  – диффузионная составляющая дырочного тока.

### 13.3. Электропроводность полупроводников.

#### Примесная проводимость

Электропроводность полупроводников, вызванная введением в химически чистый кристалл атомов других элементов, называется **примес-**

**ной проводимостью.** В зависимости от характера вводимых в кристалл примесей различают примесные полупроводники с электронной, дырочной и компенсированной проводимостью.

Если в кристаллическую решётку германия или кремния добавить в качестве примеси пятивалентный химический элемент, атомы которого имеют по пять валентных электронов (например, мышьяк, сурьма, фосфор), то атомы примеси займут соответствующие места в узлах кристаллической решётки германия или кремния. В этом случае четыре валентных электрона каждого атома примеси войдут в ковалентные связи с соседними атомами германия или кремния, а пятые валентные электроны будут очень слабо связаны с атомами (рис.13.3.1.а). Более слабая связь этих электронов с атомами соответствует более высоким энергетическим уровням, называемым локальными *донорными* уровнями примеси (рис.13.3.1.б, в). Под действием тепловой энергии или внешнего электрического поля эти электроны переходят с донорных уровней в зону проводимости и создают *электронную* проводимость полупроводника, называемую также электропроводностью *типа n*. Атомы примеси, дающие избыточные электроны кристаллу полупроводника, называются *донорами*.

Атомы доноров становятся положительными ионами, расположенными в узлах кристаллической решётки.

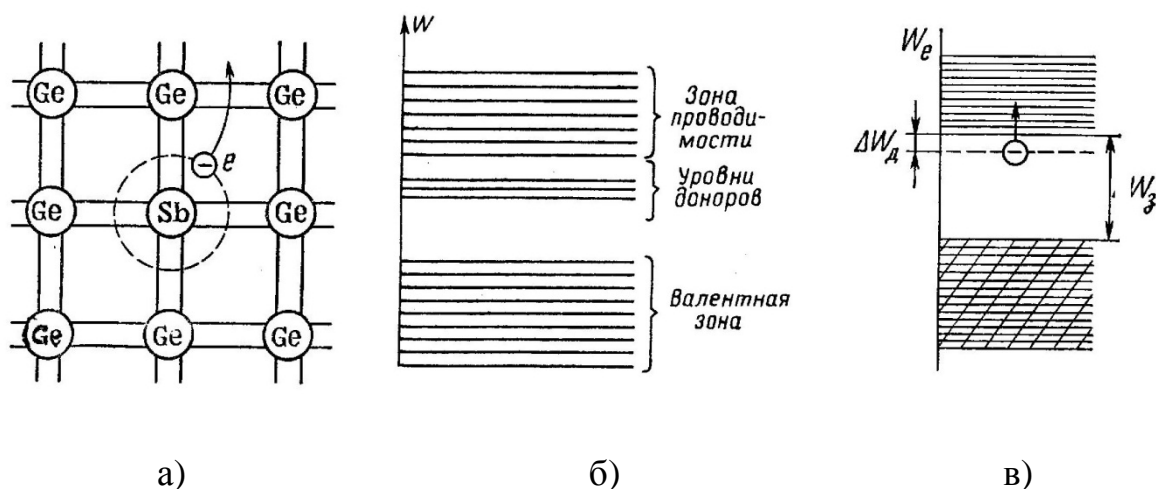


Рис.13.3.1

В примесных полупроводниках с электронной электропроводностью происходит переход электронов в зону проводимости не только с локальных (донорных) уровней энергии, но и из валентной зоны, как в у полупроводниках с собственной электропроводностью.

Следовательно, концентрация электронов проводимости в полупроводниках типа *n* с донорной примесью является суммой концентрации электронов, перешедших с локальных (донорных) уровней в зону проводимости, и электронов валентной зоны, перешедших в зону проводимости. Запрещённая зона между валентной зоной и зоной проводимости значи-

тельно больше запрещённой зоны между локальными (донорными) уровнями и дном зоны проводимости, поэтому концентрация электронов, перешедших в зону проводимости с локальных (донорных) уровней, значительно больше концентрации электронов, перешедших в зону проводимости из валентной зоны.

При переходе электронов из валентной зоны в зону проводимости в валентной зоне образуются дырки, которые также являются носителями заряда. Поэтому в полупроводниках с электронной проводимостью кроме основных носителей заряда – электронов имеются неосновные носители заряда – дырки. Причём концентрация электронов значительно больше концентрации дырок.

Если в кристалл германия или кремния в качестве примеси ввести трёхвалентный элемент (например, бор, индий, алюминий или галлий), то одна из ковалентных связей в каждом атоме окажется незанятой, и на неё может перейти валентный электрон соседнего атома основного вещества (рис.13.3.2.а).

В результате в атоме основного вещества недостаёт электрона, то есть образуется дырка, а атом индия становится отрицательным ионом. Под действием электрического поля дырки перемещаются в направлении силовых линий и создают дырочную электропроводность. Атомы примеси, вызывающие увеличение числа дырок, называются *акцепторами*. Они захватывают электроны основного вещества, образуя отрицательные ионы, и создают дырочную проводимость.

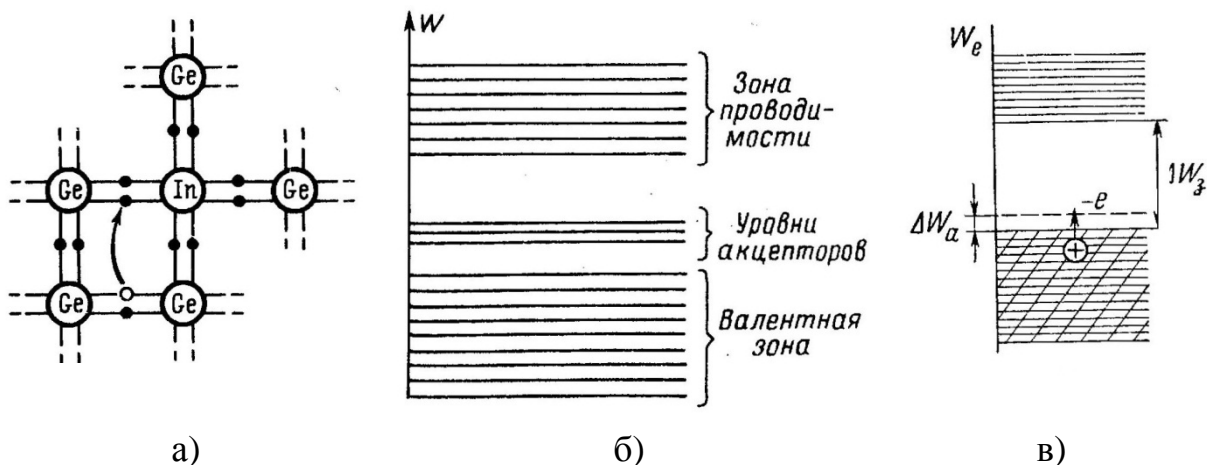


Рис.13.3.2

Примесные полупроводники, содержащие акцепторы, называются *дырочными* полупроводниками, или полупроводниками *p* типа.

В полупроводнике *p* типа основными носителями заряда являются дырки, образующиеся при переходе валентных электронов из атомов основного вещества в атомы акцепторной примеси, то есть из валентной зоны на акцепторные примесные уровни (рис.13.3.2.б, в). Неосновными носителями зарядов являются электроны, переходящие из валентной зоны в зону проводимости.

Запрещённая зона между валентной зоной и зоной проводимости значительно шире запрещённой зоны между валентной зоной и локальными акцепторными уровнями, поэтому в примесном полупроводнике *p* типа концентрация дырок значительно больше концентрации электронов.

Полупроводник, в который в равных количествах введены донорные и акцепторные примеси, называется *компенсированным* полупроводником.

### 13.4. Электронно-дырочный переход. Вольтамперная характеристика полупроводникового диода

Прогресс в развитии электроники связан в основном с использованием контакта двух полупроводников с различным типом проводимости. Область пространства, отделяющая примесный полупроводник с электронной электропроводностью от примесного полупроводника с дырочной электропроводностью, называется *p-n переходом*. В зависимости от технологии изготовления *p-n* переход может иметь плоскую, сферическую или иную форму.

Если электронный и дырочный полупроводники привести в контакт, начнётся переход электронов из *n*-области, где их много, в *p*-область, где их мало, и аналогичный переход дырок из *p*- в *n*-область (рис.13.4.1).

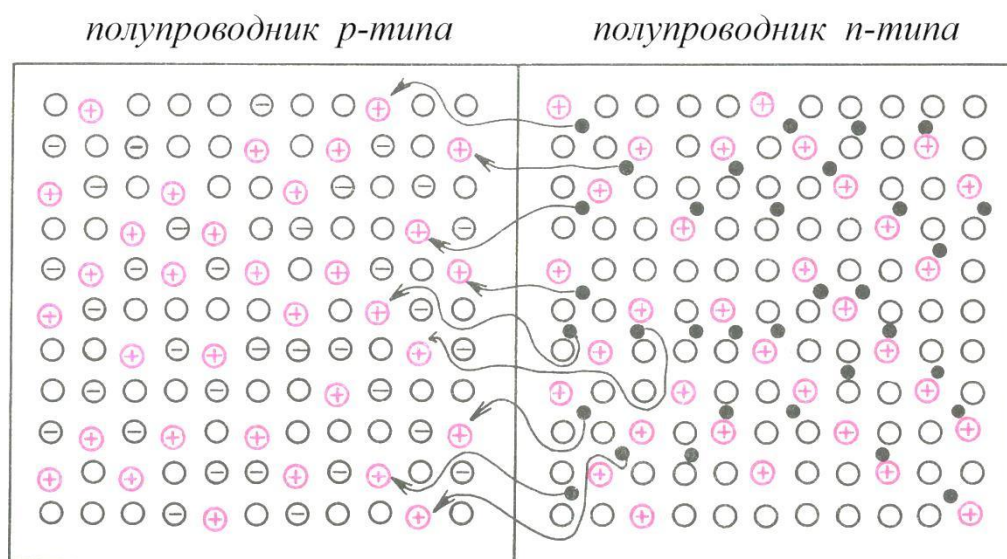


Рис.13.4.1

Как только дырка покинет область *p*-типа, в этой области вблизи границы раздела образуется некомпенсированный отрицательный заряд иона акцепторной примеси, а с уходом электрона из области *n*-типа в ней образуется положительный заряд иона донорной примеси.

На рис.13.4.1. чёрными точками обозначены свободные электроны, а незаштрихованными кругами – нейтральные атомы собственного полупроводника.

Некомпенсированные заряды образуются также и вследствие того, что часть электронов и дырок, попавших в смежную область, рекомбинирует, нарушая равновесие концентрации между свободными носителями заряда и неподвижными ионами примеси. В результате вблизи границы раздела областей создаётся двойной объёмный слой пространственных зарядов, называемый запирающим слоем (рис.13.4.2).

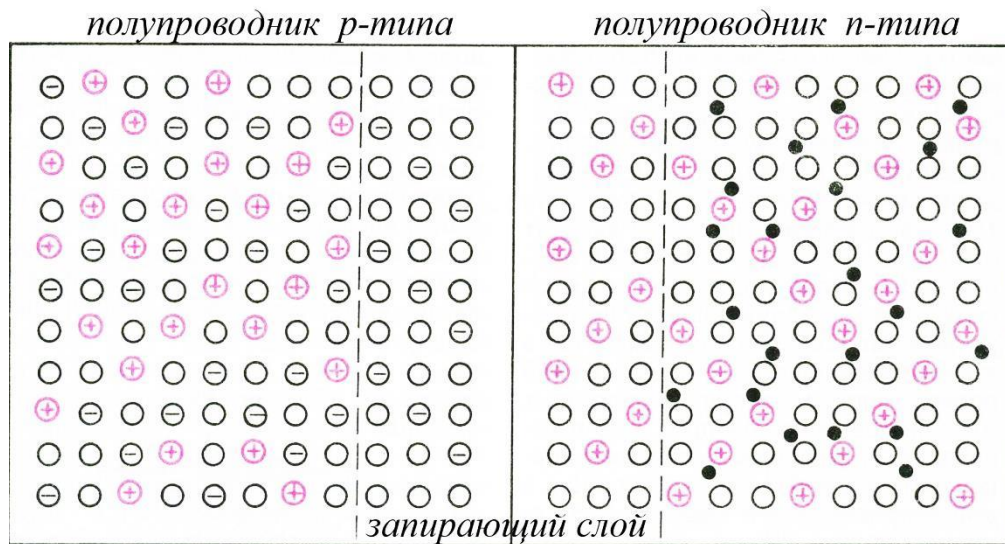


Рис.13.4.2

Этот слой обеднён основными (подвижными) носителями заряда в обеих частях, поэтому его удельное сопротивление велико по сравнению с областями *p*- и *n*-типов. Поэтому контактный слой называют **запирающим**. Однако концентрация подвижных носителей в *p-n* переходе меняется плавно, и существенно обеднён подвижными носителями заряда только средний слой перехода, где их концентрация на несколько порядков меньше. Поэтому обеднённый, или запирающий, слой ( $d = \ell_p + \ell_n$ ) уже *p-n* перехода (рис.13.4.3).

Объёмные заряды по обе стороны границы раздела полупроводников имеют разные знаки и создают электрическое поле *p-n* перехода. Напряжённость  $E$  поля направлена от области *n*-типа к области *p*-типа (рис.13.4.3). Это поле является тормозящим для основных носителей и препятствует дальнейшему диффузионному перемещению основных носителей через *p-n* переход, стремясь возвратить дырки в область *p*, а электроны – в область *n*.

Учитывая, что ширина зазора между кристаллами *p* и *n* типа в области контакта  $\delta = 10^{-9}$  м значительно меньше глубины проникновения контактного поля в полупроводник  $d = 10^{-6}$  м, шириной зазора  $\delta$  можно пренебречь.

На рис.13.4.4.a приведены энергетические диаграммы полупроводников *p* и *n* типа до установления равновесия. Для простоты предполагает-

ся, что в кристаллах зоны проводимости и валентные зоны имеют одинаковую ширину и соответствуют одной и той же энергии. В этом случае работа выхода из полупроводника  $n$ -типа ( $A_{B,n}$ ) меньше, чем работа выхода ( $A_{B,p}$ ) из полупроводника  $p$ -типа.

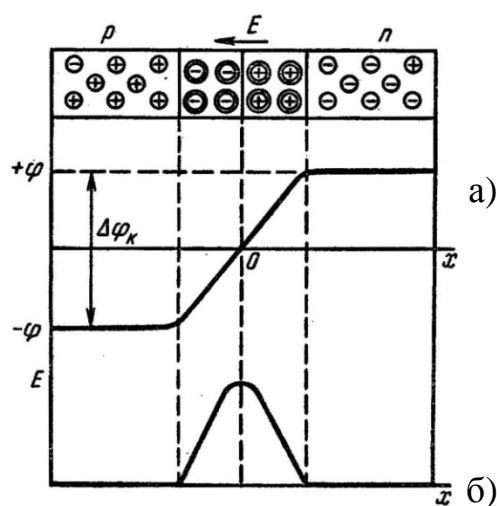


Рис.13.4.3

При приведении полупроводников в контакт электроны зоны проводимости полупроводника  $n$ -типа будут диффундировать в зону проводимости полупроводника  $p$ -типа, а дырки из валентной зоны полупроводника  $p$ -типа будут диффундировать в валентную зону полупроводника  $n$ -типа (рис.13.4.4.б). Диффузия основных носителей представляет собой *диффузионный ток* (рис.13.4.4.в).

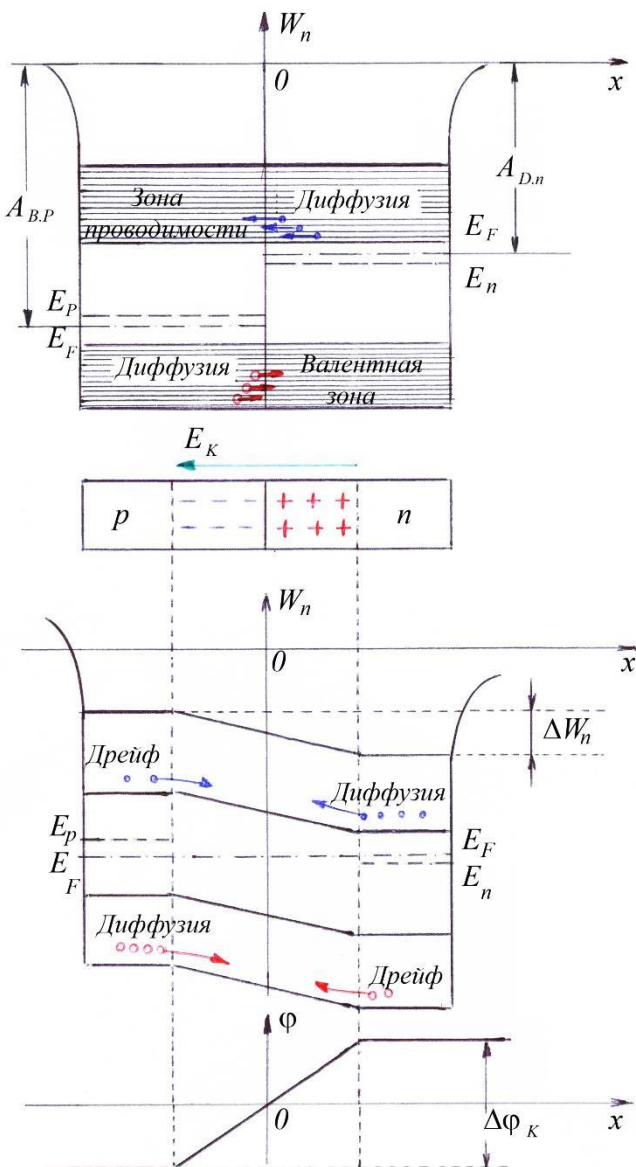


Рис.13.4.4

В отсутствие внешнего напряжения в результате диффузии в области контакта в полупроводнике  $p$ -типа создаётся избыток электронов, а в области контакта  $n$ -типа создаётся избыток дырок. Эти заряды являются неосновными, поэтому происходит рекомбинация неосновных носителей. В результате в области контакта в полупроводнике  $p$ -типа образуются отрицательные ионы примеси, а в полупроводнике  $n$ -типа – положительные ионы, то есть в  $p$ - $n$  переходе возникает потенциальный барьер, равный контактной разности потенциалов  $\varphi_K$ , которую называют *высотой потенциального барьера* (рис.13.4.4.г). При этом число основных носителей в области контакта каждого полупровод-

ника уменьшается. Контактный слой, обеднённый основными носителями, имеет большое сопротивление и является запирающим слоем. Для анализа контактных явлений удобно ввести понятие энергии Ферми  $E_F$ , соответствующей наибольшей полной энергии электронов в кристалле при температуре, равной абсолютному нулю.

В области контакта в отсутствие внешнего электрического поля уровень Ферми неизменен (рис.13.4.4.в), а энергетические зоны искривляются. Характер изгиба энергетических зон описывает формула, связывающая концентрацию электронов  $n$  в зоне проводимости и энергию Ферми  $E_F$ :

$$n = 2 \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot m_n^* \cdot k \cdot T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E_F}{k \cdot T}}, \quad (13.4.1)$$

где  $h$  – постоянная Планка,  $k$  – постоянная Больцмана,  $m_n^*$  – эффективная масса электрона,  $T$  – абсолютная температура.

Вследствие уменьшения концентрации электронов в зоне проводимости полупроводника  $n$ -типа возрастает энергетическое расстояние  $E_F$  от дна зоны проводимости до уровня Ферми (13.4.1). Поскольку уровень Ферми при термодинамическом равновесии характеризуется постоянной энергией, а концентрация  $n$  в результате удаления электронов из полупроводника  $n$ -типа уменьшается, в соответствии с формулой (13.4.1) дно зоны проводимости поднимается. В области контакта возникает контактное электрическое поле (рис.13.4.4.б).

### 13.5. Вольт-амперная характеристика $p$ - $n$ перехода

Если внешний источник ЭДС включить так, чтобы его электрическое поле было направлено навстречу полю потенциального барьера, то действие барьера будет ослаблено, и в результате увеличившейся энергии основных носителей зарядов с обеих сторон  $p$ - $n$  перехода под действием внешнего поля диффузия носителей зарядов через  $p$ - $n$  переход в обоих направлениях увеличивается. Такое включение  $p$ - $n$  перехода называется *прямым* (рис.13.5.1).

Электрическое поле источника напряжённостью  $E_H$  направлено навстречу контактному полю  $E$ , поэтому напряжённость результирующего поля  $E_I = E - E_H$ . Уменьшение напряжённости электрического поля в  $p$ - $n$  переходе вызовет снижение высоты потенциального барьера на величину прямого напряжения  $U$  источника (рис.13.5.1):  $\Delta\varphi_{KI} = \Delta\varphi_K - U$ .

Уменьшение высоты потенциального барьера приводит к тому, что увеличивается поток основных носителей через  $p$ - $n$  переход, то есть возрастёт диффузионный ток. Изменение диффузионного тока с изменением напряжения описывается экспоненциальным законом:

$$I_{\text{диф}} = I_{0, \text{д}} \exp(qU)/(kT), \text{ где } I_{0, \text{д}} = I_0.$$

На дрейфовый ток изменение высоты потенциального барьера не влияет, так как этот ток определяется только количеством неосновных носителей заряда, переносимых через **p-n** переход в единицу времени в результате их хаотического теплового движения.

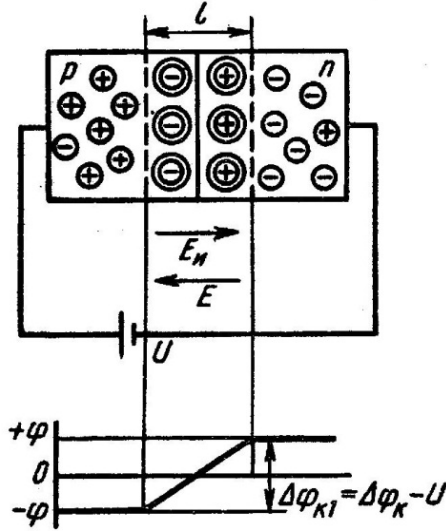


Рис.13.5.1

Диффузионный и дрейфовый ток направлены в противоположные стороны, поэтому результирующий прямой ток через **p-n** переход с учётом последнего выражения равен:

$$I_{\text{пр.}} = I_{\text{диф}} - I_0 = I_0 [\exp(qU)/(kT) - 1]. \quad (13.5.1)$$

Из данного выражения следует, что прямой ток зависит от приложенного напряжения. Даже небольшое напряжение, приложенное к **p-n** переходу, вызывает большой ток, так как потенциальный барьер невелик (0,35 В в германиевом и 0,6 В в кремниевом **p-n** переходе). В результате действия внешнего поля в прямом направлении в области **p-n** перехода происходит

перераспределение концентрации носителей заряда. Дырки в **p**-области и электроны в **n**-области диффундируют в глубь **p-n** перехода и рекомбинируют там. Ширина перехода при этом уменьшается, что приводит к уменьшению сопротивления запирающего слоя и увеличению тока через переход.

При обратном включении **p-n** перехода электрическое поле источника напряжённостью  $E_H$  направлено в ту же сторону, что и контактное поле перехода напряжённостью  $E$ , поэтому напряжённость результирующего поля в переходе:  $E_I = E + E_H$  (рис.13.5.2).

Увеличение напряжённости электрического поля в **p-n** переходе повышает потенциальный барьер на величину обратного напряжения источника:  $\Delta\varphi_{K2} = \Delta\varphi_K + U$  (рис.13.5.2).

Это приводит к уменьшению числа основных носителей заряда, способных преодолеть потенциальный барьер, то есть к снижению диффузионного тока. Зависимость диффузионного тока от приложенного напряжения описывается экспоненциальным законом:  $I_{\text{диф}} = I_0 \cdot \exp(-qU)/(kT)$ .

Поскольку дрейфовый ток не зависит от высоты потенциального барьера, он равен току  $I_0$ , а результирующий ток через переход:

$$I_{\text{обр.}} = I_{\text{диф}} - I_0 = I_0 [\exp(-qU)/(kT) - 1]. \quad (13.5.2)$$

Ток при обратном включении *p-n* перехода называют **обратным током**. Для неосновных носителей заряда поле *p-n* перехода является ускоряющим, поэтому дырки области *n* из прилегающих к переходу слоёв дрейфуют в область *p*-типа, а электроны области *p* - в область *n*-типа. При обратном включении через *p-n* переход протекает только дрейфовый ток. Он мал, поскольку мала концентрация неосновных носителей заряда в обеих областях, а сопротивление перехода очень велико. Так как концентрация неосновных носителей заряда зависит от тепловой генерации, то есть зависит от температуры, ток при обратном включении *p-n* перехода называют **тепловым**.

Зависимость тока через *p-n* переход от приложенного к нему напряжения  $I=f(U)$  называют **вольтамперной характеристикой *p-n* перехода**. Используя (1.5.1) и (1.5.2), уравнение вольтамперной характеристики можно записать в виде:

$$I = I_0 \cdot [\exp(\pm qU)/(kT) - 1]. \quad (13.5.3)$$

Если переход включён в прямом направлении, напряжение  $U$  в уравнении (1.5.3) записывают со знаком плюс, если в обратном – со знаком минус.

Вольтамперная характеристика *p-n* перехода показана на рис.13.5.3. Прямой ток на несколько порядков больше обратного. Поэтому *p-n* переход обладает односторонней проводимостью. При повышении температуры возрастает кон-

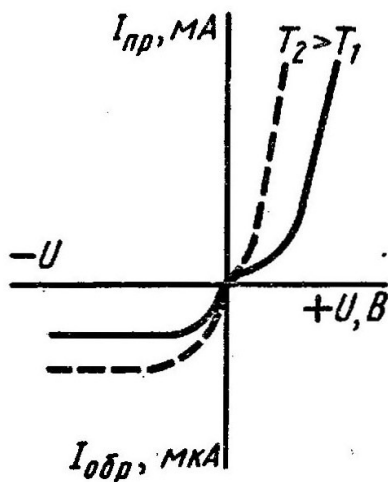


Рис.13.5.3.

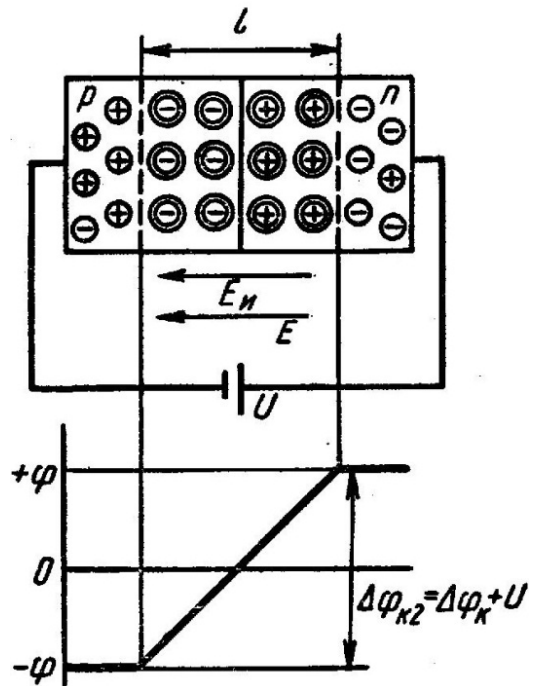


Рис.13.5.2

центрация носителей зарядов, и ток через *p-n* переход увеличивается (рис.13.5.3). Но поскольку **прямой** ток через переход зависит от концентрации **основных** носителей заряда, которая незначительно увеличивается при повышении температуры, изменение температуры слабо влияет на силу тока через переход.

На обратный ток изменение температуры оказывает существенное влияние (рис.13.5.3), поскольку обратный ток зависит от концентрации неосновных носителей заряда, которая зависит от температуры по экспоненциальному закону.

### 13.6. Пробой $p$ - $n$ перехода

Резкое возрастание обратного тока при незначительном превышении запирающего напряжения  $p$ - $n$  перехода определённого значения называется **пробоем  $p$ - $n$  перехода**, а напряжение, при котором происходит пробой, называется **напряжением пробоя**. В зависимости от характера явлений, составляющих основу этих процессов, различают три вида пробоя  $p$ - $n$  перехода: туннельный (или полевой), лавинный и тепловой пробой.

**Туннельный пробой** (линия 1 на рис.13.6.1) является результатом воздействия электрического поля на кристаллическую решётку полупроводника. Если к  $p$ - $n$  переходу приложено обратное напряжение  $U = U_{\text{тун}}$ , то потолок валентной зоны полупроводника  $p$  – типа может оказаться выше дна зоны проводимости полупроводника  $n$  – типа (рис.13.6.2). При этом вследствие туннельного эффекта происходит переход электронов из заполненной валентной зоны полупроводника  $p$  – типа в свободную зону проводимости полупроводника  $n$  – типа. Увеличение обратного напряжения в область значений  $U > U_{\text{тун}}$  приводит к резкому возрастанию тока через  $p$ - $n$  переход вследствие туннельного эффекта, то есть происходит туннельный пробой (рис.13.6.2). Туннельный пробой развивается в узких  $p$ - $n$  переходах, где при сравнительно небольшом обратном напряжении создаётся электрическое поле большой напряжённости.

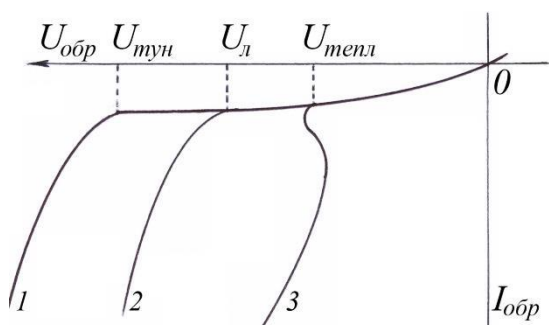


Рис.13.6.1

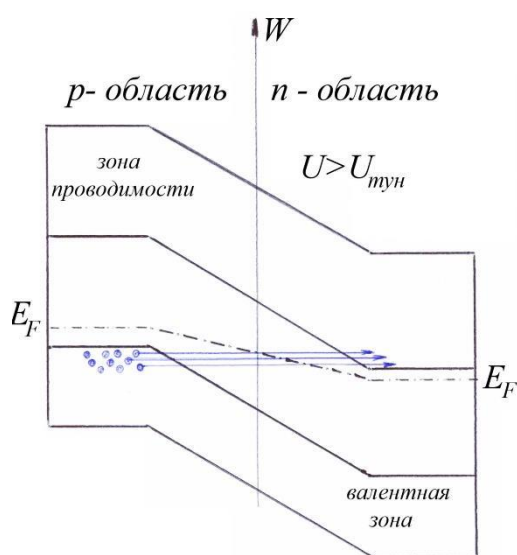


Рис.13.6.2

**Лавинный пробой** (линия 2 на рис.13.6.1) обусловлен большими скоростями неосновных носителей в области  $p$ - $n$  перехода. Его механизм состоит в том, что в сильном электрическом поле может возникнуть удар-

ная ионизация атомов  $p$ - $n$  перехода: носители заряда на длине свободного пробега приобретают кинетическую энергию, достаточную для того, чтобы при столкновении с атомами кристаллической решётки полупроводника выбить из ковалентных связей электроны (рис.13.6.3). Образовавшаяся при этом пара свободных носителей заряда «электрон – дырка» также принимает участие в ударной ионизации. Процесс нарастает лавинообразно и приводит к значительному возрастанию обратного тока. Пробивное напряжение лавинного пробоя составляет десятки и сотни вольт.

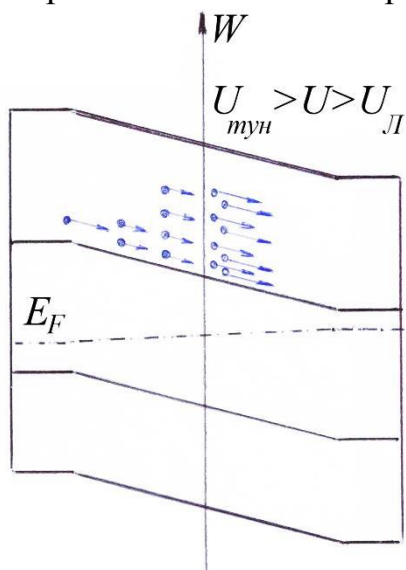


Рис.13.6.3

Туннельный и лавинный пробой не разрушают электронно-дырочный переход, и при уменьшении напряжённости электрического поля в  $p$ - $n$  переходе эти пробой прекращаются.

**Тепловой пробой** возникает, когда мощность, выделяемая в  $p$ - $n$  переходе при прохождении через него обратного тока, превышает мощность, которую способен рассеять  $p$ - $n$  переход. При тепловом пробое происходит существенный перегрев  $p$ - $n$  перехода, что вызывает резкое увеличение тепловой генерации носителей зарядов в области перехода. Тепловой пробой в отличие от лавинного и туннельного пробоев приводит к разрушению электронно-дырочного перехода, то есть является необратимым.

Одним из важных параметров приборов, содержащих  $p$ - $n$  переходы, является допустимое обратное напряжение  $U_{ОБР.МАХ}$ , при котором сохраняется свойство односторонней проводимости. Превышение величины обратного максимального напряжения может привести к необратимому тепловому пробое  $p$ - $n$  перехода и, следовательно, к выходу из строя полупроводникового прибора.

Таким образом, оба вида пробоя – лавинный и туннельный – являются обратимыми процессами. Это означает, что при электрическом пробое  $p$ - $n$  переход не разрушается, и после снижения напряжения полупроводниковый диод сохраняет работоспособность. При тепловом пробое разрушается кристаллическая решётка полупроводника, и прибор выходит из строя.

## Глава XIV. ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ПРИБОРЫ

### 14.1. Типы полупроводниковых приборов

**Полупроводниковые приборы** – это устройства, действие которых основано на электрических свойствах полупроводников. Полупроводниковые приборы подразделяются на следующие типы: полупроводниковые резисторы, фотоэлектрические приборы, диоды, биполярные и полевые транзисторы и тиристоры.

**Полупроводниковыми резисторами** называют полупроводниковые приборы с двумя выводами, в которых используется зависимость электрического сопротивления полупроводника от напряжения, температуры, освещённости и других управляющих параметров. Классификация и условные обозначения полупроводниковых резисторов приведены на рис.14.1.1.

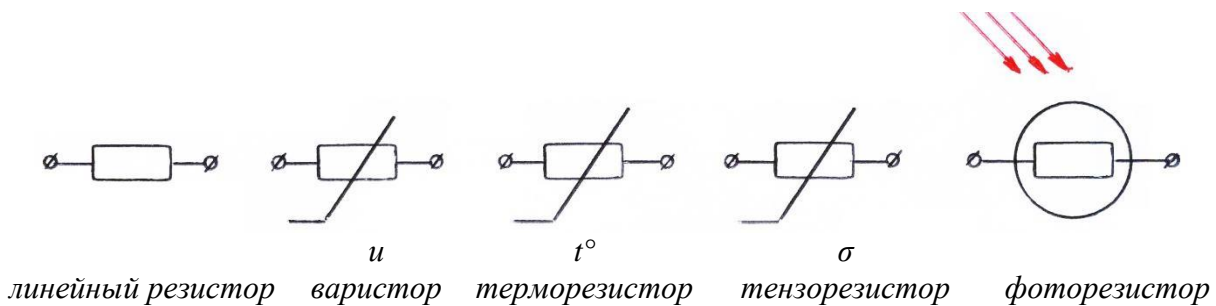


Рис.14.1.1

**Линейный резистор** – это полупроводниковый резистор, изготовленный из слаболегированного материала, кремния, германия или арсенида галлия. Удельное сопротивление такого полупроводника слабо зависит от напряжённости электрического поля и плотности тока. Поэтому сопротивление линейного полупроводникового резистора не изменяется в широком интервале напряжений и токов. Полупроводниковые линейные резисторы широко применяются в интегральных микросхемах.

**Варистор** – это полупроводниковый резистор, сопротивление которого зависит от приложенного напряжения. Поэтому вольтамперная характеристика варистора является нелинейной. Одним из основных параметров варисторов является коэффициент нелинейности:

$$\lambda = \frac{R}{R_d} = \frac{U/I}{dU/dI},$$

где  $U$  и  $I$  – напряжение и ток варистора. Для различных типов варисторов коэффициент нелинейности изменяется в интервале  $\lambda=2\div 6$ .

**Терморезистор** – это полупроводниковый резистор, сопротивление которого зависит от температуры. Основным параметром, характеризующим работу терморезистора, является температурный коэффициент сопротивления

$$\alpha = \frac{1}{R_T} \cdot \frac{dR_T}{dT} \cdot 100 (\%),$$

который выражает процентное изменение сопротивления терморезистора при изменении температуры. Различают два типа терморезисторов: *термисторы*, сопротивление которых уменьшается с ростом температуры (линия 1 на рис.14.1.2), и *позисторы*, сопротивление которых возрастает при повышении температуры (линия 2 на рис.14.1.2). Для выпускаемых промышленностью термисторов  $\alpha = -0,3 \div -0,66$ .

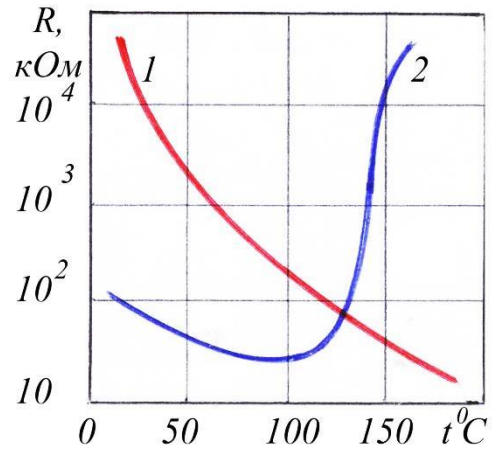


Рис.2.1.2

В электрических цепях термисторы ведут себя как обычные резисторы, сопротивление которых зависит от температуры окружающей среды. Позисторы имеют положительный температурный коэффициент сопротивления.

Терморезисторы применяются в системах измерения и регулирования температуры, тепловой защиты и противопожарной сигнализации.

**Фоторезистор** – полупроводниковый резистор, сопротивление которого зависит от освещённости. К достоинствам фоторезисторов относятся: высокая чувствительность к освещённости, возможность применения в инфракрасной области спектра, небольшие размеры и возможность применения в цепях постоянного и переменного тока.

**Тензорезистор** – полупроводниковый резистор, сопротивление которого зависит от механических деформаций. *Деформационная характеристика* (рис.14.1.3) тензорезистора представляет собой зависимость относительного изменения сопротивления  $\Delta R/R$  от относительной деформации  $\Delta \ell/\ell$ , где  $\ell$  – длина рабочего тела тензорезистора. Основными параметрами тензорезистора являются *номинальное сопротивление*  $R_{ном} = 100 \div 500 \text{ Ом}$  и *коэффициент тензочувствительности*

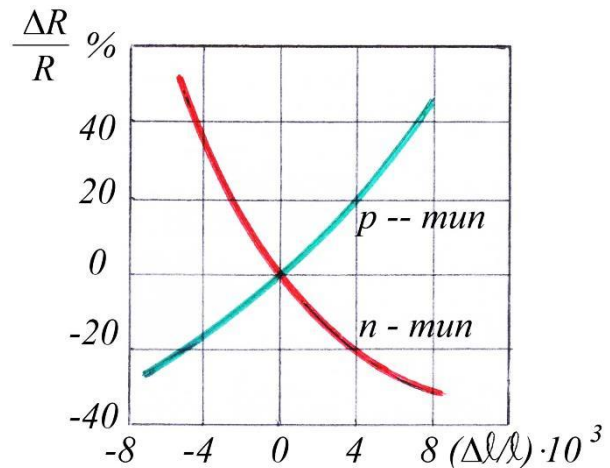


Рис.14.1.3

$$k = \frac{\Delta R/R}{\Delta \ell/\ell},$$

значение которого для различных

тензорезисторов составляет:  $k = -150 \div +150$ . Тензорезисторы используют в качестве чувствительных датчиков механических напряжений.

## 14.2. Полупроводниковые диоды

**Полупроводниковый диод** – это полупроводниковый прибор с одним *p-n* переходом и двумя омическими контактами, пропускающий электрический ток в одном направлении.

Структура и условное обозначение полупроводникового диода приведены на рис.14.2.1. Основными параметрами полупроводникового диода являются дифференциальное сопротивление, сопротивление постоянному току и ёмкости.

**Дифференциальное сопротивление** определяет изменение силы тока  $dI$  через диод при изменении напряжения  $dU$  вблизи некоторого напряжения  $U$ , характеризующего режим работы диода:

$$R_{\text{диф}} = \frac{dU}{dI}.$$

Значение дифференциального сопротивления прямо пропорционально котангенсу угла  $\alpha$  наклона касательной к вольт-амперной характеристике диода в данной точке  $R_{\text{диф}} \sim \text{tg} \alpha$  и зависит от силы тока через диод или напряжения на диоде. При подключении напряжения обратной полярности дифференциальное сопротивление диодов заключено в интервале от десятков килоом до сотен мегаом. При прямом включении дифференциальное сопротивление диодов приближённо рассчитывают по формуле:  $R_{\text{диф}} = 26 \cdot [I(\text{мА})]^{-1}$  (Ом).

**Сопротивление постоянному току** равно отношению постоянного напряжения  $U$ , приложенного к диоду, к соответствующей величине постоянного тока  $I$ :

$$R_0 = \frac{U}{I}.$$

Величина  $R_0$  прямо пропорциональна котангенсу угла  $\beta$  наклона прямой линии, соединяющей рабочую точку и начало координат:  $R_0 \sim \text{tg} \beta$ . При прямом включении диода  $R_0 > R_{\text{диф}}$ , при обратном включении диода  $R_0 < R_{\text{диф}}$ , при  $I=0$  дифференциальное сопротивление равно сопротивлению постоянному току.

**Электроёмкость диода** равна сумме диффузионной и барьерной ёмкости.

**Барьерная (или зарядная) ёмкость  $C_b$**  характеризуется сосредоточением по обе стороны *p-n* перехода объёмных электрических зарядов. Физическим аналогом барьерной ёмкости является ёмкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d}.$$

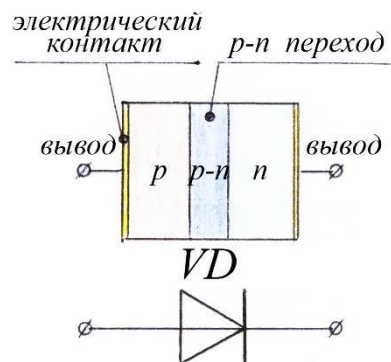


Рис.14.2.1

Следовательно, барьерная ёмкость возрастает с уменьшением толщины  $d$   $p$ - $n$  перехода. Поэтому значение  $C_b$  больше при прямом смещении, чем при обратном. Барьерная ёмкость зависит от площади  $p$ - $n$  перехода и может составлять десятки и сотни пикофарад. Зависимость барьерной ёмкости от обратного напряжения используется в **варикапах** – диодах, которые применяются в качестве конденсаторов переменной ёмкости, управляемых напряжением.

Электрический ток, возникающий при прямом включении диода, приводит к увеличению концентрации неравновесных носителей заряда. *Електроёмкость, определяемая отношением изменения величины инжектированного заряда ( $dQ_{инж}$ ) к изменению приложенного напряжения ( $dU$ ), называется диффузионной ёмкостью:*

$$C_{диф} = \frac{dQ_{инж}}{dU}.$$

При прямом смещении диффузионная ёмкость может достигать тысяч пикофарад, то есть превышает барьерную ёмкость, которую можно не учитывать. При обратном смещении диода диффузионная ёмкость близка к нулю, и следует учитывать лишь барьерную ёмкость.

В зависимости от типа конструкции  $p$ - $n$  перехода различают точечные и плоскостные диоды.

*Точечные диоды* имеют очень малую площадь  $p$ - $n$  перехода, которая не превышает  $10^2 \div 10^3$   $\text{мкм}^2$ . Благодаря малой ёмкости контактного слоя точечные диоды применяют для выпрямления высокочастотных сигналов, вплоть до сантиметрового диапазона длин волн. Более мощными являются плоскостные диоды.

*Плоскостные диоды* имеют плоский  $p$ - $n$  переход, линейные размеры которого, определяющие его площадь, значительно больше ширины  $p$ - $n$  перехода. Плоскостные диоды используют для работы на частотах до 10  $\text{кГц}$ . Ограничение по частоте вызвано большой барьерной ёмкостью. Плоскостные диоды могут быть как малой и средней, так и большой мощности и способны работать при токах до 2000  $\text{А}$ .

При выпрямлении высоких напряжений диоды соединяют последовательно (рис.14.2.2), для того чтобы обратное напряжение на каждом диоде не превышало предельного значения. Обратные сопротивления даже однотипных диодов могут отличаться в десятки раз. Вследствие разброса обратных сопротивлений диодов одного типа на отдельных диодах обратное напряжение может превысить предельное значение, что приведёт к пробое диода.

Например, если амплитуда обратного напряжения выпрямителя равна 1500  $\text{В}$ , а для использованных диодов максимальное обратное напряжение  $U_{обр. max} = 400$   $\text{В}$ , необходимо соединить последовательно не менее четырёх диодов (рис.14.2.2). Предположим, что обратные сопротивления диодов  $R_{обр.1} = 3$   $\text{МОм}$ ,  $R_{обр.2} = R_{обр.3} = R_{обр.4} = 1$   $\text{МОм}$ . Обратное напряжение на

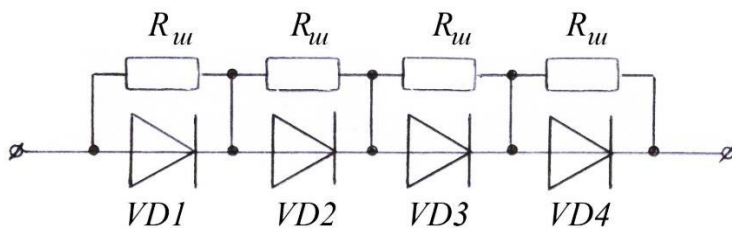


Рис.14.2.2

напряжение  $500\text{ В}$ , что превышает напряжение пробоя. Один из диодов  $VD2 \div VD4$  будет пробит, и к каждому из уцелевших диодов будет приложено напряжение  $750\text{ В}$ . Такой последовательный пробой диодов иногда происходит за доли секунды.

Для того чтобы обратное напряжение распределялось равномерно между диодами независимо от их обратных сопротивлений, применяют шунтирование диодов резисторами (рис.14.2.2). Сопротивления шунтов  $R_{ш}$  должны быть одинаковыми и значительно меньше наименьшего из обратных сопротивлений диодов. Но значения  $R_{ш}$  не должны быть слишком малыми, чтобы не возрос ток обратного сопротивления. Если в рассмотренном примере использовать  $R_{ш}=100\text{ кОм}$ , то обратное напряжение на каждом диоде окажется меньше  $400\text{ В}$ , и диоды будут работать надёжно. Обычно шунтирующие резисторы имеют сопротивление от нескольких десятков до нескольких сотен килоом.

### 14.3. Полупроводниковые стабилитроны

**Полупроводниковые стабилитроны** – это полупроводниковые диоды, напряжение на которых в области электрического пробоя слабо зависит от силы тока и которые используют для стабилизации напряжения.

На рис.14.3.1 показано условное обозначение стабилитрона.

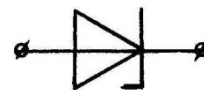


Рис.14.3.1

Работа полупроводникового стабилитрона основана на явлении электрического пробоя  $p$ - $n$  перехода при включении диода в обратном направлении. Механизм пробоя может быть лавинным, туннельным или смешанным.

Рабочим участком вольтамперной характеристики стабилитрона (рис.14.3.2) является область пробоя обратной ветви, которая почти параллельна оси токов, а рабочим напряжением является напряжение пробоя. Максимальная рассеиваемая на стабилитроне мощность изменяется от сотен милливатт до единиц ватт. Напряжение стабилизации может составлять от  $5\text{ В}$  до  $200\text{ В}$ , изменение тока стабилизации от  $I_{min}$  до  $I_{max}$  составляет десятки и даже сотни миллиампер.

Основными параметрами стабилитрона являются напряжение стабилизации  $U_{cm}$  и температурный коэффициент напряжения  $TKH$ , равный отноше-

диодах  $VD2$ ,  $VD3$  и  $VD4$  составит  $250\text{ В}$ , а на диоде  $VD1 - U=750\text{ В} > U_{обр. max}$ . Поэтому диод  $VD1$  будет пробит. Затем напряжение  $1500\text{ В}$  распределится между тремя диодами, и на каждом диоде будет

нию относительного приращения напряжения стабилизации  $dU_{cm}$  к приращению абсолютной температуры  $dT$ , выраженный в процентах:

$$TKH = \frac{1}{U_{cm}} \cdot \frac{dU_{cm}}{dT} \cdot 100\%.$$

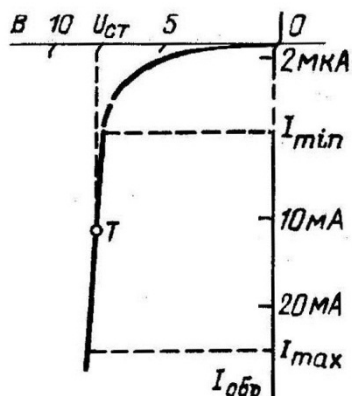


Рис.14.3.2

Схема стабилизации постоянного напряжения с помощью стабилитрона приведена на рис.14.3.3. Если напряжение источника питания  $U_{вх}$  возрастает, то в отсутствие стабилитрона возрастёт и ток в нагрузочном резисторе  $R_H$ , а следовательно, и падение напряжения на нагрузочном резисторе  $R_H$ . Этого не произойдёт, если в схему включить стабилитрон. При повышении напряжения на входе  $U_{вх}$  избыточный ток течёт через стабилитрон. Как видно из вольтамперной

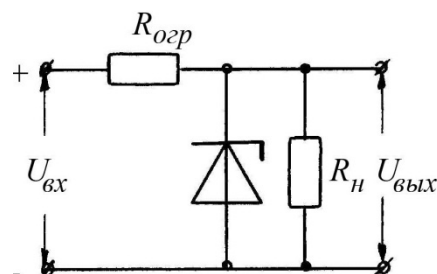


Рис.14.3.3

характеристики (рис. 2.3.2), при изменении обратного тока через стабилитрон напряжение на рабочем участке практически не меняется. Поэтому неизменным остаётся и напряжение на резисторе  $R_H$ . Поскольку все изменения напряжения источника должны поглощаться ограничительным резистором  $R_{огр}$ , то наибольшее изменение этого напряжения

$U_{max} - U_{min}$  должно соответствовать наибольшему возможному изменению тока, при котором ещё сохраняется стабилизация, то есть  $I_{max} - I_{min}$ . Стабилизация в более широком диапазоне изменения входного напряжения возможна при увеличении  $R_{огр}$ .

Для получения более высоких стабильных напряжений применяется последовательное соединение стабилитронов, рассчитанных на одинаковые токи (рис.14.3.4). Вследствие разброса параметров у отдельных экземпляров стабилитронов данного типа их нельзя соединять параллельно с целью получения большего тока. Оно допускается только при условии, что суммарная мощность, рассеиваемая на всех стабилитронах, не превышает предельной мощности одного стабилитрона.

Для повышения стабильности напряжения можно применять схему (рис.14.3.5) каскадного соединения стабилитронов, в которой стабилитрон  $VD1$  должен иметь более высокое напряжение стабилизации, чем стабилитрон  $VD2$ .

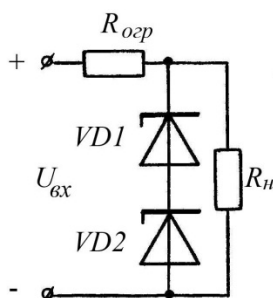


Рис.14.3.4

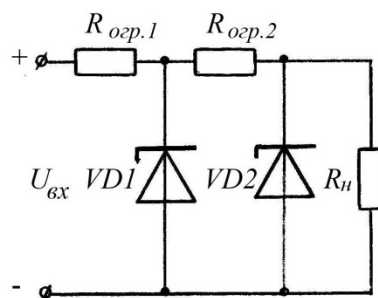


Рис.14.3.5

Эффективность стабилизации напряжения характеризуется коэффициентом стабилизации  $k_{ст}$ , который показывает, во сколько раз относительное изменение напряжения на выходе схемы стабилизации меньше, чем относительное изменение напряжения на входе. Для схемы на рис.14.3.3 коэффициент стабилизации описывается формулой:

$$k_{ст} = \frac{\Delta U_{ВХ}/U_{ВХ}}{\Delta U_{СТ}/U_{СТ}}.$$

Полупроводниковый стабилитрон может обеспечить коэффициент стабилизации, равный нескольким десяткам. При каскадном соединении, показанном на рис.14.3.5, общий коэффициент стабилизации равен произведению коэффициентов стабилизации отдельных звеньев:  $k_{СТ} = k_{СТ.1} \cdot k_{СТ.2} \dots$

Стабилитрон также значительно сглаживает пульсации входного сигнала.

#### 14.4. Устройство и принцип действия биполярного транзистора

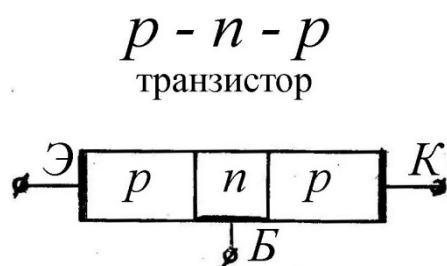
**Транзистор** – это полупроводниковый прибор с двумя или несколькими *p-n* переходами, позволяющий усиливать электрические сигналы и имеющий три вывода или более. В зависимости от принципа действия и конструктивных особенностей транзисторы подразделяют на биполярные и полевые.

**Биполярными транзисторами** называют полупроводниковые приборы с двумя или несколькими взаимодействующими *p-n* переходами и тремя выводами или более, усилительные свойства которых обусловлены явлением **инжекции** основных носителей заряда.

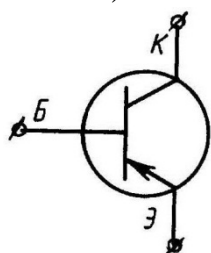
В настоящее время широко используются биполярные транзисторы с двумя *p-n* переходами. Они состоят из чередующихся слоёв полупроводника с различным типом проводимости. В зависимости от типа проводимости наружных слоёв различают транзисторы *p-n-p* типа (рис.14.4.1) и транзисторы *n-p-n* типа (рис.14.4.2). Транзисторы, у которых *p-n* переходы создаются у плоских поверхностей соприкосновения слоёв полупроводников, называются плоскостными транзисторами. Структуры плоскостных транзисторов и их условные их обозначения приведены на рис.14.4.1 и рис.14.4.2.

Структура биполярного транзистора типа *p-n-p* представлена на рис.14.4.3. С помощью акцепторных и донорных примесей в кристалле германия или кремния создаются три области: между двумя областями 3 и 5 с проводимостью *p*-типа создают слой 2 с проводимостью *n*-типа, называемый **базой** (рис.14.4.3). Одна из разделённых базой областей называется **эмиттером**, другая – **коллектором**. В результате между эмиттером и базой, а также между базой и коллектором создаются два *p-n* – перехода 4 и 6. Электроды 8 и 10 – это выводы соответственно эмиттера и коллектора. Электрод 9 – вывод базы, 7 - изоляторы, 1 – защитный кожух.

В зависимости от технологии изготовления транзистора концентрация примесей в базе может быть распределена равномерно или неравномерно. При равномерном распределении примесей внутреннее электрическое поле отсутствует и неосновные носители заряда, попавшие в базу, движутся в ней вследствие диффузии. Такие транзисторы называются **диффузионными**, или **бездрейфовыми**. При неравномерном распределении концентрации носителей в базе создаётся внутреннее электрическое поле, и движение неосновных носителей заряда в базе обусловлено как дрейфом, так и диффузией, причём доминирует дрейф. Такие транзисторы называются **дрейфовыми**.



а)

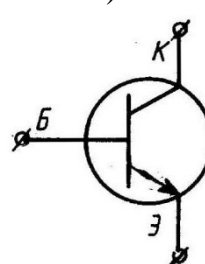


б)

Рис.14.4.1



а)



б)

Рис.14.4.2

Переход, к которому при нормальном включении приложено напряжение в прямом направлении, называется **эмиттерным** переходом, а соответствующий наружный слой – **эмиттером** (Э). Средний слой называется **базой** (Б). Второй  $p-n$  переход, включённый в обратном направлении, называется **коллекторным** переходом, а соответствующий наружный слой – **коллектором** (К) (рис. 14.4.4). Однотипность слоёв коллектора и эмиттера позволяет поменять их местами. Такое включение транзистора называется **инверсным** включением. Эмиттер и коллектор являются низкоомными, а база обладает высоким сопротивлением. Причём удельное сопротивление эмиттера меньше удельного сопротивления коллектора. Поэтому при инверсном

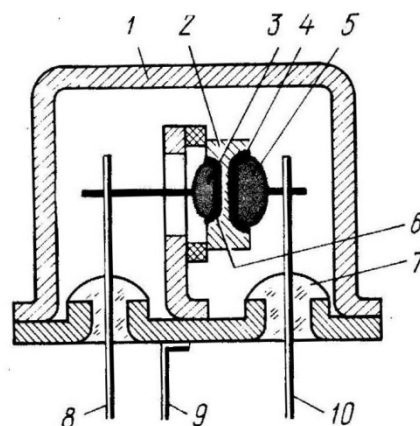


Рис.14.4.3

включении параметры транзистора значительно отличаются от его параметров при прямом включении.

Рассмотрим принцип действия транзистора типа  $n-p-n$ , включённого по схеме с общей базой (рис.14.4.4).

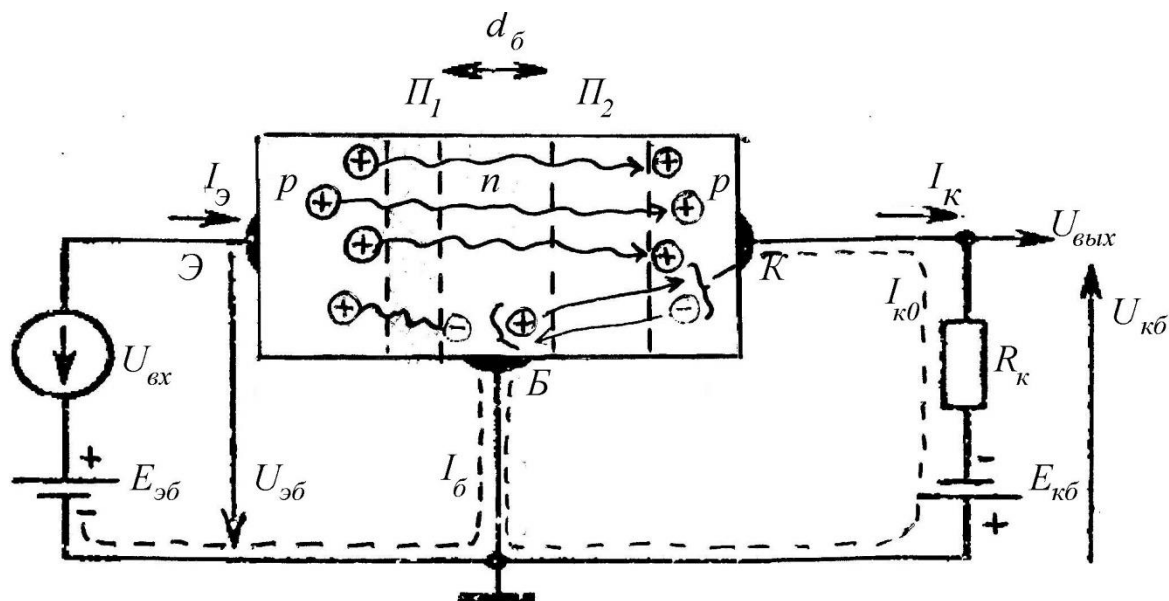


Рис.14.4.4

В отсутствие внешнего напряжения транзистор находится в равновесном состоянии: на эмиттерном и коллекторном  $p-n$ -переходах возникает контактная разность потенциалов, а результирующие токи в  $p-n$ -переходах равны нулю.

При разомкнутой цепи эмиттера ( $U_э=0$ ) и наличии внешнего напряжения  $U_кб$  в цепи коллектора течёт обратный ток коллекторного перехода  $I_{к0}$ , создаваемый дрейфовым движением неосновных носителей заряда – дырок из области базы в область коллектора и электронов из области коллектора в область базы. Поэтому при наличии напряжения на коллекторе в выходной цепи транзистора всегда течёт ток, то есть транзистор в отличие от электронной лампы можно запереть только до уровня тока  $I_{к0}$ .

У современных маломощных транзисторов ток  $I_{к0}$  не превышает нескольких микроампер. Значения  $I_{к0}$  транзисторов обязательно приведены в справочных материалах.

При подаче внешнего напряжения ( $U_эб \neq 0$ ) в эмиттерной цепи транзистора, полярность которого обеспечивает прямое смещение эмиттерного перехода, возникает прямой ток эмиттерного перехода, обусловленный движением основных носителей области эмиттера и области базы. Переход основных носителей заряда эмиттера – дырок в базу называется **инжекцией** дырок. Вследствие большого удельного сопротивления базы дырочный ток из эмиттера значительно превышает электронный ток из базы. Поэтому переходом электронов из базы в эмиттер можно пренебречь. При встреч-

ном движении дырок и электронов происходит их частичная рекомбинация, а избыток дырок внедряется в слой базы, образуя ток эмиттера  $I_{\mathcal{E}}$ .

Рекомбинация – это процесс, обратный ионизации, то есть образование нейтральных частиц из заряженных. Рекомбинация электронов и дырок в полупроводниках сопровождается выделением энергии.

Поток электронов, поступающих в базовую цепь от источника  $U_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ , образует базовый ток  $I_{\mathcal{B}}$ . Поскольку толщина базы ( $d_{\mathcal{B}}$ ) современных транзисторов составляет единицы микрон, то большая часть дырок достигает коллекторного  $p$ - $n$ -перехода, и далее электрическим полем  $p$ - $n$ -перехода коллектор – база перебрасывается в область коллектора. При этом в коллекторной цепи течёт электрический ток  $I_K$ .

Пренебрегая током  $I_{K0}$ , для токов транзистора можно записать первое правило Кирхгофа:

$$I_{\mathcal{E}} = I_{\mathcal{B}} + I_K. \quad (14.4.1)$$

Перенос тока из эмиттерной цепи в коллекторную характеризуется **коэффициентом передачи тока эмиттера**:

$$\alpha = \frac{dI_K}{dI_{\mathcal{E}}} \text{ при } U_{K\mathcal{B}} = \text{const}, \quad (14.4.2)$$

который у современных транзисторов достигает значений  $\alpha = 0,95 \div 0,99$ . Поэтому  $I_{\mathcal{B}} \approx (0,05 \div 0,01) \cdot I_{\mathcal{E}}$  и  $I_K \approx (0,95 \div 0,991) \cdot I_{\mathcal{E}}$ .

Связи между токами транзистора определяются соотношениями:

$$I_K = \alpha \cdot I_{\mathcal{E}}. \quad (14.4.3)$$

$$I_{\mathcal{B}} = (1 - \alpha) \cdot I_{\mathcal{E}}. \quad (14.4.4)$$

Таким образом, изменение тока входной цепи транзистора вызывает соответствующее изменение тока в выходной цепи. Поскольку эмиттерный переход транзистора включён в прямом направлении, а коллекторный переход – в обратном, входное напряжение влияет на коллекторный ток значительно сильнее, чем выходное. На этом свойстве основано усильтельное действие транзистора.

Усильтельные свойства транзистора характеризуются коэффициентами усиления соответственно напряжения ( $k_U$ ) и тока ( $k_I$ ):

$$k_U = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}}. \quad (14.4.5)$$

$$k_I = \frac{I_{\text{ВЫХ}}}{I_{\text{ВХ}}}. \quad (14.4.6)$$

Переменные токи и напряжения в цепи транзистора связаны соотношениями:

$$U_{\text{вх}} = I_{\mathcal{E}} \cdot R_{\text{вх}}; \quad U_{\text{вых}} = I_K \cdot R_K = \alpha \cdot I_{\mathcal{E}} \cdot R_K. \quad (14.4.7)$$

Подстановка соотношений (14.4.7) в формулы (14.4.5) и (14.4.6) позволяет выразить коэффициенты усиления транзистором напряжения и тока. Например, коэффициент усиления напряжения:

$$k_U = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{I_K \cdot R_K}{I_E \cdot R_{\text{ВХ}}} = \alpha \cdot \frac{R_K}{R_{\text{ВХ}}}. \quad (14.4.8)$$

Коэффициент усиления мощности:

$$k_U = \frac{P_{\text{ВЫХ}}}{P_{\text{ВХ}}} = \frac{I_K^2 \cdot R_K}{I_E^2 \cdot R_{\text{ВХ}}} = \alpha^2 \cdot \frac{R_K}{R_{\text{ВХ}}}. \quad (14.4.9)$$

При прямом включении эмиттерного перехода его сопротивление переменному току ( $R_{\text{ВХ}}$ ) не превышает нескольких десятков Ом, а сопротивление коллекторного перехода, который включён в обратном направлении, достигает сотен тысяч Ом. Поэтому в формулах (14.4.8) и (14.4.9) отношение сопротивлений

$$\frac{R_K}{R_{\text{ВХ}}} \gg 1 \quad (14.4.10)$$

и коэффициенты усиления  $k_U \gg 1$  и  $k_P \gg 1$ , то есть достигают больших значений.

Принцип работы транзистора типа *n-p-n* отличается от принципа действия транзистора типа *p-n-p* тем, что напряжения, приложенные при нормальном (не инверсном) включении транзистора, имеют противоположную полярность. Основными носителями заряда в эмиттере и коллекторе являются свободные электроны, а в базе – дырки.

### 14.5. Схемы включения и статические характеристики биполярного транзистора

В рассмотренной на рис.14.4.4 схеме включения *p-n-p* транзистора базовый электрод является общим для внешних, то есть коллекторной и эмиттерной цепей. Поэтому такая схема включения транзистора называется *схемой с общей базой (ОБ)* (рис.14.5.1.а).

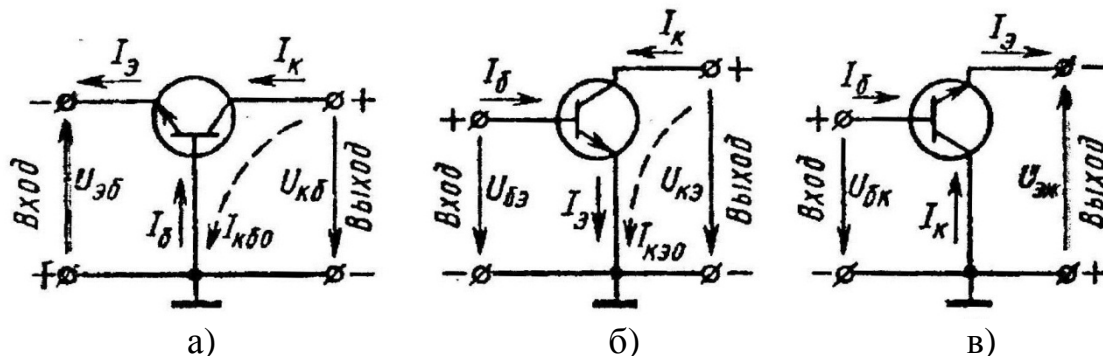


Рис.14.5.1

В этой схеме напряжения на эмиттере и коллекторе отсчитываются относительно базы, потенциал которой принимается равным нулю. Вход-

ными параметрами схемы с *ОБ* является напряжение  $U_{ЭБ}$  и ток  $I_Э$ , а выходными величинами – коллекторный ток  $I_К$  и напряжение коллектор – база:  $U_{КБ}$ . В схеме с *ОБ* коэффициент усиления тока несколько меньше единицы, а коэффициенты усиления напряжения и мощности значительно превышают единицу.

В электронной технике наибольшее распространение получила схема включения транзистора с **общим эмиттером (ОЭ)** (рис.14.5.1.б). В схеме включения транзистора с *ОЭ* эмиттер заземлён, и потенциалы коллектора и базы отсчитываются относительно эмиттера. В схеме с *ОЭ* входными величинами являются ток базы  $I_Б$  и напряжение между эмиттером и базой  $U_{БЭ}$ , а выходными величинами являются коллекторный ток  $I_К$  и напряжение между коллектором и эмиттером  $U_Б$ , причём ток базы  $I_Б$  несопоставимо мал по сравнению с коллекторным током  $I_К$ . При таком включении удаётся получить наибольший коэффициент усиления мощности.

В схеме с **общим коллектором (ОК)** (рис.14.5.1.в) нулю приравняют потенциал коллектора. В этой схеме база является входным электродом, поэтому входным током является ток базы  $I_Б$ , а входным напряжением является напряжение между коллектором и базой  $U_{КБ}$ . Выходными величинами являются эмиттерный ток  $I_Э$  и напряжение между коллектором и эмиттером  $U_{КЭ}$ . В схеме с *ОК* коэффициент усиления тока значительно больше единицы, а коэффициент усиления напряжения приблизительно равен единице (незначительно меньше). Поэтому коэффициент усиления мощности больше единицы.

Особенность схемы с *ОК* в том, что выходное напряжение полностью передаётся обратно на вход, то есть выходное напряжение повторяет входное. Поэтому схему с *ОК* обычно называют **эмиттерным повторителем**. Эмиттерным потому, что нагрузочный резистор соединён с эмиттером и выходное напряжение снимается с эмиттера (относительно корпуса).

Транзисторы являются нелинейными элементами электрических цепей, поэтому наиболее полно их работу можно проанализировать с помощью статических характеристик, описывающих связь между напряжениями и токами на входе и выходе транзисторов для различных способов их включения: с *ОБ*, *ОЭ* или *ОК*.

Основными статическими характеристиками являются:

- входные характеристики:  $I_{БХ} = f_1(U_{БХ})$  при  $U_{БЫХ} = const$ ;
- выходные характеристики  $I_{БЫХ} = f_2(U_{БЫХ})$  при  $I_{БХ} = const$ ;
- характеристики передачи тока:  $I_{БЫХ} = f_3(U_{БХ})$  при  $U_{БЫХ} = const$ ;
- характеристик обратной связи по напряжению:  $U_{БХ} = f_4(U_{БЫХ})$  при  $I_{БХ} = const$ .

## 14.6. Схемы замещения транзистора в физических параметрах

Для выполнения расчёта режимов работы электрических цепей, содержащих транзисторы, их удобно заменять схемами замещения. Наиболее удобна схема замещения, все элементы которой связаны с физическими параметрами, называемая схемой замещения в физических параметрах.

Рассмотрим схемы замещения транзисторов с ОБ и ОЭ, работающих в усилительном режиме. Такие схемы замещения справедливы для линейных участков входных и выходных характеристик транзистора, когда параметры транзистора можно считать неизменными. Наиболее точно структуру транзистора отражает  $T$  – образная схема замещения. На рис.14.6.1 приведена  $T$  – образная схема замещения с ОБ. По аналогии со структурной схемой транзистора (рис.14.4.4) схема замещения транзистора представляет собой сочетание двух контуров: левого, относящегося к входной цепи эмиттер – база, и правого, характеризующего выходную цепь коллектор – база. Цепь базы с резистором  $r_b$  является общей для этих контуров. Схема замещения транзистора с ОБ содержит следующие элементы (рис.14.6.1).

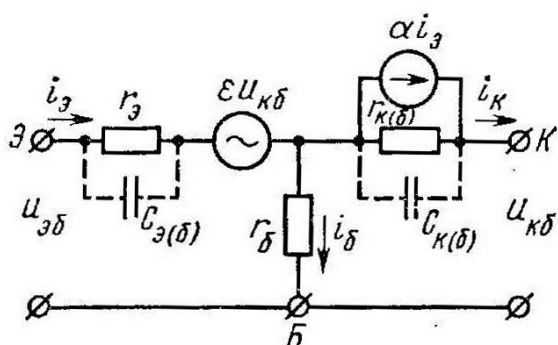


Рис.14.6.1

1. Дифференциальное сопротивление эмиттерного перехода, включённого в прямом направлении

$$r_{\text{э}} = \left. \frac{dU_{\text{э}}}{dI_{\text{э}}} \right|_{U_{\text{кб}}=\text{const}}$$

позволяет установить связь между напряжением  $U_{\text{э}}$  на эмиттерном переходе и протекающим через него электрическим током  $I_{\text{э}}$ . Величина сопротивления эмиттерного перехода  $r_{\text{э}}$  зависит от постоянной составляющей тока  $I_{\text{э}}$  эмиттера и связана с ней соотношением:

$$r_{\text{э}} = \frac{\varphi_{\text{T}}}{I_{\text{э}}}, \quad \text{где } \varphi_{\text{T}} = \frac{k \cdot T}{e} - \text{тепловой потенциал,}$$

который при  $T=300 \text{ K}$  равен  $\varphi_{\text{T}}=0,025 \text{ В}$ .

$$\text{Следовательно, } r_{\text{э}} = \frac{0,025}{I_{\text{э}}}.$$

Для различных типов транзисторов значение  $r_{\text{э}}$  составляет от единиц до нескольких десятков Ом.

2. Объёмное сопротивление базы  $r_b$  слоя базы значительно превышает дифференциальное сопротивление эмиттерного перехода и для различных транзисторов принимает значения от 100 Ом до 400 Ом.

3. ЭДС эквивалентного источника тока  $\alpha I_{\text{э}}$  учитывает транзитную составляющую эмиттерного тока, проходящую через базу в коллектор.

4. Дифференциальное сопротивление коллекторного перехода, включённого в обратном направлении

$$r_{к(б)} = \left. \frac{dU_{кб}}{dI_{к}} \right|_{I_{э}=const},$$

учитывает изменение коллекторного тока при изменении напряжения  $U_{кб}$  вследствие эффекта модуляции базы. Для различных типов транзисторов значение  $r_{к(б)}$  изменяется в пределах  $500 \text{ кОм} \div 1 \text{ МОм}$ .

5. Напряжение  $\varepsilon \cdot U_{кб}$  источника во входной цепи определяет напряжение внутренней положительной обратной связи и отражает влияние эффекта модуляции базы на входную цепь транзистора. Значение коэффициента обратной связи  $\varepsilon$  сравнительно мало ( $10^{-4} \div 10^{-3}$ ), поэтому источник напряжения  $\varepsilon \cdot U_{кб}$  в схеме замещения транзистора часто не учитывают.

6. Каждая из ёмкостей эмиттерного  $C_{э(б)}$  и коллекторного  $C_{к(б)}$  перехода равна сумме барьерной и диффузионной ёмкости соответствующего перехода.

Величина барьерной ёмкости зависит от напряжения смещения  $p$ - $n$  перехода и при прямом смещении больше, чем при обратном. Поэтому барьерная ёмкость эмиттерного перехода больше барьерной ёмкости коллекторного перехода.

В отличие от барьерной ёмкости, определяемой шириной области объёмного заряда  $p$ - $n$  перехода, диффузионная ёмкость характеризует изменение заряда в базе, вызванное изменением напряжения на  $p$ - $n$  переходе. Изменение заряда в базе под действием изменения напряжения на эмиттерном переходе связано с инжекцией носителей заряда в базу, а под действием напряжения на коллекторном переходе – с эффектом модуляции базы. Для того чтобы заряд в базе изменился на одну и ту же величину, напряжение на коллекторном переходе нужно изменить больше, чем на эмиттерном переходе. Поэтому диффузионная ёмкость эмиттерного перехода больше диффузионной ёмкости коллекторного перехода. Таким образом,  $C_{э(б)}$  определяется преимущественно диффузионной ёмкостью и составляет сотни пикофард, а ёмкость  $C_{к(б)}$  определяется в основном барьерной ёмкостью и составляет десятки пикофард. Однако влияние ёмкости  $C_{к(б)}$  на работу транзистора в области высоких частот проявляется сильнее, чем  $C_{э(б)}$ , поскольку ёмкость  $C_{э(б)}$  шунтирована малым сопротивлением  $r_{э}$ , а ёмкость  $C_{к(б)}$  – большим сопротивлением  $r_{к(б)}$ . Поэтому ёмкость  $C_{к(б)}$  необходимо учитывать в схемах замещения при частотах, составляющих от единиц до десятков килогерц, а ёмкость  $C_{э(б)}$  следует учитывать на частотах мегагерцового диапазона. При работе на средних частотах (от десятков герц до единиц килогерц) ёмкости переходов не учитывают и соответствующие конденсаторы не включают в схемы замещения транзистора.

## 7. Дифференциальный коэффициент передачи эмиттерного тока

$$\alpha = \left. \frac{dI_K}{dI_3} \right|_{U_{КБ}=\text{const}}$$

в области средних частот принимается неизменным. В области высоких частот, при которых следует учитывать время прохождения дырок через базу, коллекторный и базовый токи отличаются по фазе, что приводит к уменьшению коэффициента  $\alpha$ . Частотные свойства транзистора характеризуются граничной частотой  $f_a$ , при которой модуль коэффициента передачи тока  $|\alpha|$  уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с максимальным значением  $\alpha$ . В зависимости от величины параметра  $f_a$  различают низкочастотные ( $f_a \leq 3 \text{ МГц}$ ), среднечастотные ( $3 \text{ МГц} \leq f_a \leq 30 \text{ МГц}$ ), высокочастотные ( $30 \text{ МГц} \leq f_a \leq 300 \text{ МГц}$ ) и сверхвысокочастотные ( $f_a > 300 \text{ МГц}$ ) транзисторы.

На рис.14.6.2 приведена  $T$  – образная схема замещения транзистора с ОЭ. Здесь  $r_э$  и  $r_б$  имеют тот же физический смысл и порядок величины, что и в схеме с ОБ.

Источник напряжения, учитывающий обратную связь в схеме замещения, не показан вследствие малости значения коэффициента обратной связи. В выходную цепь схемы замещения включён источник тока  $\beta \cdot i_б$ , где ток базы  $i_б$  транзистора является входным током (рис.14.6.2). Согласно первому правилу Кирхгофа токи схемы замещения связаны соотношением:

$$i_э = i_K + i_б.$$

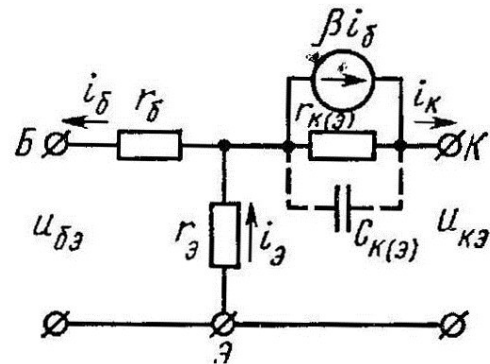


Рис.14.6.2

Поскольку в схеме с ОЭ входным током является ток базы  $i_б$ , который в  $(1+\beta)$  раз меньше тока эмиттера

(где  $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$  – коэффициент передачи тока в схеме с ОЭ),

при переходе от схемы с ОБ к схеме с ОЭ в  $(1+\beta)$  раз уменьшается не только активное, но и ёмкостное сопротивление. Поэтому в схеме с ОЭ  $C_{K(э)} = (1+\beta) \cdot C_{K(б)}$ . В области высоких частот ёмкость  $C_{K(э)}$  оказывает большее влияние на свойства транзистора по сравнению с ёмкостью  $C_{K(б)}$ . Поэтому в схеме не указана ёмкость  $C_{K(б)}$ . Дифференциальный коэффициент передачи тока

$$\beta = \left. \frac{dI_K}{dI_б} \right|_{U_{КЭ}=\text{const}}$$

в схеме с ОЭ является также частотно-зависимым. Если граничную частоту  $f_\beta$  в схеме с ОЭ определять так же, как и в схеме с ОБ, по уменьшению коэффициента передачи тока в  $\sqrt{2}$  раз, то:

$$f_{\beta} = \frac{f_{\alpha}}{1 + \beta}.$$

Поэтому транзистор, включённый по схеме с  $ОЭ$ , имеет худшие частотные свойства по сравнению с транзистором, работающим по схеме с  $ОБ$ .

#### 14.7. Транзистор как активный четырёхполюсник. $h$ – параметры транзистора

Параметры схемы замещения транзистора (рис.14.6.1, 14.6.2) могут быть рассчитаны по геометрическим размерам слоёв и параметров материалов, из которых изготовлен транзистор. Однако прямое измерение геометрических размеров невозможно, поскольку границы раздела слоёв структуры транзистора недоступны для подключения измерительных приборов. Поэтому для характеристики транзистора использованы параметры, которые отражают свойства транзистора как четырёхполюсника (рис.14.7.1).

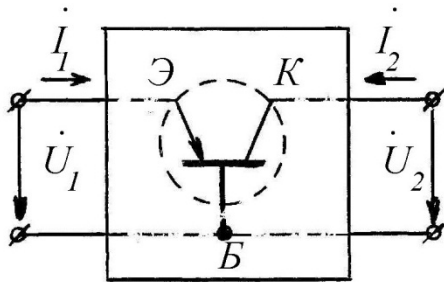


Рис.14.7.1

Теория четырёхполюсников позволяет установить связи между входными и выходными токами и напряжениями транзистора через  $h$  – параметры, которые описывают зависимости:

$$\dot{U}_1 = f(\dot{I}_1, \dot{U}_2); \quad \dot{I}_2 = f(\dot{I}_1, \dot{U}_2).$$

В общем случае транзистор является нелинейным элементом. Для бесконечно малых приращений токов и напряжений можно записать:

$$\begin{cases} d\dot{U}_1 = \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial \dot{I}_1} \cdot d\dot{I}_1 + \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial \dot{U}_2} \cdot d\dot{U}_2; \\ d\dot{I}_2 = \frac{\partial \dot{I}_2}{\partial \dot{I}_1} \cdot d\dot{I}_1 + \frac{\partial \dot{I}_2}{\partial \dot{U}_2} \cdot d\dot{U}_2. \end{cases} \quad (14.7.1)$$

Если в выражении (14.7.1) коэффициенты в виде частных производных обозначить символами  $h_{ik}$ , то данная система уравнений будет выражена системой  $h$  – параметров:

$$\begin{cases} d\dot{U}_1 = h_{11} \cdot d\dot{I}_1 + h_{12} \cdot d\dot{U}_2; \\ d\dot{I}_2 = h_{21} \cdot d\dot{I}_1 + h_{22} \cdot d\dot{U}_2. \end{cases} \quad (14.7.2)$$

Если приращения токов и напряжений незначительны, то транзистор можно рассматривать как линейный четырёхполюсник. Тогда дифференциалы в уравнениях (14.7.2) можно заменить абсолютными значениями малых приращений токов и напряжений:

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot \Delta I_1 + h_{12} \cdot \Delta U_2; \\ I_2 = h_{21} \cdot \Delta I_1 + h_{22} \cdot \Delta U_2. \end{cases} \quad \begin{matrix} (14.7.3) \\ (14.7.4) \end{matrix}$$

Параметры уравнений (14.7.2)÷(14.7.4) имеют следующий физический смысл:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \left. \frac{\Delta U_1}{\Delta I_1} \right|_{\Delta U_2=0} && \text{- входное сопротивление транзистора при неизменном} \\ &&& \text{выходном напряжении;} \\ h_{12} &= \left. \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2} \right|_{\Delta I_1=0} && \text{- коэффициент обратной связи по напряжению при} \\ &&& \text{неизменном входном токе;} \\ h_{21} &= \left. \frac{\Delta I_2}{\Delta I_1} \right|_{\Delta U_2=0} && \text{- коэффициент передачи тока при неизменном выход-} \\ &&& \text{ном напряжении;} \\ h_{22} &= \left. \frac{\Delta I_2}{\Delta U_2} \right|_{\Delta I_1=0} && \text{- выходная проводимость транзистора при неизмен-} \\ &&& \text{ном входном токе.} \end{aligned}$$

Таким образом,  $h$  – параметры являются дифференциальными и характеризуют свойства транзистора в статическом режиме. При достаточно малых синусоидальных сигналах транзистор работает на линейных участках статических характеристик и его можно рассматривать как линейный активный четырёхполюсник. Малые амплитуды  $U_m$ ,  $I_m$  или действующие значения  $U$ ,  $I$  синусоидальных сигналов можно рассматривать как малые приращения постоянных составляющих напряжения или тока. При замене малых приращений синусоидальными сигналами следует учитывать, что мгновенные значения этих приращений есть функции времени и частоты:

$$\Delta U = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_U);$$

$$\Delta I = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_I).$$

Поэтому  $h$  – параметры – комплексные величины и определяются модулями  $|h|$  и аргументами  $\psi$ .

На низкой частоте можно пренебречь реактивными составляющими сопротивлений и проводимостей, то есть учитывать только модули  $h$  – параметров. При таком предположении  $h$  – параметры являются малосигнальными низкочастотными величинами.

Конкретные значения  $h$  – параметров зависят от схемы включения транзистора, то есть  $h$  – параметры различны для схемы включения транзистора:  $ОБ$ ,  $ОЭ$  или  $ОК$ .

Для схемы с  $ОЭ$   $U_1 = U_{бэ}$ ;  $U_2 = U_{кэ}$ ;  $I_1 = I_б$ ;  $I_2 = I_к$ .

Для схемы с  $ОЭ$   $h$  – параметры имеют следующий физический смысл:

$$\begin{aligned}
h_{11\varepsilon} &= \left. \frac{U_{\varepsilon\varepsilon}}{I_6} \right|_{U_{K\varepsilon}=0} && \text{- входное сопротивление транзистора при коротком замыкании выходной цепи;} \\
h_{12\varepsilon} &= \left. \frac{U_{\varepsilon\varepsilon}}{U_{K\varepsilon}} \right|_{I_6=0} && \text{- коэффициент обратной связи по напряжению при холостом ходе со стороны входной цепи;} \\
h_{21\varepsilon} &= \left. \frac{I_K}{I_6} \right|_{U_{K\varepsilon}=0} && \text{- коэффициент передачи тока при коротком замыкании выходной цепи;} \\
h_{22\varepsilon} &= \left. \frac{I_K}{U_{K\varepsilon}} \right|_{I_6=0} && \text{- выходная проводимость транзистора при холостом ходе со стороны входной цепи.}
\end{aligned}$$

Для схемы с ОБ  $U_1=U_{\varepsilon\varepsilon}$ ;  $U_2=U_{K\varepsilon}$ ;  $I_1=I_{\varepsilon}$ ;  $I_2=I_K$ .

Поэтому у схемы с ОБ  $h$  – параметры запишутся в виде:

$$h_{11\varepsilon} = \left. \frac{U_{\varepsilon\varepsilon}}{I_{\varepsilon}} \right|_{U_{K\varepsilon}=0}; \quad h_{12\varepsilon} = \left. \frac{U_{\varepsilon\varepsilon}}{U_{K\varepsilon}} \right|_{I_{\varepsilon}=0}; \quad h_{21\varepsilon} = \left. \frac{I_K}{I_{\varepsilon}} \right|_{U_{K\varepsilon}=0}; \quad h_{22\varepsilon} = \left. \frac{I_K}{U_{K\varepsilon}} \right|_{I_{\varepsilon}=0}.$$

При любой схеме включения транзистора  $h$  – параметры связаны с собственными параметрами транзистора. Например, для схемы включения транзистора с ОБ:

$$h_{11\varepsilon} \approx r_{\varepsilon} + r_6 \cdot (1 - \alpha); \quad h_{21\varepsilon} \approx -\alpha; \quad h_{12\varepsilon} \approx r_6 / r_K; \quad h_{22\varepsilon} \approx 1 / r_K.$$

Для схемы включения транзистора с ОЭ:

$$\begin{aligned}
h_{11\varepsilon} &= r_6 + \frac{r_{\varepsilon}}{1 - \alpha}; \quad h_{12\varepsilon} = \frac{r_{\varepsilon}}{r_K \cdot (1 - \alpha)}; \quad h_{21\varepsilon} = \beta = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)}; \\
h_{22\varepsilon} &= \frac{1}{r_K \cdot (1 - \alpha)}.
\end{aligned}$$

Из этих формул можно определить собственные параметры транзистора, если известны его  $h$  – параметры. Модули  $h$  – параметров могут быть определены по статическим входным и выходным характеристикам.

### 14.8. Режимы работы транзисторов

В процессе работы транзистора смещение эмиттерного и коллекторного переходов может изменяться из прямого на обратное и наоборот. Поэтому различают несколько режимов работы транзисторов, каждому из которых на семействе выходных характеристик соответствует определённая область. В зависимости от полярности напряжения коллекторного и эмиттерного  $p$ - $n$  переходов различают следующие режимы работы транзисторов:

- 1) нормальный активный (усилительный) режим ( $U_{\varepsilon} > 0$ ,  $U_K < 0$ ),
- 2) режим отсечки ( $U_{\varepsilon} < 0$ ,  $U_K > 0$ ),
- 3) режим насыщения ( $U_{\varepsilon} > 0$ ,  $U_K < 0$ ),
- 4) инверсный активный режим ( $U_{\varepsilon} < 0$ ,  $U_K > 0$ ).

Поскольку наиболее распространённым способом включения транзистора является схема с общим эмиттером, рассмотрим работу этой схемы (рис.14.8.1) в различных режимах.

**1. Нормальный активный режим.** В коллекторной цепи транзистора напряжение источника питания  $E_K$  распределяется между нагрузкой  $R_K$  и участком коллектор - эмиттер  $U_{KЭ}$ . Из второго правила Кирхгофа для контура, содержащего источник  $E_K$ , резистор  $R_K$  и транзистор  $TV$ ,  $E_K = U_{KЭ} + R_K I_K$ , можно выразить коллекторный ток:

$$I_K = \frac{E_K - U_{KЭ}}{R_K}.$$

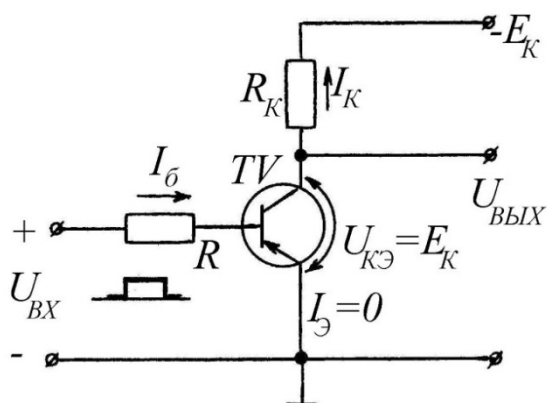


Рис.14.8.1

График полученной зависимости представляет собой прямую линию, которая называется **линией нагрузки** по постоянному току или нагрузочной прямой. На семействе выходных характеристик (рис.14.8.2) линия нагрузки может быть построена по двум точкам: точки  $N$  при  $I_K = 0$ ,  $U_{KЭ} = E_K$  и точки  $M$  при  $U_{KЭ} = 0$ ,  $I_K = E_K / R_K$ . Линия нагрузки  $MN$  по постоянному току определяет зависимость тока коллектора от изменяющихся тока базы и напряжения на коллекторе при заданных значениях  $E_K$  и  $R_K$ .

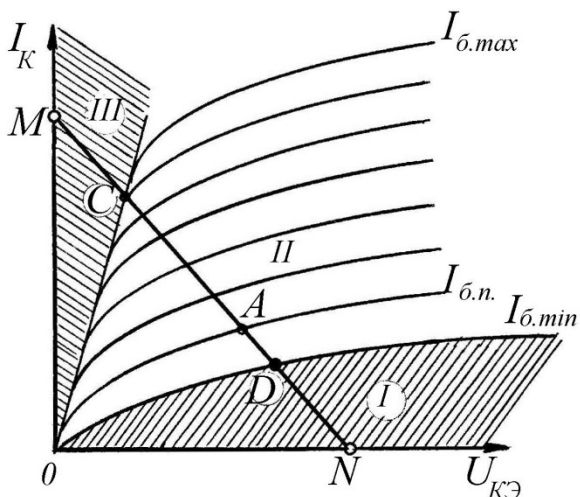


Рис.14.8.2

Для усиления транзистором входного сигнала без внесения искажений требуется, чтобы рабочая точка  $A$  не выходила за пределы участка  $CD$  линии нагрузки  $MN$ , где ток  $I_K$  прямо пропорционален току базы  $I_б$ . Таким образом, нормальный активный режим работы транзистора реализуется на участке  $CD$  линии нагрузки. В этом режиме эмиттерный  $p-n$  переход транзистора смещён в прямом, а коллекторный – в обратном направлении.

Активный режим работы транзистора используется в схемах усиления электрических сигналов.

При работе транзисторов в переключающих устройствах амплитуда выходного сигнала может быть настолько большой, что рабочая точка  $A$  выходит за пределы линейного участка  $CD$  (рис.14.8.2). При этом транзистор будет переходить в режим насыщения или в режим отсечки.

**2. Режим отсечки** реализуется при подаче в цепь базы управляющего сигнала положительной полярности. В этом режиме транзистор

полностью закрыт. Электрическое сопротивление закрытого транзистора составляет от сотен  $k\Omega$  до нескольких  $M\Omega$ . В цепи базы и коллектора течёт обратный ток  $I_{кб0}$ , рабочая точка находится в области  $I$  (рис.14.8.2), оба  $p$ - $n$  перехода транзистора закрыты.

**3. Режим насыщения** имеет место при включении эмиттерного и коллекторного  $p$ - $n$  переходов транзистора в прямом направлении. В режиме насыщения транзистор полностью открыт, и ток коллектора определяется выражением  $I_K = E_K / R_K$ . Падение напряжения между коллектором и эмиттером составляет десятые доли вольта, а сопротивление постоянному току не превышает нескольких  $\Omega$ . В режиме насыщения рабочая точка находится в области  $III$  характеристики транзистора (рис.14.8.2).

**4. Инверсный режим** соответствует обратному включению транзистора, когда эмиттерный переход закрыт, а коллекторный открыт. Инверсный режим называют также микрорежимом, поскольку транзистор в этом режиме может удовлетворительно работать при малых питающих напряжениях и очень малых сигналах.

#### 14.9. Полевые транзисторы

**Полевым транзистором** называется полупроводниковый прибор, усилительные свойства которого обусловлены потоком основных носителей, протекающим через проводящий канал, управляемым электрическим полем.

Полевые транзисторы предназначены для усиления мощности и преобразования электрических колебаний. В полевых транзисторах выходной ток создаётся носителями только одного типа – электронами или дырками. Поэтому полевые транзисторы называют также **униполярными** транзисторами. **Каналом** называется центральная область транзистора. Электрод, из которого в канал переходят основные носители заряда, называется **исток**ом, а электрод, через который основные носители заряда уходят из канала, называется **сток**ом.

Классификация и условные графические обозначения полевых транзисторов приведены на рис.14.9.1. Структурная схема и схема включения полевого транзистора с  $n$  – каналом и управляющим  $p$ - $n$  переходом показаны соответственно на рис.14.9.2.а и рис.14.9.2.б. Здесь  $1$  и  $2$  – области канала и затвора соответственно;  $3$ ,  $4$  и  $5$  – выводы истока, стока и затвора соответственно.

**Полевым транзистором с управляющим  $p$ - $n$  переходом** называется полевой транзистор, у которого затвор электрически отделён от канала закрытым  $p$ - $n$  переходом.

У транзистора с каналом  $n$ -типа основными носителями заряда являются электроны, которые движутся вдоль канала от истока с низким потенциалом к стокам с более высоким потенциалом, образуя ток стока  $I_C$ . Между затвором и истоком приложено напряжение, запирающее  $p$ - $n$  пере-

ход, образованный областью канала  $n$ -типа и областью затвора  $p$ -типа. Таким образом, для полевого транзистора с каналом  $n$ -типа приложены напряжения следующих полярностей:  $U_{си} > 0$ ,  $U_{зи} \leq 0$ .

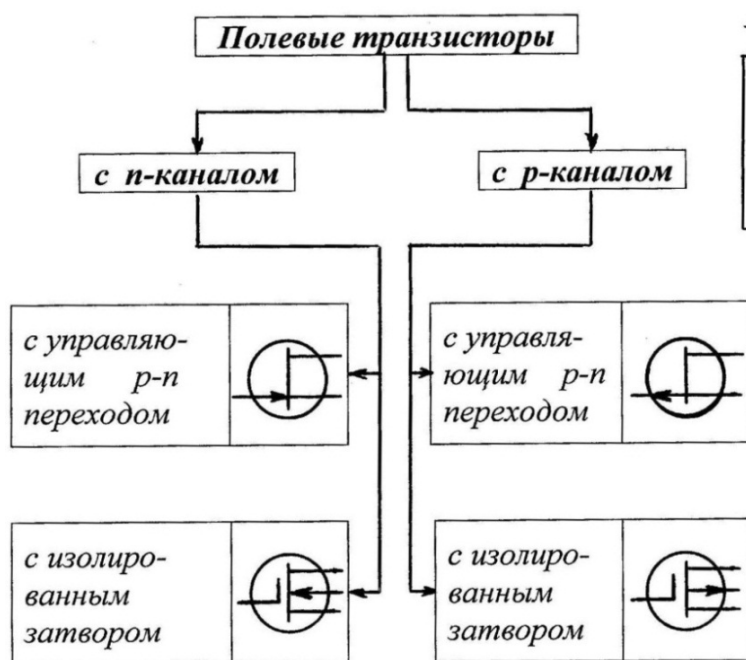


Рис.14.9.1

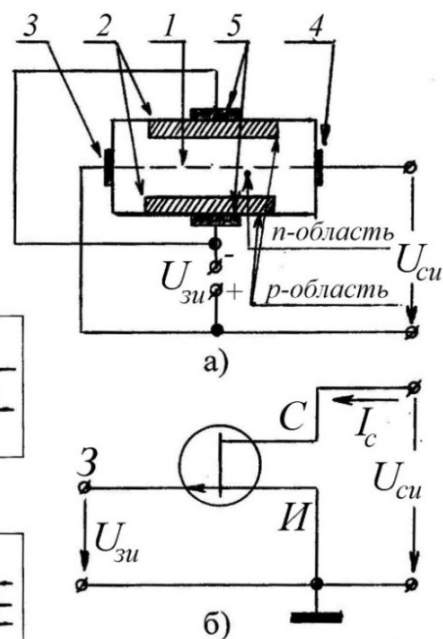


Рис.14.9.2

В полевом транзисторе с каналом  $p$ -типа основными носителями заряда являются дырки, которые движутся в направлении понижения потенциала, поэтому полярности приложенных напряжений должны быть иными:  $U_{си} < 0$ ,  $U_{зи} \geq 0$ .

В отличие от биполярных транзисторов, которые имеют малое входное сопротивление, у полевых транзисторов нет указанного недостатка.

Основой конструкции полевого транзистора является полупроводниковая пластина, которая имеет примесную проводимость  $p$ -типа или  $n$ -типа (рис.14.9.3). На её торцы наложены металлические электроды  $a$  и  $b$ , при помощи которых полупроводниковый кристалл соединяется с электрической цепью. Если полупроводник имеет электронную проводимость, то при указанной на рис.14.9.3.а полярности подключения источника напряжения к электродам  $a$  и  $b$  основные носители заряда — электроны будут двигаться из истока ( $И$ ) через канал ( $К$ ) к стоку ( $С$ ).

В случае дырочной проводимости канала следует изменить полярность подключения источника к зажимам  $a$  и  $b$  (рис.14.9.3.б). В этом случае от истока ( $И$ ) через канал ( $К$ ) к стоку ( $С$ ) движутся дырки, являющиеся основными носителями заряда в полупроводнике  $p$ -типа.

Управление силой тока в цепи стока осуществляется при помощи затвора (3). Роль затвора играет примыкающий к наружным граням канала слой полупроводника, тип проводимости которого противоположен типу проводимости канала. То есть если канал изготовлен из полупроводника  $n$ -типа, то затвор имеет дырочную проводимость (полупроводник  $p$ -типа),

если канал изготовлен из полупроводника  $p$ -типа, то затвор выполнен из электронного полупроводника ( $n$ -типа).

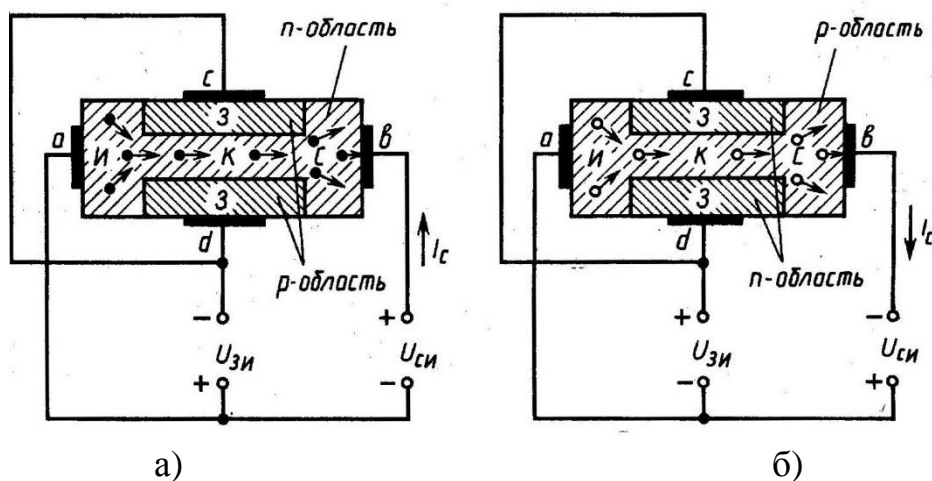


Рис.14.9.3

На границе затвора и канала образуется  $p$ - $n$  переход. При обратном смещении  $p$ - $n$  перехода канал – затвор в области  $p$ - $n$  перехода образуется запирающий слой с низкой концентрацией основных носителей заряда (рис.14.9.4). Поэтому удельное сопротивление запирающего слоя очень велико.

Затвор соединён с внешней электрической цепью посредством металлических электродов  $c$  и  $d$  (рис.14.9.3.а, б). С помощью затвора осуществляется управление силой электрического тока в цепи стока. При подаче на  $p$ - $n$  переход канал – затвор обратного напряжения возникает запирающий слой (рис.14.9.4). Повышение обратного напряжения на  $p$ - $n$  переходе канал – затвор приводит к увеличению толщины запирающего слоя. Это приводит к уменьшению ширины проводящего слоя канала (рис.14.9.4) и увеличению его электрического сопротивления. Сила тока в цепи стока уменьшается. Для того чтобы изменение толщины запирающего  $p$ - $n$  перехода канал – затвор эффективно влияло на силу тока в цепи стока, необходимо, чтобы ширина канала была соизмерима с толщиной запирающего слоя. В полевых транзисторах ширина канала имеет порядок  $10^{-6}$  мкм. На рис.14.9.4 показано изменение ширины канала в зависимости от потенциала затвора относительно истока ( $U''_{зи} > U'_{зи} > U'_{зи}$ ).

Если канал изготовлен из полупроводника  $n$ -типа, потенциал затвора относительно истока должен быть отрицательным (рис.14.9.3.а). Чем ниже потенциал затвора, тем меньше сила тока в цепи стока. При дырочной проводимости канала потенциал затвора относительно истока должен быть положительным (рис.14.9.3.б). В этом случае сила тока в цепи стока тем меньше, чем выше потенциал затвора относительно истока.

Поскольку полярность напряжения  $U_{зи}$  между затвором и истоком соответствует запиранию  $p$ - $n$  перехода, то сила тока во входной цепи тран-

зистора очень мала (составляет порядка  $10^{-8} \div 10^{-9} \text{ A}$ ), поэтому входное сопротивление полевого транзистора очень велико и составляет  $10^5 \div 10^6 \text{ Ом}$ ).

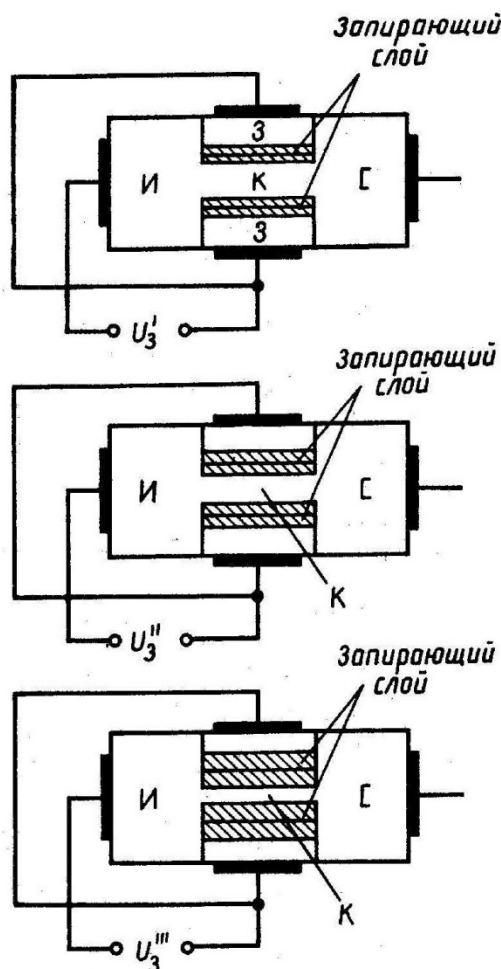


Рис.14.9.4

В отличие от биполярных транзисторов, ток в цепи коллектора которых управляется током эмиттерного перехода, ток в цепи стока полевых транзисторов управляется напряжением между затвором и истоком, то есть электрическим полем в  $p-n$  переходе. Поэтому принцип действия полевых транзисторов подобен действию вакуумных триодов, сила тока в анодной цепи которых управляется потенциалом сетки относительно катода. Поэтому рассмотренные транзисторы получили название **полевых** транзисторов.

Основными параметрами полевых транзисторов являются:

1) **крутизна переходной характеристики:**

$$S = \left. \frac{\partial I_C}{\partial U_{ЗИ}} \right|_{U_{СИ}=\text{const}} \approx \left. \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{ЗИ}} \right|_{U_{СИ}=\text{const}},$$

характеризующая усилительные свойства полевого транзистора. Современные полевые транзисторы могут иметь крутизну от 0,15 мА/В до 10,5 мА/В;

2) **дифференциальное сопротивление:**

$$R_i = \left. \frac{\partial U_{СИ}}{\partial I_C} \right|_{U_{ЗИ}=\text{const}} \approx \left. \frac{\Delta U_{СИ}}{\Delta I_C} \right|_{U_{ЗИ}=\text{const}},$$

у полевых транзисторов имеет большое значение и достигает величины  $10^6 \text{ Ом}$ ;

3) **статический коэффициент усиления** по напряжению описывается формулой:

$$\mu = - \left. \frac{\partial U_{СИ}}{\partial U_{ЗИ}} \right|_{I_C=\text{const}} \approx \left. \frac{\Delta U_{СИ}}{\Delta U_{ЗИ}} \right|_{I_C=\text{const}}.$$

Для полевых транзисторов с управляющим  $p-n$  переходом коэффициент усиления по напряжению достигает значения нескольких сотен.

Рассмотренные параметры связаны соотношением  $\mu = S \cdot R_i$  и могут быть получены графоаналитически с помощью семейства выходных характеристик  $I_C = f(U_{СИ})$ , показанных на рис.14.9.5. Предельно допустимыми параметрами полевых транзисторов являются: максимально допустимые напряжения  $U_{СИ \text{ max}}$  и  $U_{ЗИ \text{ max}}$ , максимально допустимая мощность стока

$P_{ЗИ\max}$ , максимально допустимый ток стока  $I_{C\max}$ .  $P_{ЗИ\max}$  и максимально допустимый ток стока  $I_{C\max}$ .

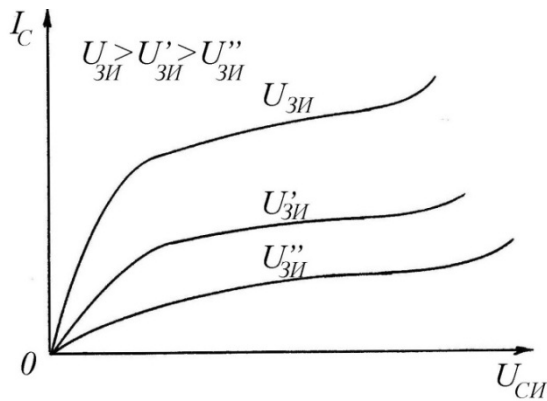


Рис.14.9.5

**Межэлектродные ёмкости** полевых транзисторов между затвором и стоком  $C_{ЗС}$ , а также между затвором и истоком  $C_{ЗИ}$  обычно не превышают  $1 \div 20$  пФ.

Полевые транзисторы с коротким каналом ( $1 \div 3$  мкм) являются высокочастотными приборами и могут работать на частотах до 100 МГц.

## 14.10. Тиристоры

**Тиристором** называется полупроводниковый прибор с тремя или более  $p-n$  переходами, вольтамперная характеристика которого имеет участок с отрицательным дифференциальным сопротивлением и который является переключающим прибором. Термин «*тиристор*» происходит от греческого слова «*thyra*» (*тира*), означающего «*дверь*» или «*вход*». Классификация и условные графические обозначения тиристоров приведены на рис.14.10.1.

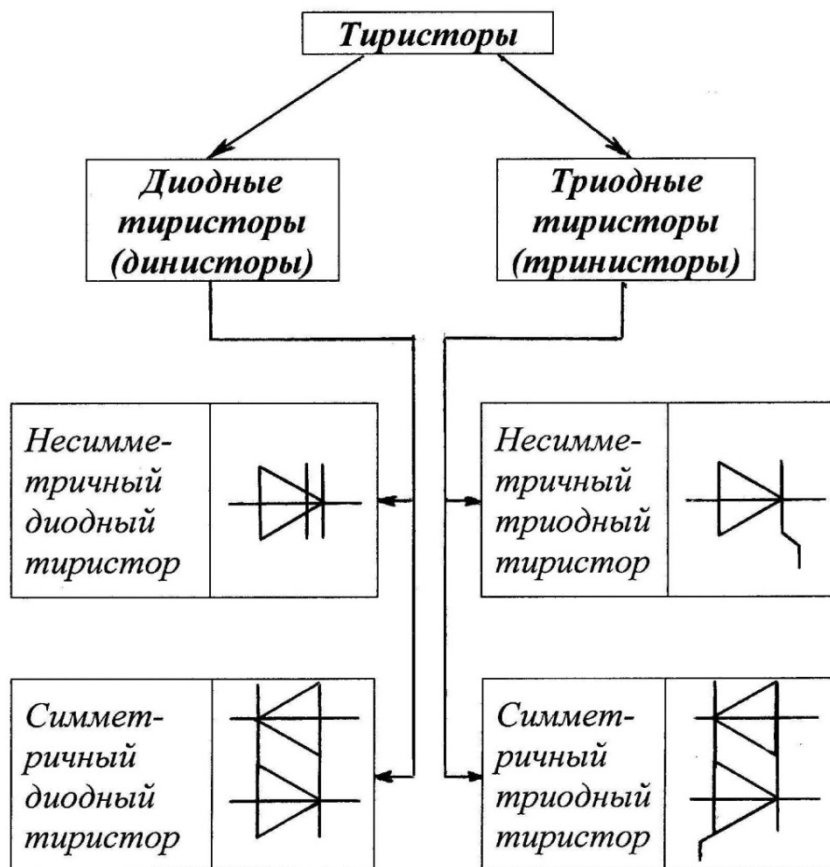


Рис.14.10.1

Тиристор работает как управляемый электронный ключ, поэтому он имеет два устойчивых состояния: открытое с высокой проводимостью и закрытое с низкой проводимостью. В зависимости от способа управления различают диодные и триодные тиристоры. Диодные тиристоры – **динисторы** имеют два электрода: анод и катод и переводятся в открытое состояние повышением приложенного напряжения до значений, превышающих критическое напряжение. Выключают динисторы изменением полярности приложенного напряжения.

Триодные тиристоры – **тринисторы** имеют три электрода: анод (А), соединённый с областью  $p_1$ , катод (К), соединённый с областью  $n_2$  и управляющий электрод (УЭ), соединённый с областью  $p_2$  структуры (рис.14.10.2.а, б).

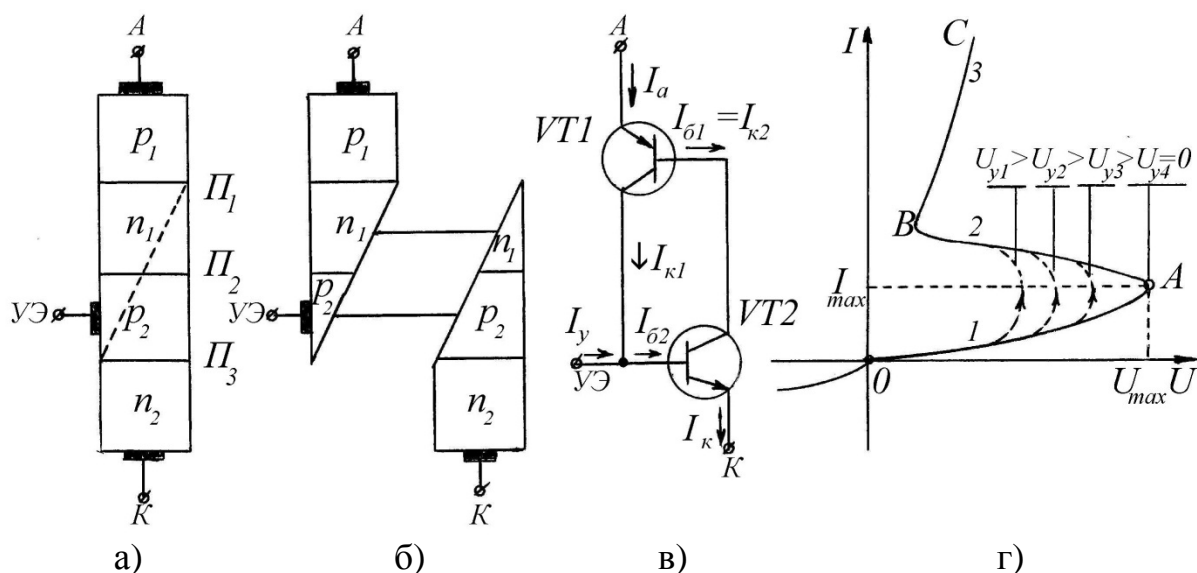


Рис.14.10.2

Управляющий электрод служит для перевода тиристора из закрытого состояния в открытое состояние при помощи управляющего сигнала. Тиристор проводит ток лишь при условии, что его анод положителен относительно катода. Выключение тиристора происходит при снижении его анодного тока до величин, меньших некоторого значения, называемого током управления ( $I_y$ ) (рис.14.10.2.г), или при изменении полярности приложенного напряжения, когда катод положителен относительно анода.

Для анализа процессов в тиристорных структурах их удобно представлять в виде комбинации двух или более транзисторов, между которыми существует положительная обратная связь (рис.14.10.2.в). На рис.14.10.2.б изображена структура тиристора в виде двух транзисторных

секций:  $n-p-n$  и  $p-n-p$ , полученных из  $p-n-p-n$  структуры, которая условно разрезана по пунктирной линии (рис.14.10.2.а).

Эквивалентная схема тиристора приведена на рис.14.10.2.в. Положительный управляющий ток  $I_y$ , поданный в базу  $p$ -типа транзистора  $VT2$ , приводит к увеличению базового тока  $I_{б2}$   $n-p-n$  транзистора. Увеличение базового тока  $I_{б2}$  переводит транзистор  $VT2$  в открытое состояние, что вызывает увеличение тока  $I_{к2}=I_{б1}$  (рис.14.10.2.в). Это приводит к открыванию транзистора  $VT1$ , что обуславливает увеличение коллекторного тока  $I_{к1}$  и дальнейшее увеличение тока базы  $I_{б2}$ . Этот процесс имеет лавинный характер и завершается переходом транзисторов в режим насыщения.

Режимы работы тиристорov хорошо иллюстрируются их вольт-амперными характеристиками (рис.14.10.2.г), которые условно можно разделить на три участка. На участке 1 к тиристорy, находящемуся в закрытом состоянии, приложено напряжение, переводящее тиристор в открытое состояние. Напряжение ( $U_{max}$ ) и ток ( $I_{max}$ ), соответствующие точке А в отсутствие тока управления ( $I_y=0$ ), называются соответственно напряжением и током включения тиристора. Участок 2 ( $AB$ ) вольт-амперной характеристики соответствует лавинообразному процессу переключения тиристора в состояние с высокой проводимостью. На этом участке возрастание тока через тиристор сопровождается уменьшением напряжения на тиристоре. Поэтому на участке  $AB$  тиристор характеризуется отрицательным дифференциальным сопротивлением. На рабочем участке 3 тиристор характеризуется высокой проводимостью. Поэтому при работе тиристора в режиме, которому соответствует участок 3, через тиристор течёт большой ток.

При запирающем включении тиристора форма вольт-амперной характеристики подобна обратной ветви вольтамперной характеристики выпрямительного диода.

Тиристоры, вольт-амперные характеристики которых в первом и третьем квадрантах одинаковы, называются **семисторами**.

В современных тиристорах максимальные токи достигают значений 2000 А, напряжение переключения составляет 4000 В.

Тиристоры как управляемые переключатели, обладающие выпрямительными свойствами, широко применяются в управляемых выпрямителях, инверторах и коммутационной аппаратуре.

## 14.11. Плёночные и гибридные интегральные схемы

Быстрое развитие радиоэлектроники, усложнение радиоэлектронной аппаратуры, повышение требований к ней привели к усложнению элек-

тронных устройств и необходимости использования большого числа компактно расположенных элементов для изготовления аппаратуры. Это привело к созданию нового быстро развивающегося научно-технического направления – микроэлектроники.

**Микроэлектроника** – это современное направление электроники, включающее конструирование, изготовление и эксплуатацию электронных узлов, блоков и устройств с высокой степенью миниатюризации.

Основу микроэлектроники составляет *интегральный принцип* изготовления электронных компонентов, при котором каждый компонент представляет собой не отдельно взятый транзистор, диод, резистор или конденсатор, а их неразъёмное схемное соединение. Поэтому компоненты микроэлектроники называют **интегральными микросхемами** или просто **микросхемами**.

**Интегральная микросхема** – это микроэлектронное изделие, выполняющее определённую функцию преобразования, обработки сигнала или накопления информации и имеющее высокую степень упаковки элементов. Интегральная микросхема выполняет законченную, как правило, сложную функцию.

**Элементом** интегральной микросхемы называют её часть, которая выполняет функцию электронного элемента: диода, транзистора, резистора, конденсатора и конструктивно неотделима от интегральной микросхемы.

**Плёночные интегральные микросхемы** представляют собой изолирующую подложку, на поверхности которой все элементы и соединения сформированы в виде послойно нанесённых плёнок. Подложка представляет собой диэлектрическую пластику (например, из стекла или керамики) толщиной  $0,5 \div 1,0$  мм, тщательно отшлифованную и отполированную. Пассивные элементы электрических цепей, то есть резисторы, конденсаторы, катушки и соединения между элементами выполняют в виде плёнок, нанесённых на подложку.

На рис.14.11.1 показана структурная схема плёночного резистора. При изготовлении плёночных резисторов на подложку 3 наносят резистивные плёнки 1. На концах резистивной плёнки делают выводы 2 в виде металлических плёнок, которые одновременно выполняют функции проводов, соединяющих резистор с другими элементами.

Одна из обкладок плёночного конденсатора наносится на подложку (рис.14.11.2). На неё сверху наносится диэлектрическая плёнка, а сверху располагается вторая обкладка. В качестве диэлектрика обычно используют оксиды кремния, алюминия или титана. Удельная ёмкость плёночных

конденсаторов составляет от десятков до тысяч пикофард на один квадратный миллиметр.

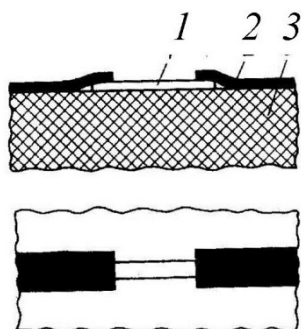


Рис.14.11.1

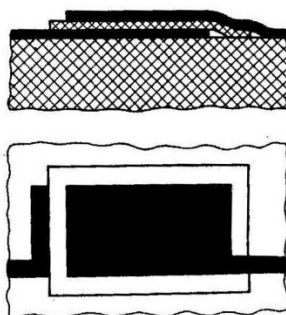


Рис.14.11.2

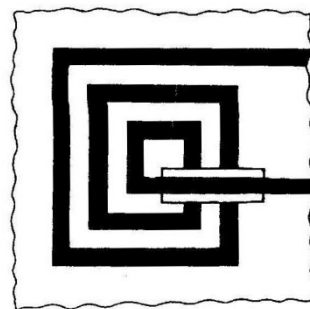
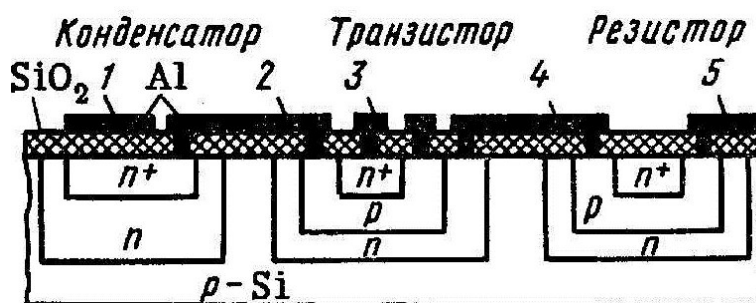


Рис.14.11.3

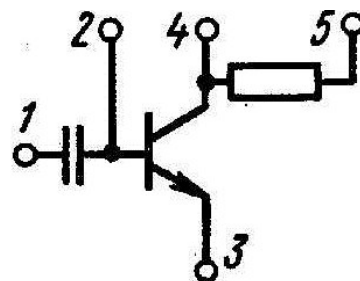
Плёночные катушки делают в виде плоских спиралей, как правило, прямоугольной формы (рис.14.11.3). Ширина проводящих полосок и просветов между ними составляет несколько десятков микрон. Удельная индуктивность такой катушки составляет  $10 \div 20 \text{ нГн/мм}^2$ .

**Полупроводниковая интегральная микросхема** представляет собой полупроводник, в поверхностном слое и объёме которого сформированы пассивные и активные элементы. В качестве полупроводника, как правило, используют кремний, который является несущей частью конструкции и называется подложкой.

На рис.14.11.4.а показана структура полупроводниковой интегральной микросхемы с омическими контактами 1÷5. На рис.14.11.4.б показана её эквивалентная схема. Все элементы схемы изготовлены в процессе общих технологических операций. Полупроводниковые интегральные микросхемы изготавливают групповым методом, при котором одновременно создаётся большое число микросхем. На одной пластинке диаметром 76 мм размещают до 5000 микросхем, каждая из которых может содержать десятки тысяч элементов.



а)



б)

Рис.14.11.4

**Гибридными интегральными микросхемами** называют микросхемы, представляющие собой комбинации плёночных микросхем, навесных дискретных (активных) компонентов и полупроводниковых интегральных микросхем, расположенных на диэлектрической подложке плёночных интегральных микросхем.

На рис.14.11.5.а показан пример структуры гибридной микросхемы, а на рис.14.11.5.б – её эквивалентная схема. Здесь 1÷6 – омические контакты, навесным дискретным элементом является транзистор.

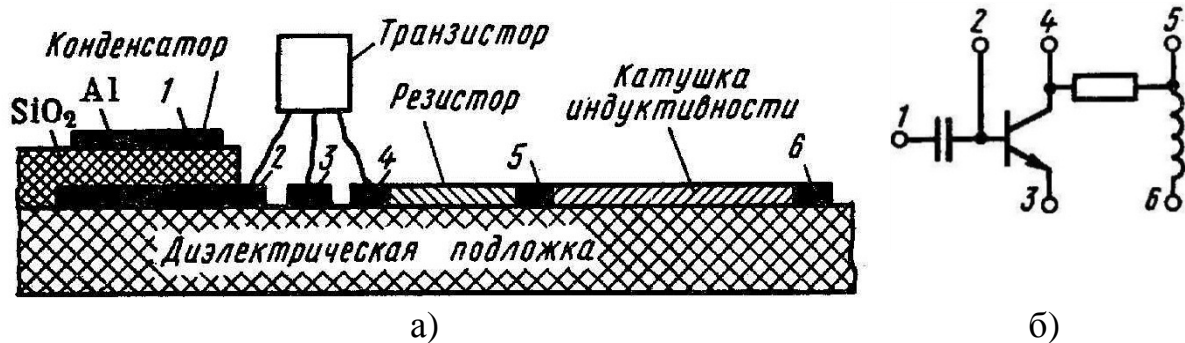


Рис.14.11.5

На рис.14.11.6.а показана структура гибридной интегральной схемы, состоящей из конденсатора, резистора и навесного транзистора  $VT$ , а на рис.14.11.6.б – её эквивалентная электрическая схема. Проводники, соединяющие транзистор  $VT$  с другими элементами схемы, присоединяются к соответствующим точкам схемы методом термокомпрессии: провод при высокой температуре прижимается под большим давлением.

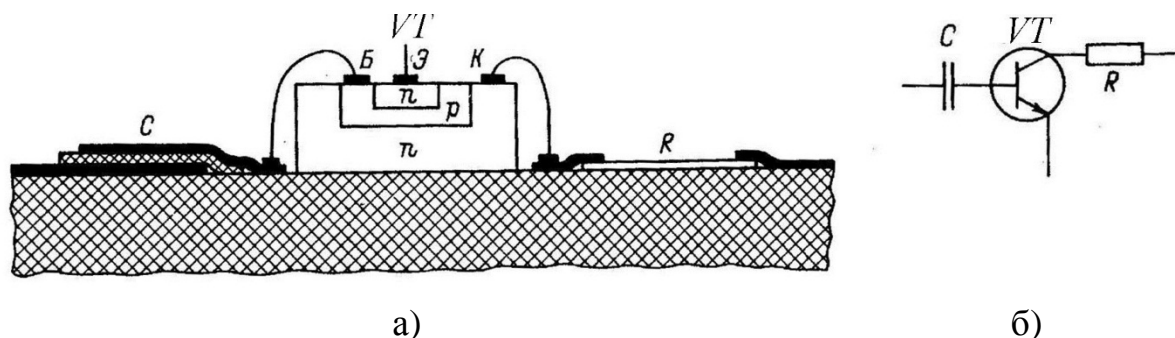


Рис.14.11.6

**Совмещёнными** называют интегральные микросхемы, у которых активные элементы выполнены так же, как и у полупроводниковых интегральных микросхем, а пассивные – как у плёночных интегральных микро-

схем. Пассивные элементы изготавливают на предварительно изолированной части той же подложки, что и активные элементы.

Одним из основных параметров интегральных микросхем является **плотность упаковки элементов** - количество элементов, расположенных на единице площади кристалла. Плотность упаковки элементов современных интегральных микросхем превышает тысячи элементов на  $1 \text{ мм}^2$ .

Функциональную сложность интегральных микросхем характеризуют степенью интеграции.

**Степень интеграции** интегральной микросхемы – это число содержащихся в ней элементов. Для количественной оценки степени интеграции используют **коэффициент**  $k = \lg N$ , где  $N$  – число элементов схемы (табл. 14.11.1).

Табл.14.11.1

Степень интеграции	Значение коэффициента $k$	Число элементов $N$	Название интегральной микросхемы
1	$k < 1$	до 10 включительно	Простая
2	$1 < k \leq 2$	$11 \div 100$	Средняя
3	$2 < k \leq 4$	$101 \div 10000$	Большая (БИС)
$4 \div 5$	$k \geq 4$	более 10000	Сверхбольшая (СБИС)

Примером простых интегральных схем являются логические элементы.

Средние интегральные микросхемы – это сумматоры, счётчики, оперативные запоминающие устройства.

Большие интегральные схемы – это арифметико-логические и управляющие устройства.

В конце XX века началась разработка интегральных микросхем  $4 \div 5$  степени интеграции с числом элементов  $N = 10^4 \div 10^6$  элементов и минимальными размерами элемента  $0,1 \div 1,0 \text{ мкм}$  – СБИС.

Функциональные свойства БИС программируют при их проектировании. На основе таких программно-управляемых БИС выполняют микропроцессоры, схемы оперативной и постоянной памяти, составляющие основу электронных вычислительных систем.

### 15.1. Классификация и основные параметры выпрямителей

**Выпрямителем** называется электротехническое устройство, предназначенное для преобразования переменного напряжения в постоянное. Наиболее распространенными источниками вторичного электропитания являются выпрямители, преобразующие энергию сети переменного тока частотой 50 Гц в постоянный ток. Схемы выпрямителей классифицируют по ряду признаков.

1. В зависимости от числа фаз питающего источника переменного напряжения различают однофазные и трехфазные выпрямители.

2. В зависимости от характера прохождения тока по вторичной обмотке трансформатора выпрямители делят на одноктактные и двухтактные. К *одноктактным* относят такие схемы, в которых через вторичную обмотку трансформатора ток течет только в одном направлении. В таких схемах (за исключением простейшего однополупериодного выпрямителя) обязательно выводится нейтральная точка трансформатора. К *двухтактным* относят такие выпрямители, у которых ток во вторичной обмотке трансформатора проходит в двух направлениях. Схемы двухтактных выпрямителей являются мостовыми.

3. В зависимости от формы выпрямленного напряжения выпрямители подразделяют на одно- и двухполупериодные.

4. В зависимости от мощности, выделяемой в цепи нагрузки, различают выпрямители малой мощности (до 100 Вт), средней мощности (100...1000 Вт) и большой мощности (более 1000 Вт).

5. В зависимости от частоты питающего напряжения различают выпрямители промышленной частоты (50 Гц или 60 Гц), повышенной частоты (до 1 кГц) и высокой частоты (более 1 кГц).

6. По управляемости различают управляемые и неуправляемые выпрямители.

Структурная схема однофазного неуправляемого выпрямителя (рис.15.1.1) состоит из трансформатора (*TV*), вентиля или группы вентилях (*B*), сглаживающего фильтра (*СФ*) и стабилизатора напряжения (*СТ*).

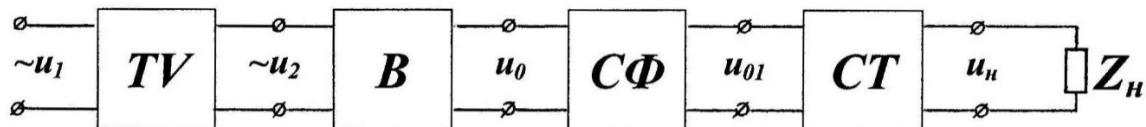


Рис.15.1.1

На вход выпрямителя подается переменное напряжение  $\sim u_1$ , которое с помощью трансформатора *TV* изменяется до требуемого значения  $\sim u_2$ . Кроме того, трансформатор осуществляет электрическую развязку источника выпрямляемого напряжения и нагрузочного устройства, что позволя-

ет получать с помощью нескольких вторичных обмоток различные значения напряжения  $\sim u_2$ , гальванически не связанные друг с другом. Подаваемое с трансформатора напряжение  $\sim u_2$  на клапан или группу клапанов  $B$  преобразуется в пульсирующее напряжение  $u_0$ . Количество клапанов зависит от схемы выпрямителя.

В выпрямленном напряжении  $u_0$  помимо постоянной составляющей присутствует переменная составляющая, которая с помощью сглаживающего фильтра  $CF$  уменьшается до требуемого уровня, так что напряжение  $u_{01}$  на выходе фильтра имеет очень малые пульсации. Установленный после сглаживающего фильтра стабилизатор постоянного напряжения  $CT$  поддерживает неизменным напряжение  $u_n$  на нагрузочном устройстве при изменении значений выпрямленного напряжения или сопротивления  $Z_n$  нагрузки.

Клапаны и трансформатор выпрямителя выбирают исходя из его основных параметров, к которым относятся:

а) постоянная составляющая выпрямленного напряжения ( $U_0$ ) и тока ( $I_0$ );

б) амплитуда основной гармоники выпрямленного тока ( $I_{1max}$ ) и напряжения ( $U_{1max}$ );

в) коэффициент пульсаций ( $q$ ) выпрямленного тока, представляющий собой отношение амплитуды основной гармоники выпрямленного тока или напряжения к постоянной составляющей соответственно тока или напряжения:

$$q = \frac{I_{1max}}{I_0} \quad \text{или} \quad q = \frac{U_{1max}}{U_0}; \quad (15.1.1)$$

г) наибольшее обратное напряжение на клапане  $U_{обр.max}$ ;

д) действующее значение тока и напряжения первичной и вторичной обмотки трансформатора:  $I_1$  и  $U_1$ ;  $I_2$  и  $U_2$ ;

е) коэффициент полезного действия выпрямителя.

Анализ работы выпрямителей удобно производить в предположении о том, что трансформатор и клапаны *идеальны*. Это означает, что:

1) индуктивные сопротивления рассеяния и активные сопротивления обмоток трансформатора, а также сопротивления клапанов в прямом направлении равны нулю;

2) обратное сопротивление клапана равно бесконечности, следовательно, ток в цепи вторичной обмотки трансформатора при обратном включении клапана равен нулю;

3) сердечник трансформатора идеален, то есть ток намагничивания равен нулю.

Принятые допущения позволяют читать, что при синусоидальном токе  $i_1$  и напряжение  $u_1$  на первичной обмотке трансформатора и ток  $i_2$  и напряжение  $u_2$  на вторичной обмотке трансформатора синусоидальны.

## 15.2. Однофазный однополупериодный выпрямитель

Простейшим источником вторичного электропитания является однофазный однополупериодный выпрямитель. Схема такого выпрямителя (рис.15.2.1) содержит трансформатор  $TV$ , ко вторичной обмотке которого последовательно подключены выпрямительный диод  $VD$  и нагрузочный резистор  $R_H$ .

Процесс выпрямления переменного тока показан на рис.15.2.2 в предположении, что диод и трансформатор являются идеальными. Замена реальных диода и трансформатора идеальными не вызывает значительных погрешностей при технических расчетах выпрямителей, но существенно упрощает

изучение процессов, происходящих в выпрямителе. В этом случае при подключении к первичной обмотке трансформатора переменного синусоидального напряжения  $u_1$  и во вторичной обмотке трансформатора будет наводиться синусоидальная ЭДС.

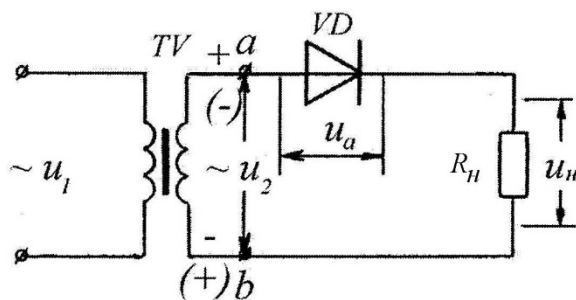


Рис.15.2.1

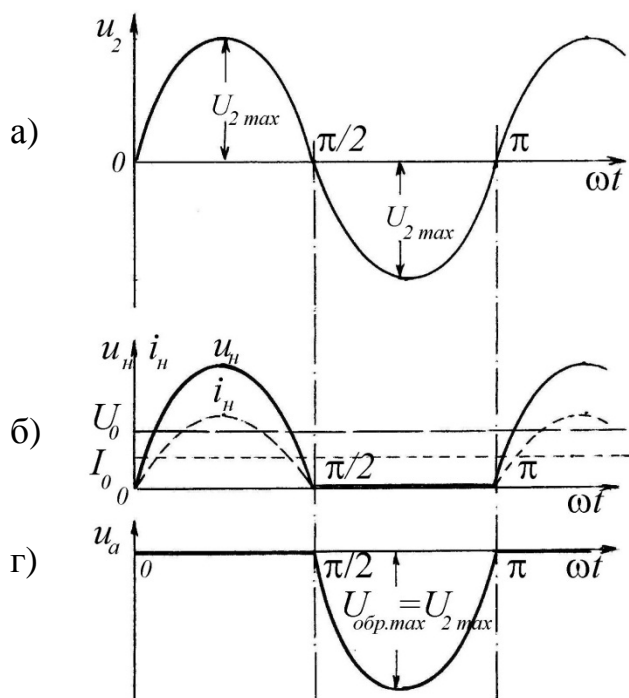


Рис.15.2.2

В течение первого полупериода ( $t=0 \div T/2$ ) диод  $VD$  открыт, так как потенциал точки  $a$  выше потенциала точки  $b$  и в цепи вторичной обмотки трансформатора течет ток  $I_H$ . В интервале времени  $T/2 \div T$  диод закрыт (знак потенциала точек  $a$  и  $b$  показан в скобках), ток в нагрузочном резисторе отсутствует, а к запертому диоду приложено обратное напряжение  $U_{обр.мах} = U_{2мах}$ . Максимальное значение тока, проходящего через вентиль, равно:

$$I_{мах} = \frac{U_{2мах}}{R_H} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_2}{R_H} \quad (15.2.1)$$

Полусинусоидальный ток, показанный на рис.15.2.2б, можно разложить в тригонометрический ряд:

$$i(\omega \cdot t) = \frac{I_{max}}{\pi} + \frac{I_{max}}{2} \cdot \sin \omega t - \frac{2 \cdot I_{max}}{3 \cdot \pi} \cdot \cos 2\omega t - \frac{2 \cdot I_{max}}{3 \cdot 5 \cdot \pi} \cdot \cos 4\omega t + \dots \quad (15.2.2)$$

Первое слагаемое этого ряда

$$I_0 = \frac{I_{max}}{\pi} \quad (15.2.3)$$

не зависит от частоты, называется постоянной составляющей выпрямленного тока и равно среднему значению выпрямленного тока.

Второе слагаемое этого ряда

$$i_1 = \frac{I_{max}}{2} \cdot \sin \omega t, \quad I_{1\ max} = \frac{I_{max}}{2} \quad (15.2.4)$$

называется основной гармоникой выпрямленного тока и имеет частоту питающей сети:  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ .

Остальные члены ряда называются высшими гармониками выпрямленного тока. Амплитуды высших гармоник значительно меньше амплитуды основной гармоники, поэтому при расчете режима работы однополупериодного выпрямителя высшими гармониками можно пренебречь. Подстановка формул (15.2.3) и (15.2.4) в выражение (15.1.1) позволяет рассчитать коэффициент пульсаций:

$$q = \frac{I_{1\ max}}{I_0} = \frac{\frac{I_{max}}{2}}{\frac{I_{max}}{\pi}} = \frac{\pi}{2} = 1,57. \quad (15.2.5)$$

Постоянная составляющая выпрямленного напряжения равна:

$$U_0 = I_0 \cdot R_H. \quad (15.2.6)$$

Подстановка выражений (15.2.1) и (15.2.3) в формулу (15.2.6) позволяет выразить постоянную составляющую выпрямленного напряжения через действующее значение напряжения вторичной обмотки трансформатора:

$$U_0 = \frac{I_{max}}{\pi} \cdot R_H = \frac{\sqrt{2} \cdot U_2}{R_H} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot R_H = \frac{\sqrt{2} \cdot U_2}{\pi} \approx 0,45 \cdot U_2. \quad (15.2.7)$$

Формула (15.2.7) может быть использована для расчета напряжения вторичной обмотки трансформатора по заданному напряжению  $U_0$ .

Габаритные размеры трансформатора определяются исходя из значения типовой мощности  $S_{mp} = 0,5 \cdot (I_1 \cdot U_1 + I_2 \cdot U_2) \approx (3,35 \div 3,5) \cdot I_H \cdot U_H \approx (3,35 \div 3,5) \cdot P_H$ , которая в  $3,35 \div 3,5$  раза превышает мощность нагрузки  $P_H$ , что свидетельствует о плохом использовании трансформатора в данной схеме. Плохое использование трансформатора в однополупериодной схеме обусловлено тем, что постоянная составляющая выпрямленного тока  $I_0$  вы-

зывает подмагничивание сердечника. Это приводит к уменьшению магнитной проницаемости магнитопровода, что, в свою очередь, снижает индуктивность обмоток трансформатора. В результате возрастает ток холостого хода трансформатора, что вызывает уменьшение КПД выпрямителя. Таким образом, к недостаткам однополупериодного выпрямителя следует отнести большие размеры трансформатора, низкую частоту основной гармоники, большой коэффициент пульсаций и малое значение постоянной составляющей выпрямленного сигнала. Единственным достоинством данной схемы является ее простота. В связи с перечисленными недостатками однополупериодная схема не нашла широкого применения для работы на активную нагрузку, а используется в основном для питания цепей малой мощности и высокого напряжения, например, электронно-лучевых трубок.

### 15.3. Однофазный двухполупериодный одноконтурный выпрямитель

Однофазный двухполупериодный одноконтурный выпрямитель (рис.15.3.1) можно рассматривать как сочетание двух однополупериодных выпрямителей, включенных на общий нагрузочный резистор  $R_H$ . Напряжения, подаваемые на диоды  $VD1$  и  $VD2$ , должны быть равны по величине и сдвинуты одно относительно другого по фазе на  $180^\circ$ . Для этого вторичная обмотка трансформатора должна иметь выведенную среднюю точку. Напряжения вторичной обмотки  $u_2'$  и  $u_2''$  получают между выведенной средней точкой вторичной обмотки и ее концами.

Графически процесс выпрямления показан на рис.15.3.2. В течение каждого из полупериодов напряжения  $U_{AB}$  работает либо верхняя, либо нижняя часть выпрямителя. Если потенциал точки  $A$  выше потенциала точки  $O$  (интервал времени  $0 \div T/2$ ), то диод  $VD1$  открыт, а диод  $VD2$  закрыт, так как при этом потенциал точки  $B$  ниже потенциала точки  $O$ .

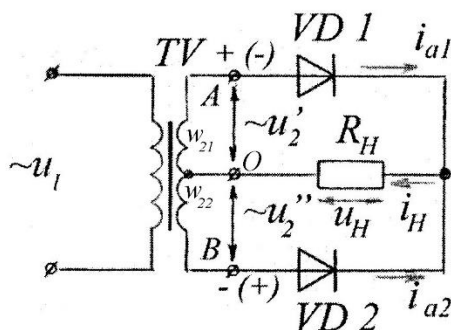


Рис.15.3.1

В этот промежуток времени через нагрузочный резистор течёт ток  $i_H$ . В течение следующего полупериода напряжения  $U_{ab}$  (интервал времени  $T/2 \div T$ ) потенциал точки  $B$  выше, а потенциал точки  $A$  ниже потенциала точки  $O$ , что соответствует полярности, обозначенной в скобках на рис.15.3.1. При этом диод  $VD2$  открыт, диод  $VD1$  закрыт, а направление тока  $i_H$  в нагрузочном резисторе сохраняется. В случае равенства напряжений  $U_1'$  и  $U_2''$  равны и эти токи. Сравнение рис.15.2.2 и рис.15.3.2 показывает, что при двухполупериодном выпрямлении постоянная составляющая выпрямленного напряжения вдвое больше, чем при однополупериодном, поэтому с учетом формулы (15.2.3) можно записать:

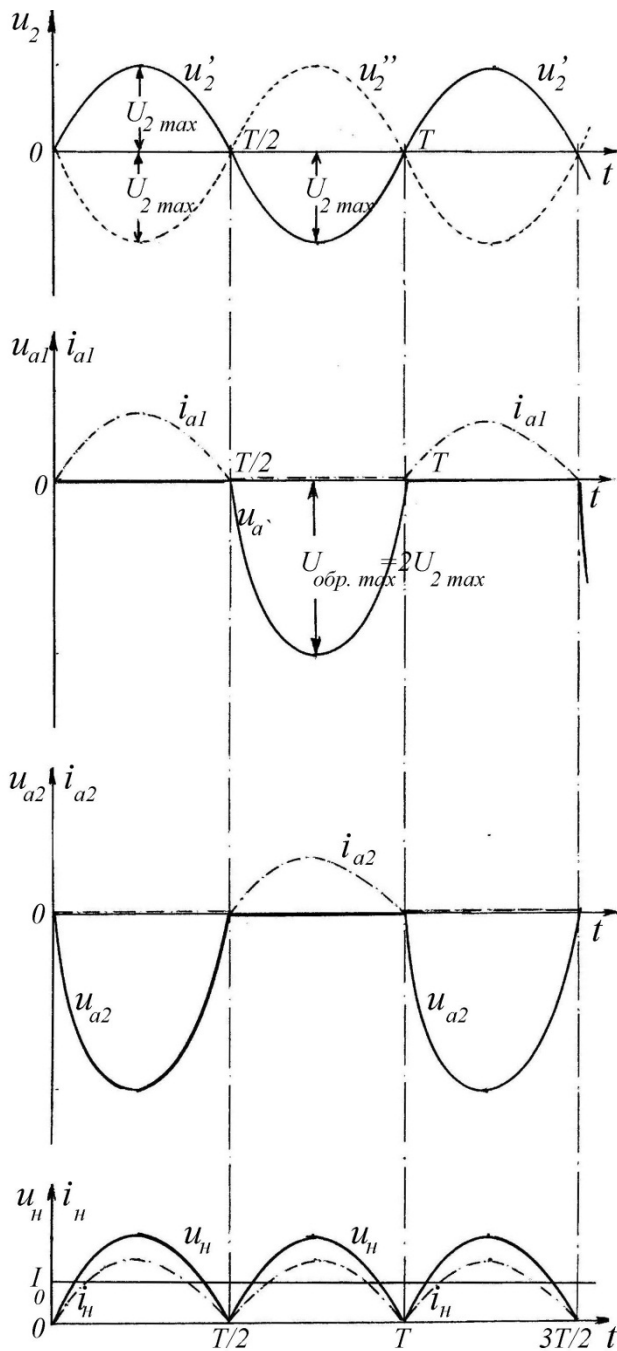


Рис.15.3.2

$$I_0 = \frac{2 \cdot I_{max}}{\pi}. \quad (15.3.1)$$

Следовательно, постоянная составляющая выпрямленного напряжения на выходе одно-тактного двухполупериодного выпрямителя определяется выражением:

$$U_0 = 2 \cdot I_0 \cdot R_n \approx \approx 0,45 \cdot U_2. \quad (15.3.2)$$

В рассматриваемой схеме максимальное обратное напряжение  $U_{обр. max}$  (рис.15.3.2), действующее на каждый вентиль, находящийся в закрытом состоянии, равно сумме амплитуд обеих половин вторичной обмотки:

$$\begin{aligned} U_{обр. max} &= 2 \cdot U_{2 max} = \\ &= 2 \cdot \frac{\pi \cdot U_0}{2} = \pi \cdot U_0. \end{aligned} \quad (15.3.3)$$

При вычислении коэффициента пульсаций двухполупериодный выпрямитель можно рассматривать как двухфазный, напряжения фаз которого сдвинуты между собой на  $180^\circ$ . Коэффициент пульсаций связан с числом фаз ( $m$ ) выпрямителя соотношением:

$$q = \frac{2}{m^2 - 1}. \quad (15.3.4)$$

Таким образом, для рассматриваемой схемы  $q=2/3=0,667$ . Этой формулой нельзя пользоваться при вычислении коэффициента пульсаций однополупериодного выпрямителя, так как при  $m=1$  знаменатель дроби в формуле (15.3.4) обращается в нуль. Частота пульсаций в многофазном выпрямителе в  $m$  раз больше частоты сети.

Поскольку токи во вторичных обмотках трансформатора протекают поочередно: в обмотке  $w_{21}$  — от конца к началу, а в обмотке  $w_{22}$  — от начала

к концу, то сердечник не подмагничивается и в первичной обмотке трансформатора течёт не искажённый синусоидальный ток, что приводит к снижению типовой мощности и лучшему использованию трансформатора. Достоинством данного выпрямителя является меньший коэффициент пульсаций, чем в однополупериодном выпрямителе.

К недостаткам схемы следует отнести: 1) необходимость вывода средней точки трансформатора; 2) использование двух диодов; 3) необходимость симметрирования половин обмоток трансформатора для обеспечения равенства амплитудных значений напряжения половин вторичной обмотки  $U_2'$  и  $U_2''$ ; 4) большое обратное напряжение на диодах.

Однофазный двухтактный выпрямитель не имеет перечисленных недостатков.

#### 15.4. Однофазный двухполупериодный двухтактный выпрямитель

Недостатком одноконтурных схем выпрямителей является нерациональное использование трансформаторов, во вторичных обмотках которых ток протекает не непрерывно, а только во время положительных полупериодов напряжения в половинах вторичных обмоток выпрямителей. В двухтактных схемах выпрямителей этот недостаток отсутствует: ток через вторичную обмотку трансформатора течёт поочередно в двух направлениях непрерывно.

Однофазный двухполупериодный двухтактный выпрямитель собран по мостовой схеме (рис.15.4.1). К одной из диагоналей моста присоединяется вторичная обмотка трансформатора, а к другой – нагрузочный резистор  $R_n$ . Каждая пара диодов ( $VD1$ - $VD3$  и  $VD2$ - $VD4$ ) работает поочередно. Диоды  $VD1$  и  $VD3$  открыты в течение первого полупериода напряжения  $u_2$  (интервал времени  $0 \div T/2$ ), когда потенциал точки  $A$  выше потенциала точки  $B$ . При этом в цепи течёт ток,

обозначенный на рис.15.4.1 сплошными стрелками, а диоды  $VD2$  и  $VD4$  закрыты. В течение следующего полупериода напряжения  $u_2$  (временной интервал  $T/2 \div T$ ) потенциал точки  $B$  выше потенциала точки  $A$ , поэтому диоды  $VD2$  и  $VD4$  открыты, а диоды  $VD1$  и  $VD3$  закрыты. В этом случае ток, обозначенный на рис.15.4.1 пунктирными стрелками,

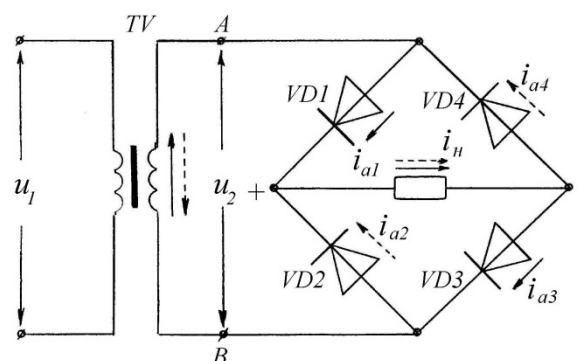


Рис.15.4.1

течёт через диоды  $VD2$  и  $VD4$ . В течение обоих полупериодов ток через нагрузочный резистор течёт в одном направлении. Во вторичной обмотке трансформатора направление тока меняется через временные интервалы, равные  $T/2$ , поэтому данная схема является двухтактной.

Сравнение рис.15.3.2 и рис.15.4.2 показывает, что в мостовой схеме напряжение и ток имеют такую же форму, как и в схеме с выводом нейтральной точки, поэтому значение постоянной составляющей выпрямленного тока в соответствии с выражением (15.3.1) равно

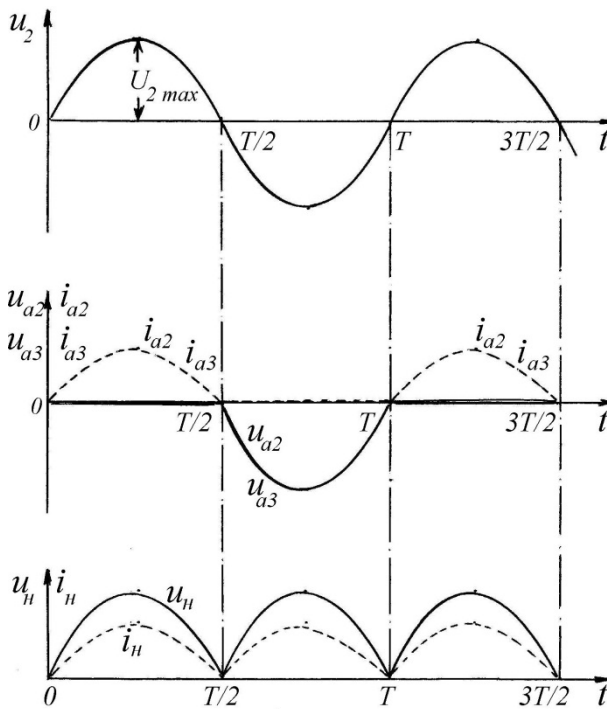


Рис.15.4.2

$$I_0 = \frac{2 \cdot I_{max}}{\pi},$$

постоянная составляющая выпрямленного напряжения:

$$U_0 = I_0 \cdot R_H = \frac{2 \cdot I_{max}}{\pi} \cdot R_H.$$

Особенностью мостовой схемы является отсутствие во вторичной обмотке трансформатора отвода от ее середины, поэтому для получения того же выпрямленного напряжения, что и в схеме с выводом нейтральной точки, в мостовой схеме требуется обмотка с числом витков вдвое меньшим. Это приводит к тому, что обратное напряжение, действующее на каждый вентиль, в два раза меньше, чем в

схеме с выводом нейтральной точки:

$$U_{обр.мах} = U_{2мах} = \frac{\pi}{2} \cdot U_0 \approx 1,57 \cdot U_0. \quad (15.4.1)$$

Если допустимое обратное напряжение одного диода ( $U_{обр}$ ) меньше, чем  $U_{обр.мах}$ , то в каждое плечо мостовой схемы следует последовательно включить такое число ( $n$ ) диодов, чтобы выполнялось условие

$$n = U_{обр.мах} / U_{обр}.$$

Частота пульсаций выпрямленного напряжения в мостовой схеме и в схеме с выводом нейтральной точки одинакова, поэтому равны и коэффициенты пульсаций обеих схем ( $q=0,667$ ).

Двухполупериодные выпрямители применяют для питания нагрузочных устройств малой и средней мощности, например для питания устройств автоматики.

### 15.5. Трёхфазный одноконтный выпрямитель

Трёхфазные схемы применяются для выпрямления сигналов большой и средней мощности. Существуют два основных типа трёхфазных вы-

прямителей: однотактные выпрямители, то есть с выводом нейтральной точки трансформатора, и двухтактные – собранные по мостовой схеме.

Первичные обмотки трехфазного трансформатора в однотактной схеме могут быть соединены как звездой, так и треугольником, а вторичные – только звездой, поскольку у треугольника нет нейтральной точки.

Нейтральная точка  $N$  трансформатора соединена с одним из зажимов нагрузки (1), а общая точка катодов – с другим зажимом (2) нагрузки (рис.15.5.1).

В трёхфазной однотактной схеме выпрямителя всегда работает тот диод, потенциал анода которого наиболее положителен (рис.15.5.2). В интервале времени  $t_1 \div t_2$  (рис.15.5.2) открыт диод  $VD1$  фазы «А»; в интервале времени  $t_1 \div t_2$  открыт диод фазы «В»; в интервале времени  $t_3 \div t_4$  открыт диод фазы «С». Таким образом, диоды открыты поочередно в течение трети периода каждый. Переключение вентилей происходит в моменты времени, соответствующие пересечению положительных половин синусоид напряжения. Токи  $i_{a1}$ ,  $i_{a2}$ ,  $i_{a3}$ , проходящие через три вентиля, суммируются в нагрузке  $R_H$ .

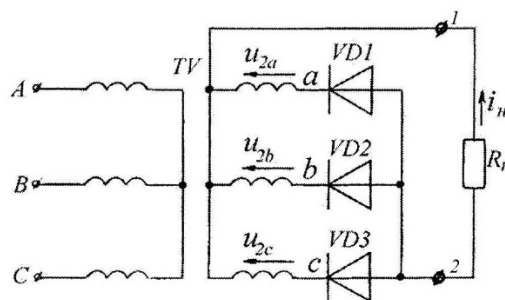


Рис.15.5.1

Значение постоянной составляющей выпрямленного напряжения в трехфазной однотактной схеме определяется выражением:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} U_{2 \max} \cdot \cos(\omega t) \cdot d(\omega t) = \\
 &= 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} \sqrt{2} \cdot U_{2 \phi} \cdot \cos(\omega t) \cdot d(\omega t) = \\
 &= \frac{3}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{2} \cdot U_{2 \phi} \cdot \sin(\omega t) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{2} \cdot U_{2 \phi} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\
 &= \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot \pi} \cdot U_{2 \phi} = 1,17 \cdot U_{2 \phi}.
 \end{aligned} \tag{15.5.1}$$

Здесь  $U_{2\phi}$  – фазное напряжение вторичной обмотки трансформатора.

На рис.15.5.2 представлена временная зависимость тока и напряжения на одном из вентилей – диоде  $VD1$  фазы «А».

Максимальное обратное напряжение вентиля равно амплитуде линейного напряжения вторичных обмоток трансформатора, соединенных звездой, так как один зажим диода подключен к одной из фаз, а второй – к другой фазе через открытый вентиль:

$$U_{обр. max} = U_{л. max} = \sqrt{3} \cdot U_{2 \phi. max} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot U_{2 \phi.} = \sqrt{6} \cdot U_{2 \phi.} = 2,45 \cdot U_{2 \phi.},$$

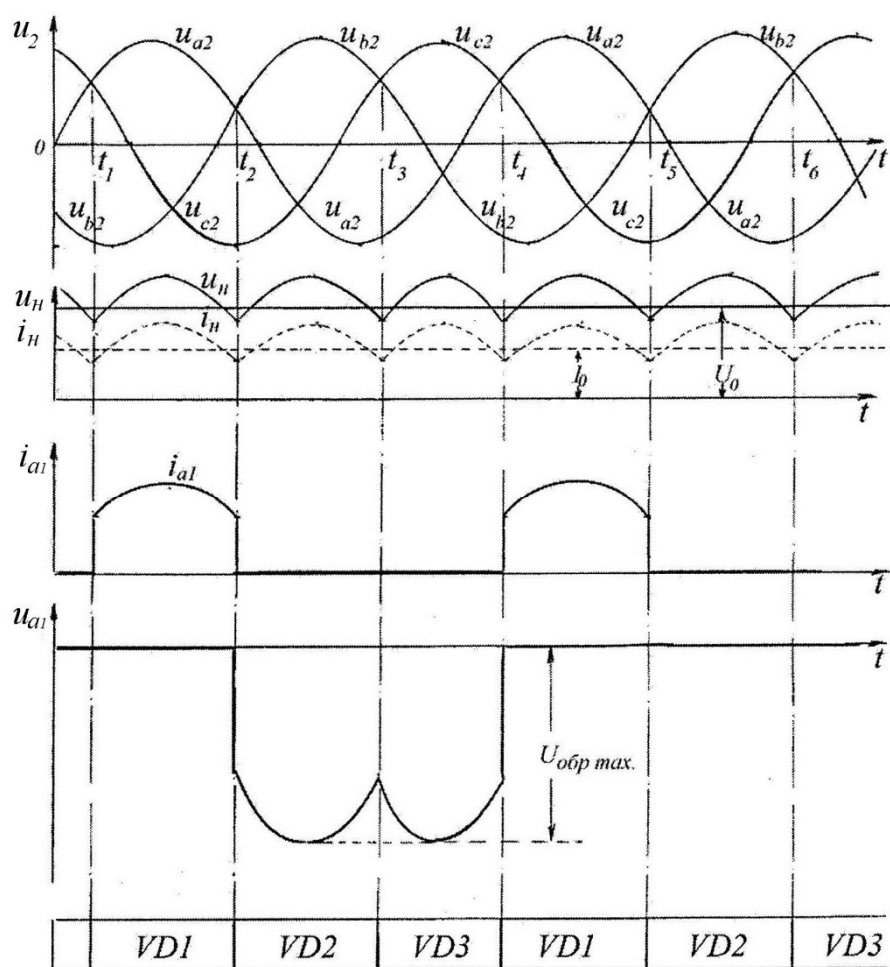


Рис.15.5.2

или, с учётом формулы (15.5.1) можно выразить максимальное обратное напряжение через постоянную составляющую выпрямленного напряжения:

$$U_{обр. max} = \frac{2,45}{1,17} \cdot U_0 = 2,09 \cdot U_0.$$

Коэффициент пульсаций однотактного трёхфазного выпрямителя, определяемый формулой (15.3.4), равен:

$$q = \frac{2}{m^2 - 1} = \frac{2}{3^2 - 1} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Достоинством однотактного трёхфазного выпрямителя является высокая надежность, обусловленная использованием минимального числа диодов в схеме.

К недостаткам следует отнести невысокий КПД выпрямителя, что объясняется подмагничиванием сердечника трансформатора током вторичной обмотки, не изменяющим направления в процессе работы схемы.

Трёхфазную однотактную схему, называемую также схемой выпрямителя со вторичной звездой, применяют для питания нагрузки мощностью до 25 кВт.

Для питания более мощных нагрузок используют трёхфазные мостовые выпрямители.

## 15.6. Трёхфазный двухтактный выпрямитель

Трёхфазный двухтактный выпрямитель по всем показателям превосходит однотактный, однако двухтактная схема содержит вдвое больше диодов, чем однотактная. В двухтактной схеме трансформатор не имеет вывода нейтральной точки, поэтому первичная и вторичная обмотки могут быть соединены как звездой, так и треугольником.

Двухтактная трехфазная схема, предложенная в 1923 году русским ученым А.Н. Ларионовым, состоит из трех мостовых схем (рис.15.6.1): первый мост содержит диоды  $VD1$ ,  $VD2$ ,  $VD3$ ,  $VD4$ ; второй –  $VD1$ ,  $VD2$ ,  $VD5$ ,  $VD6$ ; третий –  $VD3$ ,  $VD4$ ,  $VD5$ ,  $VD6$ .

Все диоды в схеме работают попеременно-поочередно. У нечетных вентилей потенциалы анодов одинаковы. Среди них работает тот диод, катод которого наиболее отрицателен (рис.3.6.2). У четных вентилей одинаковы потенциалы катодов. Среди них открыт диод с наиболее высоким потенциалом анода. Переключение вентилей происходит в моменты времени, соответствующие пересечениям синусоид (рис.15.6.2).

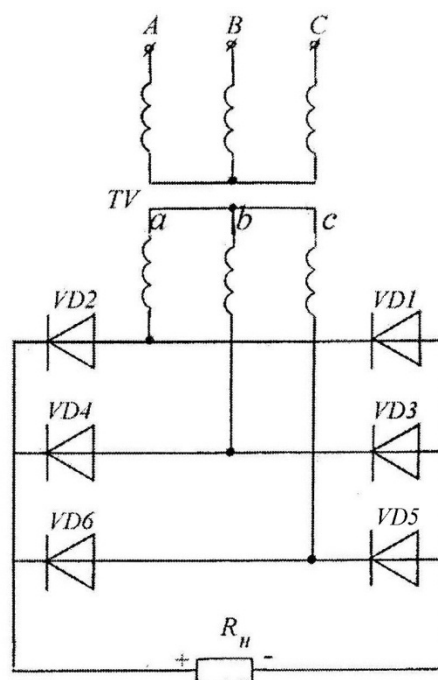


Рис.15.6.1

Мостовая схема обеспечивает шестикратное повторение пульсаций выпрямленного напряжения за период переменного напряжения питающей сети. Поэтому  $m=6$ , а постоянная составляющая выпрямленного напряжения может быть определена соотношением:

$$U_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi/6} \cdot \int_{-\pi/6}^{+\pi/6} \sqrt{2} \cdot U_{2л} \cdot \cos(\omega t) \cdot d(\omega t) =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot U_{2л}}{2 \cdot \pi/6} \cdot \sin(\omega t) \Big|_{-\pi/6}^{+\pi/6} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_{2л}}{2 \cdot \pi/6} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\pi} \cdot U_{2л} = \quad (15.6.1)$$

$$= 1,35 \cdot \sqrt{3} \cdot U_{2ф} = 2,34 \cdot U_{2ф}.$$

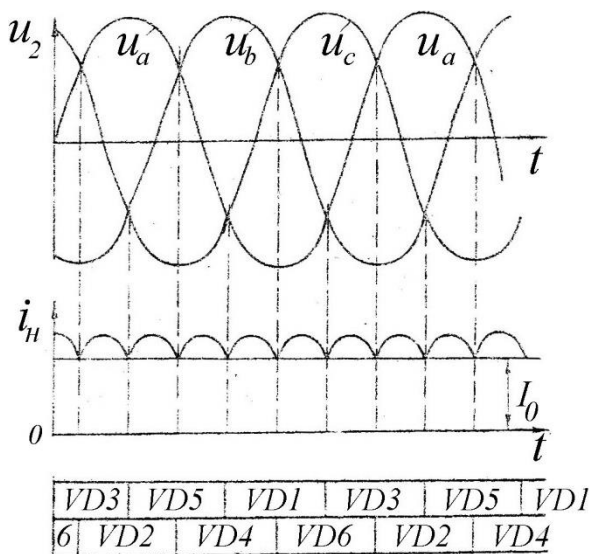


Рис.15.6.2

Сравнение формул (15.5.1) и (15.6.1) указывает на двукратное превышение постоянной составляющей выпрямленного напряжения в двухтактной схеме над данным параметром однотактной схемы.

Обратное напряжение на вентилях схемы А.Н. Ларионова определяется линейным напряжением вторичной обмотки трансформатора, поскольку любой вентиль, смещенный в обратном направлении, присоединен через открытый диод к линейным зажимам вторичной обмотки трансформатора. Таким образом, максимальное напряжение на закрытом диоде равно:

$$U_{обр.мах} = \sqrt{2} \cdot U_{2л} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot U_{2ф} = \frac{\sqrt{6}}{2,34} \cdot U_0. \quad (15.6.2)$$

Сравнение значений  $U_{обр.мах}$  для мостовой и однотактной схем показывает, что хотя в двухтактной схеме, как и в однотактной, обратное напряжение на закрытом диоде равно линейному напряжению обмоток трансформатора, однако в однотактной схеме оно вдвое меньше среднего

значения выпрямленного напряжения мостовой схемы. Следовательно, диоды в данном выпрямителе можно подбирать по обратному напряжению, близкому по значению к постоянной составляющей выпрямленного напряжения.

При  $m=6$  коэффициент пульсаций равен:

$$q = \frac{2}{m^2 - 1} = \frac{2}{6^2 - 1} = \frac{2}{35} = 0,057.$$

Таким образом, из всех рассмотренных выпрямителей мостовая схема имеет наименьший коэффициент пульсаций.

КПД выпрямителя А.Н. Ларионова выше, чем у выпрямителя с выводом нейтральной точки, поскольку в мостовом выпрямителе отсутствует подмагничивание сердечника трансформатора постоянным током.

Мостовые трехфазные выпрямители являются основными схемами мощных выпрямителей и благодаря перечисленным преимуществам находят широкое применение при конструировании управляемых выпрямителей.

Основные характеристики рассмотренных схем выпрямителей приведены в таблице.

Таблица. Параметры неуправляемых выпрямителей

Однофазные выпрямители				Трёхфазные выпрямители	
Параметр	Однополупериодный	Однотактный	Двухтактный	Однотактный	Двухтактный
$I_0$	$I_{max}/\pi$	$2 \cdot I_{max}/\pi$	$2 \cdot I_{max}/\pi$	-	-
$U_0$	$0,45 \cdot U_2$	$0,9 \cdot U_2$	$0,9 \cdot U_2$	$1,17 \cdot U_{2\phi}$	$2,34 \cdot U_{2\phi}$
$U_{обр. max}$	$\pi \cdot U_0$	$\pi \cdot U_0$	$1/2 \cdot (\pi \cdot U_0)$	$2,09 \cdot U_0$	$1,045 \cdot U_0$
$q$	1,57	0,667	0,667	0,25	0,057

## Глава XVI. УПРАВЛЯЕМЫЕ ВЫПРЯМИТЕЛИ

### 16.1. Физические принципы управляемого выпрямления

Во многих электротехнических устройствах выпрямители должны обеспечивать возможность плавного регулирования значения постоянной составляющей  $U_0$  выпрямленного напряжения на нагрузке в широком диапазоне. Управлять значением  $U_0$  можно как в цепи переменного, так и в цепи выпрямленного тока.

В цепи переменного тока управлять значением  $U_0$  можно с помощью автотрансформатора, имеющего несколько выводов вторичной обмотки, к которым подключается выпрямитель, а также с помощью трансформатора с короткозамкнутой подвижной обмоткой, дросселя насыщения и других устройств. Управление в цепи переменного тока осуществляется сравнительно просто, однако управляющие устройства имеют большие размеры и массу и потребляют большую мощность и, следовательно, снижают коэффициент полезного действия выпрямителя.

Управление в цепи выпрямленного тока можно осуществлять с помощью реостата или потенциометра. Однако при этом значительная часть мощности расходуется непроизводительно (выделяется в виде тепла в потенциометре).

Более экономичным и удобным способом управления значением  $U_0$ , получившим широкое применение, является управление выпрямленным напряжением (или током) в процессе выпрямления, называемое *управляемым выпрямлением*.

Выпрямители, в которых совмещается выпрямление переменного напряжения (или тока) с управлением выпрямленным напряжением (или током), называются *управляемыми выпрямителями*.

Структурная схема управляемого выпрямителя (рис.16.1.1) наряду с элементами, входящими в неуправляемый выпрямитель (трансформатор  $TV$ , сглаживающий фильтр  $СФ$ , стабилизатор напряжения  $СТ$ , рис.15.1.1), содержит управляемые вентили  $УВ$  вместо вентиляей  $B$ , а также систему управления вентильями, в состав которой входят фазовращающее устройство  $ФУ$  и генератор импульсов  $ГИ$ .

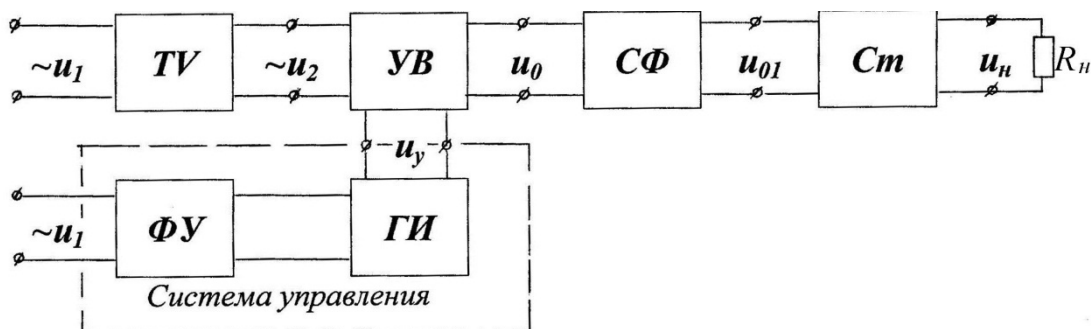


Рис.16.1.1

Простейшая схема, позволяющая осуществить поворот фазы напряжения относительно тока на любой заданный угол в пределах  $\pm 90^\circ$ , содержит конденсатор и резистор (рис.6.1.2.а, б).

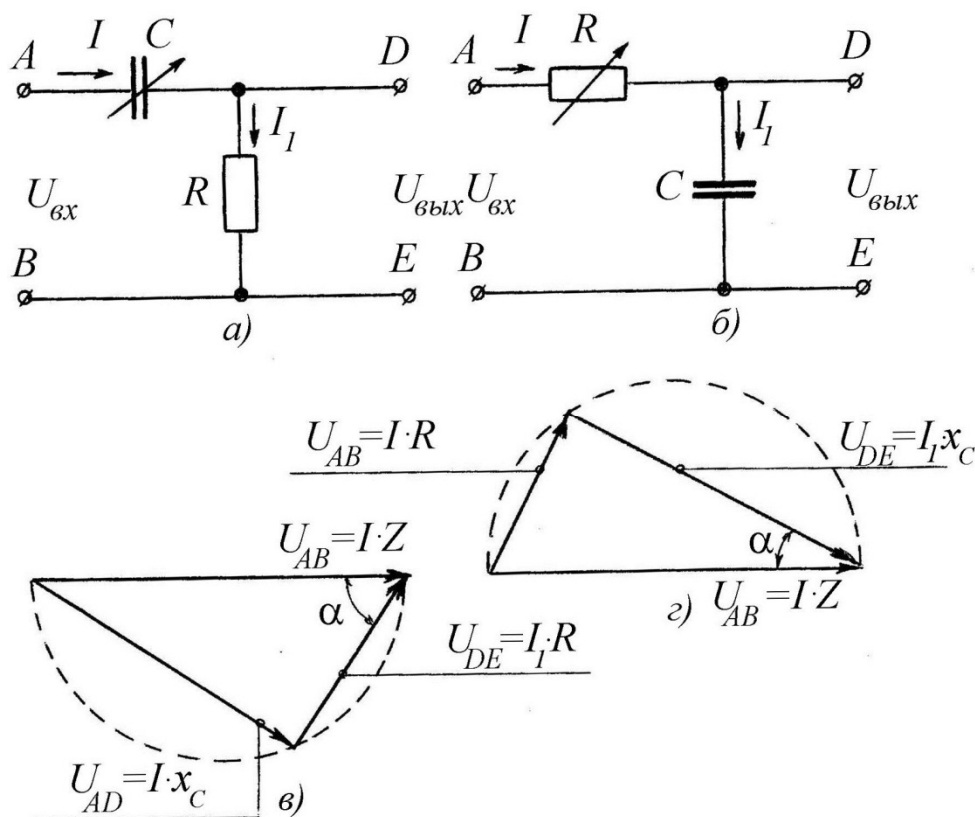


Рис.16.1.2

Для сдвига напряжения на выходе относительно напряжения входе на  $90^\circ$  используют схему (рис.16.1.2.а), в которой выходное напряжение снимается с активного сопротивления  $R$ . Из векторной диаграммы (рис.16.1.2.в) этой схемы следует, что напряжение  $U_{\text{вых}} = U_{DE}$  на выходе схемы опережает входное напряжение  $U_{\text{вх}} = U_{AB}$  на угол:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{x_C}{R}\right) = \arctg\left(\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}\right).$$

Модуль напряжения  $U_{\text{вых}}$  на выходе схемы:

$$U_{\text{вых}} = U_{DE} = I_1 \cdot R = \frac{U_{\text{вх}}}{Z} \cdot R.$$

Если конденсатор имеет переменную ёмкость  $C$ , а сопротивление резистора постоянно (рис.16.1.2.а), то геометрическим местом начала вектора напряжения на выходе  $U_{\text{вых}}$  будет полуокружность (рис.16.1.2.в).

Для получения выходного напряжения, отстающего по фазе от входного напряжения, напряжение на выходе  $U_{\text{вых}}$  снимают с конденсатора (рис.16.1.2.б). Из векторной диаграммы (рис.16.1.2.г) для этой схемы следует, что фазовый сдвиг  $\alpha$  между  $U_{\text{вых}}$  и  $U_{\text{вх}}$ :

$$\alpha = \arctg(\omega \cdot R \cdot C),$$

причём:

$$U_{\text{вых}} = U_{DE} = \frac{U_{\text{вх}}}{Z} \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{U_{\text{вх}} \cdot x_C}{Z}.$$

Если в схеме на рис.16.1.2.б изменять сопротивление  $R$  резистора при постоянной ёмкости конденсатора, то геометрическим местом конца вектора напряжения  $U_{\text{вых}}$  будет полуокружность.

Формируемые генератором ГИ (рис.16.1.1) импульсы  $u_y$  поступают на управляющий электрод УЭ управляемого вентиля выпрямителя. Поскольку трансформатор  $TV$  выпрямителя и система управления СУ (рис.16.1.1) питаются напряжением одинаковой частоты, управляющие импульсы  $u_y$  имеют такую же частоту, как и напряжение  $u_2$  вторичной обмотки трансформатора. Фазовращающее устройство ФУ сдвигает по фазе управляющие импульсы относительно напряжения вторичной обмотки трансформатора. Это позволяет управлять моментами перехода управляемых вентилей  $VB$  в проводящее состояние, то есть режимом работы выпрямителя. Поэтому изменяется форма напряжения.

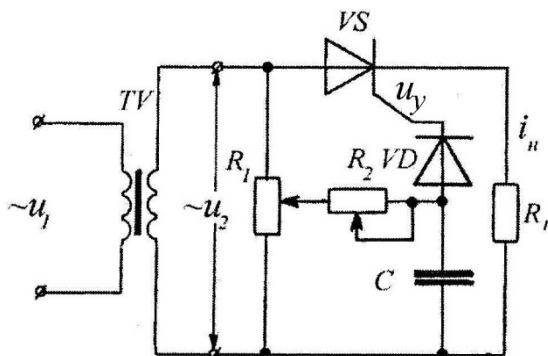


Рис.16.1.3

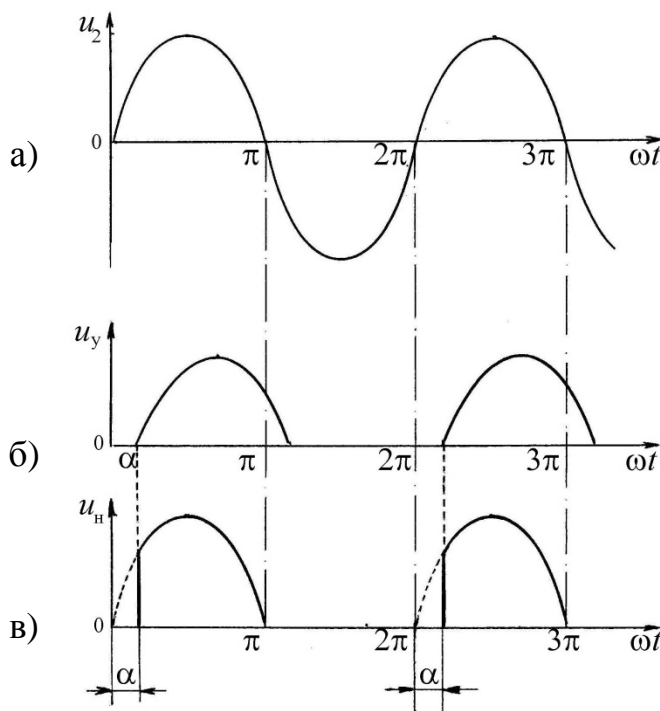


Рис.16.1.4

Основным элементом управляемого выпрямителя является тиристор  $VS$  (рис. 16.1.3). Элементы  $R_2$  и  $C$  выпрямителя образуют фазовращающее устройство, схема которого аналогична приведенной на рис. 16.1.2.б. Поэтому фазовращающее устройство вызывает фазовую задержку сигнала, открывающего тиристор.

Сдвиг фаз  $\alpha$  между сигналами  $u_2$  и  $u_y$  называется **углом управления**.

Фазовращающая цепь  $R_2C$  (рис.16.1.3) позволяет изменять угол управления в диапазоне  $0^\circ \div 90^\circ$ . При этом постоянная составляющая выпрямленного

напряжения изменяется от максимального значения  $U_{0\max}$  при  $\alpha=0^\circ$  до  $U_{0\max}/2$  при  $\alpha=90^\circ$  (рис.16.1.4). Резистор  $R_I$  (рис.16.1.3) предназначен для изменения напряжения, подаваемого на управляющий электрод тиристора. Диод  $VD$  обеспечивает подачу на управляющий электрод тиристора  $VS$  положительных управляющих импульсов  $u_v$  (рис.16.1.3, рис.16.1.4.б).

## 16.2. Принцип действия и регулировочная характеристика однофазного управляемого выпрямителя с активной нагрузкой

Режим активной нагрузки однофазного управляемого выпрямителя реализуется при замкнутом ключе *SA1* и разомкнутом ключе *SA2* (рис.16.2.1).

тора закрыты, и напряжение на нагрузке равно нулю (рис.16.2.2.г). При этом тиристор  $VS1$  смещён в прямом, а тиристор  $VS2$  - в обратном направлении.

В течение интервала времени  $t_I \div T/2$  на нагрузке формируется напряжение  $u_H = u_{2I}$  (рис.16.2.2.г), а через нагрузку и тиристор  $VS1$  течёт ток  $i_H =$

*Рис.16.2.1*

$=i_{a1}=u_n/R_n$  (рис.16.2.2.д). При пересечении синусоидой питающего напряжения  $u_1$  оси абсцисс в момент времени  $t=T/2$  (рис.16.2.2.а) ток тиристора  $VS1$  убывает до нуля, и первый тиристор закрывается.

В момент времени  $t=T/2$  полярность питающего напряжения изменяется на противоположную, и тиристор  $VS1$  закрывается.

В интервале времени  $T/2 \div t_2$  оба тиристора закрыты, поэтому  $i_{a1}=i_{a2}=0$  (рис.16.2.2.д, е), причём тиристор  $VS1$  смещён в обратном направлении (рис.16.2.2.ж), а тиристор  $VS2$  - в прямом направлении.

В момент времени  $t=t_2$  на управляющий электрод тиристора  $VS2$  подаётся управляющий импульс  $u_y$  (рис.16.2.2.в), переводящий тиристор  $VS2$  в проводящее состояние. Напряжение  $u_{22}$  вторичной обмотки трансформатора через открытый тиристор  $VS2$  подаётся на нагрузку  $u_n$  (рис.16.2.2.г). При этом через нагрузку и тиристор  $VS2$  течёт ток  $i_n=i_{a1}=u_n/R_n$ .

В интервале времени  $t_2 \div T$ , когда тиристор  $VS2$  открыт, на тиристор  $VS1$  подаётся обратное напряжение с обмотки трансформатора и с обмотки  $w_{22}$  через открытый тиристор  $VS2$ . Поэтому с момента времени  $t_2$  отпирания

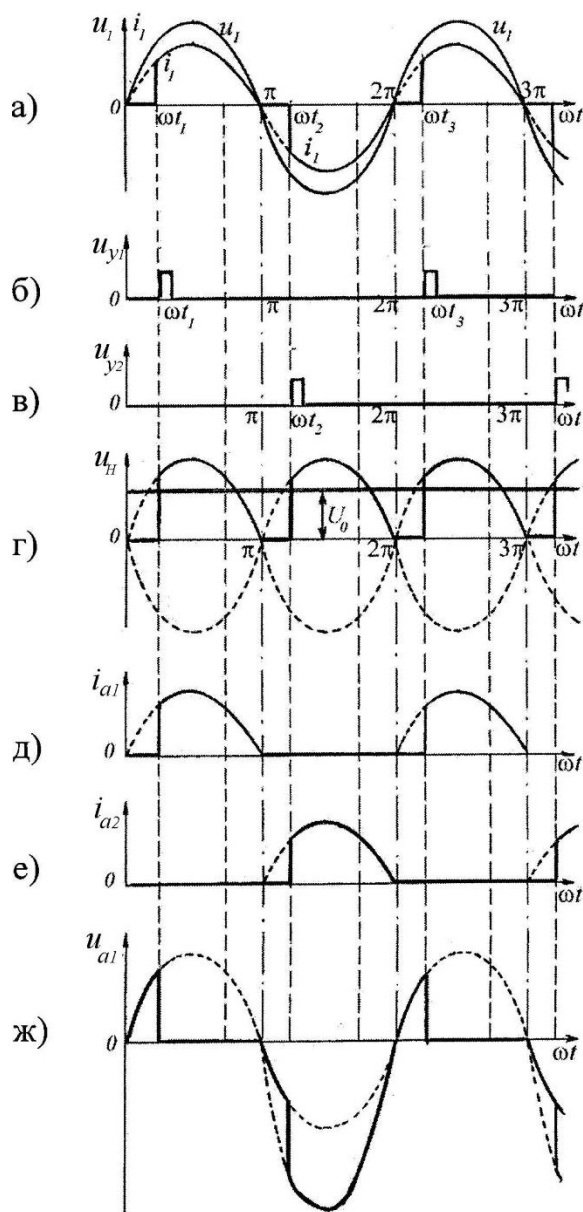


Рис.16.2.2

тиристора  $VS2$  к тиристору  $VS1$  приложено обратное напряжение, равное  $2 \cdot u_2$  (рис.16.2.4.ж). Поэтому максимальное обратное напряжение на тиристоре  $U_{обр. max}$  равно  $2 \cdot \sqrt{2} \cdot U_2$ .

В дальнейшем процессы в схеме повторяются. Токи вторичных обмоток трансформатора определяются токами тиристоров  $VS1$  и  $VS2$  (рис.16.2.2.д, е). Ток  $i_1$  первичной обмотки связан с токами вторичных обмоток коэффициентом трансформации  $n=w_1/w_2$  (рис.16.2.2.д, е) и имеет паузы в интервалы времени, соответствующие углам  $\alpha$  (рис.16.2.2.а).

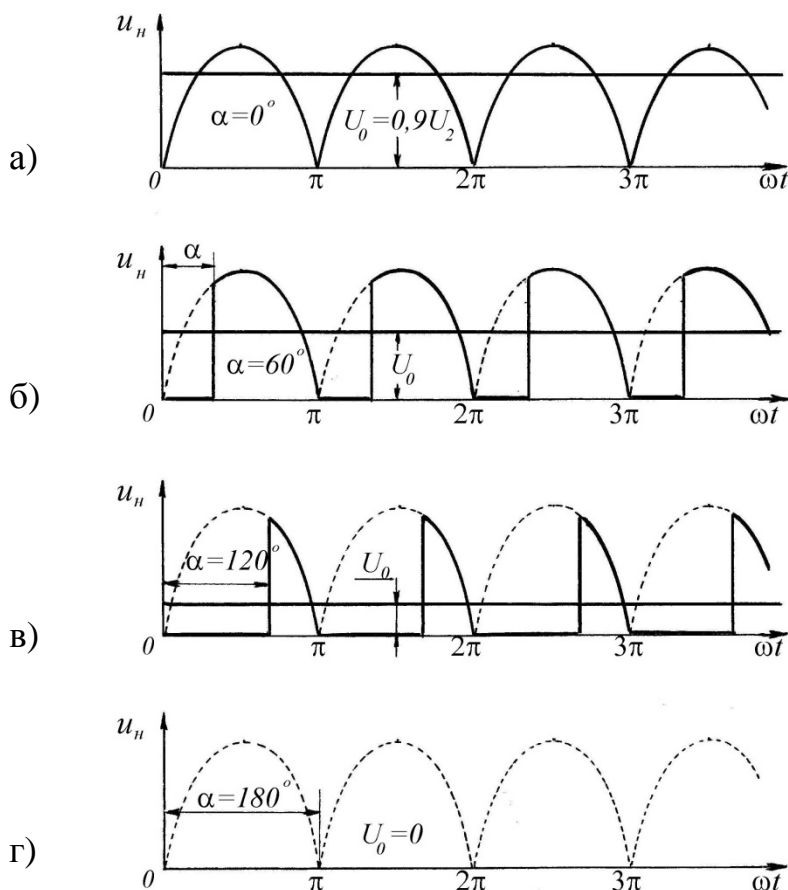


Рис.16.2.3

янной составляющей выпрямленного напряжения (рис.16.2.3.б, в) до нуля  $\alpha=180^\circ$  (рис.16.2.3.г). Таким образом, при изменении угла управления  $\alpha$  от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  постоянная составляющая выпрямленного напряжения изменяется от максимального значения, равного  $0,9 \cdot U_2$ , до нуля.

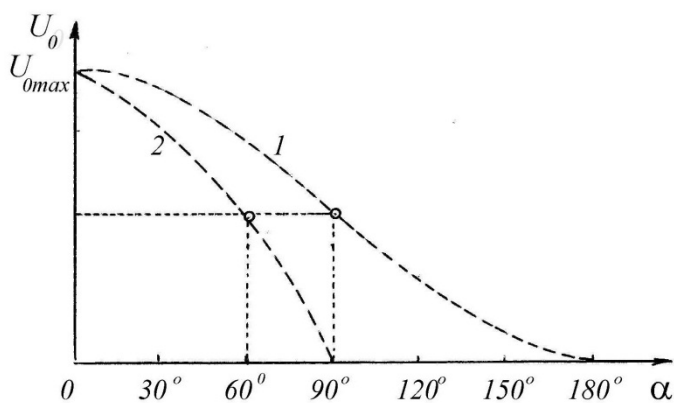


Рис.16.2.4

Управление значением постоянной составляющей выпрямленного напряжения  $U_0$  осуществляется изменением угла управления  $\alpha$  (рис.16.2.3).

При  $\alpha=0$  постоянная составляющая выпрямленного напряжения  $U_0=0,9 \cdot U_2$ , а временная зависимость напряжения на нагрузке (рис.16.2.3.а) совпадает с зависимостью напряжения на нагрузке, подключённой к неуправляемому двухполупериодному выпрямителю (рис.15.3.2)

Увеличение угла управления  $\alpha$  приводит к уменьшению посто-

Зависимость значения постоянной составляющей  $U_0$  выпрямленного напряжения от угла управления  $\alpha$  называется **регулирующей характеристикой** управляемого выпрямителя.

Регулирующая характеристика выражается из формулы постоянной составляющей напряжения на нагрузке.

В интервале значений  $\omega \cdot t$  в пределах от  $\alpha$  до  $\pi$  постоянная составляющая выпрямленного напряжения равна:

$$U_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{2} \cdot U_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot d(\omega \cdot t) = \frac{\sqrt{2} \cdot U_2}{\pi} \cdot (1 + \cos \alpha).$$

Учитывая, что

$$\frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot U_2}{\pi} = U_{0 \max},$$

регулирующую характеристику можно выразить через  $U_{0 \max}$  :

$$U_0 = U_{0 \max} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2}. \quad (16.2.1)$$

Регулирующая характеристика, построенная в соответствии с формулой (16.2.1) для однофазного одноконтного выпрямителя, приведена на рис.16.2.4. На регулировочную характеристику, как и режим работы выпрямителя, влияет характер нагрузки. На рис.16.2.4 линия 1, построенная с помощью формулы (16.2.1), соответствует регулировочной характеристике выпрямителя, подключённого к активной нагрузке ( $L_H=0$ ). Линия 2 на рис.16.2.4 соответствует регулировочной характеристике выпрямителя, нагрузка которого обладает большой индуктивностью ( $L_H \rightarrow \infty$ ):

$$U_0 = U_{0 \max} \cdot \cos \alpha. \quad (16.2.2)$$

### 16.3. Внешняя характеристика однофазных выпрямителей большой и средней мощности

Повышение мощности выпрямителей сопровождается, во-первых, увеличением индуктивностей рассеяния вследствие ухудшения магнитной связи между обмотками трансформатора и, во-вторых, уменьшением активных сопротивлений схемы, поскольку обмотки и монтаж трансформатора выполняются проводами большого сечения.

Возрастание индуктивностей рассеяния сказывается на процессе перехода тока с одного вентиля на другой, называемом **процессом коммутации**. В выпрямителях малой мощности коммутация протекает за короткий промежуток времени, поскольку индуктивностями рассеяния можно пренебречь. В выпрямителях большой и средней мощности интервал коммутации, определяемый углом  $\gamma$ , может занимать значительную часть длительности рабочих процессов схемы. Поэтому в выпрямителях большой и средней мощности процессы коммутации оказывают существенное влияние на режим работы и параметры выпрямителя.

Рассмотрим процесс коммутации и его влияние на работу одноконтного однофазного выпрямителя с активно-индуктивной нагрузкой при  $L_H \rightarrow \infty$  (рис.16.3.1). Влияние индуктивностей рассеяния обмоток трансформатора  $L_{S1}$  и  $L_{S2}$  и индуктивности питающей сети  $L_C$  на режим работы однофазного выпрямителя определяется суммарной индуктивностью:

$$L_a = L_{S2} + (L_{S1} + L_C) \cdot \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2, \quad (16.3.1)$$

или суммарным сопротивлением:  $x_a = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_a$ . Здесь  $w_1$  и  $w_2$  - число витков соответственно верхней и нижней половины вторичной обмотки трансформатора.

Воздействие индуктивностей рассеяния на режим работы выпрямителя проявляется в том, что при подаче управляющего (отпирающего) импульса на отпираемый тиристор по истечении интервала  $\alpha$  после изменения полярности напряжения на тиристоре индуктивные сопротивления  $x_{a1}$  и  $x_{a2}$  затягивают процесс уменьшения до нуля тока через ранее открытый тиристор и нарастания тока до значения  $I_0$  тиристора, вступающего в работу (рис.16.3.2.в).

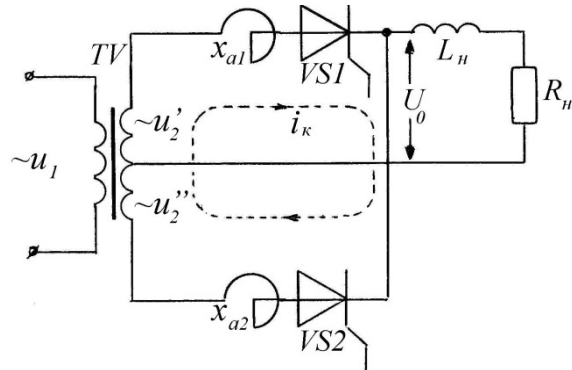


Рис.16.3.1

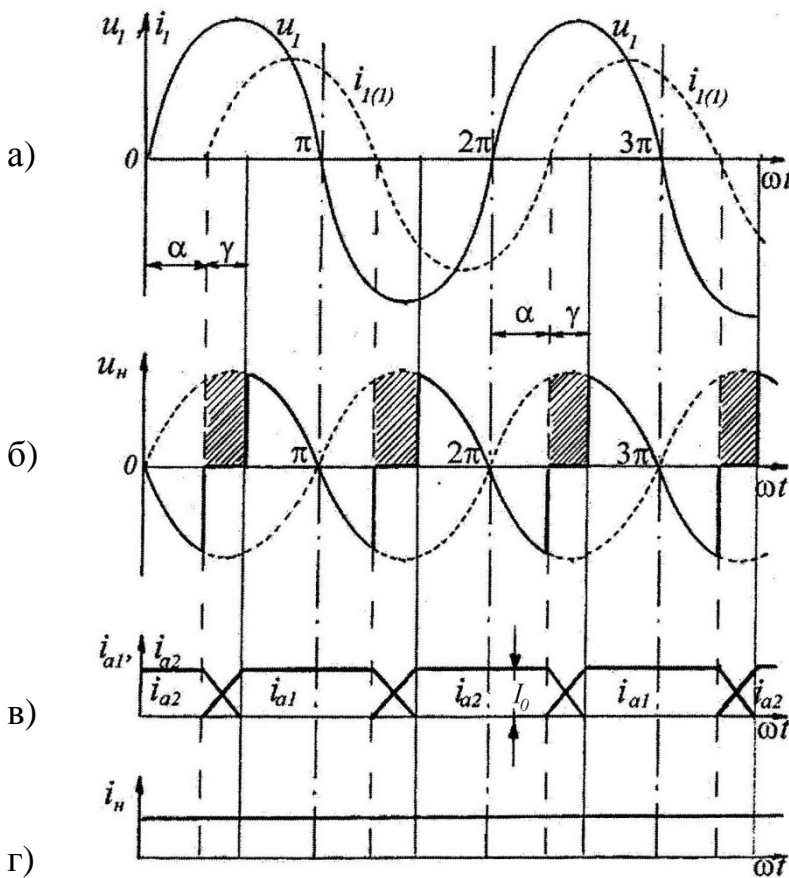


Рис.16.3.2

Поэтому в интервале  $\gamma$  в проводящем состоянии находятся одновременно оба тиристора выпрямителя. Эти тиристоры VS1 и VS2 образуют короткозамкнутый контур последовательно соединённых вторичных обмоток трансформатора. Суммарное сопротивление контура  $x = x_{a1} + x_{a2}$ , общее напряжение двух половин вторичной обмотки равно  $2 \cdot u_2$ . Напряжение на нагрузке  $u_H = (1/2) \cdot (u_2' + u_2'')$  в интервале коммутации  $\gamma$  равно нулю, поскольку в этот период  $u_2' = -u_2''$  (рис.16.3.2.б).

Поэтому при расчёте постоянной составляющей выпрямленного напряжения на нагрузке  $U_0$  заштрихованные фигуры на рис.16.3.2.б не учитываются, и значение  $U_0$  при наличии коммутации меньше, чем при  $\gamma=0$ . С учётом коммутации регулировочная характеристика выпрямителя с большой индуктивностью (16.2.2) содержит усреднённое коммутационное снижение напряжения за период  $\Delta U_{0\gamma}$ :

$$U_0 = U_{0\max} \cdot \cos \alpha - \Delta U_{0\gamma}. \quad (16.3.2)$$

Коммутационное снижение напряжения можно определить, подробно рассмотрев коммутационный процесс перехода тока с одного тиристора на другой:

$$\begin{aligned} \Delta U_{0\gamma} &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+\gamma} \sqrt{2} \cdot U_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot d(\omega \cdot t) = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot U_2}{\pi} \cdot [\cos \alpha - \cos(\alpha + \gamma)]. \end{aligned} \quad (16.3.3)$$

Здесь

$$\cos \alpha - \cos(\alpha + \gamma) = \frac{I_0 \cdot x_a}{\sqrt{2} \cdot U_2}. \quad (16.3.4)$$

Подстановка соотношений (16.3.3) и (16.3.4) в уравнение (16.3.2) позволяет выразить постоянную составляющую выпрямленного напряжения на нагрузке с учётом коммутации:

$$U_0 = U_{0\max} \cdot \cos \alpha - \frac{I_0 \cdot x_a}{\pi}. \quad (16.3.5)$$

Уравнение (16.3.5) описывает **внешние характеристики управляемого выпрямителя**. Для различных значений угла управления внешние характеристики выпрямителя представляют собой семейство параллельных прямых линий (рис.16.3.3).

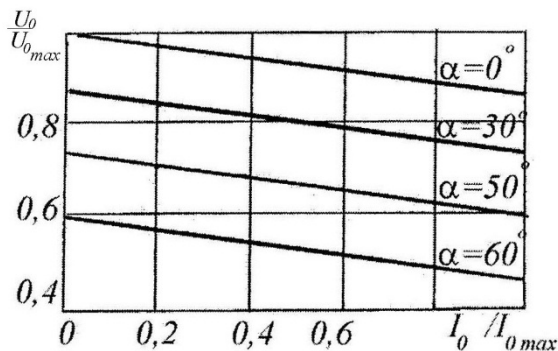


Рис.16.3.3

Уравнение (16.3.5) внешней характеристики выпрямителя указывает на уменьшение постоянной составляющей выпрямленного напряжения на нагрузке  $U_0$  при увеличении силы тока  $I_0$ . Это объясняется увеличением коммутационного падения напряжения вследствие возрастания угла коммутации.

Ток первичной обмотки трансформатора  $i_1(\omega \cdot t)$  во внекоммута-

онные интервалы времени определяется токами  $i_{a1}$  и  $i_{a2}$  тиристоров, а во время коммутации – разностью этих токов (рис.16.3.2.а). Коммутация приводит к увеличению фазового сдвига  $\varphi$  первой гармоники тока первичной обмотки трансформатора  $i_{I(1)}$  относительно основной гармоники напряжения первичной обмотки трансформатора  $u_1$  на угол  $\gamma/2$ :

$$\varphi = \alpha + \gamma/2. \quad (16.3.6)$$

В управляемом однофазном мостовом выпрямителе коммутационные процессы протекают подобно процессам в рассмотренной схеме с выводом средней точки вторичной обмотки трансформатора. Отличие заключается в том, что на этапе коммутации в проводящем состоянии находятся все четыре тиристора. Уравнение внешних характеристик мостовой схемы отличается вторым слагаемым:

$$U_0 = U_{0\max} \cdot \cos\alpha - \frac{2 \cdot I_0 \cdot x_a}{\pi}. \quad (16.3.7)$$

Двукратное увеличение второго слагаемого уравнения внешней характеристики в мостовой схеме компенсируется уменьшением приблизительно в такое же число раз значения  $x_a$  по сравнению с однотактной схемой. Это обусловлено лучшей магнитной связью обмоток трансформатора мостовой схемы.

#### 16.4. Коэффициент полезного действия выпрямителей

**Коэффициентом полезного действия** выпрямителей называется отношение активной мощности  $P_0$ , отдаваемой в нагрузку, к полной мощности, потребляемой выпрямительной установкой от питающей сети. При идеальном сглаживании выпрямленного тока *КПД* выпрямителя определяется соотношением:

$$\eta = \frac{P_0}{P_0 + \sum \Delta P'}, \quad (16.4.1)$$

где  $\sum \Delta P'$  – суммарная активная мощность, теряемая в выпрямителе.

Активная мощность потерь складывается из следующих составляющих:

- 1) потерь в вентилях ( $\Delta P_B$ ),
- 2) потерь в силовом трансформаторе ( $\Delta P_{TP}$ ),
- 3) потерь в сглаживающем дросселе ( $\Delta P_{ДР}$ ),
- 4) потерь в делителях напряжения (если они применяются в схеме),
- 5) потерь во вспомогательных устройствах (системах управления, сигнализации, охлаждения).

Потери в вентилях ( $\Delta P_B$ ) складываются из потерь энергии при их переключении, а также потерь при протекании прямого электрического тока. При питании выпрямителя от сети с напряжением частотой 50 Гц потери энергии в вентилях, обусловленные переключением, можно не учитывать.

Поэтому потери энергии в вентилях обусловлены лишь протеканием прямого тока:

$$\Delta P_B = m_B \cdot U_a \cdot I_a.$$

Здесь  $m_B$  – число вентилях в схеме выпрямителя,  $U_a$  и  $I_a$  – соответственно падение напряжения и ток в вентиле.

Потери энергии в трансформаторе описываются выражением:

$$\Delta P_{TP} = \Delta P_C + \Delta P_M,$$

где  $\Delta P_C$  и  $\Delta P_M$  – соответственно потери энергии в сердечнике и обмотке (меди) трансформатора.

Потери энергии в сглаживающем дросселе определяются, главным образом, выделением тепла вследствие нагревания активного сопротивления его обмотки:

$$\Delta P_{др} = I_{др}^2 \cdot R_{др}.$$

Общий расход мощности во вспомогательных устройствах выпрямителя составляет  $0,5 \div 3\%$  от  $P_0$ .

Коэффициент полезного действия выпрямительной установки может быть представлен также в виде произведения  $KПД$  выпрямительной части схемы ( $\eta_{в.с.}$ ) и  $KПД$  трансформатора ( $\eta_{TP}$ ).

Второй сомножитель ( $\eta_{TP}$ ) без учёта потерь во вспомогательных устройствах и  $\Delta P_{др}$  приблизительно равен  $KПД$  используемых вентилях:

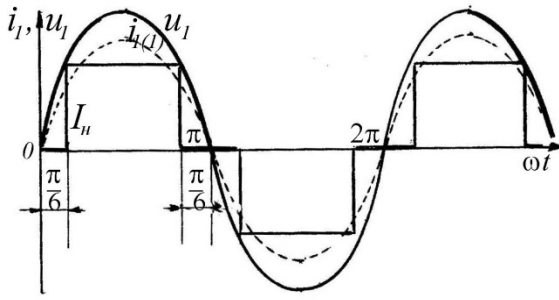
$$\eta_{в.с.} = \eta_B = \frac{U_0}{U_0 + U_a}. \quad (16.4.2)$$

Величина падения напряжения в вентилях  $U_a$  несущественно зависит от режима работы и в зависимости от типа вентиля составляет  $0,3 \div 0,6$  В для германиевых диодов,  $0,8 \div 1,2$  В для кремниевых диодов и  $0,6 \div 1,5$  В для тиристоров. Поэтому  $KПД$  вентилях возрастает при повышении напряжения  $U_0$ , приближаясь к значению, близкому к единице, и оказывает меньшее влияние на  $KПД$  выпрямительной установки, чем трансформаторы.

### 16.5. Коэффициент мощности выпрямителей

Наиболее экономичным режимом работы электротехнических устройств, питаемых сетью переменного тока, является такой режим, при котором потребляется только активная мощность. Поэтому при синусоидальном напряжении питающей сети потребляемый ток  $i_l$  должен быть также синусоидальным и не иметь фазового сдвига относительно питающего напряжения. Однако такой режим не характерен для выпрямителей средней и большой мощности. Форма потребляемого такими устройствами тока отличается от синусоиды, а основная гармоника тока сдвинута по фазе относительно синусоиды питающего переменного напряжения (рис.16.5.1).

### неуправляемый выпрямитель



### управляемый выпрямитель

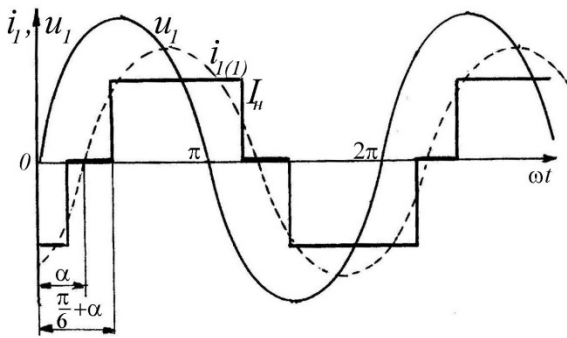


Рис.16.5.1

Наличие фазового сдвига свидетельствует о том, что выпрямители потребляют от сети помимо активной мощности  $I_0 \cdot U_0$ , также и реактивную мощность. Потребление реактивной мощности и наличие высших гармоник в кривой тока  $i_1(\omega \cdot t)$  питающей сети приводят к увеличению действующего значения тока сети и росту потерь при передаче энергии к выпрямительной установке.

Влияние фазового сдвига на эффективность работы выпрямителей характеризуется коэффициентом мощности:

$$\lambda = \frac{P_1}{S_1}, \quad (16.5.1)$$

где  $P_1$  – активная мощность, потребляемая выпрямителем:

$$P_1 = U_1 \cdot I_{1(1)} \cdot \cos \varphi, \quad (16.5.2)$$

$S_1 = U_1 \cdot I_1$  – полная мощность, потребляемая от сети переменного тока.

С учётом высших гармоник тока действующее значение тока питающей сети равно

$$I_1 = \sqrt{I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2 + \dots + I_{1(i)}^2 \dots + I_{1(N)}^2},$$

где  $I_{1(i)}$  – действующее значение  $i$ -й гармоники тока. Полная мощность, потребляемая от сети переменного тока, равна произведению действующих значений питающего тока и напряжения:

$$S_1 = U_1 \cdot \sqrt{I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2 + \dots + I_{1(i)}^2 \dots + I_{1(N)}^2}. \quad (16.5.3)$$

Подстановка формул (16.5.2) и (16.5.3) в соотношение (16.5.1) позволяет выразить коэффициент мощности выпрямителя:

$$\lambda = \frac{I_{1(1)} \cdot \cos \varphi}{\sqrt{I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2 + \dots + I_{1(i)}^2 \dots + I_{1(N)}^2}} = k \cdot \cos \varphi, \quad (16.5.4)$$

где

$$k = \frac{I_{1(1)} \cdot \cos\varphi}{\sqrt{I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2 + \dots + I_{1(i)}^2 \dots + I_{1(N)}^2}}, \quad (16.5.5)$$

$\cos\varphi$  – коэффициент сдвига кривой потребляемого тока.

Учитывая, что коммутация приводит к увеличению фазового сдвига в соответствии с выражением  $\varphi = \alpha + \gamma/2$  (16.6.3), коэффициент сдвига кривой потребляемого тока при наличии коммутации описывается формулой:

$$\cos\varphi = \cos(\alpha + \gamma/2). \quad (16.5.6)$$

Анализ семейства кривых, характеризующих зависимость коэффициента сдвига  $\cos\varphi$  от угла управления  $\alpha$  и угла коммутации  $\gamma$ , построенного с помощью выражения (16.5.6), показывает, что с увеличением углов  $\alpha$  и  $\gamma$  коэффициент сдвига уменьшается (рис.16.5.2).

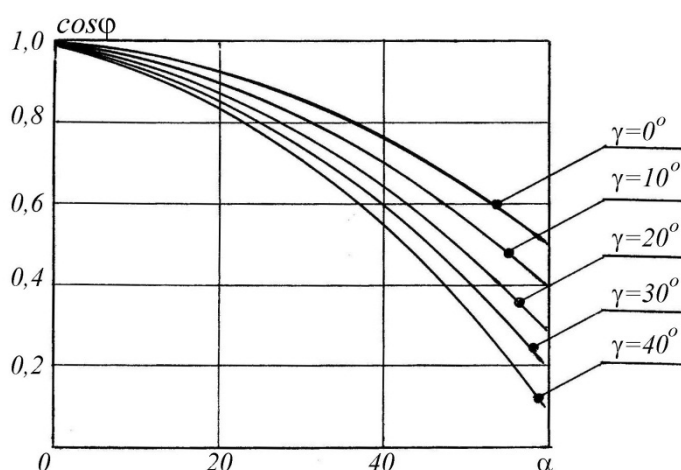


Рис.16.5.2

При  $\alpha=0$  коэффициент сдвига (16.5.6) характеризует работу неуправляемого выпрямителя. Увеличение угла управления  $\alpha$ , осуществляемое с целью уменьшения среднего значения выпрямленного напряжения  $U_0$ , приводит к уменьшению коэффициента мощности выпрямителя. Поэтому при использовании управляемых выпрямителей средней и большой мощности необходимо компенсировать их отрицательное воздействие на питающую сеть. Для этого в сеть, питающую управляемый выпрямитель, включают генераторы реактивной мощности, например, синхронные компенсаторы или конденсаторы. Перспективным является применение сетевых фильтров, предназначенных для предотвращения передачи в питающую сеть высших гармоник тока, что приводит к повышению коэффициента мощности выпрямительной установки.

Для повышения коэффициента мощности используют компенсационные преобразователи, например, выпрямители с искусственной коммутацией тока. В таких выпрямителях коммутация вентилей осуществляется не с отставанием, а с опережением относительно точек их естественного отпирания. Это приводит к уменьшению фазового сдвига  $\varphi$  между током и напряжением на входе выпрямителя.

## 16.6. Назначение и типы сглаживающих фильтров

Наличие пульсаций в выпрямленном напряжении отрицательно влияет на работу потребителей. Допустимый коэффициент пульсаций  $q_H$  выпрямленного напряжения на нагрузке зависит от рода нагрузки. Например, для входных усилительных каскадов значение  $q_H$  должно составлять  $0,1 \div 10^{-7}$ , а, как отмечалось, однофазные двухполупериодные выпрямители характеризуются параметром  $q$ , равным  $0,667$ . Поэтому пульсации напряжения на выходе выпрямителей должны быть снижены до значений, при которых не сказывается их отрицательное воздействие на работу питаемых устройств. Для снижения пульсаций применяются сглаживающие фильтры.

**Сглаживающим фильтром** называется устройство, предназначенное для уменьшения пульсаций выпрямленного напряжения. Основной характеристикой сглаживающего фильтра является коэффициент сглаживания  $k_C = q/q_H$ , где  $q$  и  $q_H$  – коэффициент пульсаций соответственно до и после сглаживания.

Основными элементами сглаживающих фильтров являются индуктивная катушка, которая включается последовательно с нагрузкой, и конденсатор, включаемый параллельно нагрузке. Сглаживающее действие этих элементов основано на том, что индуктивность оказывает большое сопротивление  $x_L = \omega \cdot L$  токам высокой частоты  $\omega$  и малое сопротивление токам низкой частоты. Конденсатор оказывает большое сопротивление  $x_C = 1/\omega \cdot C$  токам низкой частоты  $\omega$  и малое сопротивление токам высокой частоты.

В зависимости от способа включения конденсатора и индуктивной катушки сглаживающие фильтры подразделяют на ёмкостные (рис.16.6.1.а), индуктивные (рис.16.6.1.б), Г-образные LC-фильтры (рис.16.6.1.в), Г-образные RC-фильтры (рис.16.6.1.г), П-образные и многозвенные фильтры.

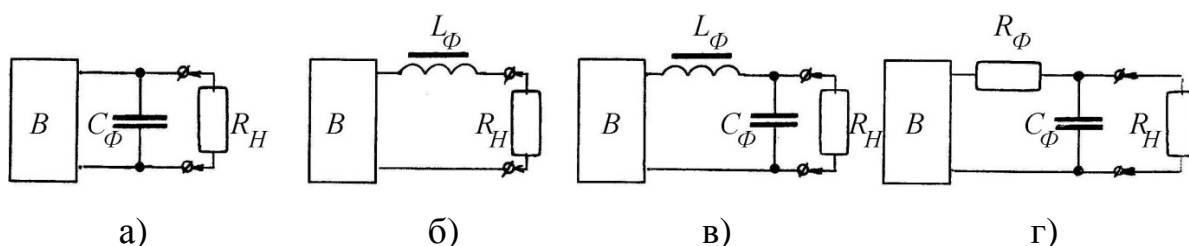


Рис.16.6.1

Элементы схем, приведённых на рис.16.6.1, должны удовлетворять условиям:

$$\frac{1}{\omega_{0Г} \cdot C_{\Phi}} \ll R_H; \quad \omega_{0Г} \cdot L_{\Phi} \gg R_H,$$

где  $\omega_{0Г}$  – круговая частота основной гармоники выходного напряжения выпрямителя ( $B$ ),  $R_H$  – сопротивление нагрузки.

Широкое практическое применение находят Г-образные  $LC$ - и  $RC$  – фильтры (рис.16.6.1.в, г).

Достоинствами  $LC$ -фильтров являются незначительное падение напряжение на активном сопротивлении обмотки дросселя и возможность их использования при больших токах нагрузки. Недостатками  $LC$ -фильтров являются большие размеры и масса.

Основными преимуществами  $RC$ -фильтров являются их небольшие размеры и масса, низкая стоимость и простота исполнения. К недостаткам этих фильтров следует отнести меньший коэффициент сглаживания, чем у  $LC$ -фильтров, большое падение напряжения и потери мощности на резисторе  $R_\phi$  фильтра. Поэтому  $RC$ -фильтры можно использовать только при малых токах нагрузки.

Если коэффициент сглаживания, полученный при использовании одного из фильтров, приведённых на рис.16.6.1, недостаточен, применяются П-образные фильтры (являющиеся многозвенными, рис.16.6.2.а, б, в) и многозвенные фильтры (рис.16.6.2.г, д).

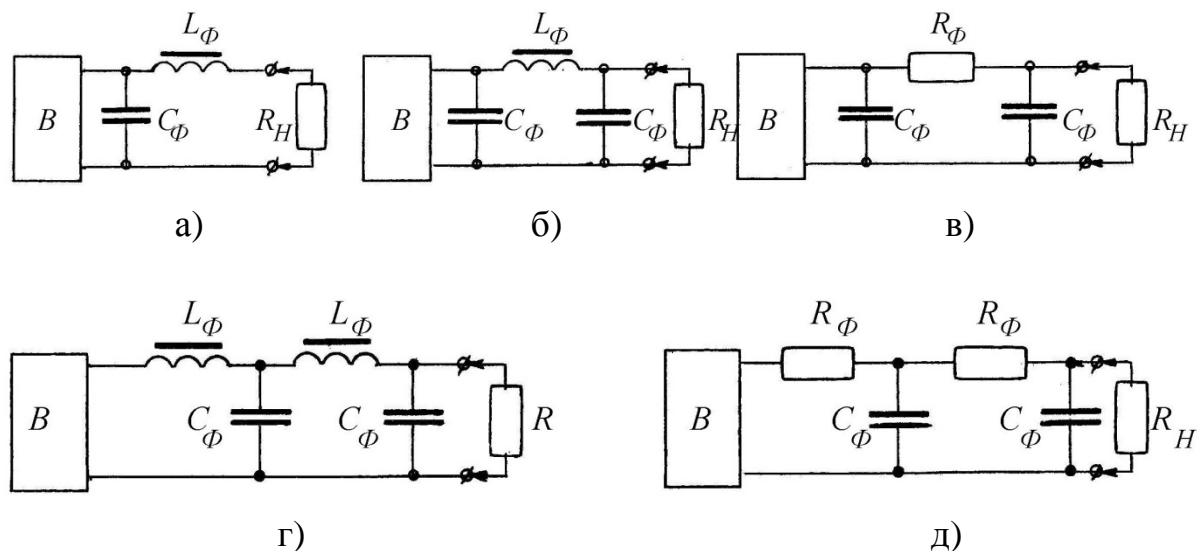


Рис.16.6.2

Коэффициент сглаживания  $k_C$  многозвенного фильтра равен произведению коэффициентов сглаживания  $k_{Ci}$  отдельных звеньев:

$$k_C = k_{C1} \cdot k_{C2} \cdot \dots \cdot k_{CN}.$$

Однако следует иметь в виду, что увеличение числа звеньев выше трёх неэффективно, поскольку сопровождается резким увеличением потерь мощности.

## 16.7. Влияние сглаживающих фильтров на внешнюю характеристику выпрямителей

В отсутствие сглаживающих фильтров зависимость напряжения на нагрузке от времени  $u_H(t)$  для маломощных выпрямителей двухполупериодных однофазных выпрямителей имеет вид однополярных полуволн напряжения  $u_2(t)$ . Если пренебречь активными сопротивлениями обмоток трансформатора, соединительных проводов и вентилях при прямом включении, то есть считать падение напряжения на элементах схемы равным нулю, постоянная составляющая напряжения на нагрузке  $U_0$  связана с действующим значением напряжения  $U_2$  на выводах вторичных обмоток трансформатора соотношением  $U_0 = 0,9 \cdot U_2$ .

Для реальной схемы это соотношение справедливо при токе нагрузки, равном нулю ( $I_0 = 0$ ). На рис.16.7.1 напряжение на нагрузке в режиме холостого хода, то есть в отсутствие тока в нагрузке, отмечено индексом «х» и обозначено сплошной линией.

Если ток нагрузки отличен от нуля ( $I_0 > 0$ ), на элементах схемы (обмотках трансформатора, вентилях, соединительных проводах) создаются падения напряжения. Это приводит к уменьшению постоянной составляющей выпрямленного напряжения  $U_0$  и мгновенных значений напряжения  $u_H(t)$  на нагрузке (обозначены без индекса «х» на рис.16.7.1 - пунктирная линия).

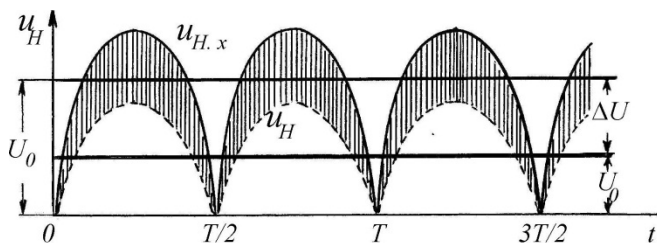


Рис.16.7.1

Увеличение тока  $I_0$  в нагрузке приводит к возрастанию падения напряжения на элементах схемы, а следовательно, к уменьшению значения постоянной составляющей выпрямленного напряжения на нагрузке  $U_0$ . Поэтому на графике внешней характеристики выпрямителя без сглаживающего фильтра увеличение силы тока в нагрузке  $I_0$  сопровождается уменьшением напряжения  $U_0$  от значения  $U_0 = 0,9 \cdot U_2$  до нуля (линия 1 на рис.16.7.2). Нелинейный вид зависимости  $U_0 = f(I_0)$  объясняется нелинейностью вольтамперных характеристик вентиля.

Зависимость  $U_0$  от тока нагрузки описывается выражением:

$$U_0 = U_{0x}(I = 0) - \Delta U, \quad (16.7.1)$$

где  $\Delta U$  – среднее за период падение напряжения (рис.16.7.1) на элементах схемы, обусловленное протеканием тока в цепи.

Вид внешней характеристики, в частности её наклон к оси абсцисс зависит от типа используемого трансформатора, а именно активных сопротивлений его первичной и вторичной обмоток. Повышение активных сопротивлений обмоток трансформатора приводит к увеличению угла наклона графиков зависимости  $U_0 = f(I_0)$ .

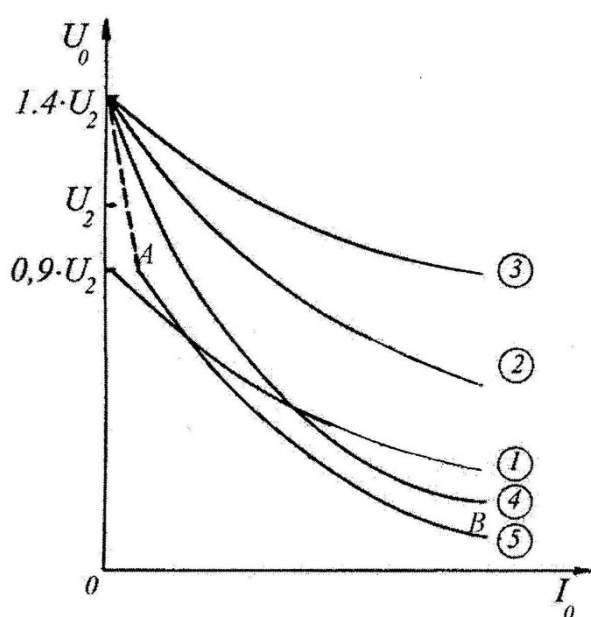


Рис.16.7.2

звано, главным образом, ускорением процесса разрядки конденсатора вследствие уменьшения постоянной времени  $\tau$ . В пределе  $I_0 \rightarrow \infty$  линии 1 и 2 графика сливаются по мере приближения к оси абсцисс.

Существенное влияние на внешнюю характеристику выпрямителя с ёмкостным фильтром оказывает ёмкость  $C_\phi$  конденсатора. С увеличением ёмкости  $C_\phi$  постоянная времени  $\tau = C_\phi \cdot R_H$  возрастает, поэтому для фильтров с большей ёмкостью  $C_\phi$  внешняя характеристика оказывается менее крутой (линии 2 и 3 на рис.16.7.2 соответствуют фильтрам с ёмкостями  $C_{\phi 2}$  и  $C_{\phi 3}$  соответственно, причём  $C_{\phi 2} < C_{\phi 3}$ ).

Уменьшение сопротивления нагрузки  $R_H$  вызывает уменьшение пульсаций, поэтому ёмкостный фильтр целесообразно применять с высокоомным нагрузочным резистором  $R_H$  при мощности нагрузки не превышающей нескольких десятков ватт.

Внешняя характеристика выпрямителя с Г-образным  $RC$  – фильтром (линия 4 на рис.16.7.2) имеет более крутой наклон, чем линии 2 и 3. Это вызвано дополнительным падением напряжения на резисторе  $R_\phi$  фильтра, включённом последовательно с нагрузкой.

Внешняя характеристика с Г-образным  $LC$ -фильтром состоит из двух участков: полого (сплошная линия 5 на рис.16.7.2) и крутого (пунктирная линия). Отрезок  $AB$  линии 5 является рабочим участком внешней характеристики. Без учёта падений напряжения в схеме величина  $U_0$  выпрямителя с  $LC$ -фильтром и без фильтра равна  $0,9 \cdot U_2$ . Наклон внешней характеристики с  $LC$ -фильтром больше, чем без фильтра, вследствие дополнительного падения напряжения в активном сопротивлении дросселя.

Внешняя характеристика выпрямителя с ёмкостным фильтром пересекает ось абсцисс в точке  $U_{0x} = \sqrt{2} \cdot U_2 = 1,41 \cdot U_2$ , поскольку в отсутствие тока в нагрузке конденсатор фильтра  $C_\phi$  заряжается до амплитудного значения напряжения  $U_{2max} = 1,4 \cdot U_2$  (линия 2 на рис.16.7.2). При увеличении силы тока  $I_0$ , что может быть вызвано уменьшением сопротивления нагрузки  $R_H$ , уменьшается постоянная времени разрядки конденсатора  $\tau = C_\phi \cdot R_H$ . Поэтому наблюдаемое на рис.16.7.2. (линия 2) уменьшение напряжения  $U_0$  с ростом силы тока  $I_0$  вы-

## 16.8. Физические принципы инвертирования

При решении ряда технических задач возникает необходимость преобразования постоянного тока в переменный. Этот процесс осуществляют устройства, называемые инверторами. Например, инверторы используются в установках гарантированного питания. Структурная схема такой установки содержит выпрямитель  $И1$ , инвертор  $И2$  и аккумуляторную батарею  $АБ$  (рис.16.8.1). При нормальном режиме питания напряжение на инвертор  $И2$  подается от выпрямителя  $И1$ . Аккумуляторная батарея отключена. При отключении напряжения внешней сети переменного тока инвертор получает питание от аккумуляторной батареи. После восстановления напряжения внешней сети (включения дизель – электростанции (ДЭС) инвертор  $И2$  вновь получает питание от выпрямителя  $И1$ .

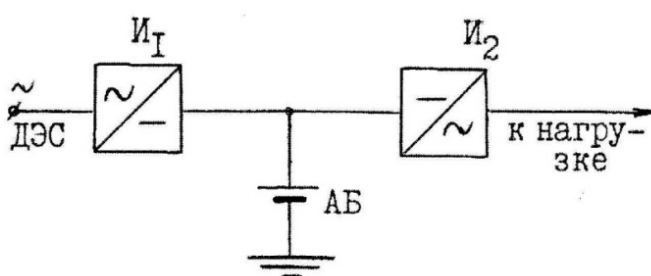


Рис.16.8.1

**Инвертированием тока** называется процесс преобразования постоянного тока в переменный, то есть процесс, обратный выпрямлению тока. При инвертировании электрическая энергия передаётся от источника постоянного тока в цепь переменного тока.

Установки средней и большой мощности, применяемые для преобразования одного рода тока в другой, используются на электрифицированном транспорте, в системах передачи постоянного тока на большие расстояния, в промышленных электроприводах и грузоподъемных механизмах, в преобразователях частоты и в других устройствах.

Для электропривода постоянного тока в транспортных и грузоподъемных установках характерно чередование инверторного и выпрямительного режимов (рис.16.8.2). В режиме двигателя преобразователь работает как выпрямитель, питающий двигатель постоянного тока (рис.16.8.2.а). При торможении двигатель переходит в режим генератора, а преобразователь становится инвертором и передает энергию генератора постоянного тока в сеть переменного тока (рис.16.7.2.б). В этом случае происходит *рекуперативное* (от латинского *recuperatio* – *возвращение*) торможение двигателя, при котором часть энергии, переданной сетью двигателю постоянного тока, возвращается в питающую сеть.

Входным устройством инверторов, как правило, является трансформатор, параметры которого определяют число фаз и амплитуду получаемого переменного тока. Для получения переменного тока необходимо изменять ток в обмотках трансформатора, прерывая постоянный ток и распределяя его с помощью управляемых вентилях.

В качестве вентиля в настоящее время применяют бесконтактные ключи – транзисторы и тиристоры, благодаря чему КПД инверторов может достигать 99%.

Инверторы, в которых используются полупроводниковые ключи, имеют малые габариты, массу, стоимость и большой срок службы.

Инверторы классифицируют по ряду признаков, основными из которых являются: 1) тип коммутирующих приборов (тиристорные и транзисторные инверторы); 2) принцип коммутации (ведомые сетью и автономные инверторы).

Тиристорные инверторы характеризуются большой выходной мощностью, поскольку современные тиристоры способны работать при напряжениях до нескольких киловольт и пропускать токи до сотен ампер, чего нельзя сказать о транзисторах. Транзисторные инверторы могут быть малой или средней мощности, не превышающей нескольких киловатт.

В зависимости от способа коммутации различают два вида инверторных установок. В инверторах, ведомых сетью, коммутация и частота выходного сигнала обеспечиваются приемной сетью переменного тока. Такие инверторы являются преобразовательными установками с управляемыми вентилями, в которых инверторный режим может чередоваться с выпрямительным. Автономные инверторы осуществляют преобразование постоянного тока в переменный с неизменной или регулируемой частотой и работают на автономную нагрузку. Частота переменного напряжения на выходе автономных инверторов определяется частотой питающих сигналов.

В преобразовательных установках инверторный режим может чередоваться с выпрямительным.

Для того чтобы определить условия, при которых в преобразователях достигается обращение потока мощности, рассмотрим цепь постоянного тока, содержащую два источника: аккумуляторную батарею с ЭДС  $E_a$  и генератор постоянного тока, развивающий ЭДС  $E_d$  (рис.16.8.3). Электродвижущие силы источников направлены встречно, и ток  $I$  в цепи определяется разностью ЭДС ( $E_d - E_a$ ) и активным сопротивлением  $R$  электрической цепи:

$$I = \frac{E_a - E_d}{R}. \quad (16.8.1)$$

Если ЭДС аккумулятора больше, чем ЭДС генератора ( $E_a > E_d$ ), то ток в цепи, показанный на рис.16.8.3 сплошной стрелкой, совпадает по

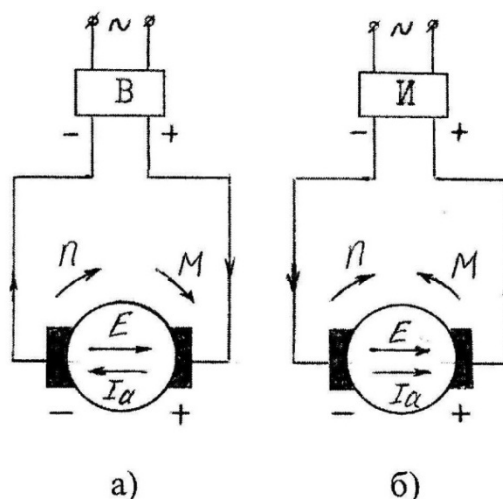


Рис.16.8.2

направлению с ЭДС  $E_a$ . При этом аккумулятор отдает мощность, то есть разряжается, а генератор потребляет ее и работает в режиме двигателя. Если к генератору приложить вращающий момент, достаточный для того, чтобы его ЭДС превысила значение  $E_a$  ( $E_d > E_a$ ), то ток в цепи изменит свое направление на противоположное, показанное на рис.16.8.3 пунктирной стрелкой. Теперь генератор, направление ЭДС которого совпадает с направлением тока, отдает свою мощность в цепь, а аккумулятор принимает эту мощность, то есть заряжается. Таким образом, источник энергии, направление ЭДС которого совпадает с направлением протекающего через него тока, отдает свою мощность в цепь. Если же направления тока в ис-

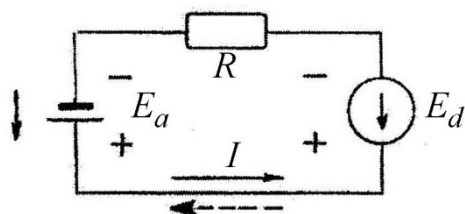


Рис.16.8.3

точнике и его ЭДС противоположны, то источник принимает мощность цепи. Следовательно, в общем случае для изменения направления потока мощности необходимо изменить или направление тока при неизменных направлениях ЭДС, или направления ЭДС при неизменном направлении тока.

Если в рассматриваемой схеме заменить аккумуляторную батарею  $E_a$  генератором переменного тока с ЭДС  $e_{\sim}$  или трансформатором, то для передачи мощности в нужном направлении в схему необходимо ввести управляемый вентиль (тиристор), полярность включения которого определяет проводящее направление в цепи (рис.16.8.4.а,в).

В момент времени  $t_1$ , когда ЭДС  $e_{\sim}$  достигает значения  $E_d$ , что соответствует углу управления  $\alpha = \omega \cdot t$  (рис.16.8.4.б), вентиль схемы рис. 4.8.4.а открывается, и начинается процесс выпрямления тока, так как направления  $i_n$  и  $e_{\sim}$  совпадают, а направления  $i_n$  и  $E_d$  противоположны. Индуктивный элемент  $L_n$  схемы поддерживает первоначальное направление тока  $i_n$  в течение промежутка времени  $\Delta t$  после того, как ЭДС генератора переменного тока  $e_{\sim}$  станет меньше, чем  $E_d$ , благодаря энергии, накопленной магнитным полем индуктивной катушки  $L_n$ .

Таким образом, индуктивность  $L_n$  способствует увеличению продолжительности протекания тока  $i_n$  в цепи, и следовательно, повышает среднее значение мощности, передаваемой приемнику энергии  $E_d$ .

Для перехода к режиму инвертирования при неизменном направлении тока  $i_n$  в цепи необходимо изменить полярность включения постоянного источника  $E_d$  (рис.16.8.4.в) и увеличить угол управления  $\alpha$  до значений, превышающих  $180^\circ$ , когда полярность ЭДС  $e_{\sim}$  также изменится (рис.16.8.4.г). В этом случае направление тока  $i_n$  в цепи совпадает с направлением ЭДС генератора постоянного тока и противоположно направлению ЭДС  $e_{\sim}$ , что соответствует передаче энергии источника  $E_d$  в сеть переменного тока, то есть режиму инвертирования. На первом этапе



335

ной точкой, а соответствующий ей угол  $\alpha_{cp}$  называется *граничным углом управления*.

## 16.9. Автономные инверторы

**Автономные инверторы** – устройства, преобразующие постоянный ток в переменный с неизменной или регулируемой частотой и работающие на автономную нагрузку, то есть не связанную с сетью переменного тока. В этом главное отличие автономных инверторов от инверторов, ведомых сетью, также преобразующих постоянный ток в переменный, но работающих на сеть переменного тока. Нагрузкой автономного инвертора может быть единичный потребитель или разветвленная сеть потребителей.

Автономные инверторы применяют в тех случаях, когда необходимо:

- 1) получить переменный ток требуемой частоты в установках с первичными источниками постоянного тока (аккумуляторами, солнечными батареями и другими), на электрифицированном транспорте, в электроприводе;
- 2) преобразовывать постоянное напряжение одного значения в постоянное напряжение требуемого значения (конвертеры);
- 3) получать переменный ток высокой частоты для электротехнических установок или преобразовывать переменный ток частотой  $400 \text{ Гц}$  в ток частотой  $50 \text{ Гц}$  и ток частотой  $50 \text{ Гц}$  в ток частотой  $12 \div 15 \text{ Гц}$  для тихоходных двигателей.

По способу преобразования автономные инверторы, так же как и выпрямители, подразделяют на инверторы с выводом нейтральной точки трансформатора и мостовые. В отличие от инвертора с выводом нейтральной точки мостовой инвертор допускает бестрансформаторное включение нагрузки.

В зависимости от способа получения выходной частоты различают инверторы с поочередной коммутацией и с широтно-импульсной модуляцией.

### 16.9.1. Автономные инверторы с поочередной коммутацией

Принцип действия автономного инвертора основан на использовании вентильного переключающего устройства, которое может быть использовано для однофазных и трёхфазных схем.

Структурная схема автономного инвертора с поочередной коммутацией (рис.16.9.1) содержит управляемый выпрямитель ( $VB$ ), инвертор ( $I$ ), систему управления выпрямителем ( $CVB$ ) и систему управления инвертором ( $CVI$ ).

В зависимости от характера связи с источником питания автономные инверторы подразделяют на инверторы тока и инверторы напряжения.

Инвертор тока (рис.16.9.2) питается от источника постоянной ЭДС через дроссель большой индуктивности  $L_0$ , вследствие чего ток во входной цепи инвертора при коммутации тиристоров практически не изменяется.

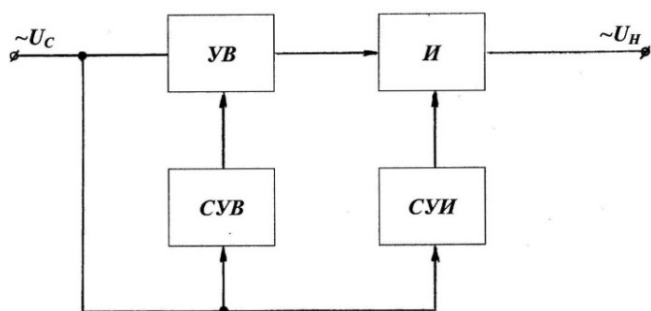


Рис.16.9.1

Инвертор напряжения подключается непосредственно к источнику питания (рис.16.9.3). Параллельно входу инвертора напряжения подключается конденсатор большой емкости  $C_0$ , который обеспечивает при коммутации тиристоров постоянство напряжения на инверторе.

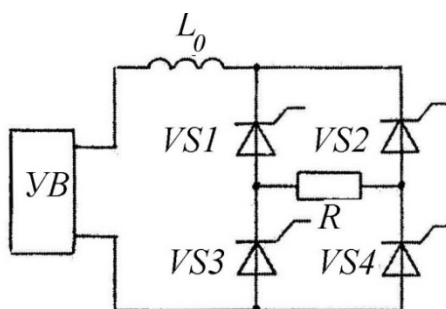


Рис.16.9.2

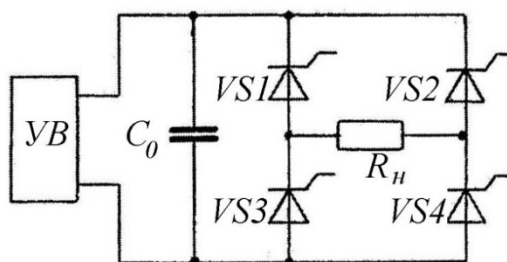


Рис.16.9.3

При открывании тиристоров  $VS1$  и  $VS4$  (рис. 16.9.2, рис. 16.9.3) на нагрузке  $R_n$  формируется положительная половина волны (полупериод) переменного напряжения длительностью  $t_1$  (рис.16.9.4, здесь  $t_1$  – продолжительность работы тиристоров  $VS1$  и  $VS4$ ).

При открывании тиристоров  $VS2$  и  $VS3$  на нагрузку подается отрицательная половина волны напряжения длительностью  $t_2$ .

Управление тиристорами осуществляется с помощью системы управления инвертором ( $СУИ$ ), причем изменяя продолжительность работы тиристоров ( $t_1$  и  $t_2$ ), можно плавно регулировать частоту ( $f_n$ ) напряжения на нагрузке в широких пределах. Изменяя величину выходного напряжения управляемого выпрямителя ( $УВ$ ), можно плавно регулировать амплитуду выходного напряжения ( $U_n$ ) инвертора.

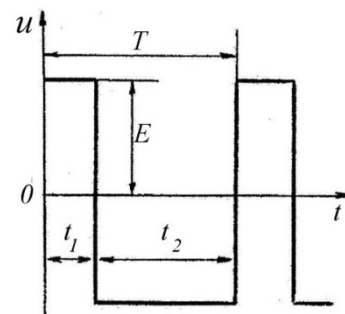


Рис.16.9.4

К достоинствам инверторов с поочередной коммутацией относятся широкий диапазон изменения частоты и амплитуды выходного напряжения, а также возможность плавно регулировать частоту.

К недостаткам следует отнести сложность схемы управления инвертором и наличие высших гармоник в выходном напряжении.

### 16.9.2. Автономные инверторы с широтно-импульсной модуляцией

В отличие от инверторов с поочередной коммутацией инверторы с широтно-импульсной модуляцией имеют постоянную частоту коммутации тиристоров и содержат неуправляемый выпрямитель.

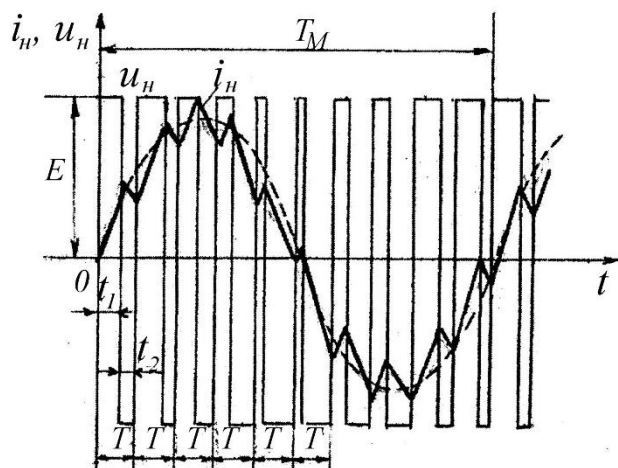


Рис.16.9.5

В инверторе с поочередной коммутацией частота выходного напряжения  $f=1/T$  регулируется путем изменения времени  $T=t_1+t_2$  (рис.16.9.4, рис.16.9.5). Как видно из рис.16.9.4, среднее за период значение выходного напряжения равно

$$U_{н.ср.} = E \cdot \frac{t_1 - t_2}{T},$$

где  $E$  – выходное напряжение выпрямителя.

В инверторах с широтно-импульсной модуляцией  $T=t_1+t_2=const$ , а соотношение между

$t_1$  и  $t_2$  может изменяться по любому закону.

В частности, для получения на выходе синусоидального напряжения соотношение между  $t_1$  и  $t_2$  должно изменяться по следующему закону:

$$\frac{t_1 - t_2}{T} = \mu \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

где  $\mu$  – глубина модуляции ( $0 \leq \mu \leq 1$ ),  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f_M$  – частота модуляции. Тогда напряжение на нагрузке определяется выражением:

$$U_{н.ср.} = \mu \cdot E \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Следовательно, при неизменном напряжении выпрямителя амплитуда среднего значения выходного напряжения инвертора определяется глубиной модуляции, а частота выходного напряжения – частотой модуляции.

Частота коммутации тиристоров ( $f_K$ ) в инверторах с широтно-импульсной модуляцией выбирается, как правило, на порядок больше частоты выходного напряжения ( $f_{Mmax}$ ).

Достоинствами инверторов с широтно-импульсной модуляцией являются широкий диапазон значений напряжения на выходе, возможность плавной регулировки частоты и получения синусоидальной формы тока в нагрузке.

### 17.1. Основные показатели усилителей

При решении многих инженерных задач, например, при измерении физических величин, контроле и автоматизации технических процессов возникает задача усиления электрических сигналов. Для достижения этой цели используют усилительные устройства, предназначенные для усиления тока, напряжения или мощности.

**Усилителем** называется устройство, предназначенное для увеличения параметров электрических сигналов: напряжения, силы тока или мощности.

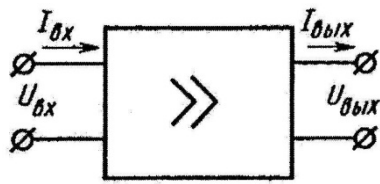


Рис.17.1.1

Усилители содержат входную цепь, в которую подаётся усиливаемый сигнал, и выходную цепь, с зажимов которой сигнал поступает в нагрузку (рис.17.1.1). В схемах современных усилителей обычно используют биполярные или полевые транзисторы, интегральные микросхемы.

Усилители на микросхемах обладают высокой надёжностью, большим быстродействием, имеют малую массу и отличаются высокой чувствительностью. Они позволяют усиливать слабые электрические сигналы: напряжение порядка  $10^{-13}$  В, токи до  $10^{-17}$  А, мощность порядка  $10^{-24}$  Вт.

При увеличении амплитуды электрических сигналов возникают отклонения формы сигнала на выходе от формы входного сигнала, которые называют **искажениями сигнала**. Свойства усилителя и вносимые им искажения характеризуют рядом параметров, которые называют показателями усилителя. Ниже приведены основные параметры усилителей.

**1. Коэффициент усиления** равен отношению амплитуды (или действующего значения) сигнала на выходе к амплитуде (или действующему значению) сигнала на входе усилителя:

- **коэффициент усиления по напряжению** равен отношению комплексного действующего значения напряжения сигнала на выходе усилителя  $\dot{U}_{\text{ВЫХ}}$  к комплексному действующему значению напряжения, поступающего на вход усилителя  $\dot{U}_{\text{ВХ}}$ :

$$k_U = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{U_{\text{ВЫХ}} \cdot e^{j\varphi_{\text{ВЫХ}}}}{U_{\text{ВХ}} \cdot e^{j\varphi_{\text{ВХ}}}} = k_U \cdot e^{j\varphi_U}, \quad (17.1.1)$$

где

$$k_U = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}}, \quad \varphi_U = \varphi_{\text{ВЫХ}} - \varphi_{\text{ВХ}}.$$

- **коэффициент усиления по току** равен отношению комплексного действующего значения силы тока на выходе усилителя  $\dot{I}_{\text{ВЫХ}}$  к комплексному действующему значению силы тока на входе усилителя  $\dot{I}_{\text{ВХ}}$ :

$$\dot{k}_I = \frac{\dot{I}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{I}_{\text{ВХ}}} = \frac{I_{\text{ВЫХ}} \cdot e^{j\varphi_{\text{ВЫХ}}}}{I_{\text{ВХ}} \cdot e^{j\varphi_{\text{ВХ}}}} = k_I \cdot e^{j\varphi_I}, \quad (17.1.2)$$

- **коэффициент усиления по мощности** равен отношению активной мощности в выходной цепи усилителя  $P_{\text{ВЫХ}}$  к значению активной мощности на входе усилителя  $P_{\text{ВХ}}$ :

$$k_P = \frac{P_{\text{ВЫХ}}}{P_{\text{ВХ}}} = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} \cdot \frac{\dot{I}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{I}_{\text{ВХ}}} = \dot{k}_U \cdot \dot{k}_I. \quad (17.1.3)$$

Коэффициенты усиления напряжения  $\dot{k}_U$  и тока  $\dot{k}_I$  – комплексные величины, поскольку реактивные элементы в цепи усилителя вызывают фазовый сдвиг входных и выходных напряжений и токов друг относительно друга. Коэффициент усиления мощности – действительное число.

**2. Коэффициент полезного действия усилителя  $\eta$**  – это отношение выходной мощности, подаваемой в нагрузку ( $P_{\text{ВЫХ}}$ ), к общей мощности ( $P_0$ ), потребляемой усилителем:

$$\eta = \frac{P_{\text{ВЫХ}}}{P_0} \cdot 100\%. \quad (17.1.4)$$

### 3. Входное сопротивление усилителя

$$R_{\text{ВХ}} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{I_{\text{ВХ}}} -$$

сопротивление со стороны входных зажимов усилителя переменному току.

**4. Выходное сопротивление усилителя** определяется со стороны выходных зажимов при отключённой нагрузке.

**Линейные искажения** усилителя характеризуют отличие формы сигнала на выходе усилителя от формы входного сигнала. Линейные искажения вызваны наличием в схеме усилителя реактивных элементов - конденсаторов и индуктивных катушек, сопротивление которых зависит от частоты. Поскольку конденсаторы и индуктивные катушки – линейные элементы, вызываемые ими искажения называют линейными искажениями.

Входной сигнал произвольной формы можно представить как сумму гармонических составляющих сигнала, имеющих различные частоты, которые усиливаются неодинаково, то есть с различными коэффициентами усиления. Такие искажения называют **частотными искажениями**. Кроме

того, время прохождения через усилитель гармонических составляющих сигнала зависит от частоты составляющей. Это приводит к временным сдвигам составляющих сигнала на выходе усилителя, то есть возникают искажения, называемые **частотными искажениями**. Поэтому работа усилителей определяется рядом характеристик.

**1. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)** – это зависимость модуля коэффициента усиления  $|\dot{k}| = k$  от частоты  $f$  усиливаемого сигнала (рис.17.1.2). Если бы в усилителе не было искажений, АЧХ представляла бы прямую линию, параллельную оси абсцисс (сплошная горизонтальная линия на рис.17.1.2). То есть коэффициент усиления  $k$  не зависел бы от частоты.

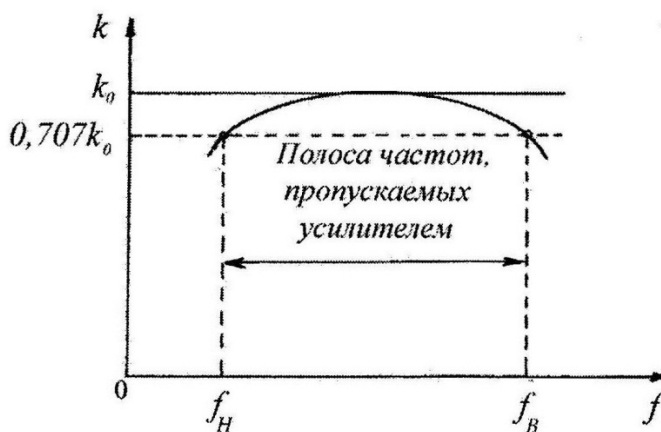


Рис.17.1.2

Диапазон частот, в пределах которого усилитель обеспечивает заданное значение модуля коэффициента усиления, называется **полосой пропускания**. Диапазон частот пропускания определяется нижней  $f_H$  и верхней  $f_B$  граничной частотой. Граничные частоты соответствуют значению коэффициента усиления, составляющего 70,7% от максимальной величины  $k_0$  (рис.17.1.2). Например, в телефонной связи используются частоты в диапазоне от  $f_H=300$  Гц до  $f_B=3400$  Гц.

Частотные искажения, вносимые усилителем на частоте  $f$ , характеризуются **коэффициентом частотных искажений**:

$$M = \frac{k_0}{k_f}. \quad (17.1.5)$$

Здесь  $k_f$  – коэффициент усиления на частоте  $f$ . Если  $M=1$ , то частотных искажений нет. Увеличение значения  $M$  приводит к росту искажений, вносимых усилителем. Коэффициент частотных искажений, определяемый формулой (17.1.5), не имеет размерности. Наряду с этим коэффициент частотных искажений может быть выражен и в логарифмических единицах:

$$M_{дБ} = 20 \cdot \lg M. \quad (17.1.6)$$

В этом случае коэффициент частотных искажений выражается в **децибелах (дБ)**. **1 дБ** – коэффициент частотных искажений, для которого выполняется соотношение:  $20 \cdot \lg M = 1$ .

В многокаскадных схемах  $M = M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_N$ , где  $N$  – число усилительных каскадов в схеме.

1. Фазовые искажения оцениваются с помощью фазо-частотной характеристики.

**Фазо-частотная характеристика** – это зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами от частоты (рис.17.1.3).

Наличие фазового сдвига приводит к фазовым искажениям. Они обусловлены теми же причинами, что и частотные искажения. Фазо-частотная характеристика идеального усилителя представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат:  $\varphi = -\omega \cdot \tau = -2 \cdot \pi \cdot \tau$  (пунктирная линия на рис.17.1.3).

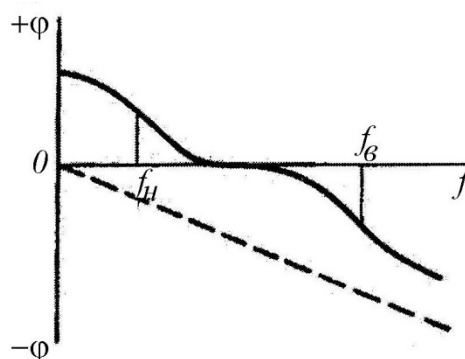


Рис.17.1.3

Поскольку фазовые искажения вызваны наличием в схеме усилителя реактивных элементов, которые являются линейными элементами электрической цепи, эти искажения называют также линейными искажениями.

2. **Динамический диапазон** определяет диапазон напряжений сигнала, которые усилитель может увеличить без внесения помех и искажений сверх нормы. Динамический диапазон  $D_{yc}$  равен отношению максимального напряжения входного сигнала  $U_{BX, max}$  к его минимальному напряжению  $U_{BX, min}$ :

$$D_{yc} = \frac{U_{BX, max}}{U_{BX, min}}. \quad (17.1.7)$$

Обычно  $D_{yc}$  выражают в децибелах:

$$D_{yc, дБ} = 20 \cdot \lg D_{yc}.$$

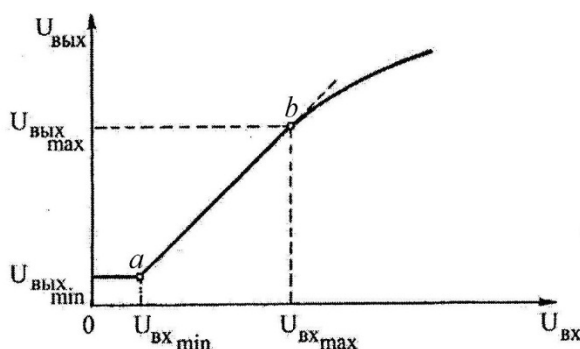


Рис.17.1.4

3. Динамический диапазон усилителя определяют по его амплитудной характеристике.

**Амплитудной характеристикой** усилителя называется зависимость амплитуды (или действующего значения) выходного напряжения усилителя от амплитуды (или действующего значения) его входного напряжения на некоторой частоте (рис.17.1.4).

Из амплитудной характеристики (рис.17.1.4) следует, что при  $U_{BX}=0$  напряжение на выходе отлично от нуля  $U_{ВЫХ} \neq 0$ . Значение  $U_{ВЫХ, min}$  (при  $U_{BX}=0$ ) определяется уровнем собственных шумов усилителя. Шумы в усилителе обусловлены в основном шумами его активных и пассивных

элементов, причиной которых являются пульсации напряжения источника питания, а также неоднородность структуры материалов элементов и непостоянство электрических процессов во времени.

Линейный участок амплитудной характеристики (участок *ab* на рис.17.1.4) называют динамическим диапазоном, который определяется формулой (17.1.7).

**4. Переходная характеристика.** В усилителях импульсных сигналов линейные искажения вызваны переходными процессами в цепях усилителя, содержащих реактивные элементы, а также инерционностью элемента, усиливающего электрический сигнал. Эти искажения называют переходными искажениями и оценивают с помощью переходных характеристик.

**Переходной характеристикой** называют временную зависимость мгновенного значения напряжения на выходе усилителя при воздействии на вход усилителя скачка напряжения.

На рис.17.1.5.а показан импульс напряжения, поступающий на вход усилителя в момент времени  $t_1$ . Переходная характеристика приведена на рис.17.1.5.б. Переходные искажения подразделяют на искажения фронтов и искажения вершин импульса. Здесь  $t_3$  – время запаздывания,  $t_H$  – время нарастания импульса,  $t_{СП}$  – время спада импульса, после чего устанавливается неизменное напряжение  $U_{ВЫХ}$ .

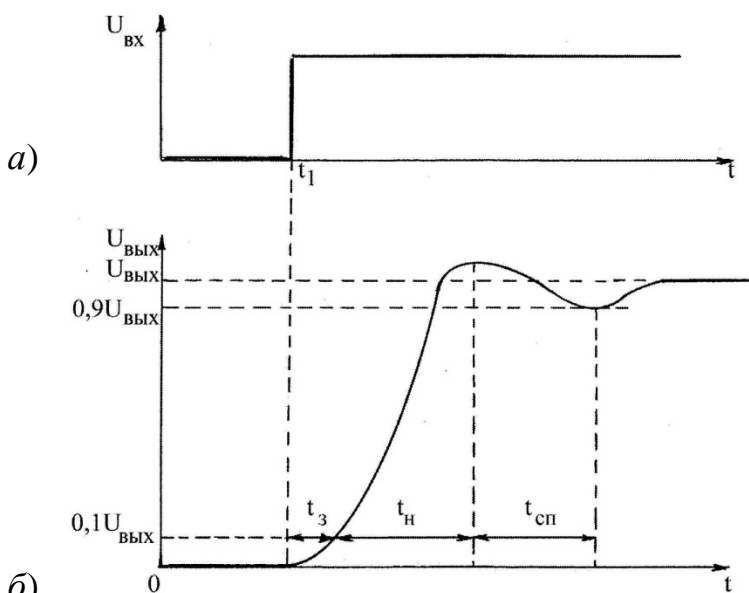


Рис.17.1.5

Допустимые переходные искажения зависят от назначения усилителя и указываются в технических требованиях к усилителю.

**4. Собственные шумы** усилителя – это сигналы на выходе усилителя в отсутствие усиливаемых сигналов на его входе. Напряжение собственных шумов усилителя ограничивает его чувствительность. Наличие шумов не позволяет усиливать малые сигналы – усиливаемые сигналы должны существенно превышать шумы.

Собственные шумы возникают в основном вследствие теплового беспорядочного движения электронов в элементах схемы и хаотического теплового движения зарядов в области базы биполярных транзисторов.

Собственные шумы оценивают по **коэффициенту шума**, равному отношению мощности шума на входе усилителя  $P_{ш.ВЫХ}$  к мощности шума на его входе  $P_{ш.ВХ}$ , умноженному на коэффициент усиления мощности  $k_P$ :

$$F_{ш} = \frac{P_{ш.ВЫХ}}{P_{ш.ВХ}} \cdot k_P. \quad (17.1.8)$$

## 17.2. Классификация усилителей

В зависимости от выполняемых функций различают:

- усилители напряжения, которые характеризуются коэффициентом усиления напряжения:

$$k_U = \frac{U_{ВЫХ}}{U_{ВХ}},$$

- усилители тока, которые характеризуются коэффициентом усиления тока:

$$k_I = \frac{I_{ВЫХ}}{I_{ВХ}},$$

- усилители мощности, которые характеризуются коэффициентом усиления мощности:

$$k_P = \frac{P_{ВЫХ}}{P_{ВХ}} = \frac{U_{ВЫХ}}{U_{ВХ}} \cdot \frac{I_{ВЫХ}}{I_{ВХ}} = k_U \cdot k_I.$$

Усилители могут иметь различные значения коэффициента усиления напряжения и тока, но коэффициент усиления мощности всегда больше единицы. То есть устройство, у которого  $k_U < 1$  и  $k_I < 1$ , не является усилителем.

Все усилители можно разделить на два класса: с линейным и нелинейным режимом работы.

*Усилителями с линейным режимом работы* называются устройства, у которых форма сигнала на выходе полностью совпадает с формой входного сигнала.

Одним из основных показателей усилителей с линейным режимом работы является **амплитудно-частотная характеристика**, которая отражает зависимость модуля коэффициента усиления  $k_U$  от частоты увеличиваемого сигнала.

В зависимости от вида амплитудно-частотной характеристики усилители с линейным режимом работы подразделяют на:

- усилители постоянного тока (УПТ), увеличивающие амплитуду сигнала низкой частоты ( $f < f_B$ );

- усилители звуковых частот (УЗЧ), работающие в диапазоне частот  $f_H < f < f_B$ , где верхняя  $f_B = 20$  кГц и нижняя  $f_H = 15$  Гц частота соответствуют верхней и нижней границе звукового диапазона;

- усилители высокой частоты (УВЧ), которые имеют полосу пропускания от десятков килогерц до сотен мегагерц;
- широкополосные усилители (ШПУ), имеющие нижнюю предельную частоту такую же, как усилители звуковой частоты  $f_H=15 \text{ Гц}$ , а верхнюю – как у УВЧ;
- узкополосные усилители (УПУ) характеризуются узкой полосой пропускания (рис.17.2.1).

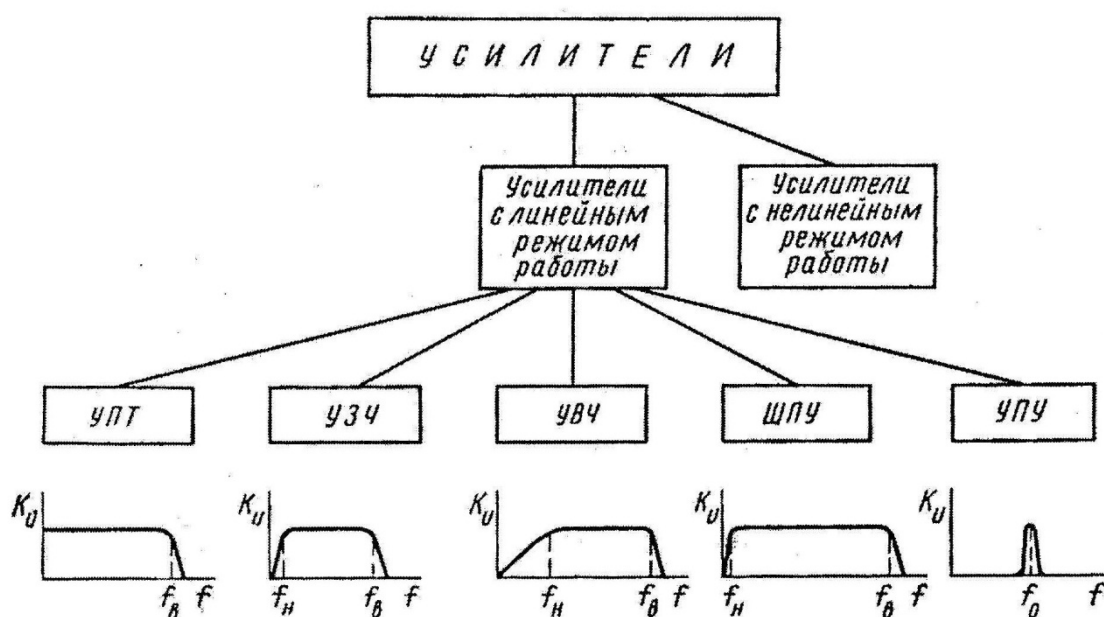


Рис.17.2.1

Усилителями с **нелинейным режимом работы** называются устройства, у которых отсутствует пропорциональность сигнала на выходе и входного сигнала.

После достижения некоторого значения напряжения входного сигнала дальнейшее увеличение сигнала на входе не вызывает изменения выходного сигнала.

Усилители с нелинейным режимом работы применяются для преобразования меняющего входного сигнала (например, синусоидального) в импульсный сигнал.

### 17.3. Принцип построения усилительных каскадов

Многие усилители электрических сигналов состоят из нескольких ступеней, осуществляющих последовательное усиление сигнала и называемых усилительными каскадами. Число каскадов зависит от требуемых значений коэффициентов усиления тока  $k_I$ , напряжения  $k_U$  или мощности  $k_P$ . В зависимости от выполняемых функций усилительные каскады подразделяют на каскады предварительного усиления и выходные каскады.

**Каскады предварительного усиления** предназначены для увеличения напряжения сигнала, **выходные каскады** – для получения требуемой силы тока или мощности.

Схемы усилительных каскадов разнообразны и отличаются числом и режимом работы используемых в них транзисторов. Однако принцип построения главной цепи усилительных каскадов одинаков.

Рассмотрим принцип построения усилительных каскадов на примере структурной схемы усилительного каскада на одном транзисторе (рис.17.3.1.а).

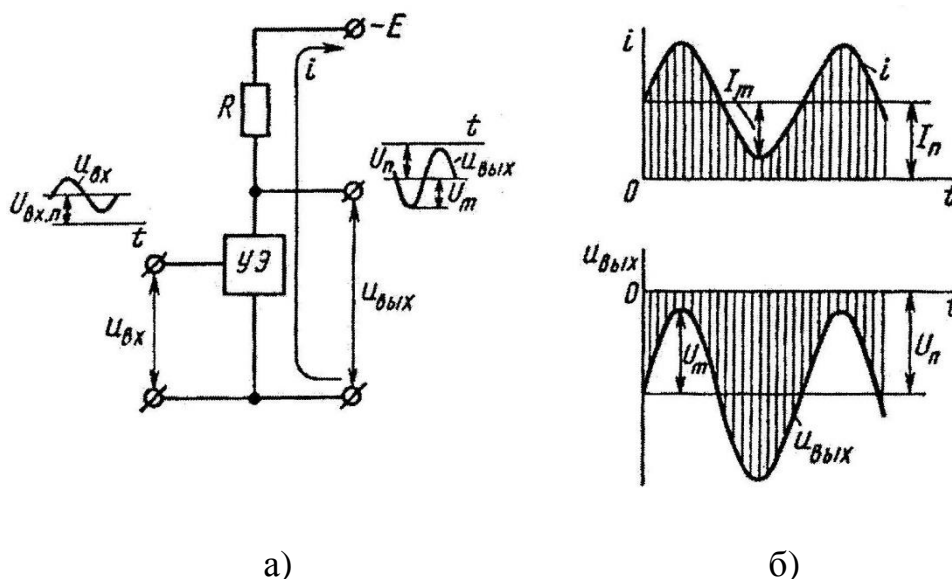


Рис.17.3.1

Основными элементами усилительного каскада являются управляемый элемент УЭ, функцию которого выполняет полевой или биполярный транзистор и резистор  $R$ . Управляемый элемент УЭ и резистор  $R$  совместно с источником питания  $E$  образуют **выходную цепь каскада**.

Усиливаемый сигнал  $u_{BX}$  синусоидальной формы подаётся на вход управляемого элемента УЭ (рис.17.3.1.а). Выходной сигнал  $u_{ВЫХ}$  создаётся в результате изменения сопротивления управляемого элемента УЭ и снимается с резистора  $R$  или с выхода управляемого элемента УЭ, что вызывает изменение силы тока  $i$  в выходной цепи.

**Процесс усиления основан на преобразовании энергии источника постоянного напряжения  $E$  в энергию переменного напряжения в выходной цепи вследствие изменения электрического сопротивления управляемого элемента УЭ по закону, который задаёт входной сигнал.**

Использование источника постоянного напряжения  $E$  обеспечивает однонаправленный ток  $i$  в выходной цепи усилительного каскада (рис.17.3.1.а). Поэтому переменный ток и переменное напряжение в выходной цепи каскада являются лишь переменными составляющими суммарного тока и напряжения на выходе, суммируемыми с постоянными со-

ставляющими  $I_{\Pi}$  и  $U_{\Pi}$  (рис.17.3.1.б). Амплитуда переменной составляющей тока  $I_m$  и напряжения  $U_m$  не должна превышать постоянной составляющей, то есть  $I_m \leq I_{\Pi}$  и  $U_m \leq U_{\Pi}$ . Если эти условия не будут выполнены, то ток  $i$  в выходной цепи усилительного каскада в отдельные интервалы времени окажется равен нулю, что приведёт к искажению формы сигнала на выходе. Поэтому для исключения искажений сигнала в процессе усиления в выходной цепи усилительного каскада необходимо сформировать постоянные составляющие напряжения и тока  $U_{\Pi}$  и  $I_{\Pi}$ .

Постоянные составляющие напряжения и тока  $U_{\Pi}$  и  $I_{\Pi}$  определяют **режим покоя** усилительного каскада, параметры которого характеризуют электрическое состояние схемы в отсутствие сигнала на входе схемы.

При подаче на управляемый элемент входного напряжения в токе выходной цепи создаётся переменная составляющая. В результате на управляемом элементе возникает аналогичная переменная составляющая напряжения, амплитуда которого превышает амплитуду переменной составляющей напряжения на входе. Усилительные свойства проявляются тем сильнее, 1) чем большее влияние входной сигнал оказывает на выходной ток управляемого элемента и 2) чем сильнее проявляется воздействие изменения силы тока в выходной цепи на изменение напряжения на управляемом элементе (УЭ) или резисторе  $R$ .

Параметры усилительных каскадов зависят от способа включения транзистора, выполняющего функцию управляемого элемента схемы. Поэтому различаются режимы работы усилительных каскадов, собранных по схеме с общим эмиттером (ОЭ), общим коллектором (ОК) или общей базой (ОБ).

#### 17.4. Усилительный каскад с общим эмиттером

Одним из наиболее распространённых усилительных каскадов на биполярных транзисторах является каскад с общим эмиттером (ОЭ) (рис.17.4.1). В этом каскаде эмиттер является общим электродом для входной и выходной цепи.

Основными элементами схемы являются источник питания  $E$ , управляемый элемент – транзистор  $VT$  и резистор  $R_K$ . Эти элементы образуют **главную цепь** усилительного каскада.

В главной цепи усилительного каскада вследствие протекания в цепи базы управляющего тока создаётся усиленное переменное напряжение на выходе схемы.

Остальные элементы схемы выполняют вспомогательные функции.

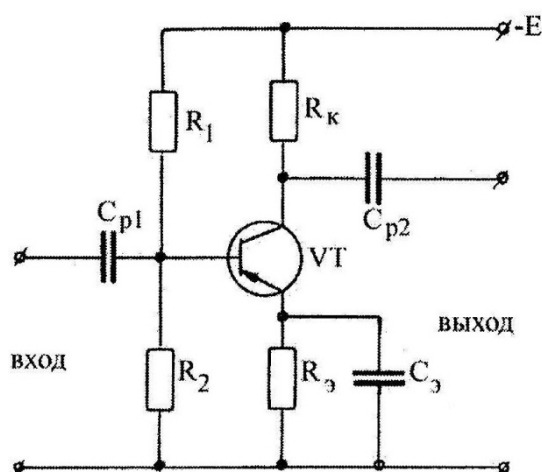


Рис.17.4.1

Конденсаторы  $C_{P1}$  и  $C_{P2}$  являются разделительными. Конденсатор  $C_{P1}$  исключает протекание постоянного тока во входной цепи и обеспечивает независимость от внутреннего сопротивления источника напряжения на базе в режиме покоя.

Конденсатор  $C_{P2}$  пропускает в цепь нагрузки переменную составляющую напряжения и задерживает постоянную составляющую.

Резисторы  $R_1$  и  $R_2$  используются для задания режима покоя каскада.

Ток покоя транзистора определяется током базы. Резистор  $R_1$  предназначен для задания тока базы. Напряжение покоя на базе обеспечивают резисторы  $R_1$  и  $R_2$  (рис.17.4.2).

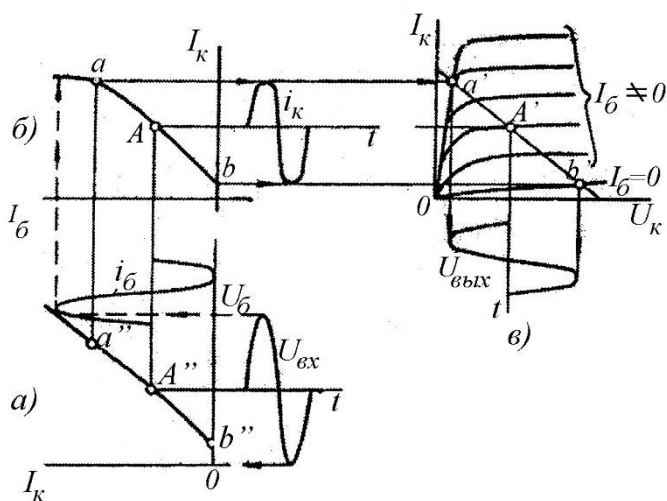


Рис.17.4.2

Полярность включения источника питания с ЭДС  $E$  зависит от типа транзистора. Для транзистора типа  $p-n-p$ , использованного в схеме на рис.17.4.1, полюс источника, подключаемый к коллектору  $p$ -типа, должен иметь отрицательный знак. Величина ЭДС источника в схеме с ОЭ составляет  $10 \div 15$  В.

Режим работы транзистора определяется положением рабочей точки  $A$  (рис.17.4.2), которое можно определить из второго правила Кирхгофа:

$$E = U_K + R_K \cdot I_K. \quad (17.4.1)$$

Усиление сигнала можно описать с помощью временных диаграмм (рис.17.4.2). На этом рисунке помимо коллекторных (выходных) характеристик (рис.17.4.2.в) приведена входная динамическая характеристика, повернутая на угол  $90^\circ$  (рис.17.4.2.а), и показано построение переходной характеристики (рис.17.4.2.б). Переходная характеристика имеет практически линейный участок  $ab$  (рис.17.4.2.б) при изменении тока базы от нуля до некоторого значения, зависящего от типа транзистора и величины коллекторного сопротивления  $R_K$  (рис.17.4.1). Проецируя этот участок на линию нагрузки и динамическую входную характеристику, отметим на них соответствующие участки  $a'b'$  и  $a''b''$ .

Резистор  $R_3$  обеспечивает отрицательную обратную связь, то есть стабилизирует режим покоя транзистора при изменении температуры.

Конденсатор  $C_3$  шунтирует резистор  $R_3$  по переменному току, исключая проявление отрицательной обратной связи для переменной составляющей. Поэтому отсутствие конденсатора  $C_3$  привело бы к уменьшению коэффициента усиления.

Аналитическую зависимость  $U_{кЭП}=f(I_{кП})$  находят из уравнения, характеризующего баланс напряжений в выходной цепи каскада:

$$U_{кЭП}=E-I_{кП}(R_Э+R_К).$$

Данное выражение является уравнением прямой, построенной в системе координат выходных характеристик.

Находя отрезки, отсекаемые данной прямой на осях координат, то есть отложив по оси ординат значение тока  $i_K=E_K/R_K$ , а по оси абсцисс – напряжение  $U_{кЭП}=-E$ , получим нагрузочную прямую  $ab$  по постоянному току.

Точка пересечения нагрузочной прямой  $ab$  со статической характеристикой при заданном токе  $I=I_{кП}$  называется рабочей точкой ( $A$ ). Начальное положение рабочей точки на нагрузочной прямой в отсутствие входного напряжения ( $U_{ВХ}=0$ ) называется **точкой покоя**.

При подаче на вход каскада напряжения  $U_{ВХ}$  в базовой цепи транзистора создаётся переменная составляющая тока  $i_б$ , связанная с напряжением  $U_{ВХ}$  входной характеристики транзистора.

Соппротивление коллекторного резистора выбирают с учётом требуемого значения коэффициента усиления, но линия нагрузки должна проходить левее и ниже допустимых значений  $U_{К max}$ ,  $I_{К max}$  и  $P_{К max}$  и обеспечивать достаточно протяжённый линейный участок переходной характеристики. При выполнении этих требований транзистор работает в области допустимых значений напряжения, тока и мощности и может усиливать без искажения сигналы в необходимом диапазоне изменения их величин. Соппротивление коллекторного резистора в схемах с  $ОЭ$  обычно составляет несколько килоом.

Усилитель, собранный по схеме с  $ОЭ$ , обладает значительным коэффициентом усиления тока. Коэффициент усиления напряжения составляет обычно  $20÷100$  (но может достигать и  $500$ ). Коэффициент усиления мощности достигает значений  $5\cdot 10^3$ . Усилительный каскад с  $ОЭ$  осуществляет сдвиг выходного напряжения по фазе на  $180^\circ$  относительно напряжения на входе.

### 17.5. Режимы работы усилительных каскадов

В зависимости от положения рабочей точки в режиме покоя на характеристиках транзистора и амплитуды усиливаемого напряжения различают три основных режима работы усилительных каскадов:  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

**Режим  $A$ .** В выходной цепи усилителей, работающих в режиме  $A$ , текут большие токи. Для уменьшения потерь мощности в эмиттерном сопротивлении  $R_Э$  необходимо, чтобы это сопротивление не превышало нескольких  $Ом$  или вообще отсутствовало (рис.17.5.1). Расчёт режима работы усилительного каскада удобно выполнять графоаналитическим методом.

Сопротивление выходной цепи усилительного каскада (рис.17.5.1) постоянному току мало, поскольку  $R_3 \rightarrow 0$ , то есть  $R_{ВЫХ}$  определяется сопротивлением первичной обмотки трансформатора  $TV$ . Поэтому линия нагрузки проходит через точку  $E_K$  (рис.17.5.2). Угол наклона определяют отношением чисел витков первичной ( $w_1$ ) и вторичной ( $w_2$ ) обмоток трансформатора  $w_1/w_2$ .

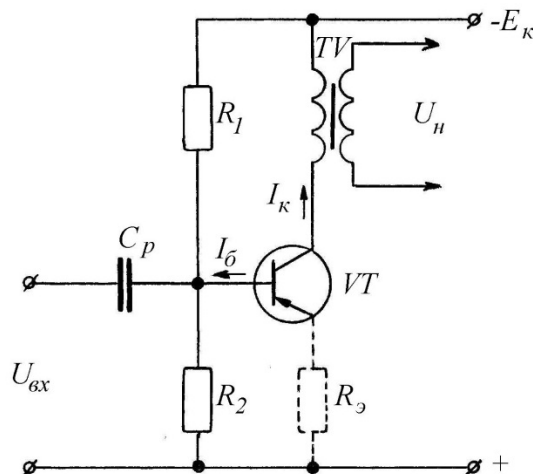


Рис.17.5.1

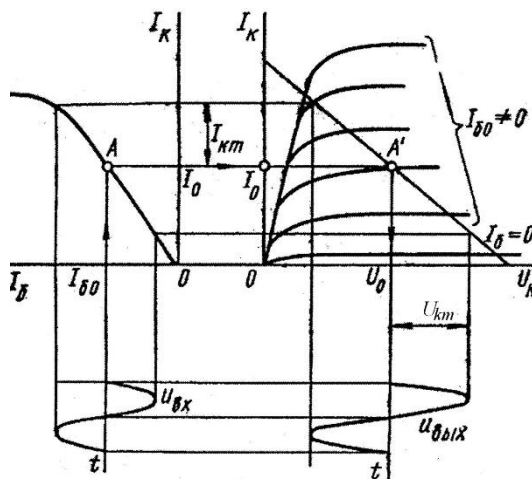


Рис.17.5.2

Режим  $A$  характеризуется тем, что рабочую точку выбирают на линейном участке (обычно в его середине, рис.17.5.2) переходной характеристики  $I_K=f(I_B)$ .

Величина входного напряжения в режиме  $A$  должна быть такой, чтобы усилительный каскад работал на линейном участке характеристики  $I_K=f(I_B)$ . Поэтому рабочая точка  $A$  в процессе усиления сигнала не выходит за пределы линейного участка переходной характеристики (рис.17.5.2), что обеспечивает минимальные искажения усиливаемого сигнала. При этом форма напряжения на выходе точно повторяет форму напряжения на входе усилителя. Поэтому режим  $A$  широко используется в усилителях напряжения. Недостатком схемы является низкий коэффициент полезного действия.

КПД усилителя  $\eta$  равен отношению выходной мощности, подаваемой в нагрузку ( $P_{ВЫХ}$ ), к общей мощности ( $P_0$ ), потребляемой усилителем (17.1.4):

$$\eta = \frac{P_{ВЫХ}}{P_0} \cdot 100\%.$$

В режиме  $A$  выходная мощность равна:

$$P_{ВЫХ} = \frac{1}{2} \cdot U_{Km} \cdot I_{Km},$$

где  $U_{Km}$  и  $I_{Km}$  – амплитуды коллекторного напряжения и тока (рис.17.5.2).

Мощность, потребляемая усилителем от источника, равна:

$$P_0 = U_0 \cdot I_0,$$

где  $U_0$  и  $I_0$  – напряжение покоя и ток покоя усилительного каскада (рис.17.5.2).

Следовательно, КПД усилителя равен:

$$\eta = \frac{P_{\text{вых}}}{P_0} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_{Km}}{U_0} \cdot \frac{I_{Km}}{I_0}.$$

Здесь  $U_{Km} < U_0$  и  $I_{Km} < I_0$ , поэтому КПД усилителя в режиме  $A$  меньше 50%. Наиболее вероятное значение КПД усилителя в режиме  $A$  составляет 35%. Низкий КПД усилителей, работающих в режиме  $A$ , приводит к ограничению их применения.

**Режим В.** Режим  $B$  работы усилительных каскадов характеризуется тем, что рабочая точка  $A$  находится в начале переходной характеристики (рис.17.5.3). Эту точку называют *точкой отсечки*.

В режиме  $B$  переменные составляющие тока и напряжения усиливаются только в положительные полупериоды входного напряжения.

Напряжение на выходе при синусоидальном входном напряжении имеет форму половины синусоиды, то есть режим  $B$  характеризуется очень большими нелинейными искажениями. Поэтому режим  $B$  реализуют в двухтактных усилителях мощности (рис.17.5.4) содержит два транзистора.

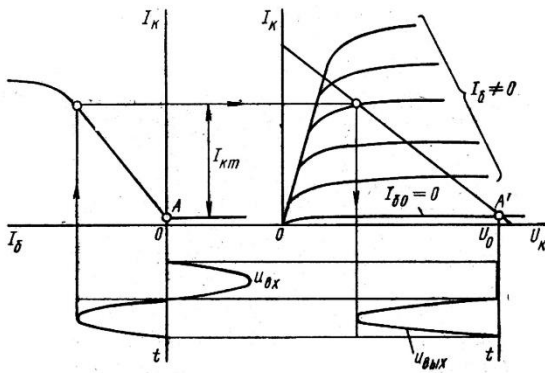


Рис.17.5.3

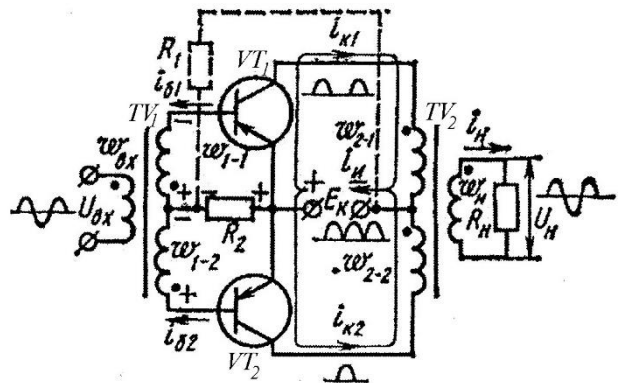


Рис.17.5.4

В отсутствие входного сигнала напряжения на базах обоих транзисторов равны нулю (рис.17.5.3). При этом коллекторные токи транзисторов также стремятся к нулю.

При подаче входного сигнала, начинающегося с положительной полуволны, напряжение усиливает первый транзистор, а в течение второго полупериода – второй транзистор. В результате суммарный сигнал на выходе имеет такую же форму, как и входной сигнал.

Таким образом, процесс усиления осуществляется в два такта работы схемы. В течение первого такта осуществляется усиление одной полувол-

ны напряжения первым транзистором, а в течение второго такта усиливается вторая полуволна напряжения с помощью второго транзистора.

КПД двухтактного усилителя, работающего в режиме *B*, значительно превышает КПД усилителя, работающего в режиме *A*, и достигает 80%.

**Режим С.** В режиме *C* рабочая точка *A* находится за точкой отсечки. Поэтому ток в транзисторе возникает только в течение лишь некоторой части положительного полупериода входного напряжения (рис.17.5.5). Этот режим сопровождается большими искажениями усиленного напряжения. Но КПД устройства может быть очень высоким и приближаться к единице. Режим *C* применяют в избирательных усилителях и автогенераторах, которые благодаря наличию колебательных контуров или других частотно-зависимых устройств выделяют только основную гармонику из несинусоидального напряжения, возникающего вследствие больших нелинейных искажений.

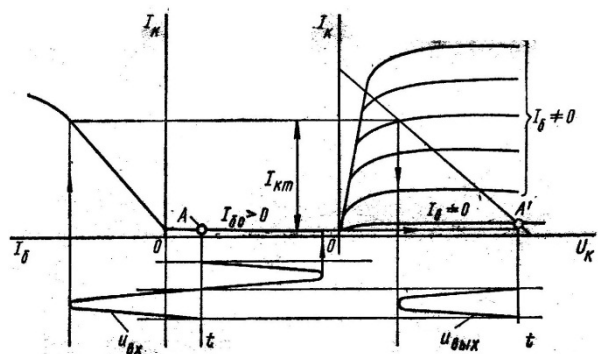


Рис.17.5.5

## 17.6. Многокаскадные усилители

При усилении малых входных сигналов одного усилительного каскада недостаточно для получения требуемого коэффициента усиления. В этом случае используют многокаскадные усилители, состоящие из последовательно соединённых каскадов (рис.17.6.1).



Рис.17.6.1

В многокаскадных усилителях выходной сигнал первого каскада является входным сигналом второго каскада, выходной сигнал второго каскада – входным сигналом третьего каскада и так далее. Нагрузкой каждого каскада является входное сопротивление следующего каскада. Входное и выходное сопротивление усилителя равно соответственно входному сопротивлению первого каскада и выходному сопротивлению последнего каскада. Коэффициент усиления многокаскадного усилителя равен произведению коэффициентов усиления входящих в него каскадов.

На рис.17.6.2 приведена структурная схема многокаскадного усилителя, а на рис.17.6.3 – принципиальная схема двухкаскадного усилителя.



Рис.17.6.2

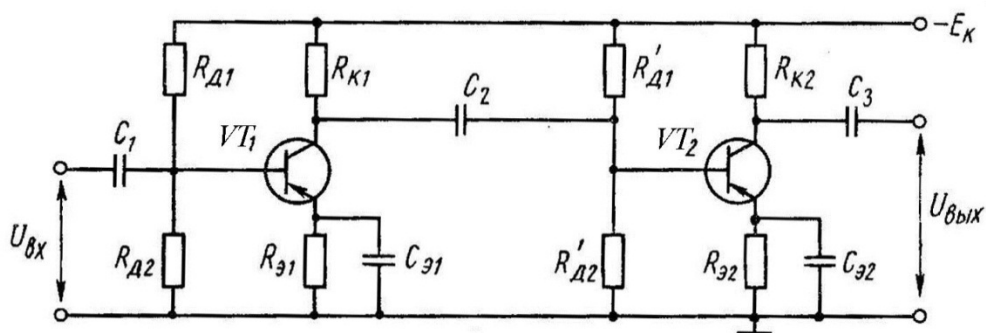


Рис.17.6.3

*Входное устройство* предназначено для передачи сигнала от источника во входную цепь каскада предварительного усиления. В качестве входного устройства могут быть использованы конденсаторы, резисторы, трансформаторы. Например, в схеме усилителя на рис.17.6.3 входными устройствами являются конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$ . Конденсатор  $C_1$  включают, чтобы исключить прохождение постоянной составляющей тока и напряжения смещения первого активного элемента в источник сигнала, а также чтобы постоянная составляющая тока от источника сигнала не поступала на вход активного элемента. Конденсатор  $C_2$  являющийся входным устройством для второго каскада, осуществляет связь каскадов усилителя.

*Каскады предварительного усиления* необходимы для увеличения амплитуды тока, напряжения или мощности сигнала до значения, необходимого для подачи на вход усилителя мощности. Для уменьшения нелинейных искажений в каскадах предварительного усиления, как правило, используется режим *A* работы транзистора. На рис.17.6.3 транзисторы включены по схеме с общим эмиттером.

*Усилитель мощности* предназначен для передачи в нагрузку необходимой мощности и может состоять из нескольких каскадов. В усилителях мощности транзисторы работают в режиме *A* и включаются по схеме с общим эмиттером или с общей базой. Сигнал с выхода усилителя мощности поступает на выходное устройство, поэтому усилители мощности часто называют *оконечными* усилителями.

Выходное устройство служит для передачи сигнала из выходной цепи оконечного усилителя в нагрузку. В качестве выходного устройства используют трансформаторы, конденсаторы и резисторы. Трансформаторы используют для согласования выходного сопротивления оконечного усилителя с сопротивлением нагрузки. В схеме усилителя на рис.17.6.3 выходным устройством является конденсатор  $C_3$ . Конденсаторы и резисторы используют для разделения постоянных составляющих тока и напряжения выходной цепи усилителя и нагрузки.

*Межкаскадные связи* необходимы для передачи сигнала от источника сигнала на вход первого усилителя, далее от выхода одного каскада усиления на вход последующего и затем от выхода оконечного усилителя в нагрузку. Через межкаскадные связи напряжение питания подаётся на зажимы усилительных устройств. Межкаскадные связи выполняют функции разделительных элементов.

Основными видами межкаскадных связей являются гальваническая, резисторная, ёмкостная, трансформаторная и дроссельная связи. Иногда используют комбинации этих связей. Передачу постоянной составляющей сигнала обеспечивает только гальваническая связь, поэтому этот вид связи используют в усилителях постоянного тока.

В настоящее время преимущественно применяют усилители в интегральном исполнении с непосредственной связью между каскадами.

## 17.7. Обратная связь в усилителях

**Обратной связью** называется передача части энергии усиленного сигнала из выходной цепи усилителя во входную цепь.

В усилителях различают следующие виды обратной связи: *внутреннюю обратную связь*, обусловленную физическими свойствами усилительного элемента; *паразитную*, вызванную паразитными ёмкостями и индуктивностями между входной и выходной цепями усилителя; *искусственную*, которую создают специально. Внутренняя и паразитная обратные связи нежелательны, поэтому их пытаются устранить.

Искусственную обратную связь вводят для уменьшения нелинейных искажений и стабилизации положения точки покоя. Для этого с помощью обратной связи на вход усилителя подают напряжение точно в противофазе с напряжением источника сигнала. Обратная связь, которая **уменьшает** напряжение на входе усилителя, называется **отрицательной обратной связью**. Обратная связь, которая **увеличивает** напряжение на входе усили-

теля, называется **положительной обратной связью**. Положительная обратная связь увеличивает коэффициент усиления, но ухудшает многие другие параметры усилителя. Отрицательная обратная связь уменьшает коэффициент усиления, но улучшает многие другие параметры усилителя. Поэтому отрицательная обратная связь широко применяется при построении усилительных каскадов.

Структурная схема усилителя с искусственной обратной связью (рис.17.7.1) содержит звено обратной связи с коэффициентом передачи  $\beta$ , который показывает, какая часть выходного сигнала передаётся на вход усилителя, причём  $|\beta| < 1$ .

Замкнутый контур, образуемый цепью обратной связи и частью схемы усилителя, к которой присоединена эта цепь, называется **петлёй обратной связи**.

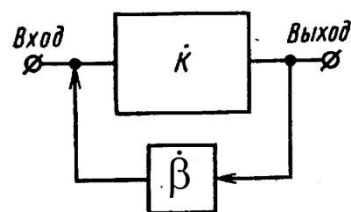


Рис.17.7.1

В зависимости от параметра (напряжения или тока) выходного сигнала, используемого для создания обратной связи, различают **обратную связь по напряжению** и **обратную связь по току**.

Если параметром выходного сигнала является выходное напряжение усилителя  $U_H$ , то в усилителе осуществляется **обратная связь по напряжению** (рис.17.7.2, 17.7.3).

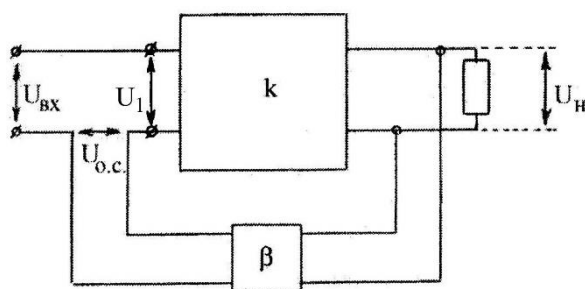


Рис.17.7.2

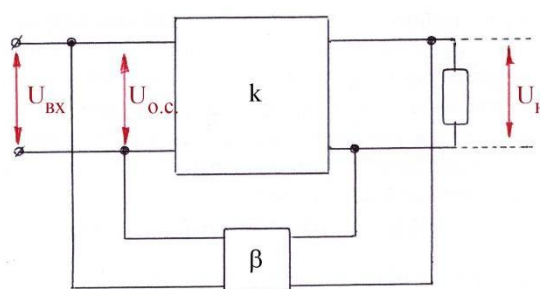


Рис.17.7.3

Если параметром выходного сигнала является ток нагрузки  $I_H$ , то осуществляется **обратная связь по току** (рис.17.7.4, 17.7.5).

В зависимости от способа подачи обратной связи на вход усилителя различают последовательную и параллельную обратную связь.

**Обратная связь** называется **последовательной**, если напряжение обратной связи подаётся на вход усилителя **последовательно** с входным напряжением (рис.17.7.2, 17.7.4).

**Обратная связь** называется **параллельной**, если напряжение обратной связи подаётся на вход усилителя **параллельно** напряжению источника входного сигнала (рис.17.7.3, 17.7.5).

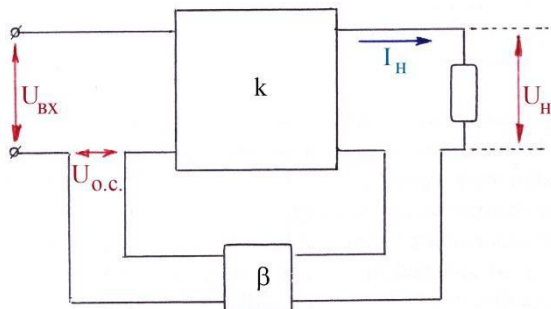


Рис.17.7.4

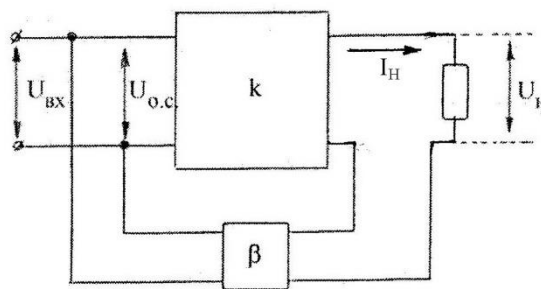


Рис.17.7.5

Обратную связь называют *частотно-независимой*, если отношение напряжений на выходе и входе цепи обратной связи не зависит от частоты сигнала. Это возможно, если цепь обратной связи не содержит индуктивных катушек и конденсаторов. Если отношение напряжений на выходе и входе цепи обратной связи зависит от частоты сигнала, обратная связь называется *частотно-зависимой*.

Если фазовый сдвиг между напряжением обратной связи и напряжением источника сигнала не равен  $0^\circ$  или  $180^\circ$ , обратная связь называется *комплексной*.

Рассмотрим влияние, например, отрицательной последовательной обратной связи по напряжению (рис.17.7.2) на модуль коэффициента усиления напряжения. Подаваемое во входную цепь усилителя напряжение обратной связи  $U_{OC}$  связано с напряжением на выходе усилителя  $U_{ВЫХ}$  коэффициентом передачи  $\beta$ :

$$U_{OC} = \beta \cdot U_{ВЫХ}. \quad (17.7.1)$$

Согласно второму правилу Кирхгофа для входной цепи (рис.17.7.2) в случае отрицательной обратной связи напряжение  $U_I$  на входе усилителя меньше входного напряжения  $U_{BX}$  на величину напряжения обратной связи  $U_{OC}$ :

$$U_I = U_{BX} - U_{OC} = U_{BX} - \beta \cdot U_{ВЫХ}, \quad (17.7.2)$$

поэтому входное напряжение усилителя равно:

$$U_{BX} = U_I + \beta \cdot U_{ВЫХ}.$$

В отсутствие обратной связи  $U_{BX} = U_I$ , и коэффициент усиления равен:

$$k = \frac{U_{ВЫХ}}{U_{BX}} = \frac{U_{ВЫХ}}{U_I}. \quad (17.7.3)$$

При наличии обратной связи с учётом формулы (17.7.2) коэффициент усиления равен:

$$k_{OC} = \frac{U_{ВЫХ}}{U_{BX}} = \frac{U_{ВЫХ}}{U_I + \beta \cdot U_{ВЫХ}}. \quad (17.7.4)$$

Сравнение формул (17.7.3) и (17.7.4) позволяет связать коэффициенты усиления при наличии обратной связи и в её отсутствие с коэффициентом передачи  $\beta$ :

$$k_{oc} = \frac{k}{1 + \beta \cdot k}. \quad (17.7.5)$$

Следовательно, отрицательная обратная связь уменьшает коэффициент усиления в  $1 + \beta \cdot k$  раз. Величина  $\beta \cdot k$  характеризует усиление петли обратной связи. Сумма  $1 + \beta \cdot k$  называется **глубиной отрицательной обратной связи**. Если при отрицательной обратной связи  $|\beta \cdot k| \gg 1$ , то её называют **глубокой отрицательной обратной связью**. При глубокой отрицательной обратной связи в знаменателе выражения (17.7.5) единицей можно пренебречь, и коэффициент усиления усилителя с глубокой отрицательной обратной связью равен:

$$k_{oc} \approx \frac{1}{\beta}, \quad (17.7.6)$$

то есть  $k_{oc}$  определяется только коэффициентом передачи обратной связи  $\beta$  и не зависит от коэффициента усиления усилителя без обратной связи  $k$ .

Аналогичные выводы можно сделать и для параллельной отрицательной обратной связи, как по напряжению, так и по току.

Введение отрицательной обратной связи повышает стабильность коэффициента усиления усилителя при изменении режима работы транзистора, частоты и амплитуды сигнала. При этом изменение  $k$  вызывает изменение величины  $k_{oc}$  в  $1 + \beta \cdot k$  раз меньшее, а при глубокой отрицательной обратной связи коэффициент усиления  $k_{oc}$  почти совсем не зависит от величины  $k$ .

Отрицательная обратная связь позволяет расширить полосу пропускания, понизить уровень нелинейных искажений, уменьшить фон и шумы в схеме усилителя. В зависимости от типа отрицательной обратной связи можно уменьшить или увеличить входное и выходное сопротивление усилителя. Например, введение отрицательной обратной связи по напряжению увеличивает входное и уменьшает выходное сопротивление усилителя, что в ряде случаев значительно улучшает его показатели. Поэтому, несмотря на уменьшение коэффициента усиления отрицательной обратной связью, её широко используют в усилителях различного назначения.

Введение положительной обратной связи приводит к увеличению коэффициента усиления. Проведя рассуждения, аналогичные выполненным для положительной обратной связи, получим коэффициент усиления при наличии положительной обратной связи:

$$k'_{\text{положит}} = \frac{k}{1 - \beta \cdot k}. \quad (17.7.7)$$

Следовательно, введение положительной обратной связи приводит к увеличению коэффициента усиления в  $1-\beta \cdot k$  раз. Разность  $1-\beta \cdot k$  называется **глубиной положительной обратной связи**. Если  $\beta \cdot k \approx 1$ , то  $1-\beta \cdot k \approx 0$  и  $k_{\text{положит}} \rightarrow \infty$ , то есть усилитель самовозбуждается и работает как генератор.

### 17.8. Схемы стабилизации положения рабочей точки усилителя

Основные показатели усилительного каскада, такие как КПД, мощность сигнала на выходе и входе усилительного каскада, нелинейные искажения, определяются положением рабочей точки в отсутствие сигнала на входе, которое задаёт ток покоя  $I_{OK}$  выходной цепи. Поэтому при замене активного элемента, изменении температуры и других воздействиях положение рабочей точки в режиме покоя не должно изменяться.

Если активным элементом усилителя является биполярный транзистор, изменение температуры или замена активного элемента могут повлиять на значение коэффициента усиления по току и значение теплового тока (обратного тока коллекторного перехода). Если усилительным элементом является полевой транзистор, то изменение температуры или сопротивления активного элемента окажет влияние на напряжение отсечки и крутизну характеристики. Поэтому схема подачи смещения фиксированным током нецелесообразна, особенно если активным элементом является биполярный транзистор, включённый по схеме с общим эмиттером.

При подаче смещения фиксированным напряжением изменение температуры и замена транзистора в меньшей степени влияют на ток покоя коллектора, поэтому такие схемы находят широкое практическое применение.

Для того чтобы обеспечить работоспособность усилительного каскада в режиме  $A$  при изменении температуры, необходимо использовать схемы стабилизации положения начальной рабочей точки (в режиме покоя).

**Эмиттерная стабилизация** осуществляется введением в схему последовательной отрицательной обратной связи по постоянному току (рис.17.8.1). Напряжение обратной связи снимается с резистора  $R_{\text{Э}}$ , который включён в цепь эмиттера.

Напряжение смещения, приложенное к эмиттерному переходу, равно:

$$U_{OB} = R_{D2} \cdot I_{D2} - R_{\text{Э}} \cdot I_{OЭ}. \quad (17.8.1)$$

Изменение температуры вызывает изменение тока покоя коллектора  $I_{OK}$ , а следовательно, и тока покоя эмиттера  $I_{OЭ}$ . Например, если токи  $I_{OK}$  и  $I_{OЭ}$  увеличатся, то рабочая точка на выходной динамической характеристике (рис.17.8.2) должна подняться вверх, но этого не произойдёт, поскольку согласно соотношению (17.8.1) напряжение смещения  $U_{OB}$  уменьшится, а

вместе с этим уменьшаются и токи транзистора. Поэтому положение начальной рабочей точки не изменится.

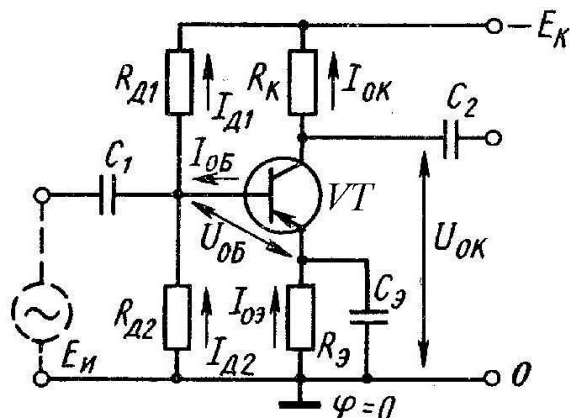


Рис.17.8.1

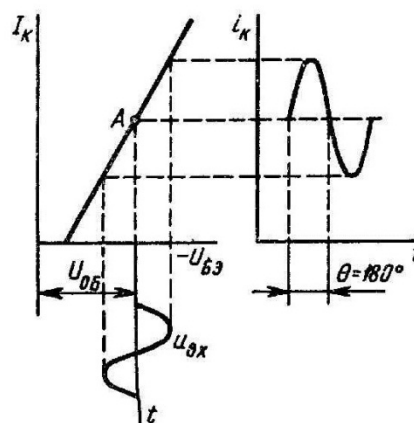


Рис.17.8.2

Для исключения влияния отрицательной обратной связи по переменному току на коэффициент усиления параллельно резистору  $R_Э$  включён конденсатор  $C_Э$  (рис.17.8.1). Если конденсатор  $C_Э$  отсутствует, то переменная составляющая эмиттерного тока создаёт на резисторе падение напряжения  $u_Э = R_Э \cdot i_Э$ . Это приводит к уменьшению усищаемого напряжения, поскольку  $u_Б = u_{ВХ} - R_Э \cdot i_Э$ , а следовательно, вызывает уменьшение коэффициента усиления. Для того чтобы переменная составляющая на всех частотах усищаемого напряжения не проходила через резистор, ёмкость конденсатора  $C_Э$  должна быть достаточно большой для выполнения условия:

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_Э} \ll R_Э.$$

**Коллекторная стабилизация** осуществляется введением параллельной отрицательной обратной связи по напряжению (рис.17.8.3). Напряжение подаётся через резистор  $R_Б$ , который включают между коллектором и базой. При этом напряжение на коллекторе  $U_{0К} = E_K - R_K \cdot (I_{0Б} + I_{0К}) = U_{0Б} + R_Б \cdot I_{0Б}$ . Поскольку напряжение  $U_{0Б}$  ничтожно мало по сравнению с напряжением на резисторе  $R_Б$ , им можно пренебречь. Тогда падение напряжения на сопротивлении  $R_Б$ , обусловленное протеканием тока покоя, равно:

$$R_Б \cdot I_{0Б} = E_K - R_K \cdot (I_{0Б} + I_{0К}). \quad (17.8.2)$$

Из уравнения (17.8.2) следует, что при повышении температуры, а следовательно, тока  $I_{0К}$  падение напряжения  $R_Б \cdot I_{0Б}$  на резисторе  $R_Б$  уменьшается, то есть уменьшается ток  $I_{0Б}$ , а это вызывает уменьшение силы тока  $I_{0К}$ .

С целью исключения отрицательной обратной связи по переменной составляющей коллекторного напряжения, что вызвало бы уменьшение коэффициента усиления каскада, в цепь базы вводят конденсатор  $C_Ф$

(рис.17.8.4). В этом случае резистор  $R_B$  заменяют двумя с приблизительно равными сопротивлениями  $R_{B1}$  и  $R_{B2}$ , а конденсатор включают между ними и заземлённой точкой, в результате чего переменная составляющая напряжения не поступает на резистор  $R_{B1}$ . Ёмкостное сопротивление  $x_{C\phi}$  должно быть значительно (в десятки раз) меньше сопротивления  $R_B = R_{B1} + R_{B2}$ .

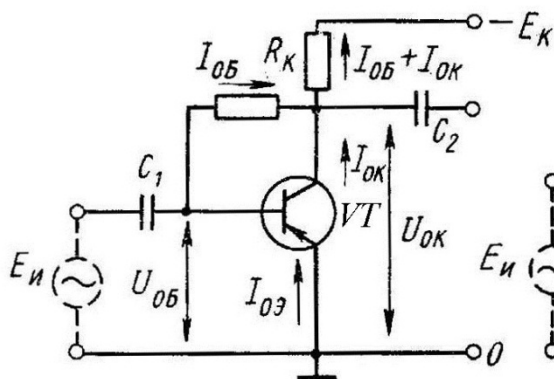


Рис.17.8.3

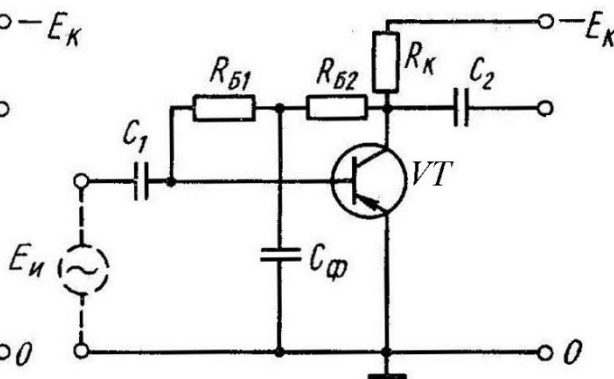


Рис.17.8.4

Коллекторная стабилизация проще и экономичнее эмиттерной, но уступает ей по диапазону стабилизируемых температур: стабилизация осуществляется при изменении температуры не более, чем на  $30^\circ\text{C}$  и изменениях статического коэффициента передачи по току  $H_{21Э}$  не более, чем в 2 раза.

## 17.9. Усилители постоянного тока

**Усилителями постоянного тока** называют устройства, которые могут увеличивать амплитуду медленно изменяющихся электрических сигналов. Усилители постоянного тока могут усиливать не только переменные, но и постоянные составляющие напряжения и тока. Рабочий диапазон частот усилителей постоянного тока заключён в интервале от нуля до нескольких мегагерц.

Усилители постоянного тока являются наиболее распространённым типом усилителей в устройствах вычислительной техники и имеют ряд разновидностей: дифференциальные, операционные, усилители с преобразованием сигнала и другие.

Усилители постоянного тока имеют равномерную амплитудно-частотную характеристику (рис.17.9.1). Связь между каскадами усилителя должна обеспечивать передачу постоянной составляющей. Поэтому для межкаскадной связи нельзя использовать конденсаторы и трансформаторы. Усилители

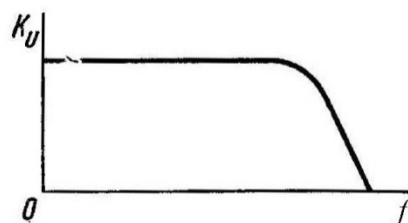


Рис.17.9.1

не должны содержать также разделительных и блокировочных конденсаторов. Связь между каскадами осуществляется через резисторы или непо-

средственно с помощью соединительных проводов – гальваническая меж-каскадная связь.

В усилителях постоянного тока необходимо обеспечить отсутствие как постоянной, так и переменной составляющей сигнала на выходе в отсутствие входного сигнала. Иначе будет нарушена связь между входным и выходным напряжением. Отличие напряжения на выходе усилителя постоянного тока в отсутствие входного сигнала называется *дрейфом нуля усилителя*. Основными причинами дрейфа являются температурная и временная нестабильность параметров транзисторов, резисторов и источников питания, а также низкочастотные шумы и помехи. Дрейф нуля искажает усиливаемые сигналы и может нарушить работу цепи настолько, что схема усилителя окажется неработоспособной.

Для компенсации дрейфа нуля, возникающего вследствие изменения температуры, применяют специальные термокомпенсационные схемы, а на входе усилителя – дифференциальные каскады. Иногда усилитель предварительно прогревают, чтобы все его элементы к началу работы имели одинаковую температуру (реже – термостатируют). Для исключения дрейфа вследствие нестабильности источников питания их стабилизируют с помощью электронных, ферромагнитных и других стабилизаторов.

Усилители постоянного тока не содержат элементов, которые не поддаются миниатюризации, поэтому выполняются в основном в виде гибридных и полупроводниковых интегральных микросхем. Усилители могут быть выполнены по одноконтурной и двухконтурной схеме.

### 17.10. Дифференциальные усилители

Эффективным средством уменьшения дрейфа нуля усилителей постоянного тока является применение параллельно-балансных (дифференциальных) каскадов.

Дифференциальный усилительный каскад выполняют по принципу сбалансированного моста (рис.17.10.1).

Если выполняется условие равновесия моста:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3},$$

то есть мост сбалансирован, то в нагрузочном сопротивлении  $R_H$  сила тока равна нулю. Равновесие моста не нарушится и в случае изменения напряжения  $E$  и сопротивлений резисторов при условии, что соотношение между сопротивлениями не изменится.

На рис.17.10.2 представлена принципиальная схема дифференциального усилительного каскада. Здесь резисторы  $R_2$  и  $R_3$  моста на рис.17.10.1 заменены транзисторами  $VT_1$  и  $VT_2$ , причём  $R_1=R_{K1}$  и  $R_4=R_{K2}$ . Резисторы  $R_{K1}$  и  $R_{K2}$  имеют равные сопротивления, а транзисторы  $VT_1$  и  $VT_2$  – идентичные характеристики. В этом случае схема симметрична.

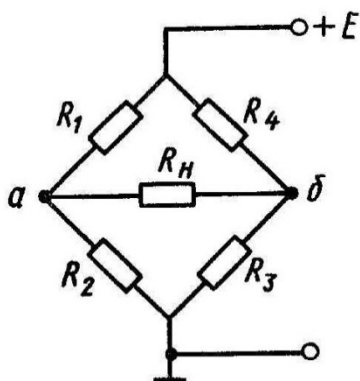


Рис.17.10.1

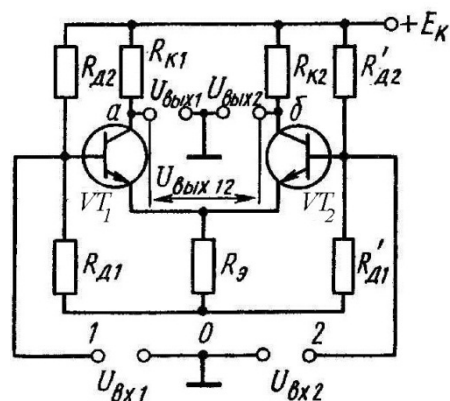


Рис.17.10.2

Как и в случае моста, содержащего четыре плеча (рис.17.10.1), в отсутствие сигнала напряжение на выходе схемы (рис.17.10.2)  $U_{\text{ВЫХ } 12}$  равно нулю, поскольку токи и потенциалы коллекторов транзисторов  $VT_1$  и  $VT_2$  равны. Так как схема (рис.17.10.2) симметрична, любое изменение характеристик транзистора вследствие изменения температуры или старения вызовет одинаковое изменение сил токов в обоих плечах. Поэтому схема не будет разбалансирована, и дрейф выходного напряжения будет практически равен нулю.

Рассмотрим отклик усилительного каскада при подаче на входы 1 и 2 сигналов  $U_{\text{ВХ1}}$  и  $U_{\text{ВХ2}}$ : 1) равных по модулю и однофазных (синфазных), 2) равных по модулю, но с противоположными фазами (дифференциальных).

1) **На входы 1 и 2 поданы синфазные сигналы  $U_{\text{ВХ1}}$  и  $U_{\text{ВХ2}}$ .** Потенциалы баз транзисторов  $VT_1$  и  $VT_2$  изменятся на величину:  $\Delta U_{\text{Б1}} = \Delta U_{\text{Б2}} = U_{\text{ВХ1}} = U_{\text{ВХ2}}$ . На такую же величину изменятся и потенциалы эмиттеров транзисторов. Ток через резистор  $R_{\text{Э}}$  поровну распределится между плечами дифференциального усилителя, и потенциалы коллекторов изменятся одинаково. Тогда напряжение на выходе будет равно нулю:  $U_{\text{ВЫХ } 12} = 0$ . Следовательно, симметричный дифференциальный усилитель не пропускает на выход синфазный сигнал.

2) **На входы 1 и 2 поданы дифференциальные сигналы:  $|U_{\text{ВХ1}}| = |U_{\text{ВХ2}}|$ .**

Входное напряжение между точками 1 и 2 будет равно разности этих сигналов:  $U_{\text{ВХ } 12} = U_{\text{ВХ1}} - U_{\text{ВХ2}}$ . Поскольку схема симметрична, часть напряжения, равная  $U_{\text{ВХ } 12} / 2$ , будет приложена к эмиттерному переходу одного транзистора со знаком «плюс», а другая часть – к эмиттерному переходу другого транзистора со знаком «минус». Потенциал эмиттера одного транзистора увеличится, а другого уменьшится на  $U_{\text{ВХ } 12} / 2$  соответственно. Приращения токов в плечах схемы (рис.17.10.2) одинаковы по модулю, но имеют разные знаки. Это приведёт к увеличению потенциала коллектора одного транзистора и к уменьшению на такую же величину потенциала

коллектора другого транзистора. На выходе транзистора между точками *a* и *б* сформируется разность потенциалов, а следовательно, выходное напряжение  $U_{ВЫХ\ 12} = U_{ВЫХ1} - U_{ВЫХ2}$ . Поэтому дифференциальный сигнал, поданный на вход дифференциального усилителя, вызывает появление усиленного сигнала на выходе схемы. Поскольку рассмотренная схема реагирует только на дифференциальный входной сигнал, её называют **дифференциальным усилителем**.

В идеальных дифференциальных усилителях дрейф нуля отсутствует. Помехи и наводки, действующие одновременно на оба входа усилителя, являются синфазными составляющими входного сигнала. Однако поскольку абсолютная симметрия плеч дифференциального усилителя практически недостижима, в реальных усилителях дрейф нуля существует, но он очень незначителен по сравнению с усиливаемым сигналом.

При идеальной симметрии схемы, когда можно пренебречь синфазной составляющей входного сигнала, коэффициент усиления рассчитывается по формуле:

$$k_D = \frac{U_{ВЫХ\ 12}}{U_{ВХ1} - U_{ВХ2}} = \frac{U_{ВЫХ\ 1} - U_{ВЫХ\ 2}}{U_{ВХ1} - U_{ВХ2}}. \quad (17.10.1)$$

В реальном дифференциальном усилителе при наличии синфазной составляющей сигнала

$$U_{ВЫХ\ 12} = k_D \cdot (U_{ВХ1} - U_{ВХ2}) + k_C \cdot \frac{U_{ВХ1} + U_{ВХ2}}{2}, \quad (17.10.2)$$

где

$$k_C = \frac{U_{ВЫХ\ 12}}{(U_{ВХ1} + U_{ВХ2})/2} -$$

коэффициент усиления синфазного сигнала в отсутствие дифференциального сигнала.

Качество дифференциального усилителя оценивают коэффициентом подавления синфазного сигнала

$$k_{п.с.с} = \frac{k_D}{k_C} \quad (17.10.3)$$

считается хорошим, если  $k_{п.с.с} \geq 10^4 \div 10^5$  или  $80 \div 100$  дБ.

Поскольку свойства дифференциального усилителя основаны на идеальной симметричности его плеч, а выполнить это условие можно только при микроэлектронном исполнении схемы, наиболее широко используются дифференциальные усилители на интегральных микросхемах. Компоненты интегральных микросхем расположены близко друг к другу (на расстоянии несколько десятков микрометров), что обеспечивает идентичность параметров схемы.

## 17.11. Избирательные усилители

Избирательные усилители предназначены для усиления сигнала в узкой полосе частот.

Их частотная характеристика должна обеспечивать:

- а) требуемый коэффициент усиления в заданной полосе частот и
- б) резкое уменьшение коэффициента усиления вне этой частоты.

Частотная характеристика избирательного усилителя приведена на рис.17.11.1. **Полоса пропускания** избирательного усилителя равна

$$2\Delta f = f_B - f_H.$$

Границы полосы пропускания определяются на уровне:

$$k = \frac{k_{Um}}{\sqrt{2}}.$$

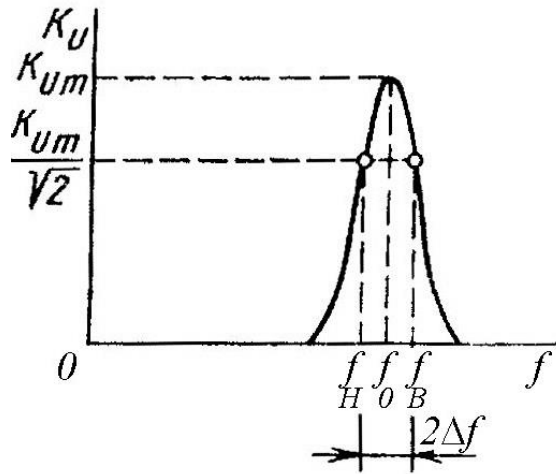


Рис.17.11.1

Здесь  $k_{Um}$  — коэффициент усиления на резонансной частоте  $f_0$ .

Для избирательных усилителей отношение частот составляет:

$$\frac{f_B}{f_H} = 1,001 \div 1,100.$$

Селективность, то есть избирательность усилительных свойств характеризуют **добротностью**:

$$Q = \frac{f_0}{2 \cdot \Delta f}.$$

Величина добротности может составлять десятки и сотни единиц.

Частотная избирательность таких усилителей обеспечивает высокую помехозащищённость систем, работающих на фиксированных частотах. Это широко используется в устройствах автоматического управления и контроля. Возможность выделения с помощью избирательных усилителей фиксированных гармоник из спектра частот входного сигнала используется в измерительных устройствах промышленной электроники. Избирательные усилители широко применяются в радиоприёмных и телевизионных устройствах, а также в многоканальных системах связи для настройки приёмного устройства на фиксированную частоту и не пропускают сигналы других частот.

При значениях резонансной частоты  $f_0$ , превышающих десятки кГц, в цепь нагрузки избирательных усилителей вводят параллельный колебательный контур, то есть  $LC$  — цепи (резонансный контур). В этом случае избирательные усилители называют резонансными усилителями. Низ-

кочастотные избирательные усилители выполняют с обратными связями, образованными частотно-зависимыми  $RC$  – цепями.

На рис.17.11.2 приведена схема резонансного усилительного каскада.

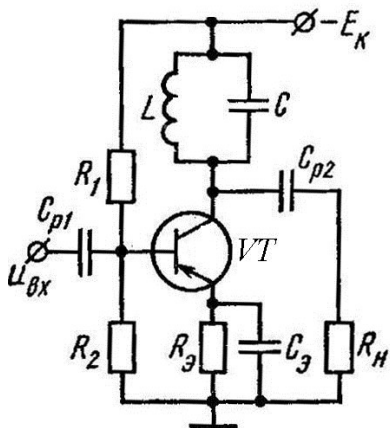


Рис.17.11.2

В коллекторную цепь транзистора  $VT$  включён колебательный контур  $LC$ .

Связь с последующим усилительным каскадом подобного типа или с нагрузкой может осуществляться двумя способами:

- 1) через разделительный трансформатор, первичная обмотка которого определяет индуктивность  $L$  колебательного контура, или
- 2) через разделительный конденсатор  $C_{п2}$ , как показано на рис.17.11.2.

Качественно характер частотной зависимости коэффициента усиления, представленной на рис.17.11.1, объясняется зависимостью от частоты сопротивления колебательного контура в коллекторной цепи транзистора. На резонансной частоте

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

сопротивление колебательного контура велико. Поэтому на частоте  $f_0$  коэффициент усиления максимален. При отклонении частоты сигнала от резонансной частоты  $f_0$  в сторону увеличения или уменьшения сопротивление контура уменьшается. Это обусловлено шунтирующим действием его индуктивности или ёмкости и вызывает уменьшение коэффициента усиления каскада.

Установим связь частотной зависимости коэффициента усиления с параметрами колебательного контура и элементов каскада. Обозначим суммарное сопротивление потерь в катушке ( $L$ ) и конденсаторе ( $C$ ) символом  $r$ . Тогда на резонансной частоте  $f_0$  сопротивление контура равно:

$$R_0 = \frac{z_C^2}{r}, \text{ где } z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} - \text{характеристическое сопротивление контура.}$$

Следовательно,

$$R_0 = \frac{L}{r \cdot C}.$$

Сопротивления  $z_C$  и  $r$  определяют добротность контура:

$$Q_K = \frac{z_C}{r} = \frac{z_C}{z_C^2/R_0} = \frac{R_0}{z_C} = \frac{\omega_0 \cdot L}{r} = \frac{1}{\omega_0 \cdot C \cdot r}.$$

Коэффициент усиления может быть выражен через  $h$ - параметры транзистора:

$$k_U = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{h_{21} \cdot \underline{Z}}{h_{11} \cdot (1 + h_{22} \cdot \underline{Z})}.$$

Здесь  $\underline{Z}$  – комплексное сопротивление резонансного контура:

$$\underline{Z} = \frac{L}{r \cdot C} + j \cdot \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right).$$

Поскольку  $h_{22} \ll 1$  и  $h_{21} = 10^{-5} \div 10^{-7}$ , выражение коэффициента усиления принимает вид:

$$k_U \approx \frac{h_{21} \cdot \underline{Z}}{h_{11}}.$$

Здесь параметры  $h_{22}$  и  $h_{11}$  не зависят от частоты  $f$ .

Для выходной цепи усилительного каскада на резонансной частоте эквивалентная добротность контура равна:

$$Q_{\text{к.экв.}} = \frac{R_{\text{ЭКВ}}}{Z_C},$$

где  $R_{\text{ЭКВ}}$  – эквивалентное сопротивление выходной цепи каскада на резонансной частоте.

Сопротивление нагрузочной цепи каскада на частоте, близкой к резонансной частоте

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

можно связать с эквивалентной добротностью ( $Q_{\text{к. экв}}$ ) контура:

$$|Z| = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \left( Q_{\text{к.экв.}} \cdot \frac{2 \cdot \Delta f}{f_0} \right)^2}}. \quad (17.11.1)$$

Из полученного выражения следует, что сопротивление нагрузочной цепи каскада с колебательным контуром максимально на его резонансной частоте при  $\Delta f \rightarrow 0$  и уменьшается при отклонении частоты от резонансной частоты, то есть при  $\Delta f \neq 0$ .

Поскольку коэффициент усиления каскада пропорционален сопротивлению его коллекторной цепи, то пропорционально изменению сопротивления  $|Z|$  с частотой будет изменяться и коэффициент усиления каскада.

В частности, уменьшению коэффициента усиления каскада в  $\sqrt{2}$  раз будет соответствовать уменьшение в то же число раз и сопротивления  $|Z|$ .

Приравняв знаменатель выражения (17.11.1) числу  $\sqrt{2}$ , получим:

$$Q_{\text{к.экв.}} = \frac{f_0}{2 \cdot \Delta f}.$$

Таким образом, добротность резонансного усилительного каскада определяется эквивалентной добротностью контура  $Q_{\text{к.}} = Q_{\text{к. экв.}}$ . Следовательно, эквивалентная добротность колебательного контура может быть найдена с помощью частотной характеристики усилительного каскада.

В диапазоне звуковых и промышленных частот избирательные усилители выполняют с обратными связями через частотно-избирательные  $RC$ - цепи.

Из частотно-избирательных  $RC$ - цепей наибольшее распространение получила схема двойного  $T$ -образного моста (рис.17.11.3). Схема отличается высокой селективностью передачи напряжения  $|\beta|$  и угла фазового сдвига  $\varphi$  между напряжением входа и выхода. При  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow 0$  и значение  $\beta \rightarrow 1$  (рис.17.11.4), поскольку при этих условиях сопротивления конденсаторов становятся очень большим, и всё напряжение  $U_{\text{вх}}$  через «верхний» одинарный  $T$ -образный мост (через элементы  $R, 2C, R$ ) передаётся на вход усилителя в виде напряжения обратной связи.

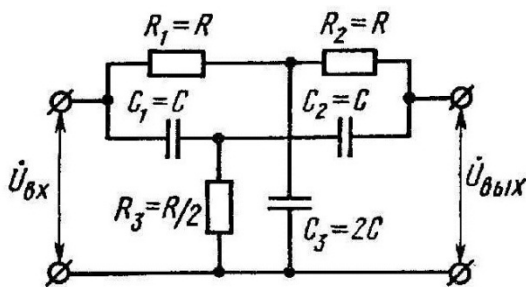


Рис.17.11.3

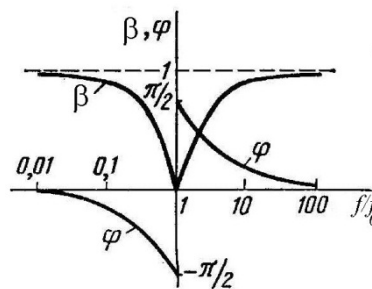


Рис.17.11.4

Структурная схема избирательного усилителя показана на рис.17.11.5. В качестве усилителя в них можно использовать, например, усилитель с резистивно-ёмкостной связью. Частотно-зависимый четырёхполюсник и фильтр могут быть включены в цепь обратной связи (рис.17.11.3). Такой фильтр представляет собой цепь, состоящую из резисторов и конденсаторов, то есть  $RC$ - цепь. При каскадном включении применяют фильтры на реактивных элементах – дросселях с индуктивностью  $L$  и конденсаторы ёмкостью  $C$ , то есть  $LC$  – фильтры.

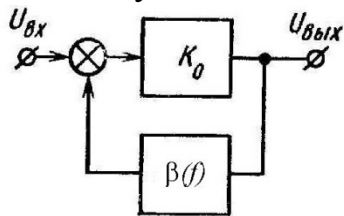


Рис.17.11.5

На высоких частотах, то есть при условии  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow \infty$  значение  $\beta \rightarrow 1$ , поскольку сопротивления конденсаторов  $x_C = 1/2 \cdot \pi \cdot f$  становятся небольшими, и всё напряжение на вход усилителя передаётся через «нижний»  $T$ -образный мост ( $C, R/2, R$ ) (рис.17.11.3).

При резонансе, то есть при частоте  $f_0$ , называемой **частотой настройки**, для данной схемы (рис.17.11.3) выполняется соотношение:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}.$$

Для получения частотной характеристики вида рис.17.11.1  $T$ -образный мост следует включить в цепь отрицательной обратной связи (рис.17.11.5).

## 17.12. Усилители мощности

Рассмотренные усилительные каскады и многокаскадные усилители обеспечивают получение на выходе устройства сигналов, мощность которых значительно превышает мощность сигналов на входе. Однако для большинства усилителей основным показателем является коэффициент увеличения напряжения (реже коэффициент усиления тока) при допустимых нелинейных и частотных искажениях усиливаемого сигнала.

Одной из задач электроники является получение в нагрузочном устройстве сигнала максимально достижимой мощности. Усилители, обеспечивающие получение на выходе устройства сигнала максимально возможной мощности, называются **усилителями мощности**. Они, как правило, являются выходными (оконечными) каскадами многокаскадных усилителей.

Распространёнными видами нагрузки усилителей мощности являются обмотки электродвигателей, реле, акустических систем и других устройств. Нагрузка усилителей мощности, как правило, имеет небольшое сопротивление (не превышающее нескольких десятков ом). На выходе таких усилителей значения требуемой мощности могут достигать сотен ватт. Основным параметром усилителей мощности является коэффициент усиления мощности  $k_P$ , равный произведению коэффициента усиления напряжения  $k_U$  и коэффициента усиления тока  $k_I$ :  $k_P = k_U \cdot k_I$ .

Достижение требуемой мощности в нагрузочном устройстве обеспечивается выбором соответствующего усилительного элемента - транзистора. Для передачи в нагрузку максимальной мощности нагрузка должна быть согласованной с усилительным каскадом: то есть сопротивление выходной цепи усилителя должно быть равно сопротивлению нагрузки.

Выходное сопротивление усилительных каскадов с общим эмиттером или общим истоком составляет обычно от сотен ом до нескольких килоом, а сопротивление нагрузочных устройств в несколько десятков раз меньше. Для согласования сопротивления нагрузки с выходным сопротивлением усилителя мощности используют понижающие трансформаторы  $TV$  (рис.17.12.1).

Для усилителей мощности большое практическое значение имеет КПД, который зависит от режима работы транзистора. Поэтому в усилителях мощности используют режим  $B$ , обеспечивающий значительно более

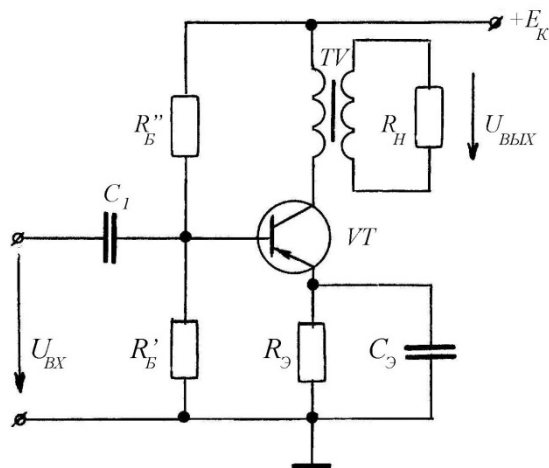


Рис.17.12.1

высокий КПД, чем режим *A*. Но для режима *B* характерны значительные нелинейные искажения. Для их уменьшения используют двухтактные усилители мощности. В однотактных усилителях можно реализовать лишь режим *A*.

Чаще всего в усилителях мощности используют транзисторные усилительные каскады с общим эмиттером. Положение рабочей точки усилителя мощности на коллекторных характеристиках определяется предельными эксплуатационными величинами:

- 1) максимальной мощностью транзистора  $P_{max}$ ;
- 2) максимальным напряжением между коллектором и эмиттером  $U_{Kmax}$ ;
- 3) максимальным током коллектора  $I_{Kmax}$ .

Максимальные значения мощности, напряжения и тока определяют границы надёжной работы усилителя. Условия работы должны быть такими, чтобы предельные режимы не превышались. Расчёт основных величин, характеризующих показатели усилителя мощности, выполняют графоаналитическим методом (рис.17.12.2).

На семейство коллекторных характеристик (рис.17.12.2) наносят линии, соответствующие предельным режимам. При этом линия  $P_K = P_{max}$  представляют собой гиперболу, а линии  $U_K = U_{Kmax}$  и  $I_K = I_{Kmax}$  — прямые линии, параллельные осям координат. Поскольку невозможно получить коллекторный ток меньше  $I_{K0}$  и больше тех значений, где характеристики для различных токов базы сливаются, эти области также являются нерабочими. Границы допустимых рабочих режимов обозначены на рис.17.12.2 штриховкой.

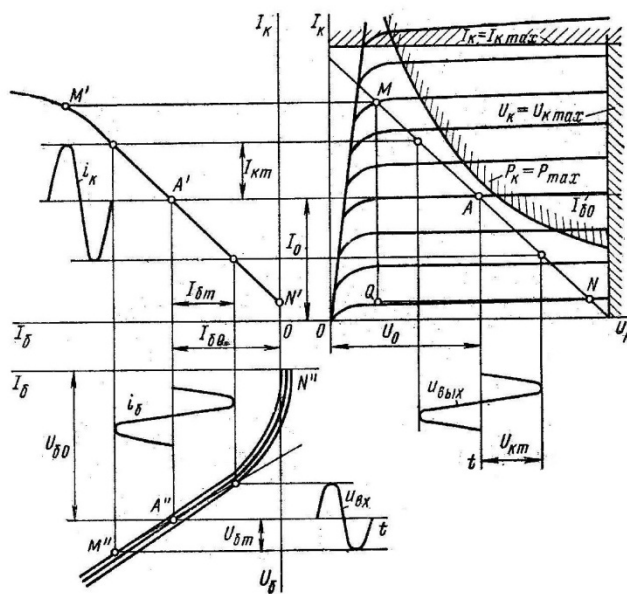


Рис.17.12.2

Полагая, что сопротивление нагрузки, приведённое к цепи коллектора, и напряжение источника питания могут быть любыми, выбирают положение линии нагрузки  $MN$ .

Площадь треугольника  $MQN$ , образованного линией нагрузки и линиями, параллельными осям координат и проведёнными из точек пересечения линии нагрузки с линиями предельных режимов, пропорциональна максимальному значению мощности, которое можно получить от усилительного элемента в заданных условиях. Поэтому линия нагрузки должна полностью находиться в рабочей области и соответствовать максимально возможной мощности в нагрузке. При этом площадь треугольника  $MQN$  максимальна.

Выбрав положение линии нагрузки, можно построить переходную характеристику  $M'N'$  (рис.17.12.2), задать положение рабочей точки (например, точку  $A'$  при работе в режиме  $A$  так, чтобы выполнялось условие  $M'A'=A'N'$ ), определить приведённое сопротивление нагрузочного резистора

$$R'_H = \frac{U_{Km}}{I_{Km}} \quad (17.12.1)$$

и затем оценить возможность включения его непосредственно в цепь транзистора или в соответствии с формулой

$$\frac{w_1}{w_2} = \sqrt{\frac{R_{\text{ВЫХ}}}{R_H}} = n \quad (17.12.2)$$

рассчитать коэффициент трансформации выходного трансформатора. Здесь  $w_1$  и  $w_2$  – числа витков первичной и вторичной обмоток трансформатора.

Коэффициент усиления тока определяют непосредственно по переходной характеристике (рис. 5.12.2):

$$k_I = \frac{I_{Km}}{I_{Bm}}. \quad (17.12.3)$$

Для определения коэффициента усиления мощности находят мощность цепи базы:

$$P_B = 0,5 \cdot U_{Bm} \cdot I_{Bm}, \quad (17.12.4)$$

причём значение  $U_{Bm}$  находят по входной характеристике транзистора. Тогда коэффициент усиления мощности равен:

$$k_P = \frac{P_H}{P_B}, \quad (17.12.5)$$

где

$$P_K = 0,5 \cdot U_{Km} \cdot I_{Km}.$$

Если в результате расчёта мощность, формируемая в нагрузочном резисторе, окажется недостаточной, необходимо использовать более мощ-

ный транзистор или несколько транзисторов, включённых параллельно или последовательно.

Наибольшее распространение получили одноконтный и двухконтный усилители мощности, а также бестрансформаторный усилитель мощности с дополнительной симметрией. Усилители мощности, питаемые от источника переменного напряжения, собирают по аналогичным схемам, имеющим некоторые особенности.

### 17.13. Операционные усилители

**Операционным усилителем** называется усилитель постоянного тока с дифференциальным входным каскадом, с очень высоким и стабильным коэффициентом усиления (от 1000 до 100000), широкой полосой пропускания ( $f_B = 10 \div 100$  МГц), высоким входным сопротивлением ( $R_{BX} \geq 10$  кОм), малым выходным сопротивлением ( $R_{ВЫХ} \leq 100$  Ом), малым дрейфом нуля, высоким коэффициентом подавления синфазных сигналов, несимметричным входом. Таким образом, под термином «**операционный усилитель**» понимают высококачественный универсальный усилитель.

Название этих усилителей связано с их применением главным образом для выполнения различных операций над аналоговыми величинами (такими, как сложение, вычитание, интегрирование и другие). Благодаря достижениям микроэлектроники и широкому выпуску операционных усилителей в интегральном исполнении в настоящее время открылись новые возможности их применения. В современной технике операционные усилители используются в аппаратуре различного назначения, например, в устройствах генерации сигналов синусоидальной и импульсной формы, в стабилизаторах напряжения, активных фильтрах.

Условное обозначение операционного усилителя приведено на рис.17.13.1. Один из входов усилителя ( $U_{BX.H.}$  «+») называется **неинвертирующим входом**, а второй вход ( $U_{BX.H.}$  «-») называется **инвертирующим входом**. При подаче сигнала на неинвертирующий вход приращение выходного сигнала совпадает по знаку

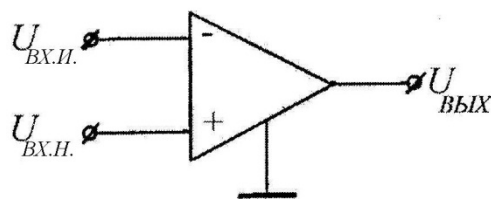


Рис.17.13.1

(фазе) с приращением входного сигнала. Если сигнал подан на инвертирующий вход, то приращение выходного сигнала имеет обратный знак (то есть противоположный по фазе) по сравнению с приращением входного сигнала. Инвертирующий вход часто используют для введения в операционный усилитель внешних отрицательных обратных связей.

На рис.17.13.2 показан пример схемы включения операционного усилителя. Здесь питание осуществляется от двух последовательно включённых источников, напряжения которых одинаковы, но знаки относи-

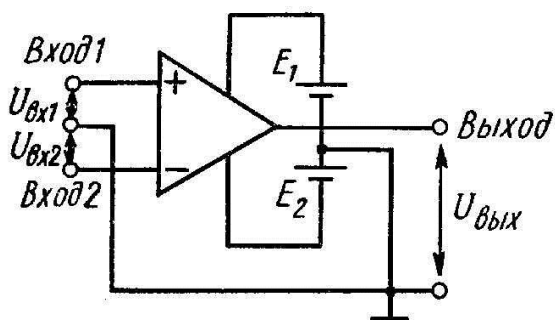


Рис.17.13.2

которые подключают к инвертирующему входу и общему проводу, другой – к неинвертирующему общему проводу. Сигнал можно подавать на неинвертирующий вход, а через инвертирующий вход операционный усилитель охватывают глубокой обратной связью. В этом случае можно получить устройства с различными свойствами, которые определяются параметрами цепи операционного усилителя. С помощью такого операционного усилителя можно осуществлять математические операции: умножение, интегрирование, дифференцирование, сравнение и другие.

На рис.17.13.3 приведена принципиальная электрическая схема трёхкаскадного операционного усилителя – микросхема 140УД1. Питание схемы осуществляется от двух источников  $+E_{K1}$  и  $-E_{K2}$  с одинаковым напряжением. Источники питания имеют общую точку:  $|E_{K1}| = |E_{K2}| = E_K$ .

Входной усилительный каскад выполнен на транзисторах  $VT_1$  и  $VT_2$  по дифференциальной схеме. Выходы первого каскада связаны с входами второго каскада на транзисторах  $VT_5$  и  $VT_6$  также по дифференциальной схеме. Резистор в цепи коллектора транзистора  $VT_5$  отсутствует, поскольку выходной сигнал второго каскада снимается только с коллектора транзистора  $VT_6$ . Источник стабильного тока во втором дифференциальном каскаде не используется. Требуемая стабильность эмиттерного тока  $I_3$  транзисторов  $VT_5$  и  $VT_6$  достигается с помощью резистора  $R_9 = R_5$ . Падение напряжения на резисторе  $R_5$  вследствие протекания тока  $I_3$  обоих транзисторов повышает потенциал их эмиттеров, что необходимо для непосредственной связи баз транзисторов с выходами предыдущего каскада.

Третий усилительный каскад выполнен на транзисторах  $VT_7$  и

тельно заземлённой точки противоположны. Это обеспечивает нулевой сигнал на выходе в отсутствие входного сигнала и возможность получить сигнал на выходе как положительной, так и отрицательной полярности. Сигнал можно подавать от симметричного источника сигнала, соединённого с общим проводом, на вход 1 – вход 2 или от двух отдельных источников, один из которых

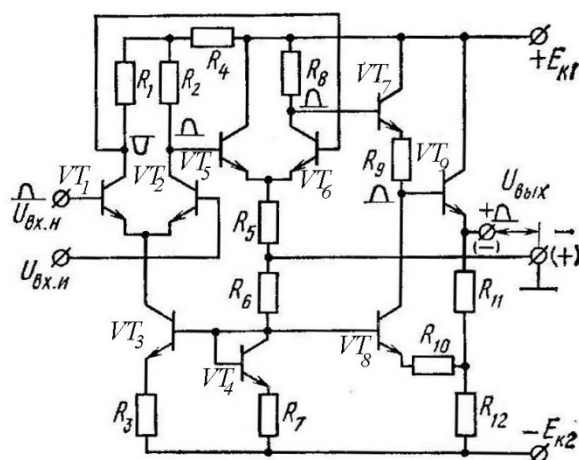


Рис.17.13.3

$VT_8$ . Его выход связан с входом транзистора  $VT_9$ , на котором реализован выходной эмиттерный повторитель. Построение третьего усилительного каскада выполнено так, что транзисторы  $VT_7$  и  $VT_8$  представляют собой управляемые элементы второго делителя эмиттерного повторителя. Управление транзистором  $VT_7$  производится по цепи базы выходным сигналом второго каскада, управление транзистором  $VT_8$  – по цепи эмиттера напряжением на резисторе  $R_{12}$ , создаваемым в результате протекания тока через этот резистор тока эмиттера транзистора  $VT_9$ . Транзистор  $VT_8$  входит в контур положительной обратной связи, позволяющей обеспечить коэффициент усиления третьего каскада. Совместное действие транзисторов  $VT_7$  и  $VT_8$  направлено либо на увеличение, либо на уменьшение (в зависимости от сигнала на входе транзистора  $VT_6$ ) входного напряжения эмиттерного повторителя, то есть потенциала базы транзистора  $VT_9$ . Повышение напряжения на базе транзистора  $VT_9$  обусловлено уменьшением сопротивления транзистора  $VT_7$  постоянному току, а также увеличением сопротивления транзистора  $VT_8$ .

Операционные усилители характеризуются усилительными, входными, выходными, энергетическими, дрейфовыми, частотными и скоростными параметрами.

Важнейшими характеристиками операционного усилителя являются его амплитудные (передаточные) (рис.17.13.4) характеристики. Их представляют в виде двух кривых, описывающих свойства инвертирующего и неинвертирующего входа. Характеристики снимают при подаче сигнала на один из входов при нулевом сигнале на другом входе. Каждая кривая состоит из двух горизонтальных и наклонного участка.

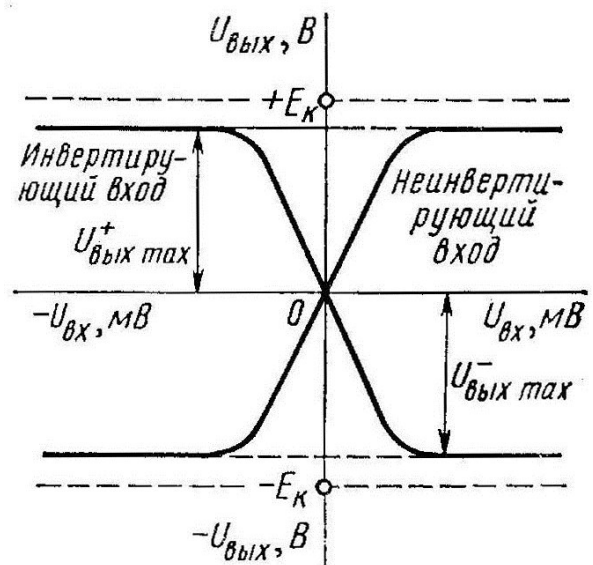


Рис.17.13.4

Горизонтальные участки кривых соответствуют режиму полностью открытого (насыщенного) либо закрытого транзистора выходного транзистора выходного каскада (эмиттерного повторителя). При изменении напряжения входного сигнала на этих участках выходное напряжение усилителя не изменяется и равно:  $U_{вых max}^+$  и  $U_{вых max}^-$ . Значения максимальных выходных напряжений близки к напряжению  $E_K$  источников питания.

Наклонному линейному участку кривых соответствует пропорциональная зависимость выходного напряжения от входного напряжения. Угол наклона прямой определяется **коэффициентом усиления**

$$k_{U\text{ оу}} = \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{\Delta U_{\text{ВХ}}}$$

операционного усилителя. Значение  $k_{U\text{ оу}}$  зависит от типа операционного усилителя и может составлять от нескольких сотен до нескольких сотен тысяч и более. Большие значения  $k_{U\text{ оу}}$  позволяют при охвате таких усилителей глубокой отрицательной обратной связью получать схемы со свойствами, которые зависят только от параметров цепи отрицательной обратной связи.

Передаточные характеристики операционного усилителя (рис.17.13.4) проходят через нуль. Состояние, когда  $U_{\text{ВЫХ}}=0$  при  $U_{\text{ВХ}}=0$ , называется **балансом операционного усилителя**. Для реальных операционных усилителей условие баланса не выполняется, то есть наблюдается **разбаланс**. При  $U_{\text{ВХ}}=0$  выходное напряжение операционного усилителя может быть больше или меньше нуля ( $U_{\text{ВЫХ}}=+\Delta U_{\text{ВЫХ}}$  или  $U_{\text{ВЫХ}}=-\Delta U_{\text{ВЫХ}}$ ). На рис.17.13.4 пунктирными линиями показан возможный вид передаточной характеристики реальных операционных усилителей при входном сигнале, подаваемом на неинвертирующий вход. Напряжение  $U_{\text{СМ } 0}$ , при котором  $U_{\text{ВЫХ}}=0$ , называется **входным напряжением смещения нуля**. Параметр  $U_{\text{СМ } 0}$  определяет напряжение, которое необходимо подать на вход операционного усилителя для обеспечения баланса. Значения  $U_{\text{СМ } 0}$  и  $\Delta U_{\text{ВЫХ}}$  связаны соотношением:

$$U_{\text{СМ } 0} = \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{k_{U\text{ оу}}}.$$

Основной причиной разбаланса операционного усилителя является существенный разброс параметров элементов дифференциального усилительного каскада, в частности, транзистора. Зависимость от температуры параметров операционного усилителя вызывает температурный дрейф входного напряжения смещения и температурный дрейф выходного напряжения.

Рассмотрим примеры построения аналоговых схем на операционном усилителе, режим работы которого осуществляется в пределах линейного участка передаточных характеристик.

### Инвертирующий усилитель

Инвертирующий усилитель изменяет знак выходного сигнала относительно входного (рис.17.13.5). Это обусловлено введением в инвертирующий вход параллельной отрицательной обратной связи по напряжению с помощью резистора  $R_{\text{ОС}}$ . Неинвертирующий вход заземлён. Входной сигнал подаётся на инвертирующий вход через резистор  $R_1$ .

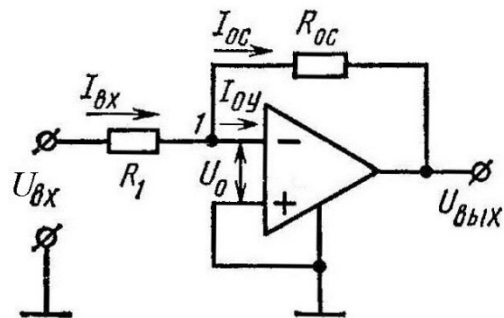


Рис.17.13.5

Показатели схемы можно определить с помощью первого правила Кирхгофа для узла 1. Учитывая, что входное сопротивление операционного усилителя велико ( $R_{BX\ OY} \rightarrow \infty$ ), входным током операционного усилителя можно пренебречь ( $I_{OY}=0$ ). Тогда  $I_{BX}=I_{OC}$ , следовательно

$$\frac{U_{BX} - U_0}{R_1} = - \frac{U_{ВЫХ} - U_0}{R_{OC}}. \quad (17.13.1)$$

При  $k_{U\ OY} \rightarrow \infty$  напряжение на входе операционного усилителя стремится к нулю:

$$U_0 = \frac{U_{ВЫХ}}{k_{U\ OY}} \rightarrow 0.$$

Поэтому выражение (17.1.13) принимает вид:

$$\frac{U_{BX}}{R_1} = - \frac{U_{ВЫХ}}{R_{OC}}. \quad (17.13.2)$$

Следовательно, коэффициент усиления напряжения инвертирующего усилителя с параллельной обратной связью определяется только пассивной частью схемы:

$$k_{U\ И} = \frac{U_{ВЫХ}}{U_{BX}} = - \frac{R_{OC}}{R_1}. \quad (17.13.3)$$

Выбор  $R_{OC}=R_1$ , когда  $k_{U\ OY}=-1$ , придаёт схеме на рис.17.13.5 свойство инвертирующего повторителя напряжения. Поскольку  $U_0 \rightarrow 0$ , входное сопротивление схемы  $R_{BX}=R_1$ . Выходное сопротивление усилителя:

$$R_{ВЫХ} = \frac{R_{ВЫХ\ OY} \left(1 + \frac{R_{OC}}{R_1}\right)}{k_{U\ OY}} \quad (17.13.4)$$

при  $k_{U\ OY} \rightarrow \infty$  близко к нулю.

### Неинвертирующий усилитель

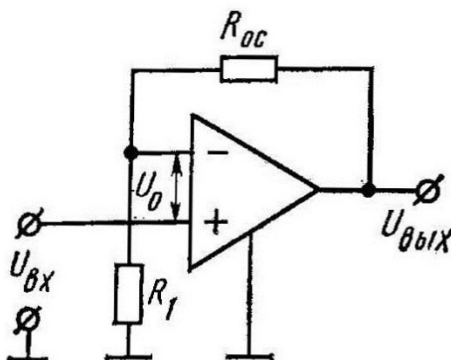


Рис.17.13.6

Неинвертирующий усилитель (рис.17.13.6) содержит последовательную отрицательную обратную связь по напряжению, поданную по инвертирующему входу. Входной сигнал подаётся на неинвертирующий вход операционного усилителя.

Поскольку напряжения на входах операционного усилителя равны, то  $U_0=0$  и связь напряжения на входе  $U_{BX}$  и выходе  $U_{ВЫХ}$  связаны соотношением:

$$U_{BX} = U_{ВЫХ} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_{OC}}. \quad (17.13.5)$$

Следовательно, коэффициент усиления неинвертирующего усилителя равен:

$$k_{UH} = \frac{U_{ВЫХ}}{U_{BX}} = 1 + \frac{R_{OC}}{R_1}. \quad (17.13.6)$$

При  $R_{OC}=0$  и  $R_1=\infty$  устройство на рис.17.13.6 преобразуется к схеме повторителя (рис.17.13.7) с коэффициентом усиления напряжения, равным единице ( $k_U=1$ ).

Входное сопротивление неинвертирующего усилителя  $R_{BX}$ , равное входному сопротивлению операционного усилителя по неинвертирующему входу, принимает большие значения, а выходное сопротивление  $R_{ВЫХ} \rightarrow 0$ . Его значение определяют из формулы (17.13.4).

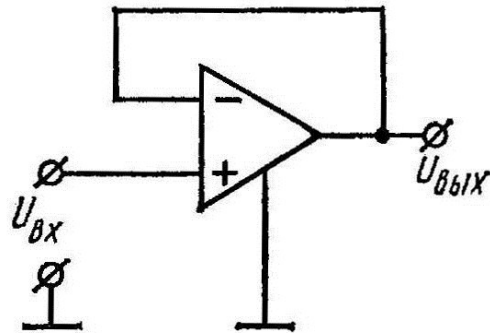


Рис.17.13.7

Неинвертирующий и инвертирующий усилители широко используются в качестве стабильных усилителей различного назначения.

### Преобразователь тока и напряжения

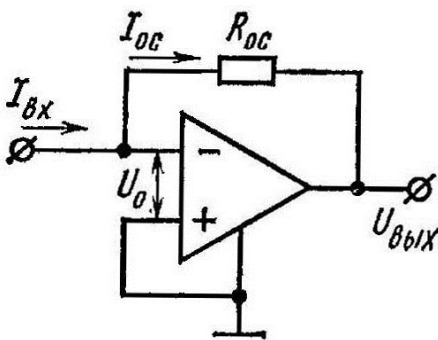


Рис.17.13.8

Схема, выполняющая операцию преобразования тока в напряжение (рис.17.13.8), может быть получена из схемы на рис.17.13.5 при  $R_1=0$ .

В схеме на рис.17.13.8 ток  $I_{OC}$  цепи обратной связи равен входному току:

$$I_{BX} = I_{OC} = -\frac{U_{ВЫХ}}{R_{OC}},$$

Поэтому напряжение на выходе связано с током входа соотношением:

$$U_{ВЫХ} = -I_{BX} \cdot R_{OC}.$$

Преимуществами схемы при её использовании для преобразования тока источников сигнала в напряжение являются малые входные и выходные сопротивления схемы.

## Инвертирующий сумматор

Схема инвертирующего сумматора (рис.17.13.9) выполняется подобно схеме инвертирующего усилителя (рис.17.13.5), но число параллельных входных ветвей равно количеству сигналов, предназначенных для сложения.

Сопротивления резисторов входных ветвей  $R_i$  принимают одинаковыми и равными сопротивлению  $R_{OC}$  петли обратной связи:

$$R_{OC} = R_1 = R_2 = \dots = R_n < R_{BX.OY}.$$

Если входной ток операци-

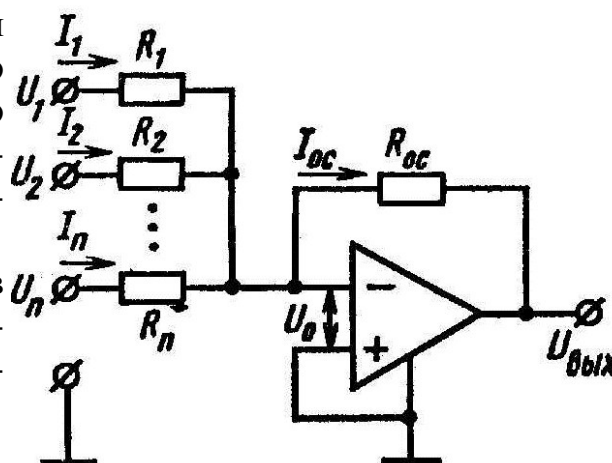


Рис.5.13.9

онного усилителя равен нулю ( $I_{BX.OY} = 0$ ), первое правило Кирхгофа для узла входной цепи запишется в виде:

$$I_{OC} = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

Умножая слагаемые данного уравнения на соответствующие сопротивления  $R_i$ , получим:

$$U_{ВЫХ} = -(U_1 + U_2 + \dots + U_n). \quad (17.13.7)$$

Формула (17.13.7) соответствует случаю равенства весов суммируемых напряжений.

Если сопротивления  $R_i$  входных ветвей различны, неодинаковы и весовые коэффициенты слагаемых напряжений, поэтому суммирование следует производить с учётом весовых коэффициентов:

$$U_{ВЫХ} = - \left( \frac{R_{OC}}{R_1} \cdot U_1 + \frac{R_{OC}}{R_2} \cdot U_2 + \dots + \frac{R_{OC}}{R_n} \cdot U_n \right). \quad (17.13.8)$$

## Неинвертирующий сумматор

Неинвертирующий сумматор может быть реализован последовательным соединением схемы инвертирующего сумматора (рис.17.13.9) и инвертирующего усилителя (рис.17.13.5). Однако он может быть выполнен проще (рис.17.13.10) с использованием схемы (рис.17.13.6) неинвер-

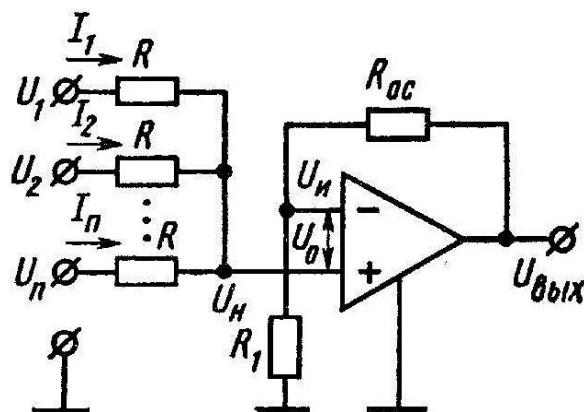


Рис.17.13.10

тирующего усилителя.

При  $U_0=0$  напряжения на входах (рис.17.13.10) операционного усилителя одинаковы и равны:

$$U_H = U_{\text{и}} = \frac{R_1}{R_1 + R_{OC}} \cdot U_{\text{вых}}.$$

При равенстве нулю тока неинвертирующего входа ( $R_{BX.OV}=\infty$ ) первое правило Кирхгофа для узла входной цепи запишется в виде:

$$\frac{U_1 - U_H}{R} + \frac{U_2 - U_H}{R} + \dots + \frac{U_n - U_H}{R} = 0.$$

Тогда сумма напряжений на входах равна:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = n \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_{OC}} \cdot U_{\text{вых}}.$$

Из полученного выражения можно выразить напряжение на выходе:

$$U_{\text{вых}} = \frac{R_1 + R_{OC}}{n \cdot R_1} \cdot (U_1 + U_2 + \dots + U_n). \quad (17.13.9)$$

Выбор параметров схемы на рис.5.13.10 выбирают так, чтобы первый сомножитель правой части выражения (5.13.9) был равен единице:

$$\frac{R_1 + R_{OC}}{n \cdot R_1} = 1.$$

### Интегратор

Схема интегратора (рис.17.13.11) создаётся заменой в схеме инвертирующего усилителя (рис.17.13.5) сопротивления обратной связи  $R_{OC}$  конденсатором.

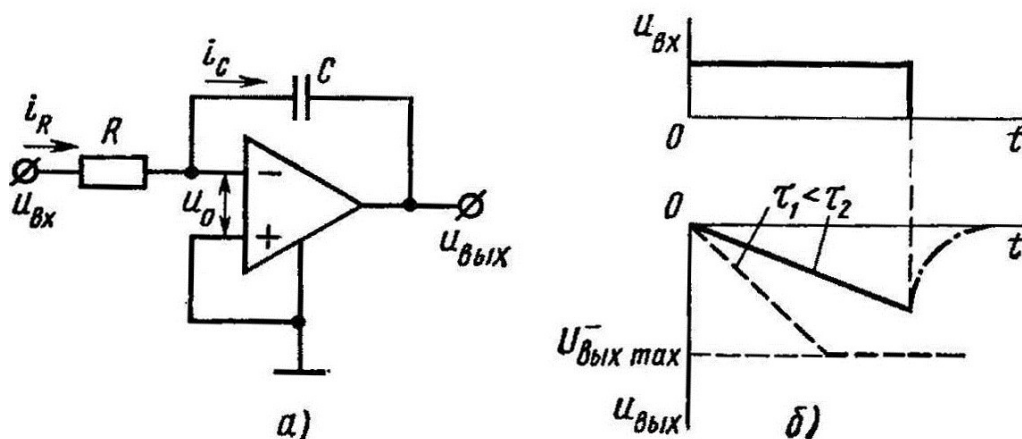


Рис.17.13.11

По аналогии со схемой рис.17.13.5, заменяя  $i_R$  на  $i_C$ , то есть учитывая, что  $i_C=i_R$ , получим:

$$-C \cdot \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} = \frac{u_{\text{ВХ}}}{R},$$

следовательно, напряжение на выходе равно:

$$u_{\text{ВЫХ}} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot \int_0^t u_{\text{ВХ}} \cdot dt + U_{\text{ВЫХ}0}, \quad (17.13.10)$$

где  $U_{\text{ВЫХ}0}$  – напряжение на выходе в момент времени  $t=0$ .

Отсчёт времени начинают с момента подачи сигнала на вход, причём обычно при  $t=0$  напряжение на входе  $u_{\text{ВХ}}=0$  и напряжение на выходе также отсутствует:  $U_{\text{ВЫХ}}=0$ . С учётом сделанных замечаний постоянная интегрирования выражения (17.13.10) равна нулю, и напряжение на выходе равно:

$$u_{\text{ВЫХ}} = -\frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t u_{\text{ВХ}} \cdot dt. \quad (17.13.11)$$

Здесь  $\tau=R \cdot C$  – время релаксации.

Если, например  $R=1 \text{ МОм}$  и  $C=1 \text{ мкФ}$  время релаксации  $\tau=R \cdot C=1 \text{ с}^{-1}$ . В этом случае интегрирование осуществляется в реальном масштабе времени.

Интегратор широко применяют при построении аналоговых решающих и моделирующих устройств. Интеграторы используют для создания генераторов линейно изменяющегося напряжения. При входном импульсе напряжения положительной полярности на выходе такого генератора на базе интегратора на рис.17.13.11.а формируется линейно нарастающее напряжение отрицательной полярности или положительной полярности при управлении импульсом напряжения отрицательной полярности. Процесс последующего уменьшения напряжения на выходе до нуля (штрих пунктир на рис.17.13.11.б) вызван разрядом конденсатора с постоянной времени  $\tau=C \cdot (R+R_{\text{ВЫХ. ОУ}})$ . Для уменьшения времени разряда конденсатора до нуля разряд конденсатора осуществляют через включённый параллельно ему транзисторный ключ.

#### 17.14. Пример расчёта усилительного каскада

Рассмотрим методику расчёта параметров схемы однотактного низкочастотного усилителя с общим эмиттером (рис.17.14.1).

Для выполнения расчёта необходимо задать следующие исходные данные:

- коллекторный ток транзистора в режиме покоя (например,  $I_{\text{К.П.}}=1 \text{ мА}$ );
- напряжение между коллектором и эмиттером в режиме покоя (например,  $U_{\text{КЭ}}=5 \text{ В}$ );
- напряжение между эмиттером и базой (например,  $U_{\text{БЭ}}=0,2 \text{ В}$ );

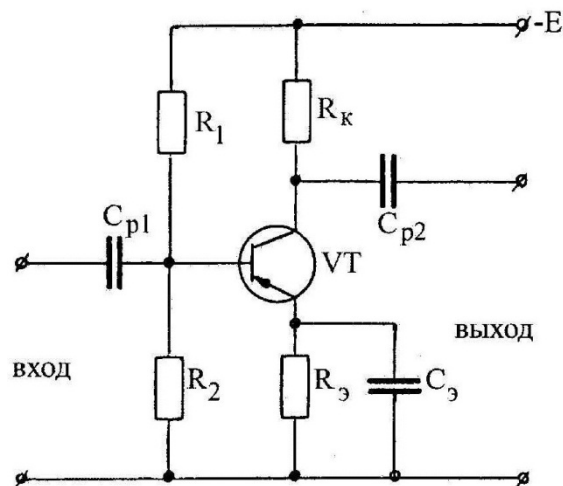


Рис.17.14.1

- нагрузкой усилителя является такой же усилительный каскад, то есть  $R_{BX}=R_H$ ;
- вид транзистора (например, транзистор *КТ-310*);
- $H$  – параметры транзистора: (транзистор *КТ-310* имеет следующие  $H$  - параметры:  $H_{11Э}= 820 \text{ Ом}$ ;  $H_{12Э}=8,2 \cdot 10^{-3}$ ;  $H_{21Э}=28$ ;  $H_{22Э}=56 \cdot 10^{-6} \text{ См}$ );
- сопротивление коллекторного резистора – (для транзистора *КТ-310*  $R_K=3,3 \text{ кОм}$ );
- наименьшая граничная частота усиления – (для транзистора *КТ-310*  $f_H=28 \text{ Гц}$ );
- эмиттерное напряжение ( $U_E= 2,4 \text{ В}$ ) и максимальная коллекторная мощность  $P_{K.max}= 0,25 \text{ Вт}$ ).

Расчёт параметров и режима работы усилителя производят в следующей последовательности.

1. Падение напряжения на коллекторном сопротивлении в режиме покоя (усиливаемый сигнал отсутствует):

$$U_{K.П.}=R_K \cdot I_{K.П.}.$$

2. Ток базы транзистора в состоянии покоя:

$$I_B = \frac{I_{K.П.}}{H_{21Э}}.$$

3. Ток делителя напряжения, протекающий в резисторах  $R_1$ - $R_2$  полагают в 10 раз превышающим ток базы, то есть

$$I_D=10 \cdot I_B.$$

4. Напряжение питания  $E_K$  схемы рассчитывают как сумму трёх напряжений:

$$E_K = U_{KЭ} + U_{К.П.} + U_{Э}.$$

5. Падение напряжения на резисторе  $R_2$  определяют как сумму двух напряжений:

$$U_2 = U_{Э} + U_{БЭ}.$$

6. Падение напряжения на резисторе  $R_1$  определяется как разность напряжения питания и падения напряжения на резисторе  $R_2$ :

$$U_1 = E_K - U_2.$$

7. Сопротивление резистора  $R_2$  определяют по закону Ома:

$$R_2 = \frac{U_2}{I_D}.$$

8. При расчёте сопротивления  $R_1$  следует учитывать, что через него протекает сумма токов  $I_D + I_B$  :

$$R_1 = \frac{U_1}{I_D + I_B}.$$

9.  $R_{BX}$  – входное сопротивление усилителя, определяемое как эквивалентное сопротивление трёх параллельно включённых элементов:  $R_1$ ,  $R_2$  и  $H_{11Э}$  транзистора, то есть:

$$\frac{1}{R_{BX}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{H_{11}}.$$

10. Сопротивление нагрузки должно быть согласованным, то есть

$$R_{BX} = R_H.$$

11. Сопротивление эмиттерного резистора определяют по формуле:

$$R_{Э} = \frac{H_{12Э}}{H_{22Э}}.$$

12. Ёмкость шунтирующего конденсатора определяют по приближённой формуле:

$$C_{Э} \geq \frac{1}{w_H \cdot R_{Э}} = \frac{1}{2 \cdot p \cdot f_H \cdot R_{Э}}.$$

13. Ёмкость разделительного конденсатора на входе  $C_{P.1}$  определяют по приближённой формуле

$$C_{P.1} \geq \frac{1}{2 \cdot p \cdot f_H \cdot R_{BX}}.$$

14. Ёмкость разделительного конденсатора на выходе  $C_{P.2}$  :

$$C_{P.2} \geq \frac{1}{2 \cdot p \cdot f_H \cdot R_H}.$$

15. Коэффициент усиления по напряжению  $k_U$  в области средних частот:

$$k_U = \frac{H_{21Э}}{H_{11Э}} \cdot R_{KH},$$

где  $R_{KH}$  – сопротивление, эквивалентное параллельно включённым сопротивлениям  $R_K, R_H, R_{ВЫХ} = 1/H_{22Э}$ ,  
то есть:

$$\frac{1}{R_{KH}} = \frac{1}{R_K} + \frac{1}{R_H} + \frac{1}{R_{ВЫХ}}.$$

16. Рассеиваемая на коллекторе транзистора мощность не должна превышать максимально допустимой мощности  $P_{K.max}$  величина которой приведена в перечне исходных данных.  $P_K = I_K^2 R_K$ .

Резисторы в схеме выбирают такого типа, чтобы их максимальная рассеиваемая мощность не менее, чем в два раза превышала рассчитанную величину мощности.

Результаты расчётов записывают в таблицу:

$U_{к.п.}$ [ В ]	$I_{к.п.}$ [ ]	$E_K$ [ ]	$U_1$ [ ]	$U_2$ [ ]	$R_1$ [.]	$R_2$ [.]	$R_Э$ [.]	$C_Э$ [.]	$C_{P1}$ [.]	$C_{P2}$ [.]	$k_U$	$R_{ВЫХ}$ [.]

## Глава XVIII. ИМПУЛЬСНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ УСТРОЙСТВА

### 18.1. Электрические импульсы

В современной электронике доминирующим является импульсный режим работы.

На базе импульсной техники конструируют устройства измерения, обработки и отображения информации, системы обработки и регулировки.

В отличие от аналоговых схем, в которых сигналы изменяются непрерывно, например, напряжение изменяется пропорционально регулируемой температуре, в импульсных системах используются сигналы импульсной формы, например, импульсы тока или напряжения.

Импульсные системы обладают следующими основными преимуществами по сравнению с аналоговыми системами:

- 1) в процессе работы импульсные системы потребляют меньшую мощность по сравнению с аналоговыми системами;
- 2) импульсные системы обеспечивают более высокую точность управления, передачи и обработки информации;
- 3) показатели импульсных систем меньше зависят от температуры;
- 4) импульсные системы более устойчивы к воздействию помех по сравнению с аналоговыми схемами.

**Импульсным** называется такой режим работы, при котором устройство вырабатывает или находится под воздействием электрических величин, которые имеют форму **импульсов** или **перепадов**.

**Перепадами** называют быстрые, то есть скачкообразные изменения электрической величины (напряжения или тока) между двумя уровнями.

**Электрическим импульсом** называется кратковременный одиночный скачок электрического тока или напряжения.

Физическая величина, например, ток, напряжение или электрическая мощность, параметры которой содержат информацию, называется **электрическим сигналом**.

Различают два типа импульсов:

- **видеоимпульсы** и
- **радиоимпульсы**.

**Видеоимпульс** представляет собой кратковременное изменение напряжения или тока и имеет отличную от нуля постоянную составляющую.

Видеоимпульсы могут иметь различную форму, и их название отражает геометрическую форму импульса. На рис.18.1.1.а представлены импульсы прямоугольной формы. Здесь  $t_H$  – длительность импульса, характеризующая продолжительность импульса во времени,  $t_{II}$  – продолжительность паузы,  $T$  – период следования импульсов. Амплитуда импульса  $U_m$  определяет наибольшее значение импульсного сигнала.

На рис.18.1.1.б показан пилообразный импульс, на рис.18.1.1.в – экспоненциальный импульс, на рис.18.1.1.г – прямоугольный импульс с чередующейся полярностью.

Форма реальных импульсов отличается от представленных на рис.18.1.1 геометрически правильных импульсов.

Например, реальные прямоугольные импульсы имеют форму, близкую к трапеции (рис.18.1.2). Участки быстрого нарастания (*AB*) и уменьшения (*CD*) импульса называют соответственно **фронтом** и **срезом** импульса. Времена нарастания и спада импульса характеризуют соответственно **длительностью фронта**  $t_\phi$  и **длительностью среза**  $t_c$ . Эти параметры характеризуют продолжительность соот-

ветственно нарастания и спада импульса относительно уровней  $0,1 \cdot U_m$  и

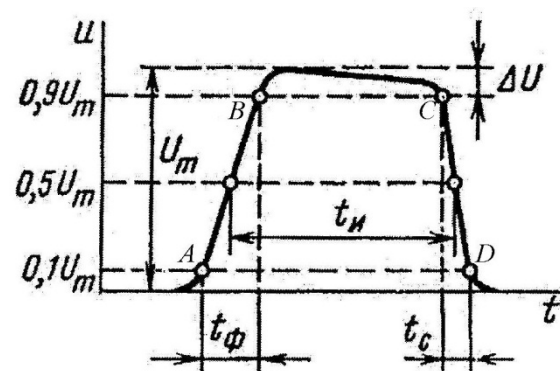


Рис.18.1.2

ответственно нарастания и спада импульса относительно уровней  $0,1 \cdot U_m$  и  $0,9 \cdot U_m$ . Обычно  $t_\phi$  и  $t_c$  составляют доли процента от длительности импульса  $t_H$ .

Изменение напряжения  $\Delta U$  на вершине импульса называется **завалом вершины**.

Завал вершины и его относительная величина  $\Delta U/U_m$  отражают относительное уменьшение напряжения на плоской части импульса.

Параметрами последовательности импульсов (рис.18.1.1.а, г) являются период повторения (следования), частота повторения, пауза, коэффициент заполнения и скважность.

**Периодом повторения импульсов**  $T$  называют промежуток времени между соответствующими точками, например, между началами, двух соседних импульсов.

Величину, обратную периоду повторения, называют частотой повторения импульсов:  $f=1/T$ .

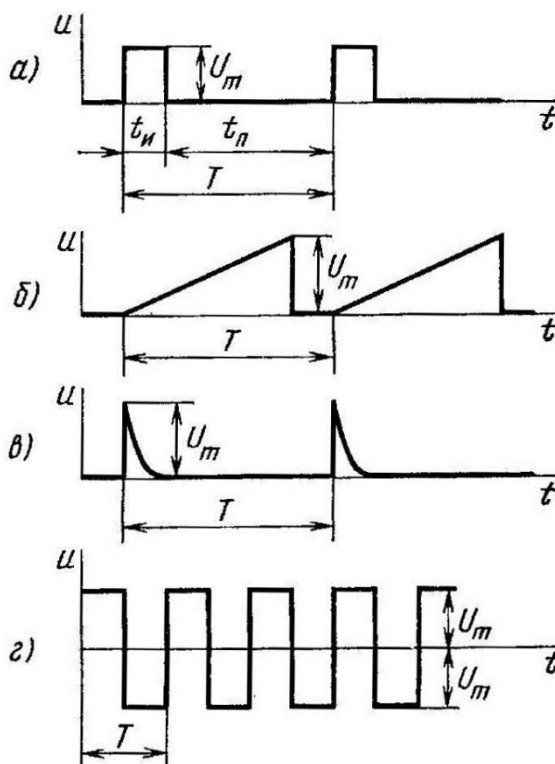


Рис.18.1.1

Отношение периода следования  $T$  к длительности импульса  $t_{II}$  называется **скважностью** импульсов:

$$q = \frac{T}{t_{II}}.$$

Величина, обратная скважности, называется **коэффициентом заполнения**:

$$\gamma = \frac{t_{II}}{T}.$$

Коэффициент заполнения характеризуется отношением длительности импульса к периоду их следования.

Кратковременный импульс высокочастотного напряжения или тока называется **радиоимпульсом** (рис.18.1.3).

Радиоимпульсы не имеют постоянной составляющей.

Частота высокочастотного синусоидального напряжения или тока называется **частотой заполнения**,

или **несущей частотой**. Огибающая радиоимпульса имеет форму видеоимпульса.

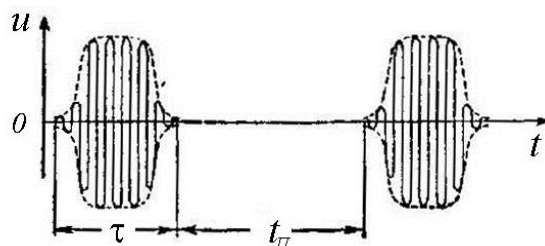


Рис.18.1.3

## 18.2. Интегрирующие и дифференцирующие цепи

В импульсных устройствах задающий генератор вырабатывает импульсы прямоугольной формы определённой длительности и амплитуды, которые предназначены для представления чисел и управления элементами вычислительных устройств, устройств обработки информации и других систем. Для надёжного функционирования элементов электронных систем необходимы импульсы определённой формы, имеющие заданную длительность и амплитуду. Поэтому возникает необходимость преобразовывать импульсы задающего генератора.

Преобразование осуществляется в основном с помощью линейных электрических цепей — четырёхполюсников, которые могут быть пассивными и активными. Линейные электрические цепи выполняют такие преобразования импульсов, как интегрирование, дифференцирование, изменение длительности, амплитуды и полярности импульсов, а также задержка импульсов во времени.

### 18.2.1. Интегрирующая цепь

Электрическая цепь (рис.18.2.1) осуществляет операцию интегрирования входного сигнала  $u_{BX}(t)$ , подаваемого на зажимы 1 — 1', если выходной сигнал  $u_{ВЫХ}(t)$  снимать с зажимов 2 — 2'.

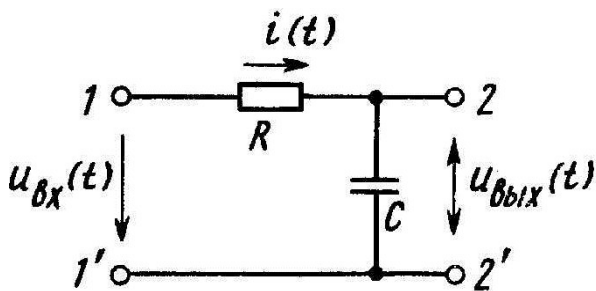


Рис.18.2.1

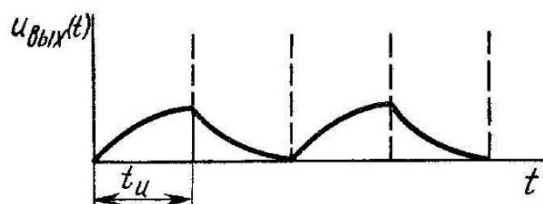


Рис.18.2.2

Запишем уравнение второго правила Кирхгофа для левого контура электрической цепи (рис.18.2.1):

$$u_{BX}(t) = u_R(t) + u_C(t), \quad \text{или}$$

$$u_{BX}(t) = i(t) \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt.$$

Следовательно, сила тока  $i(t)$ , будет изменяться по закону:

$$i(t) = \frac{u_{BX}(t)}{R} - \frac{1}{R \cdot C} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt.$$

Если выбрать постоянную времени  $\tau = R \cdot C$  достаточно большой, то вторым слагаемым в полученном уравнении можно пренебречь. Тогда в правой части последнего уравнения остаётся только первое слагаемое:

$$i(t) = \frac{u_{BX}(t)}{R}.$$

Напряжение  $u_{BbIX}(t)$  на выходных зажимах 2 – 2' равно напряжению на конденсаторе:

$$u_{BbIX}(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt = \frac{1}{R \cdot C} \cdot \int_0^t u_{BX}(t) \cdot dt. \quad (18.2.1)$$

Из уравнения (18.2.1) следует, что электрическая цепь на рис.18.2.1 выполняет операцию интегрирования входного сигнала и деления его на постоянную времени  $\tau = R \cdot C$ .

На рис.18.2.2 приведена временная диаграмма напряжения на выходе интегрирующей цепи при подаче на вход последовательности прямоугольных импульсов.

### 18.2.2 Дифференцирующая цепь

Электрическая цепь, представленная на рис.18.2.3, выполняет операцию дифференцирования входного сигнала  $u_{BX}(t)$ , подаваемого на зажимы 1 – 1', если выходной сигнал  $u_{BbIX}(t)$  снимать с зажимов 2 – 2'.

Составим уравнение второго закона Кирхгофа для левого контура электрической цепи (рис.18.2.3):

$$u_{BX}(t) = i(t) \cdot R + u_C(t) = \\ = i(t) \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt.$$

Если сопротивление  $R$  мало, то первым слагаемым  $i(t) \cdot R$  правой части равенства можно пренебречь. Тогда сила тока в цепи:

$$i(t) \approx C \cdot \frac{du_{BX}(t)}{dt}$$

и напряжение на выходе электрической цепи, снимаемое с резистора  $R$ :

$$u_{ВЫХ}(t) = i(t) \cdot R = R \cdot C \cdot \frac{du_{BX}(t)}{dt}. \quad (18.2.2)$$

Формула (18.2.2) показывает, что электрическая цепь на рис.18.2.3 дифференцирует входное напряжение и умножает его на коэффициент пропорциональности, равный постоянной времени  $\tau = R \cdot C$ .

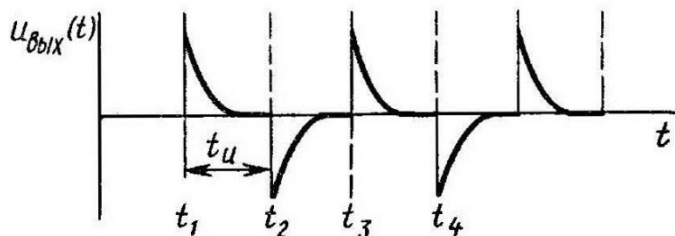


Рис.18.2.4

Форма выходного напряжения дифференцирующей цепи при подаче на вход серии прямоугольных импульсов приведена на рис.18.2.4. Напряжение на выходе дифференцирующей цепи представляет собой знакопеременные импульсы

бесконечно большой амплитуды и малой (близкой к нулю) длительности.

Вследствие различия свойств реальной и идеальной дифференцирующей цепей, а также конечной крутизны фронта импульса на выходе формируются импульсы, амплитуда которых меньше амплитуды входного сигнала, а длительность равна:  $t_H \approx (3 \div 4) \cdot \tau = (3 \div 4) \cdot R \cdot C$ .

В общем случае форма выходного напряжения зависит от соотношения длительности импульса входного сигнала  $t_H$  и постоянной времени  $\tau$  дифференцирующей цепи. В момент времени  $t_1$  входное напряжение приложено к резистору  $R$ , поскольку напряжение на конденсаторе не может изменяться скачком. Затем напряжение на конденсаторе возрастает по экспоненциальному закону, а напряжение на резисторе  $R$ , то есть выходное напряжение, снижается по экспоненциальному закону и становится рав-

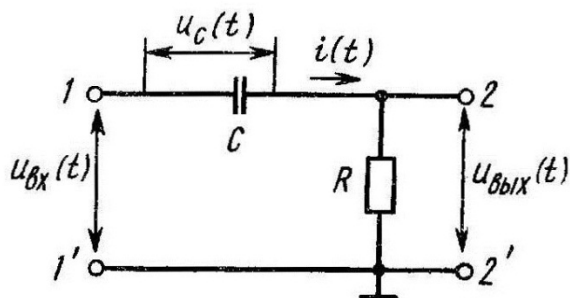


Рис.18.2.3

ным нулю в момент времени  $t_2$ , когда закончится процесс заряда конденсатора. При малых значениях времени  $\tau$  длительность выходного напряжения мала. Когда напряжение на входе  $u_{вх}(t)$  становится равным нулю, конденсатор начинает разряжаться через резистор  $R$ . Таким способом формируется импульс обратной полярности.

Рассмотренные пассивные интегрирующие и дифференцирующие цепи имеют следующие недостатки: обе математические операции реализуются лишь приближённо, с погрешностями. Для устранения погрешностей необходимо вводить корректирующие звенья, которые существенно снижают амплитуду сигнала на выходе. Поэтому необходимо промежуточное усиление сигнала.

Активные интегрирующие и дифференцирующие электрические цепи не имеют перечисленных недостатков. Активные цепи можно реализовать с использованием операционных усилителей.

### 18.3. Линии задержки

Во многих устройствах электроники, автоматики и вычислительной техники возникает необходимость задерживать импульс относительно опорного импульса.

Устройства, задерживающие импульс на выходе относительно входного импульса, называются **линиями задержки**.

Линии задержки могут быть естественными и искусственными. Простейшими искусственными линиями задержки являются  $RL$ - и  $RC$ -цепи (рис.18.3.1, рис.18.3.2), которые подключены к генераторам прямоугольных импульсов (ГПИ).

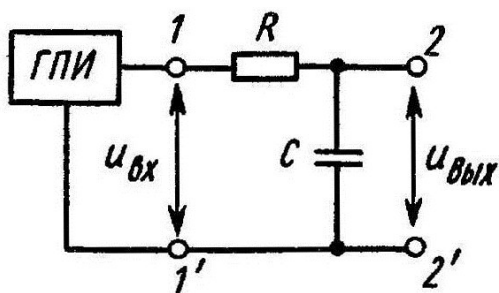


Рис.18.3.1

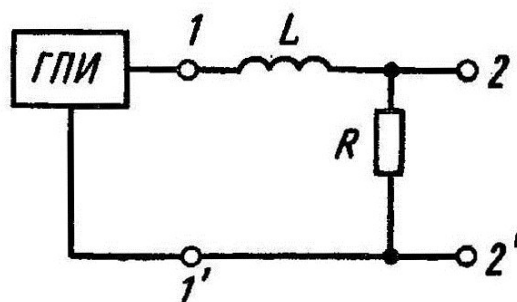


Рис.18.3.2

В обеих цепях выходной импульс на зажимах 2 – 2' отстаёт от импульса, поступающего на зажимы 1 – 1' (рис.18.3.1). Недостатком таких линий задержки является существенное искажение формы импульсов и особенно удлинение фронтов.

Применение многозвенных линий задержки позволяет получить задержанный импульс на выходе схемы с крутым фронтом и большой амплитудой на низкоомной нагрузке.

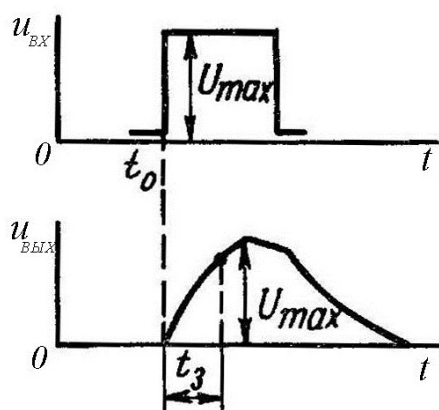


Рис.18.3.3

Одна из таких многозвенных линий задержки приведена на рис.18.3.4.а. Она обладает дисперсией времени задержки импульсов, связанной с зависимостью параметров отдельных звеньев от частоты импульса. Здесь ёмкость  $C$  является постоянной, а индуктивность  $L$  можно изменять. Индуктивные катушки изготовлены на ферритовых кольцах. Процессы, происходящие в такой нелинейной линии задержки при передаче импульса, описываются нелинейными диффе-

ренциальными уравнениями, общее исследование которых оказывается довольно сложным. Данная линия обеспечивает задержку импульса на время, не меньшее длительности фронта входного импульса, и формирует задержанный импульс с крутым фронтом и большой амплитудой на низкоомной нагрузке.

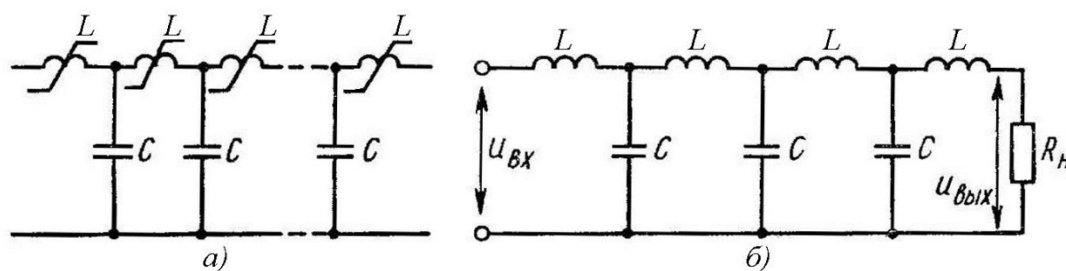


Рис.18.3.4

На рис.18.3.4.б приведена схема линейной линии задержки. Длительность задержки одного звена (обозначена пунктиром на рис.18.3.2)  $t_1$  определяется производной фазочастотной характеристики:

$$t_1 = \frac{du}{d\omega} = \frac{2}{\omega_c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}, \quad (18.3.1)$$

где

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{L \cdot C}} - \text{частота среза.}$$

Если частоты, составляющие спектр сигнала, значительно меньше частоты среза  $\omega_c$ , то время задержки равно:  $t_3 = n \cdot \sqrt{L \cdot C}$ , где  $n$  – число звеньев линии задержки. При подаче через линии задержки перепадов напряжения неизбежны искажения фронтов импульсов. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что при идеальном скачке напряжения  $\Delta U_0$  на входе линии задержки длительность фронта напряжения на выходе для одного звена при согласованной нагрузке, когда сопротивление нагрузки  $R_H$  равно волновому сопротивлению  $\rho$  ( $R_H = \rho$ ) составляет

$t_{\Phi 1} \approx 1,13 \cdot \sqrt{L \cdot C}$ , а для линии, содержащей  $n$  звеньев в  $\sqrt[3]{n}$  больше, то есть:

$$t_{\Phi} = t_{\Phi 1} \cdot n^{\frac{2}{3}} = 1,13 \cdot n^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{L \cdot C}. \quad (18.3.2)$$

Длительность задержки, отсчитанной от момента подачи входного импульса, до момента, когда напряжение на выходе достигает  $0,5 \cdot U_0$ , оказывается для одного звена равной

$$t_3 = 1,07 \cdot \sqrt{L \cdot C}, \quad (18.3.3)$$

а для линии, содержащей  $n$  звеньев:

$$t_{3n} = n \cdot t_1 = 1,07 \cdot n \cdot \sqrt{L \cdot C}, \quad (18.3.4)$$

Для высокоомных линий нагрузки используют линии нагрузки, пластины конденсаторов которых разделены сегнетоэлектриком, то есть ли-

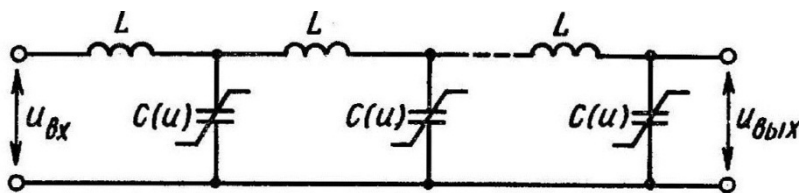


Рис.18.3.5

нии нагрузки содержат нелинейные конденсаторы и линейные индуктивные катушки (рис.18.3.5). Ёмкость таких конденсаторов зависит

от приложенного напряжения, поскольку диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков является функцией напряжённости электрического поля. Такие конденсаторы называют варикондами. Задержка импульса в такой линии равна  $t_3 = n \cdot t_1$ , где  $n$  - количество звеньев.

Более перспективными являются линии задержки, схема которых содержит полупроводниковые приборы. Такая линия задержки выполняется в виде звеньев с постоянной индуктивностью  $L$  и нелинейной ёмкостью  $C(u)$  (рис.18.3.6). В качестве нелинейной ёмкости используются варикапы, ёмкость которых зависит от обратного напряжения.

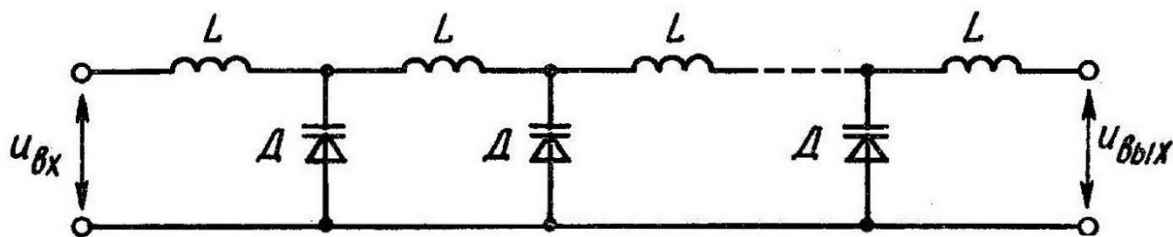


Рис.18.3.6

#### 18.4. Электронные ключевые схемы. Диодные ключи

Электронные ключи предназначены для коммутации, то есть для замыкания и размыкания электрических цепей под действием управляющих сигналов.

Ключевой режим характеризуется двумя состояниями: «замкнуто» и «разомкнуто».

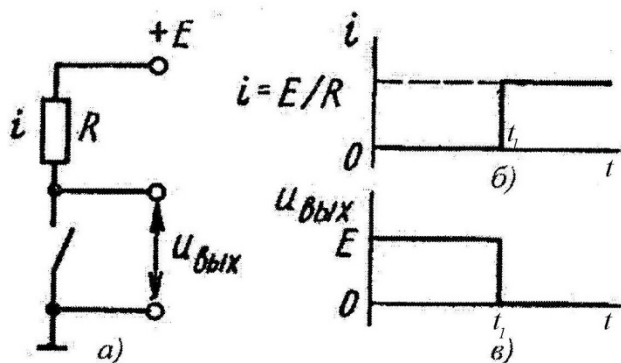


Рис.18.4.1

На рис.18.4.1 показаны принципиальная схема и временные диаграммы идеального ключа в замкнутом и разомкнутом состоянии.

При разомкнутом ключе в интервале времени  $0 \div t_1$   $i=0$  и  $U_{\text{ВЫХ}}=E$  (рис.18.4.1.б). Если ключ замкнут, в интервале времени  $t > t_1$  то  $i=E/R$ ,  $U_{\text{ВЫХ}}=0$  (рис.18.4.1.в).

В реальных ключевых схемах ток и напряжение на выходе зависят от используемых полупроводниковых приборов.

Совершенство и качество электронного ключа характеризуется тремя основными параметрами:

- 1) временем переключения  $t_{\text{ПЕР}}$  – временем перехода из открытого состояния в закрытое и обратно;
- 2) силой тока  $i_P$  через ключ в разомкнутом состоянии;
- 3) падением напряжения  $u_3$  на ключе в замкнутом состоянии.

Качество ключа тем выше, чем меньше значения  $t_{\text{ПЕР}}$ ,  $i_P$  и  $u_3$ .

Поскольку ключ имеет два устойчивых состояния, то в разомкнутом состоянии электрическое сопротивление ключа очень велико, а в замкнутом состоянии ключа его электрическое сопротивление стремится к нулю. Быстродействие ключа характеризуется скоростью перехода из одного устойчивого состояния в другое.

На рис.18.4.2 приведена схема последовательного диодного ключа с нулевым уровнем включения.

При положительном входном напряжении  $u_{\text{ВХ}}$  диод открыт и через него течёт ток силой

$$i = \frac{u_{\text{ВХ}}}{R_D + R},$$

где  $R_D$  – сопротивление диода при прямом включении. В этом случае напряжение на выходе ключа равно:

$$u_{\text{ВЫХ}} = R \cdot i = \frac{R \cdot u_{\text{ВХ}}}{R_D + R}.$$

Поскольку при прямом включении диода  $R_D \ll R$ , то  $u_{\text{ВЫХ}} \approx u_{\text{ВХ}}$ .

При отрицательном входном напряжении обратный ток через диод

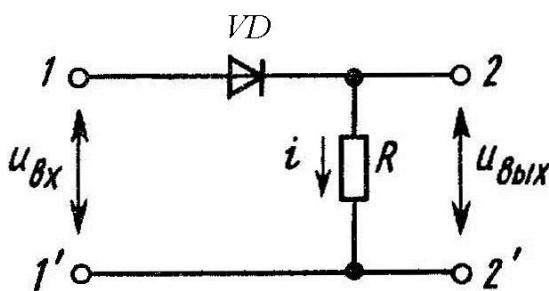


Рис.18.4.2

$$i = \frac{u_{BX}}{R_{OBR} + R}$$

незначителен, поскольку  $R_{OBR} \gg R$  и  $u_{ВЫХ} \approx R \cdot \frac{u_{BX}}{R_{OBR}} \ll u_{BX}$ ,

где  $R_{OBR}$  – сопротивление диода при обратном включении.

Уровень входного напряжения, определяющего отпирание или запираание диода на рис.18.4.2, соответствует нулевому значению.

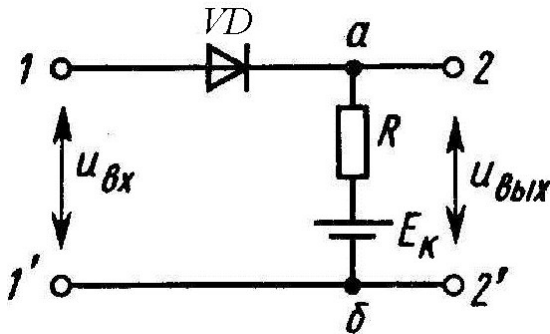


Рис.18.4.3

Для изменения уровня напряжения коммутации в цепь ключа вводят источник напряжения смещения  $E_K$  (рис.18.4.3). При  $u_{BX} > E_K$  диод открыт и  $u_{ВЫХ} \approx u_{BX}$ , а при  $u_{BX} < E_K$  диод закрыт и  $u_{ВЫХ} = E_K$ .

Собственная ёмкость диода, а на высоких частотах и ёмкость соединительных проводов, шунтируют вход и выход ключа, что приводит к замедлению процесса коммутации, то есть к

увеличению времени переключения  $t_{ПЕР}$ , и к ухудшению качества ключа.

При положительном напряжении на входе схемы параллельного диодного ключа с нулевым уровнем включения (рис.18.4.4) диод  $VD$  открыт, то есть ключ замкнут и через него течёт ток, и  $u_{ВЫХ} \approx 0$ .

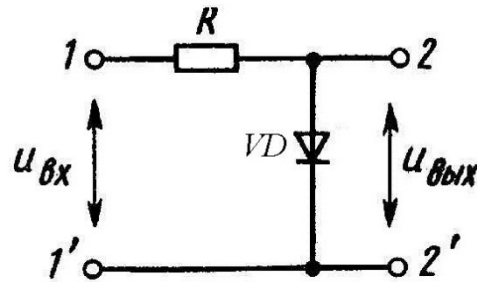


Рис.18.4.4

При отрицательном напряжении диод  $VD$  закрыт – ключ разомкнут – и ток через диод не течёт. При этом  $u_{ВЫХ} \approx u_{BX}$ .

Для изменения нулевого уровня напряжения коммутации подключают источник напряжения смещения  $E_K$  (рис.18.4.5).

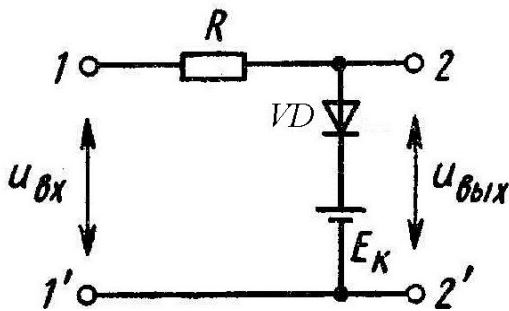


Рис.18.4.5

При открытом диоде  $VD$ :

$$\begin{aligned} u_{ВЫХ} &= E_K + i \cdot R_D = \\ &= E_K + \frac{(u_{BX} + E_K) \cdot R_D}{R + R_D} \cong \\ &\cong E_K + \frac{R_D}{R} \cdot (u_{BX} - E_K). \end{aligned}$$

Если  $R_D \ll R$ , то  $u_{ВЫХ} \approx E_K$ .

При обратном включении диод закрывается, поэтому  $u_{ВЫХ} \approx u_{BX}$ .

Время переключения диодных ключей  $t_{\text{ПЕР}}$ , определяющее их быстродействие, зависит от паразитных ёмкостей  $p-n$  – перехода и ёмкостей монтажа, а также от времени выключения  $t_{\text{ВЫКЛ}}$  диода, определяемого временем рекомбинации носителей заряда.

### 18.5. Транзисторные ключи

Действие транзисторного ключа основано на работе транзистора в ключевом режиме. Главным назначением транзистора, используемого в качестве электронного ключа (рис.18.5.1.а), является замыкание и размыкание цепи нагрузки.

При работе в ключевом режиме транзистор находится в устойчивом состоянии в области отсечки, то есть справа от точки  $M_3$  линии нагрузки на рис.18.5.1.б или в области насыщения – слева от точки  $M_0$  линии нагрузки на рис.18.5.1.б.

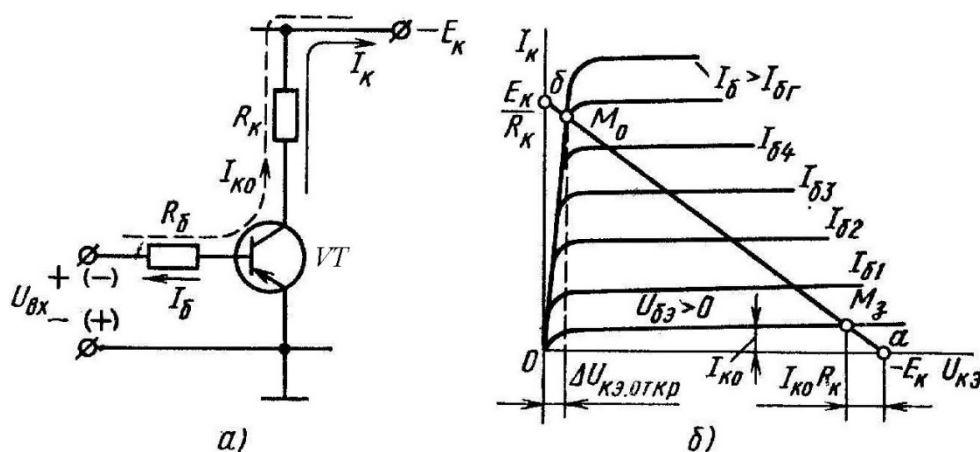


Рис.18.5.1

Качество транзисторного ключа определяется:

- 1) минимальным падением напряжения на открытом транзисторе (остаточным напряжением);
- 2) остаточным током в закрытом транзисторе;
- 3) продолжительностью процесса коммутации.

В транзисторном ключе изменение состояния транзистора, включённого последовательно с резистором и источником питания (рис.18.5.1.а), позволяет формировать в нагрузке электрические импульсы или перепады. Транзисторы применяют также в качестве бесконтактного ключа в цепях постоянного и переменного тока для регулировки мощности, подводимой к нагрузке электронных систем автомобильной и сельскохозяйственной техники.

В ключевой схеме подобно усилителям транзистор может включаться по схеме с общей базой, общим эмиттером или общим коллектором. Наибольшее распространение получила схема включения транзистора с общим эмиттером. На рис.18.5.1.а приведена схема включения транзисто-

ра типа  $p-n-p$  с общим эмиттером. Здесь транзистор  $VT$  выполняет функцию ключа.

Режим отсечки транзистора, когда ключ разомкнут, осуществляется подачей на его базу, то есть вход ключа, напряжения положительной полярности, обозначенного на рис.18.5.1.а без скобок. При этом эмиттерный переход транзистора запирается, и эмиттерный ток равен нулю ( $I_E=0$ ), а через резистор  $R_6$  течёт обратный (тепловой) ток коллекторного перехода  $I_{K0}$ . Режиму закрытого состояния транзистора соответствует точка  $M_3$  характеристики транзистора (рис.18.5.1.б).

Тепловой ток  $I_{K0}$  обусловлен тем, что транзистор в закрытом состоянии не обеспечивает полного отключения нагрузочного резистора  $R_K$  от источника питания. Одним из основных критериев выбора типа транзистора для работы в качестве электронного ключа является малое значение тока  $I_{K0}$ .

Величину запирающего входного напряжения  $U_{BX.ЗАП}$  выбирают так, чтобы при протекании через резистор  $R_6$  теплового тока выполнялось условие:

$$U_{БЭ} = U_{BX.ЗАП} - I_{K0} \cdot R_6 > 0.$$

Для германиевых транзисторов напряжение  $U_{БЭ}$  составляет  $0,5 \div 2$  В.

Режим насыщения транзистора, когда ключ замкнут, достигается изменением полярности входного напряжения ( $U_{BX} \square 0$  – обозначено в скобках на рис.18.5.1.а) и заданием тока базы. Открытому состоянию транзистора соответствует точка  $M_0$  на линии нагрузки (рис.18.5.1.б).

При подаче на вход ранее закрытого ключа напряжения  $U_{BX} \square 0$  ток базы  $I_6$  увеличивается, что вызывает возрастание коллекторного тока  $I_K$  и перемещение рабочей точки из положения  $M_3$  вверх по линии нагрузки. При этом напряжение  $U_{КЭ}$  транзистора постепенно уменьшается. В результате рабочая точка перемещается в положение  $M_0$  на линии нагрузки. При этом транзистор полностью открывается. Напряжение на выходе ключа  $U_{ВЫХ} \rightarrow 0$ . Ток нагрузки в режиме насыщения:

$$I_K = \frac{E_K - \Delta U_{КЭ.ОТКР}}{R_K},$$

где  $\Delta U_{КЭ.ОТКР}$  – остаточное напряжение на открытом транзисторе. В зависимости от типа транзистора  $\Delta U_{КЭ.ОТКР}$  изменяется в диапазоне  $0,05 \div 1$  В. Поскольку  $\Delta U_{КЭ.ОТКР} \square E_K$ , коллекторный ток в режиме насыщения можно рассчитать по формуле:

$$I_K = \frac{E_K}{R_K}.$$

Время перехода транзистора из режима насыщения в режим отсечки, когда происходит закрывание ключа, значительно больше, чем время

включения. Причём время выключения тем больше, чем глубже насыщение транзистора.

Иногда для ускорения выключения транзистора к его коллектору подключают полупроводниковый диод, отпирающийся при насыщении транзистора и ограничивающий глубину насыщения.

В настоящее время широкое распространение в ключевых схемах находят кремниевые транзисторы типа  $n-p-n$ , поскольку они имеют малый тепловой ток  $I_{K0}$ .

## 18.6. Ограничители электрических сигналов

Четырёхполусник, напряжение на выходе которого остаётся практически неизменным при отклонении входного напряжения  $u_{BX}(t)$  от заданного напряжения  $E$ , называется **ограничителем**.

Если  $u_{BX}(t) > E$ , то ограничение происходит сверху (рис.18.6.1). Если  $u_{BX}(t) < E'$ , то ограничение происходит снизу (рис.18.6.2). Если  $E < u_{BX}(t) < E'$ , то ограничение двустороннее (рис.18.6.3).

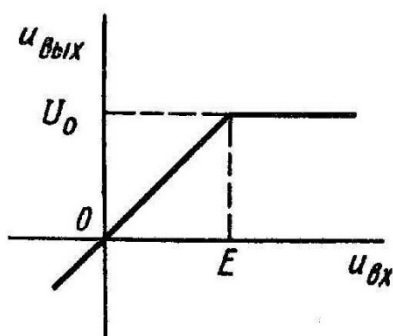


Рис.18.6.1

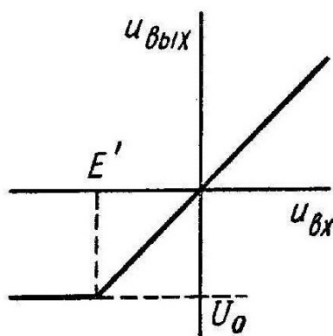


Рис.18.6.2

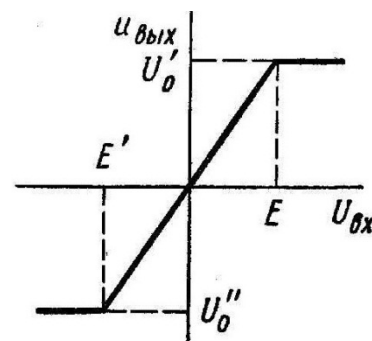


Рис.18.6.3

Если входной сигнал не превосходит по амплитуде пороговых уровней, то он должен воспроизводиться без искажений. Следовательно, ограничитель является нелинейным четырёхполусником, амплитудные характеристики которого  $u_{ВЫХ}(t) = f[u_{ВХ}(t)]$  представляют собой ломаные линии. В качестве нелинейных элементов в ограничителях используют в основном полупроводниковые диоды.

На рис.18.6.4 приведены последовательные схемы ограничителей на диодах и их временные диаграммы напряжения. При отрицательном напряжении на аноде и положительном напряжении на катоде диод закрыт. В этом случае напряжение на выходе равно  $u_{ВЫХ}(t) = E$ .

Если диод открыт, то учитывая, что при прямом включении  $R_D < R$ , напряжение на выходе приблизительно равно входному напряжению, то есть  $u_{ВЫХ}(t) \approx u_{ВХ}(t)$ .

Схемы параллельных ограничителей и их временные диаграммы приведены на рис.18.6.5.

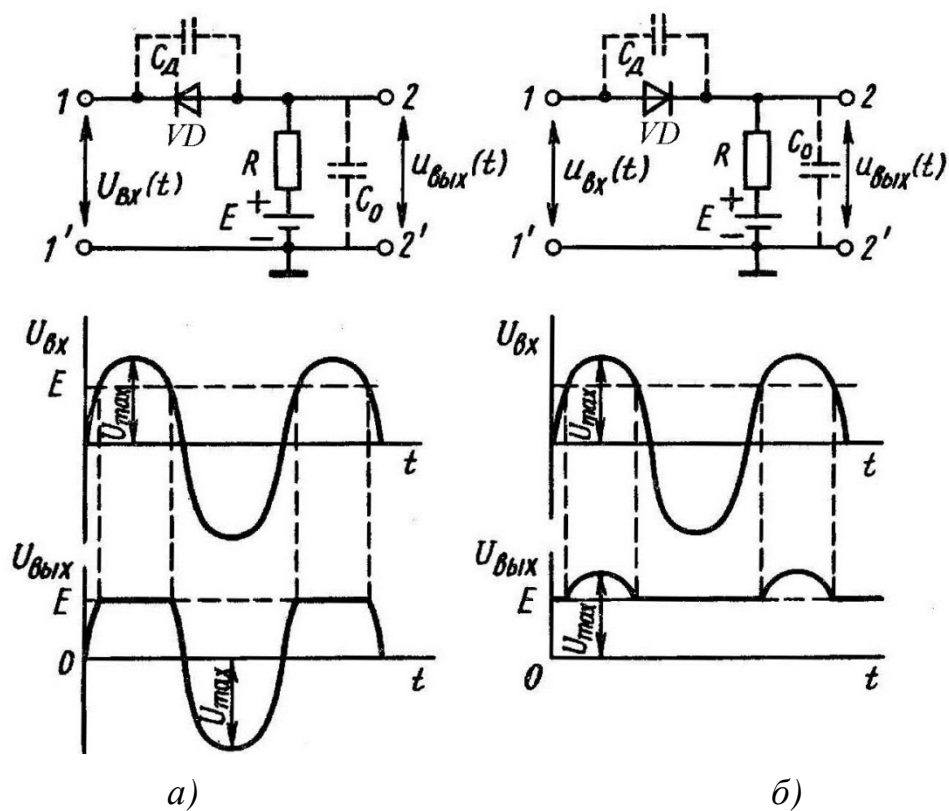


Рис.18.6.4

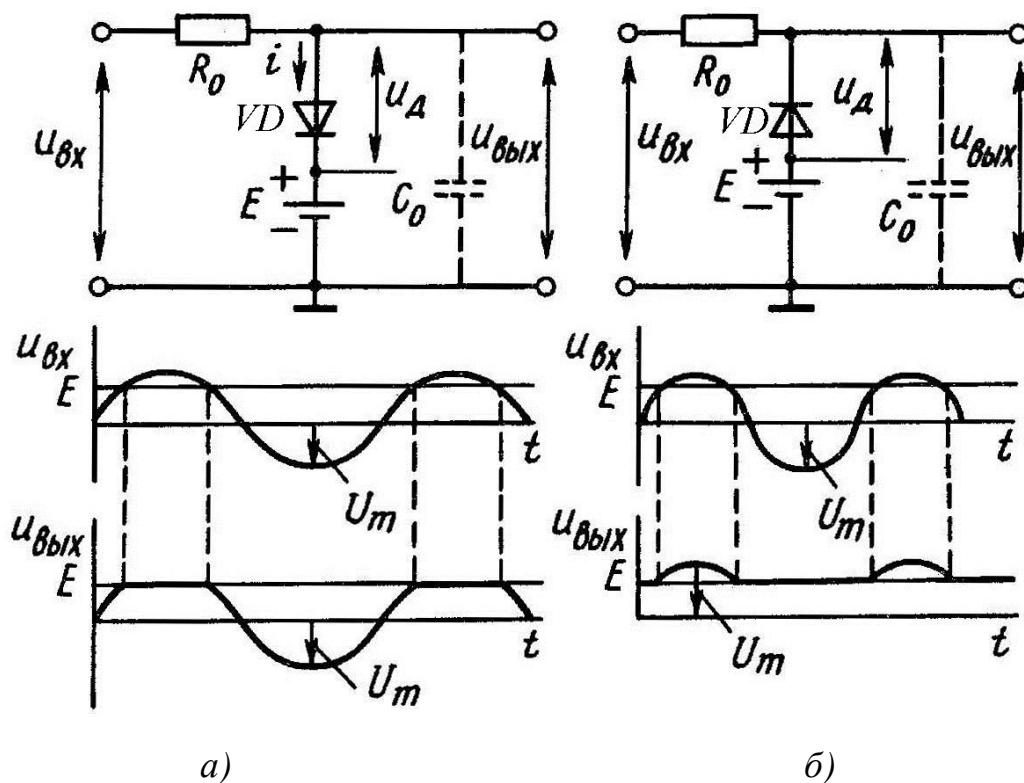


Рис.18.6.5

При открытом диоде выходное напряжение  $u_{BЫX}(t)$  мало отличается от  $E$ , если выполняется условие  $R_D \ll R_0$ , где  $R_0$  – сопротивление, ограни-

чивающее силу тока в цепи при открытом диоде. Для схемы на рис.18.6.5.а справедливо соотношение:

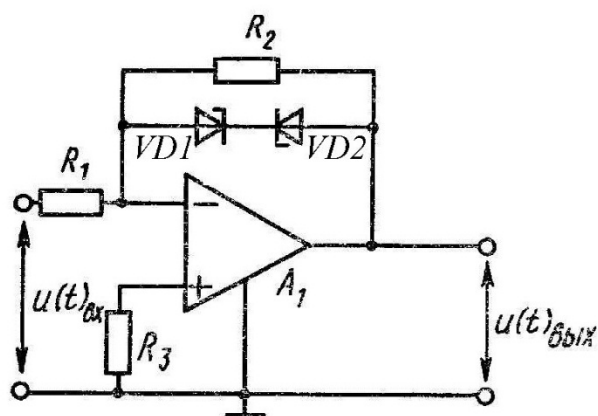
$$u_{\text{ВЫХ}} = E + i \cdot R_{\text{Д}} = E + \frac{u_{\text{ВХ}} \cdot R_{\text{Д}} - E \cdot R_{\text{Д}}}{R_0 + R_{\text{Д}}} \approx E + \frac{R_{\text{Д}}}{R_0} \cdot (u_{\text{ВХ}} - E). \quad (18.6.1)$$

Если  $\frac{R_{\text{Д}}}{R_0} \ll 1$ , можно считать, что напряжение на выходе  $u_{\text{ВЫХ}} = E$ .

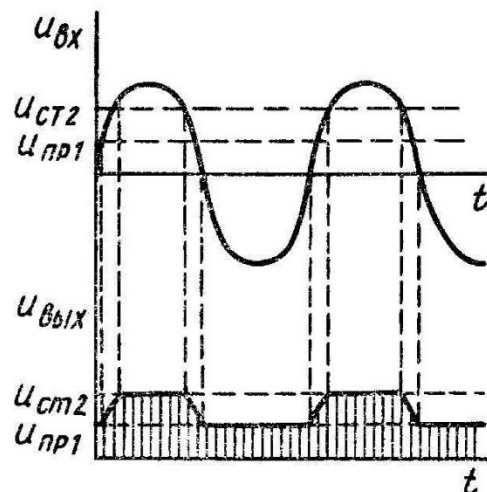
При закрытом диоде выходное напряжение приблизительно повторяет напряжение на входе, поскольку  $R_{\text{ОБР}} \gg R_0$ . Как и в последовательной схеме, уровень ограничения в параллельном диодном ограничителе определяется напряжением  $E$ .

В параллельных ограничителях, схемы которых подобны представленным на рис.18.6.5, также проявляются паразитные ёмкости, показанные на схемах пунктиром, особенно на высоких частотах. Для сокращения длительности фронта импульса следует значение ограничивающего сопротивления  $R_0$  выбирать не слишком большим.

Параллельный диодный ограничитель обеспечивает худшую по сравнению с последовательным ограничителем чёткость ограничения, поскольку в параллельной схеме чёткость ограничения определяется отношением  $R_{\text{Д}}/R_0$ , а в последовательной – отношением  $R_{\text{ОБР}}/R_0$ . Однако  $R_{\text{ОБР}} \gg R_0$  и неравенство  $R_{\text{ОБР}} \gg R$  практически реализовать легче, чем  $R_{\text{Д}} \ll R_0$ . К недостаткам параллельных ограничителей относится и необходимость выбора источника  $E$  с очень малым собственным внутренним сопротивлением.



а)



б)

Рис.18.6.6

На рис.18.6.6.а приведена схема, а на рис.18.6.6.б временные диаграммы двустороннего ограничителя на операционном усилителе. Если напряжение на выходе  $u_{\text{ВЫХ}}(t)$  не превосходит по модулю сумму напряже-

ния стабилизации  $u_{CT}$  одного из стабилитронов, например, стабилитрона  $VD2$ , которое на временной диаграмме (рис.18.6.6.б) обозначено символом  $U_{CT.2}$ , и падения напряжения  $U_{CT.1}$  на другом стабилитроне  $VD1$ , находящемся в открытом состоянии, устройство работает как обычный инвертирующий усилитель с коэффициентом усиления, равным отношению  $R_2/R_1$ .

При условии  $u_{ВЫХ}(t) > u_{CT.2} + u_{ПР.1}$ , то стабилитрон  $VD2$  будет пробит, и напряжение будет ограничено на уровнях  $u_{ПР.1}$  и  $u_{CT.2}$ .

### 18.7. Классификация регенеративных импульсных устройств

В импульсной технике в основном используются колебания разрывного типа. Электрические колебания разрывного типа представляют собой отдельные импульсы или колебания, для которых характерно чередование сравнительно медленных изменений электрической величины с резкими скачкообразными перепадами. Примерами таких колебаний являются импульсы прямоугольной или близкой к ней формы.

Импульсные устройства, предназначенные для формирования колебаний разрывного типа, называются **регенеративными импульсными устройствами**. Отличительной особенностью регенеративных импульсных устройств является наличие ограниченного числа, обычно двух дискретных состояний.



Рис.18.7.1

Эти два дискретных состояния могут быть (рис.18.7.1):  
1) одинаково устойчивыми;

- 2) одинаково неустойчивыми;
- 3) разноустойчивыми.

1. Регенеративные импульсные устройства с двумя устойчивыми состояниями называются **триггерами**.

Для перехода триггера из одного устойчивого состояния в другое устойчивое состояние необходимы внешние управляющие импульсы, подаваемые на вход системы. На выходе триггера при изменении его состояния формируются резкие перепады напряжения.

2. Устройства с двумя неустойчивыми состояниями называются **автоколебательными системами**.

Такие устройства не требуют внешнего запуска и самопроизвольно, с заданным периодом, переходят из одного состояния в другое. При этом на выходе формируется периодическая последовательность сигналов разрывного типа. Примером автоколебательной системы является мультивибратор – система, генерирующая непрерывную последовательность П - образных импульсов.

3. Разноустойчивые устройства имеют одно основное, ждущее состояние устойчивого равновесия.

При воздействии внешнего запускающего импульса система переходит в квазистабильное состояние, находится в нём в течение заданного промежутка времени, а затем самопроизвольно возвращается в исходное состояние. При этом на выходе формируется один импульс с заданной амплитудой и длительностью. Такие устройства применяются для формирования сигналов с заданными параметрами. Примером такого устройства является **ждущий мультивибратор**.

Устройства второй и третьей группы имеют общее название: **релаксационные генераторы** или **реакторы**. Их общим свойством является наличие времязадающих элементов схемы, время релаксации которых определяет длительность импульсов на выходе схемы.

## 18.8. Мультивибраторы

**Мультивибратор – это двухкаскадный генератор релаксационных колебаний с резистивно-ёмкостными связями, формирующий прямоугольные колебания.** Термин «мультивибратор» происходит от латинских слов *multum* – много и *vibro* – колеблю. Схемы мультивибраторов содержат усилители с положительной обратной связью и времязадающие RC – цепочки. В качестве активных элементов используют транзисторы и туннельные диоды. Мультивибраторы изготавливают как на дискретных элементах, так и в интегральном исполнении. Различают симметричные и несимметричные мультивибраторы.

Рассмотрим схему мультивибратора на биполярных транзисторах с коллекторно-базовыми связями (рис.18.8.1). Она представляет собой двухкаскадный усилитель на биполярных транзисторах  $VT_1$  и  $VT_2$ .

База одного транзистора соединена с коллектором другого через конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$ , которые обеспечивают положительную обратную связь. Резисторы  $R_{B1}$  и  $R_{B2}$  осуществляют подачу напряжения смещения на базы транзисторов соответственно  $VT_1$  и  $VT_2$  и входят в состав времязадающих  $RC$ -цепей.

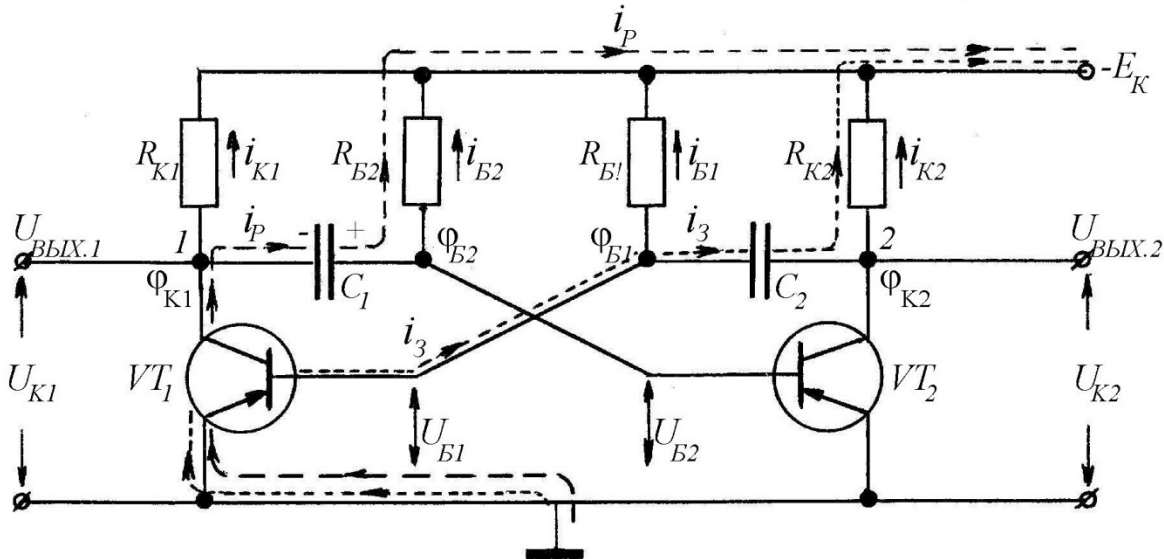


Рис.18.8.1

Схема симметрична, причём параметры симметричных элементов схемы одинаковы:  $R_{K1}=R_{K2}$ ,  $R_{B1}=R_{B2}$ ,  $C_1=C_2$ , а транзисторы  $VT_1$  и  $VT_2$  – одного типа. Поэтому такой мультивибратор называют симметричным.

Потенциалы баз и коллекторов транзисторов равны соответственно:

$$\varphi_{B1} = -E_K + R_{B1} \cdot i_{B1} \text{ и } \varphi_{B2} = -E_K + R_{B2} \cdot i_{B2}; \quad (18.8.1)$$

$$\varphi_{K1} = -E_K + R_{K1} \cdot i_{K1} \text{ и } \varphi_{K2} = -E_K + R_{K2} \cdot i_{K2}. \quad (18.8.2)$$

Зарядка и разрядка конденсаторов  $C_1=C_2=C$  происходит по экспоненциальному закону с постоянной времени  $\tau=R \cdot C$ .

Напряжение на конденсаторе и ток в процессе зарядки изменяются по закону:

$$\begin{cases} u_{c3} = E_K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_3}}\right); \\ i_3 = \frac{E_K}{R_K} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_3}}, \end{cases} \quad (18.8.3)$$

где  $\tau_3=R_K \cdot C$  – постоянная времени цепи зарядки конденсатора.

Напряжение на конденсаторе и ток во время разрядки конденсатора изменяются по закону:

$$\begin{cases} u_{cP} = E_K \cdot e^{-\frac{t}{\tau_P}}; \\ i_3 = \frac{E_K}{R_6} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_P}}, \end{cases} \quad (18.8.4)$$

где  $\tau_P = R_B \cdot C$  – постоянная времени цепи разрядки конденсатора.

В процессе перезарядки предварительно заряженный конденсатор подключается встречно источнику питания. В этом случае конденсатор сначала разряжается, а после того, как напряжение на конденсаторе становится равным нулю, происходит зарядка конденсатора по той же цепи, что и разрядка, но напряжением противоположной полярности. Процесс перезарядки описывается уравнением:

$$u_{c\Pi} = \pm U'_C \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{\Pi}}} \mp U''_C \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\Pi}}}\right),$$

где  $\tau_{\Pi} = R_B \cdot C$  – постоянная времени цепи перезарядки конденсатора.

В исходном состоянии вследствие симметрии схемы коллекторные токи  $i_K$ , базовые токи  $i_B$ , напряжения коллекторов  $u_K$ , баз  $u_B$  и конденсаторов  $u_C$  обеих частей симметричной схемы одинаковы.

Конденсатор  $C_1$  заряжается источником  $E_K$  по контуру 0 (заземление) – эмиттерный переход транзистора  $VT_2$  – конденсатор  $C_1$  – коллекторный резистор  $R_{K1}$  – источник  $-E_K$  – заземление 0, а конденсатор  $C_2$  заряжается по контуру 0 – эмиттерный переход транзистора  $VT_1$  –  $C_2$  –  $R_{K1}$  –  $-E_K$  – 0. Предположим, что в первый момент после подключения к схеме источника  $-E_K$  транзисторы  $VT_1$  и  $VT_2$  находятся в активном режиме.

При работе транзисторов в активном режиме токи и напряжения мультивибратора не могут оставаться неизменными. Резкое увеличение силы тока  $i_{K1}$  транзистора  $VT_1$  при подключении источника  $E_K$  приведёт к скачкообразному росту падения напряжения  $i_{K1} \cdot R_{K1}$  на коллекторном резисторе  $R_{K1}$ . При этом потенциал точки 1, то есть коллектора первого транзистора  $\varphi_{K1} = -E_K + R_{K1} \cdot i_{K1}$  (18.8.2) станет менее отрицательным. Напряжение на коллекторе  $U_{K1}$  получит положительное приращение. Положительный скачок напряжения  $U_{K1}$  через конденсатор  $C_1$  поступает на базу  $n$ -типа  $p$ - $n$ - $p$  транзистора  $VT_2$  и переместит рабочую точку в область меньших значений коллекторного тока  $i_{K2}$ . Уменьшение коллекторного тока  $i_{K2}$  вызовет уменьшение падения напряжения  $i_{K2} \cdot R_{K2}$  и потенциал точки 2 – коллектора второго транзистора  $\varphi_{K2} = -E_K + R_{K2} \cdot i_{K2}$  станет более отрицательным.

Отрицательный скачок потенциала  $\varphi_{K2}$  через конденсатор  $C_2$  поступит на базу  $n$ -типа  $p$ - $n$ - $p$  транзистора  $VT_1$  и переместит рабочую точку в область больших значений коллекторного тока  $i_{K1}$ , то есть переведёт первый транзистор в более открытое состояние. Резкое (скачкообразное) увеличение коллекторного тока  $i_{K1}$  вызовет положительный скачок потенциала

$\varphi_{K1} = -E_K + R_{K1} \cdot i_{K1}$ , который в соответствии со вторым законом коммутации через конденсатор  $C_1$  поступит на базу  $n$ -типа транзистора  $VT_2$  и ещё более закроет второй транзистор. Возникнет лавинообразный процесс изменения коллекторных токов и потенциалов транзисторов за счёт положительной обратной связи. Этот процесс закончится переходом транзистора  $VT_1$  в режим насыщения, а транзистора  $VT_2$  в режим отсечки, то есть второй транзистор полностью закроется.

Как только транзистор  $VT_2$  закроется, действие положительной обратной связи прекратится, и лавинообразный процесс закончится. Продолжительность лавинообразного процесса перехода одного транзистора в режим насыщения, а другого – в режим отсечки очень мала по сравнению с длительностью последующего процесса. При протекании лавинообразного процесса оба транзистора находятся в активном режиме.

Во время лавинообразного (регенеративного) процесса формируются крутые фронты импульсов. По завершении регенеративного процесса напряжение на базе транзистора  $VT_1$ , работающего в активном режиме, будет отрицательным и близким к нулю, поскольку падением напряжения на сопротивлении перехода база – эмиттер открытого транзистора  $VT_1$  можно пренебречь, а потенциал коллектора будет приблизительно равно нулю. Напряжение на базе закрытого транзистора  $VT_2$  в соответствии с выражением (18.8.1)  $\varphi_{B2} = -E_K + R_{B2} \cdot i_{B2}$  больше нуля, а потенциал коллектора в соответствии с выражением (18.8.2)  $\varphi_{K2} = -E_K + R_{K2} \cdot i_{K2}$  приблизительно равен  $\varphi_{K2} \approx -E_K$ , поскольку ток  $i_{K2}$  через резистор  $R_{K2}$  равен нулю.

Состояние схемы по окончании регенеративного процесса называют *квазиустойчивым равновесием*, поскольку в этом состоянии мультивибратор не может находиться длительное время. Протекающие в мультивибраторе процессы выводят его из состояния равновесия и заканчиваются «опрокидыванием» схемы, то есть закрытый транзистор открывается и переходит в режим насыщения, а открытый транзистор закрывается, то есть переходит в режим отсечки.

Изменение режимов работы транзисторов обусловлено тем, что конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$ , заряженные в первый момент работы схемы до напряжений  $u_{C01}$  и  $u_{C02}$  и сохранившие эти значения во время регенеративного процесса неизменным, будут изменять своё состояние, при этом один из них будет заряжаться по той же цепи, а другой – перезаряжаться.

Открытое состояние транзистора  $VT_1$  поддерживается отрицательным потенциалом базы, подаваемым источником  $-E_K$  через резистор  $R_{B1}$ . Транзистор  $VT_2$  удерживается в закрытом состоянии положительным потенциалом  $u_{C1}$  правой пластины конденсатора  $C_1$ , непосредственно передаваемым на базу второго транзистора. Это объясняется приблизительным равенством напряжений  $u_{C1} \approx u_{B2}$ , выполнение которого обусловлено пренебрежимо малым падением напряжения на (ничтожно малом) сопротивлении открытого транзистора  $VT_1$ , находящегося в режиме насыщения.

Конденсатор  $C_2$  заряжается по контуру  $0$  – открытый транзистор  $VT_1$  – конденсатор  $C_2$  – коллекторный резистор второго транзистора  $R_{K2}$  – источник  $-E_K$  –  $0$  в соответствии с уравнение (18.8.3), где  $\tau_3 = R_{K2} \cdot C_2$ . Напряжение на конденсаторе  $C_2$  будет увеличиваться до максимального значения  $u_{C2} = U_{C2m} \approx E_K$ , поскольку напряжением  $u_{B1}$  на базе насыщенного транзистора  $VT_1$  можно пренебречь, вследствие малости сопротивления насыщенного транзистора. Ток зарядки конденсатора  $C_2$ , протекая по резистору  $R_{K2}$ , создаёт на нём падение напряжения. Поскольку ток зарядки конденсатора убывает со временем  $\tau_3 = R_{K2} \cdot C_2$ , то к концу процесса зарядки потенциал коллектора  $\phi_{K2}$  транзистора  $VT_2$  станет равным  $\phi_{K2} = -E_K$ .

После закрывания транзистора  $VT_2$  конденсатор  $C_1$  подключается к источнику  $E_K$  по другому контуру:  $0$  – открытый транзистор  $VT_1$  – конденсатор  $C_1$  – базовый резистор второго транзистора  $R_{B2}$  – источник  $-E_K$  –  $0$  (ток  $i_P$  показан пунктиром на рис.18.8.1). Следовательно, направление тока изменилось на противоположное, и конденсатор начнёт перезарядаться.

Ток перезарядки и напряжение на конденсаторе  $C_1$  изменяются по экспоненциальному закону с постоянной времени  $\tau_{II} = R_{B2} \cdot C_1$ . При перезарядке сначала конденсатор  $C_1$  разрядится, и в момент времени  $t_2$ , когда напряжение  $u_{C1}$  на конденсаторе  $C_1$  упадёт до нуля и потенциал базы транзистора  $VT_2$  станет равен нулю, транзистор  $VT_2$  откроется. Это приведёт к возникновению тока  $i_{K2}$ , и в процессе перезарядки разрядка конденсатора  $C_1$  закончится. Процесс зарядки одного конденсатора и перезарядки другого конденсатора происходит медленно по сравнению с лавинообразным регенеративным процессом. В это время формируются вершины импульсов.

Переходный процесс при разрядке и зарядке конденсаторов называется *релаксационным процессом*. Поэтому мультивибраторы называют также *генераторами релаксационных колебаний*.

По завершении релаксационного процесса оба транзистора открыты, то есть находятся в активном режиме, и вновь начинается скачкообразное изменение токов коллекторов, то есть в схеме протекает новый релаксационный процесс. На рис.18.8.2 показаны временные зависимости потенциалов баз  $\phi_{B1}$  и  $\phi_{B2}$  и коллекторов транзисторов  $\phi_{K1}$  и  $\phi_{K2}$ , причём напряжения на коллекторах являются выходными напряжениями мультивибратора.

Поскольку мультивибратор симметричен, на каждом выходе формируются импульсы одинаковой амплитуды. Потенциал коллектора открытого транзистора приблизительно равен нулю, а закрытого –  $U_{K3} \approx -E_K$ . Поэтому амплитуда импульса на выходе мультивибратора  $U_m = U_{KH} - U_{K3} \approx |E_K|$ .

После того, как один из транзисторов, например,  $VT_2$  закроется, происходит перезарядка конденсатора  $C_1$ , присоединённого к коллектору открытого транзистора  $VT_1$ . Перезарядка начинается в момент времени  $t_1$ , а заканчивается в момент времени  $t_2$  (рис.18.8.2), когда потенциал базы

транзистора  $VT_2$  станет равным нулю. При этом напряжение на перезаряжаемом конденсаторе упадёт до нуля. В этот момент транзистор  $VT_2$  откроется, и формирование вершины импульса закончится. Следовательно, длительность импульса определяется временем разрядки в процессе перезарядки конденсатора  $C_1$ . Вследствие симметрии схемы длительность импульса равна также времени разрядки конденсатора  $C_2$ . Поэтому конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$  называют времязадающими конденсаторами. Напряжение на конденсаторе в период разрядки, а следовательно, и на базе закрытого транзистора  $VT_2$  уменьшается экспоненциально с постоянной времени  $\tau_{П1}=R_{Б2} \cdot C_1$ :

$$\varphi_{Б2} = u_{Б2} \approx u_{C1} = -E_K + 2 \cdot E_K \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{П1}}}.$$
 (18.8.5)

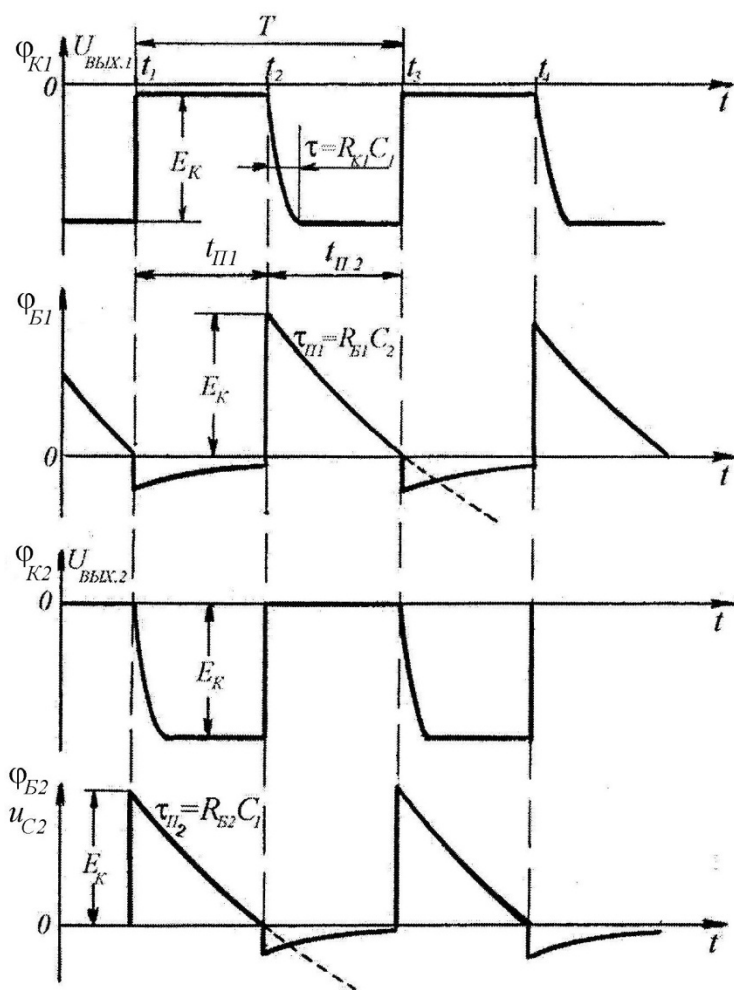


Рис.18.8.2

$t_{П1} = t_{П2}$ , ПОЭТОМУ

$$T = 2 \cdot t_{П1} = 1,4 \cdot R_{Б1} \cdot C_1.$$

Скважность импульсов:  $Q = T/t_{П1} = 2$ .

Спустя время  $t_2 - t_1$ , равное длительности импульса  $t_{П1}$ , потенциал базы транзистора  $VT_2$  станет приблизительно равен нулю. Подстановка в выражение (18.8.5) значений  $t = t_{П1}$  и  $u_{Б2} = 0$  приводит к выражению:

$$-E_K + 2 \cdot E_K \cdot e^{-\frac{t_{П1}}{\tau_{П2}}} = 0.$$

Преобразования этого соотношения позволяют выразить временные интервалы:

$$t_{П1} = \tau_{П1} \cdot \ln 2 = 0,7 \cdot \tau_{П1} = 0,7 \cdot R_{Б2} \cdot C_1;$$

$$t_{П2} = \tau_{П2} \cdot \ln 2 = 0,7 \cdot \tau_{П2} = 0,7 \cdot R_{Б1} \cdot C_2.$$

Период колебаний  $T = t_{П1} + t_{П2}$ . Для симметричного мультивибратора

## 18.9. Ждущий мультивибратор с коллекторно-базовыми связями (одновибратор)

Ждущий мультивибратор, называемый также одновибратором, предназначен для формирования одиночных импульсов заданной длительности, которые вырабатываются в определённые моменты времени. Ждущий мультивибратор имеет одно устойчивое состояние равновесия. Это достигается благодаря тому, что усилительный элемент в одном из плеч мультивибратора запирается напряжением смещения дополнительного источника питания. Поэтому схема ждущего мультивибратора не может опрокинуться без внешнего запуска. Запускающий импульс должен иметь определённую амплитуду и длительность.

До подачи управляющего импульса система ждёт «запуска», поэтому устройство называется ждущим мультивибратором. После подачи запускающего импульса схема переходит в состояние квазистойчивого равновесия, в котором она находится некоторое время, после чего возвращается в устойчивое состояние и вновь ждёт запускающего импульса.

На рис.18.9.1 приведена схема ждущего мультивибратора с коллекторно-базовыми связями. Ждущий мультивибратор отличается от схемы мультивибратора тем, что в схему введён источник смещения  $E_B$ , который запирает транзистор  $VT_1$ . Транзистор  $VT_1$  может быть открыт подачей на его базу отрицательного запускающего импульса постороннего

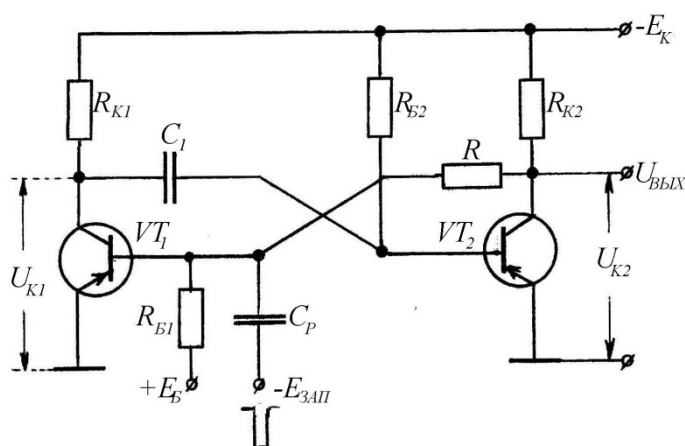


Рис.18.9.1

источника  $E_{3АП}$ , включённого в базы транзистора  $VT_1$  через разделительный конденсатор  $C_P$ . Параметры элементов схемы  $R_{B1}$ ,  $R_{B2}$  и  $R$  выбирают так, чтобы в исходном состоянии транзистор  $VT_1$  был закрыт напряжением  $+E_B$ , а транзистор  $VT_2$  – открыт и насыщен. Конденсатор  $C_1$  может заряжаться по контуру  $0$  – транзистор  $VT_2$ , находящийся в режиме насыщения – конденсатор  $C_1$  – резистор  $R_{K1}$  – источник питания  $-E_K$ .

Для генерации импульса схему выводят из устойчивого состояния, для чего на базу  $n$ -типа закрытого  $p$ - $n$ - $p$  транзистора  $VT_1$  подают запускающий импульс отрицательной полярности. Оба транзистора оказываются открытыми, поэтому в цепи развивается лавинообразный процесс изменения токов  $i_{K1}$  и  $i_{K2}$  в коллекторных резисторах соответственно  $R_{K1}$  и  $R_{K2}$ . В результате схема опрокидывается, то есть транзистор  $VT_1$  открывается и переходит в режим насыщения, а транзистор  $VT_2$  закрывается и переходит в режим отсечки. Транзистор  $VT_2$  удерживается в режиме отсечки запира-

ющим напряжением коллекторного источника  $E_K$ , которое подаётся через открытый транзистор  $VT_1$  и конденсатор  $C_1$ . При этом конденсатор  $C_1$  подключён к источнику  $E_K$  по другой цепи:  $0$  – открытый транзистор  $VT_1$  – конденсатор  $C_1$  – резистор  $R_{B2}$  – источник  $-E_K$  – и перезаряжается с постоянной времени  $\tau_{II}=R_{B2}\cdot C_1$ . В процессе перезарядки по мере разрядки конденсатора  $C_1$  как только напряжение на конденсаторе упадёт до нуля, потенциал базы транзистора  $VT_2$  станет равным нулю, и транзистор  $VT_2$  откроется.

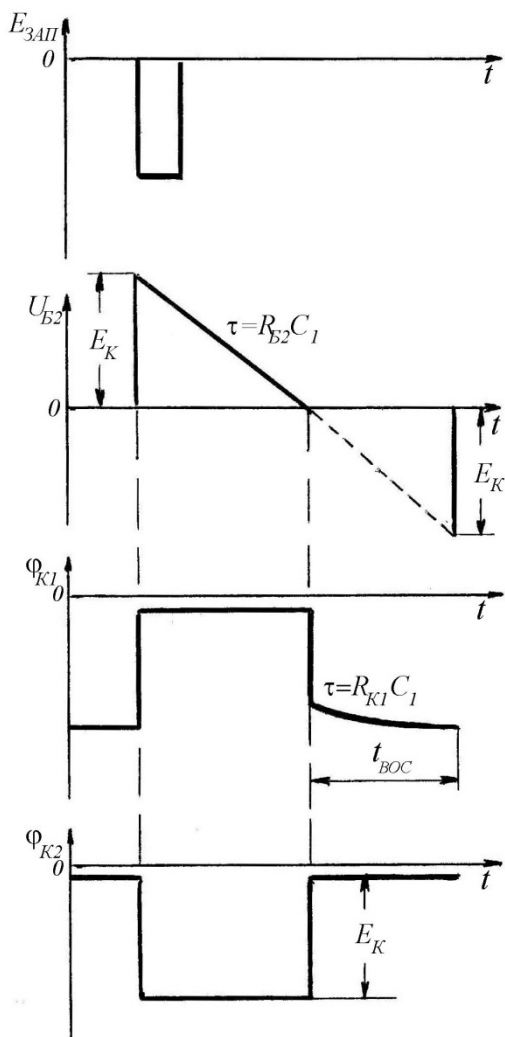


Рис.18.9.1

Поскольку оба транзистора открыты, в схеме вновь развивается лавинообразный процесс, в результате которого схема опрокидывается: транзистор  $VT_1$  закрывается, а транзистор  $VT_2$  переходит в режим насыщения. При этом напряжение на конденсаторе  $C_1$  равно нулю, а не  $E_K$ , как это было в исходном состоянии. Поэтому после опрокидывания схемы конденсатор  $C_1$  будет заряжаться по контуру:  $0$  – открытый транзистор  $VT_2$  – конденсатор  $C_1$  – резистор  $R_{K1}$  – источник  $-E_K$  –  $0$  с постоянной времени:  $\tau_I=R_{K1}\cdot C_1$ . Процесс зарядки конденсатора происходит в течение интервала времени, равного приблизительно  $4\tau_I=4\cdot R_{K1}\cdot C_1$ . После завершения процесса зарядки конденсатора до исходного напряжения, равного  $E_K$ , схема перейдёт в исходное устойчивое состояние.

На выходе ждущего мультивибратора (рис.18.9.1) формируется почти прямоугольный импульс (рис.18.9.2), длительность которого  $t_{II}$  определяется длительностью закрытого состояния транзистора  $VT_2$ . Поэтому следующий

запускающий импульс должен подаваться не ранее того времени, когда закончится зарядка конденсатора  $C_1$ . Промежуток времени, в течение которого напряжение на конденсаторе  $C_1$  увеличится от нуля до исходного значения  $E_K$ , называется *временем восстановления* ( $t_{BOC}$ ). На рис.18.9.2 приведены временные диаграммы процессов изменения напряжения на базе транзистора  $VT_2$ , а также потенциалов базы первого и второго транзистора.

### 18.10. Блокинг-генератор

Блокинг-генераторы – это устройства, предназначенные для формирования импульсов напряжения или тока прямоугольной формы преимущественно малой длительности. Их используют в схемах формирования пилообразного напряжения для осуществления развёртки электронного луча в электронном осциллографе, а также для изготовления формирователей управляющих импульсов цифровых систем.

Конструктивно блокинг-генератор представляет собой однокаскадный транзисторный усилитель с глубокой положительной обратной связью, осуществляемой импульсным трансформатором.

Процесс формирования импульса на выходе схемы связан с отпиранием транзистора и удержанием его в режиме насыщения цепью обратной связи. Завершение процесса формирования импульса сопровождается выходом транзистора из режима насыщения по базовой цепи вследствие уменьшения тока базы или по коллекторной (выходной) цепи в результате увеличения тока коллектора. Двум перечисленным случаям соответствуют две разновидности блокинг-генераторов: соответственно с конденсатором в цепи обратной связи (времязадающим конденсатором) и с насыщающим трансформатором.

На рис.18.10.1.а рассмотрена схема блокинг-генератора, выполненная на транзисторе  $VT$ , включённом по схеме с общим эмиттером, и трансформаторе  $TV$ . Цепь положительной обратной связи осуществляется с помощью вторичной обмотки  $w_6$  трансформатора, конденсатора  $C$  и резистора  $R$ , ограничивающего ток базы. Резистор  $R_6$  создаёт контур разряда конденсатора, когда транзистор  $VT$  находится в режиме отсечки. Выходной сигнал может быть снят либо непосредственно с коллектора транзистора, либо с дополнительной нагрузочной обмотки  $w_H$  трансформатора, связанной с коллекторной обмоткой коэффициентом трансформации  $n_H = w_K/w_H$ . Амплитуда импульса напряжения может быть как меньше, так и больше напряжения  $E_K$ . Диод  $VD_1$  исключает прохождение в нагрузку импульса напряжения отрицательной полярности, возникающего при запираании транзистора. Ветвь, содержащая диод  $VD_2$  и резистор  $R_1$ , необходима для защиты транзистора от перенапряжений.

В интервале времени  $t_0 \div t_1$  транзистор  $VT$  закрыт, напряжение на его коллекторе равно  $-E_K$ , а напряжения на обмотках трансформатора и нагрузке равны нулю (рис.18.10.1.б÷г). Режим отсечки транзистора обусловлено напряжением на конденсаторе  $C$  (рис.18.10.1.а), подключённом через обмотку  $w_6$  к выводам база – эмиттер транзистора. Полярность напряжения, указанную на рис.18.10.1.а, конденсатор приобретает к концу процесса формирования схемой предыдущего импульса.

Закрытое состояние транзистора  $VT$  сохраняется до момента времени  $t_1$ , поскольку в интервале времени  $t_0 \div t_1$  происходит перезарядка конденсатора  $C$  по цепи  $w_{\delta} - C - R - R_{\delta} - (-E_K)$ , и в момент времени  $t_1$  напряжение на конденсаторе становится равным нулю (рис.18.10.1.д).

В интервале времени  $t_1 \div t_2$  транзистор выходит из режима отсечки. Этот процесс обусловлен наличием в схеме положительной обратной связи и называется процессом *регенерации* или *прямым блокинг-процессом*.

Сущность регенеративного процесса отпирания транзистора заключается в том, что он сопровождается *взаимным увеличением базового и коллекторного токов*.

Переход значения напряжения  $u_C = u_{\delta\epsilon}$  через нуль в момент времени  $t_1$  приводит к возникновению базового и коллекторного токов транзистора. При выходе транзистора из режима отсечки напряжение на его коллекторе уменьшается. Это приводит к появлению напряжения на коллекторной обмотке  $w_K$  трансформатора, которое передаётся в базовую обмотку  $w_{\delta}$  с полярностью, соответствующей увеличению тока базы. (рис.18.10.1.а). Рост базового тока вызывает перемещение рабочей точки вверх по линии нагрузки и, следовательно, увеличение коллекторного тока. При этом происходит понижение напряжения на коллекторе и повышение напряжения на коллекторной и базовой обмотках трансформатора. Процесс завершается переходом транзистора в момент времени  $t_2$  в режим насыщения.

Для осуществления регенеративного процесса перевода транзистора из режима отсечки в режим насыщения необходимо обеспечить увеличение тока базы за счёт положительной обратной связи. Это возможно, если цепь обратной связи обеспечивает соотношение токов транзистора:

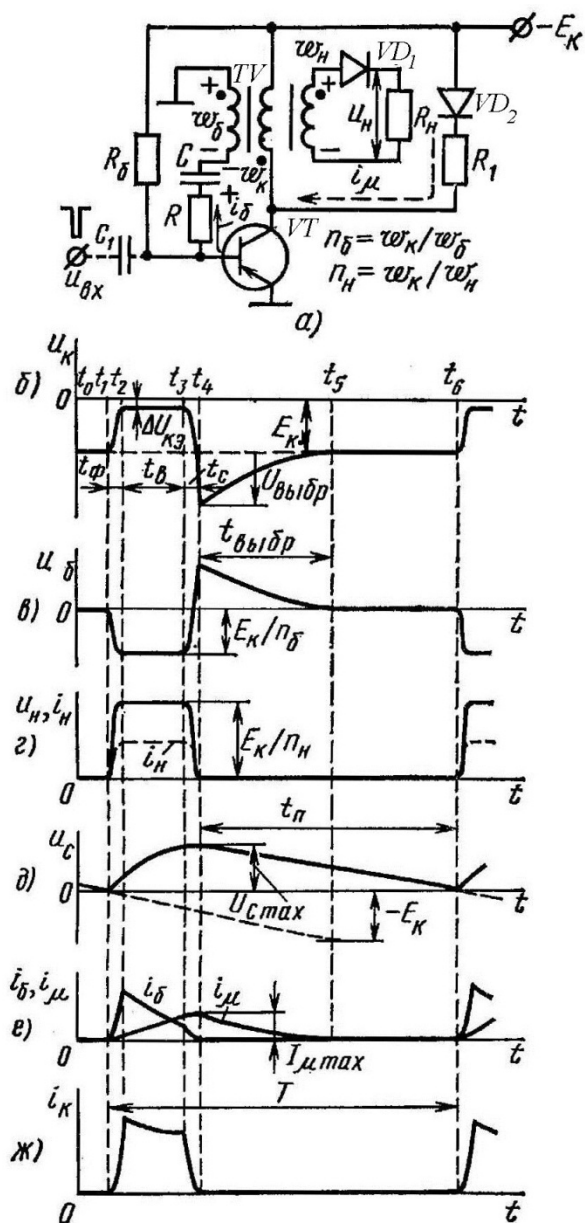


Рис.18.10.1

$$i_{\bar{o}} \geq i_K / \beta. \quad (18.10.1)$$

Интервал  $t_1 \div t_2$  определяет длительность переднего фронта формируемого импульса. Продолжительность промежутка времени  $t_{\phi}$  в блокинг-генераторах составляет микросекунды.

Переход транзистора в закрытое состояние, осуществляемый лавинообразно за счёт положительной обратной связи, называется *обратным блокинг-процессом* и вызывает повышение напряжения на коллекторной и базовой обмотках трансформатора. При обратном блокинг-процессе токи коллектора и базы уменьшаются, что приводит к переходу транзистора в режим отсечки. Длительность процесса определяет время среза  $t_C$  формируемого импульса. Время  $t_C$  мало отличается от  $t_{\phi}$ . После момента времени  $t_4$  режим отсечки транзистора поддерживается напряжением на конденсаторе, полярность обкладок которого указана на рис. 18.10.1.а.

Процессы, протекающие в схеме после запираания транзистора в момент времени  $t_4$ , связаны с разрядом конденсатора и рассеянием энергии, накопленной в магнитном поле трансформатора.

## 18.11. Триггеры

**Триггерами** называют устройства, обладающие двумя состояниями устойчивого равновесия и способные под воздействием внешнего управляющего сигнала скачком переходить из одного устойчивого состояния в другое. Триггер от английского слова *trigger* – *спусковое устройство* – это спусковая схема, содержащая два активных элемента, преимущественно транзистора.

Триггеры выполняют функции переключателей, счётных, пороговых и запоминающих элементов. Они составляют до 40% оборудования ЭВМ. Рассмотрим физические процессы в триггере с коллекторно-базовыми связями на биполярных транзисторах (рис. 18.11.1). Схема триггера структурно

близка к схеме мультивибратора и представляет собой двухкаскадный усилитель постоянного тока с положительной обратной связью, осуществляемой через цепи  $R_1 C_1$  и  $R_2 C_2$ , которые соединяют коллектор одного транзистора с базой другого. Схема симметрична, поэтому  $R_{B1} = R_{B2}$ ;  $R_{K1} = R_{K2}$ ;  $R_1 = R_2$ ;  $C_1 = C_2$ ; транзисторы  $VT_1$  и  $VT_2$  одного типа. В отличие от симметричного мультивибратора в схеме триггера име-

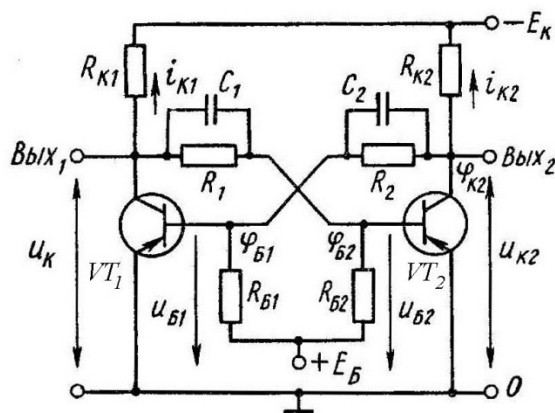


Рис. 18.11.1

ется источник  $E_B > 0$ , запирающий транзисторы и резисторы  $R_1$  и  $R_2$  в цепях связи между усилительными каскадами. Благодаря этому триггеры имеют два устойчивых состояния равновесия.

Для обеспечения устойчивой работы триггера его параметры подбирают так, чтобы открытый транзистор находился в режиме насыщения, а закрытый - в режиме отсечки. Потенциал коллектора открытого транзистора близок к нулю, поэтому при расчётах его уровень считают нулевым. Потенциал коллектора закрытого транзистора приблизительно равен напряжению коллекторного источника. Для  $p-n-p$  транзистора  $\varphi_K \approx -E_K$  (рис.18.11.2), а для  $n-p-n$  транзистора  $\varphi_K \approx +E_K$ . Несмотря на симметрию схемы триггера при подключении его к источнику питания один транзистор обязательно окажется в режиме насыщения, а другой - в режиме отсечки. В реальных электрических цепях абсолютную симметрию обеспечить невозможно и при включении схемы сразу начинается лавинный процесс, который происходит мгновенно и завершается переходом одного транзистора в режим насыщения, а другого - в режим отсечки. В отличие от мультивибратора такое состояние триггера является устойчивым и длится до тех пор, пока на вход триггера не будет подан запускающий импульс.

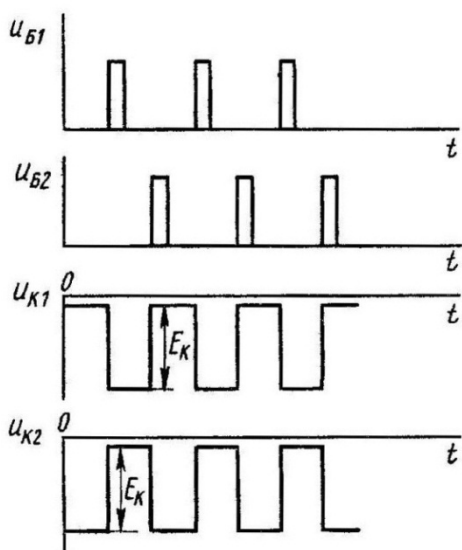


Рис.18.11.2

Запускающий импульс переводит триггер в другое устойчивое состояние, в котором ранее закрытый транзистор переходит в режим насыщения, а ранее открытый - в режим отсечки, то есть триггер переходит из одного устойчивого состояния в другое. При этом на выходах триггера формируются перепады напряжения.

Если в первоначальном устойчивом состоянии триггера (рис.18.11.1) транзистор  $VT_1$  был открыт, транзистор  $VT_2$  был закрыт, то для опрокидывания схемы на базу  $n$ -типа открытого  $p-n-p$  транзистора  $VT_1$  необходимо подать запускающий импульс положительной полярности. За

очень малый промежуток времени транзистор  $VT_1$  из режима насыщения перейдёт в активный режим. При этом ток базы  $i_{B1}$ , а следовательно и коллекторный ток  $i_{K1}$  первого транзистора уменьшится. Это вызовет изменение потенциала коллектора  $\varphi_{K1} = u_{K1} = -E_K + R_{K1} \cdot i_{K1}$ , он станет более отрицательным. Отрицательный скачок напряжения на коллекторе вызовет примерно такой же скачок напряжения на базе  $n$ -типа закрытого транзистора  $VT_2$ . В результате транзистор  $VT_2$  перейдёт из режима отсечки в активный режим.

Благодаря положительной обратной связи в схеме начнётся регенеративный процесс. Ток коллектора  $i_{K1}$  ранее открытого транзистора будет уменьшаться, и потенциал коллектора первого транзистора будет понижаться. Отрицательный скачок напряжения на коллекторе первого транзистора через резистор обратной связи  $R_1$  поступит на базу транзистора  $VT_2$  и ещё больше откроет его. Это вызовет значительное усиление коллекторного тока  $i_{K2}$  транзистора  $VT_2$  за счёт большого коэффициента усиления тока в схеме с общим эмиттером (рис.18.11.1). Потенциал коллектора транзистора  $VT_2$   $\varphi_{K2}=u_{K2}=-E_K+R_{K2}\cdot i_{K2}$  станет положительнее. Положительный скачок напряжения на коллекторе транзистора  $VT_2$  будет значительно больше вызвавшего его отрицательного скачка напряжения на коллекторе транзистора  $VT_1$ . Усиленный положительный скачок напряжения через резистор обратной связи  $R_2$  поступит на базу первого транзистора и ещё больше закроет его. Лавинообразный процесс закончится закрыванием открытого транзистора  $VT_1$  и переводом ранее закрытого транзистора  $VT_2$  в режим насыщения. Для того, чтобы вывести схему из нового устойчивого состояния, необходимо подать запускающий импульс на базу открывшегося транзистора  $VT_2$ .

Конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$ , шунтирующие резисторы  $R_1$  и  $R_2$ , называют ускоряющими. Такое название объясняется тем, что во время лавинообразного процесса переключения схемы, который протекает мгновенно, в соответствии со вторым законом коммутации напряжение конденсаторов  $u_{C1}\approx 0$  и  $u_{C2}\approx -E_K$  не изменяется. Но как только ранее открытый транзистор  $VT_1$  закроется и напряжение на его коллекторе окажется равным  $-E_K$ , разряженный конденсатор  $C_1$  начнёт заряжаться и в цепи базы открывающегося транзистора  $VT_2$  будет течь большой зарядный ток, который добавится к току, втекающему в базу. Это ускорит процесс открывания транзистора  $VT_2$ . Конденсатор  $C_2$  после опрокидывания схемы будет перезаряжаться и к концу перезарядки напряжение на нём станет равным  $u_{K2}\approx 0$ .

Амплитуда выходного импульса равна перепаду напряжения на коллекторе при переходе триггера из одного устойчивого состояния в другое. Напряжение на коллекторе открытого транзистора  $u_{K1\text{ ОТКР.}}\approx 0$ , а напряжение на коллекторе закрытого транзистора  $u_{K1\text{ ЗАКР.}}\approx -E_K$ . Поэтому амплитуда выходного импульса приблизительно равна  $E_K$ .

## 18.12. Схемы запуска триггера

Для перевода триггера из одного устойчивого состояния в другое на его входы необходимо подавать запускающие импульсы. Существует два способа запуска триггеров: отдельный и общий.

### 18.12.1. Раздельный запуск

Раздельный запуск осуществляется подачей импульсов одной полярности на базы транзисторов, то есть на входы триггера. Импульс, поданный на один из входов, переводит триггер в одно из устойчивых состоя-

ний. Импульс, подаваемый на другой вход, устанавливает триггер в другое устойчивое состояние.

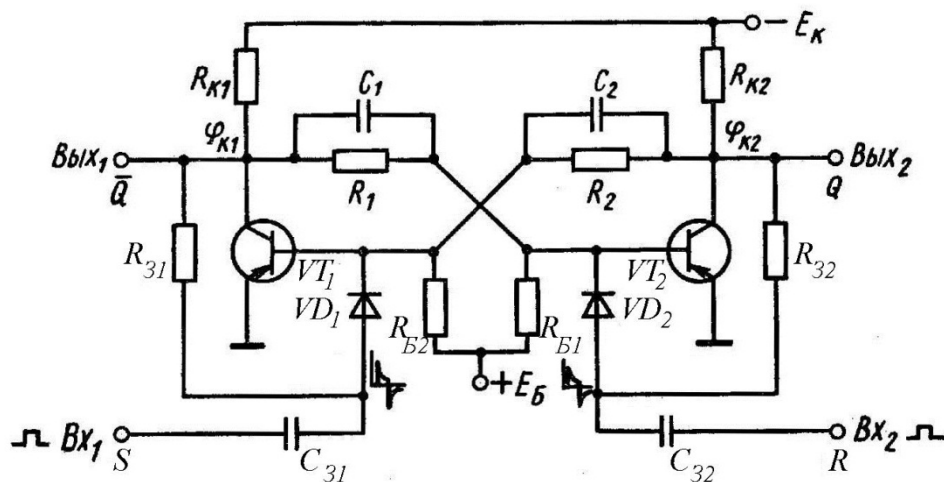


Рис.18.12.1

Элементами цепи запуска являются диоды  $VD_1$  и  $VD_2$ , конденсаторы  $C_{31}$  и  $C_{32}$ , резисторы  $R_{31}$  и  $R_{32}$  (рис.18.12.1).

Если в исходном устойчивом состоянии триггера транзистор  $VT_1$  находится в режиме насыщения, а транзистор  $VT_2$  в режиме отсечки, для опрокидывания триггера на  $Bx_1$  (вход -1) подаётся прямоугольный импульс. Цепь  $R_{31}C_{31}$  дифференцирует сигнал, в результате чего из него формируются два коротких остроконечных импульса противоположной полярности. Потенциал коллектора открытого транзистора  $VT_1$   $\varphi_{K1} \approx 0$ . Поскольку потенциал анода диода  $VD_1$  приблизительно равен потенциалу коллектора  $\varphi_{K1}$  (отличается от  $\varphi_{K1}$  на величину падения напряжения на резисторе  $R_{31}$ ), а катод имеет отрицательный потенциал, диод находится в проводящем состоянии и пропустит положительный запускающий импульс на базу  $n$ -типа открытого транзистора  $VT_1$ . Подача на базу транзистора  $VT_1$  запускающего импульса переводит его из режима насыщения в активный режим, а транзистор  $VT_2$  из области отсечки в активный режим. Благодаря положительной обратной связи в схеме начнётся лавинообразный процесс, в результате которого транзистор  $VT_1$  закроется, а транзистор  $VT_2$  перейдёт в режим насыщения.

Такое состояние триггера продлится до тех пор, пока новый запускающий импульс не будет подан на второй вход  $Bx_2$ . Поскольку после перехода транзисторов  $VT_1$  и  $VT_2$  в активный режим опрокидывание схемы происходит за счёт внутренних процессов, без дальнейшего участия запускающего импульса, цепь запуска после опрокидывания отключит триггер от внешнего генератора. На коллекторе закрывающегося транзистора  $VT_1$  установится высокий потенциал  $\varphi_{K1} \approx -E_K$ . Примерно таким же будет потенциал на аноде диода  $VD_1$ , поэтому первый диод находится в непроводящем состоянии и отключит вход первого транзистора  $Bx_1$  от базы транзистора

$VT_1$ . Поэтому диоды  $VD_1$  и  $VD_2$  называют отсекающими диодами. До подачи следующего импульса конденсатор  $C_{31}$  разряжается через резистор  $R_{31}$ .

Триггер с отдельным запуском называют  $RS$  – *триггером*.  $RS$  – триггер имеет два входа и два выхода. Входы, на которые подают запускающие импульсы, называют установочными входами и обозначают символами  $R$  и  $S$ . Буква  $S$  означает отдельный вход установки в состояние 1, а буква  $R$  – отдельный вход установки в состояние 0. Выходы обозначают символами  $Q$  и  $\bar{Q}$ .

### 18.12.2. Счётный запуск

При счётном запуске импульсы одной полярности подаются на общий вход (С) триггера. Каждый импульс приводит к опрокидыванию триггера. Возможны два способа подачи запускающих импульсов: на базу транзисторов (рис.18.12.2) и на коллекторы. В отличие от схемы с отдельным запуском (рис.18.12.1) нижние пластины конденсаторов  $C_{31}$  и  $C_{32}$  электрически соединены, образуя общий вход (С).

Входной импульс положительной полярности, подаваемый на вход триггера, дифференцируется запускающей цепью  $R_3C_3$  и из образованных двух остrokонечных импульсов положительный импульс через один из диодов  $VD_1$  или  $VD_2$  поступает на базу открытого транзистора.

Управление цепями запуска осуществляется с помощью резисторов  $R_{31}$  и  $R_{32}$  запускающей цепи. С помощью этих резисторов задаётся отрицательный потенциал анода диода  $VD_1$  или  $VD_2$ , соединённого с коллектором закрытого транзистора. При этом диод закрывается и отключает цепь базы транзистора от цепи запуска. Потенциал коллектора открытого транзистора  $\varphi_K \approx 0$ , поэтому соответствующий диод через резистор  $R_3$  находится в проводящем состоянии.

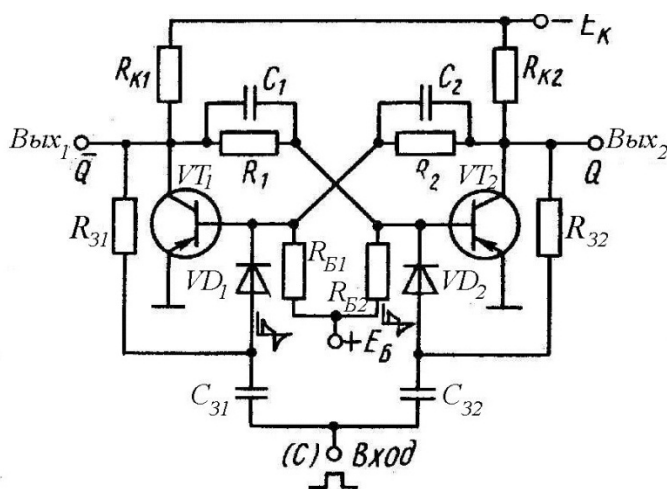


Рис.18.12.2

Например, если транзистор  $VT_1$  открыт и находится в режиме насыщения, то  $\varphi_{K1} \approx u_{K1} \approx 0$ ,  $\varphi_{B1} \approx u_{B1} \approx 0$ , а транзистор  $VT_2$  закрыт и находится в режиме отсечки, то  $\varphi_{K2} \approx u_{K2} \approx -E_K$ ,  $\varphi_{B2} \approx u_{B2} > 0$ . Потенциал анода диода  $VD_1$  через резистор  $R_{31}$  приблизительно равен нулю. Потенциал катода диода  $VD_1$  отрицателен, поэтому диод базы первого транзистора открыт. Потенциал анода диода  $VD_2$  отрицателен и равен приблизительно  $-E_K$ . Потенциал катода диода  $VD_1$  положителен, поэтому второй диод закрыт. Конденсаторы  $C_{31}$  и  $C_{32}$  заряжены соответственно до напряжений  $u_{C31} \approx 0$ ,  $u_{C32} \approx -E_K$  через

резисторы  $R_{31}$  и  $R_{32}$  и выходное сопротивление запускающего генератора. Положительный запускающий импульс, продифференцированный цепочкой  $C_{31} R_{31}$ , поступает через открытый диод  $VD_1$  на базу транзистора  $VT_1$ . В результате лавинного процесса первый транзистор переходит из режима насыщения в режим отсечки, а транзистор  $VT_2$  открывается и переходит в режим насыщения.

После переключения триггера конденсаторы  $C_{31}$  и  $C_{32}$  будут перезаряжаться через резисторы  $R_{31}$  и  $R_{32}$ , и напряжения на конденсаторах станут равны  $u_{C_{31}} \approx -E_K$ ,  $u_{C_{32}} \approx 0$ . Следующий запускающий импульс может пройти через запускающую цепь теперь только на базу открытого транзистора  $VT_2$ . Поэтому диоды  $VD_1$  и  $VD_2$  пропускают каждый запускающий импульс только на базу открытого транзистора, а конденсаторы  $C_{31}$  и  $C_{32}$ , фиксируют состояние схемы до очередного переключения и препятствуют обратному опрокидыванию схемы под действием ещё не закончившегося импульса.

Триггер со счётным запуском называют  $T$  – *триггером*. Буквой  $T$  обозначают счётный вход.

### 18.13. Основы алгебры логики

В цифровых вычислительных машинах, системах автоматики и обработки информации используют устройства, выполняющие логические операции.

**Логическая операция** – это преобразование входной цифровой информации в выходную, которое выполняется по правилам алгебры логики. В алгебре логики любая переменная может иметь состояние «0» или «1». Таким образом, логические переменные могут иметь два значения: **единица** и **ноль**. Их называют двоичными переменными.

Для осуществления операций алгебры логики в электронных элементах необходимо значения параметров этих элементов перевести на язык алгебры логики, то есть представить их в виде логического нуля или логической единицы.

Задавать значения параметров можно уровнем напряжения или полярностью импульсов. Если сигнал подают в виде: а) высокого уровня напряжения положительной или отрицательной полярности и б) низкого уровня напряжения, близкого к нулю, то способ подачи сигнала называется **потенциальным**. Если высокому уровню напряжения приписывают значение «логическая единица», то есть  $U^1$ , а низкому уровню «логический ноль»  $U^0$ , то логика называется **положительной**, в противном случае – **отрицательной**. Разность уровней логической единицы и нуля называется **логическим перепадом**:  $U_L = U^1 - U^0$ . Логический перепад должен быть значительным, иначе невозможно чётко различить уровни.

Если сигналы подают в импульсной форме, то способ подачи сигналов называют **импульсным**. При импульсном способе задания сигнала ло-

гической единице соответствует наличие импульса, логическому нулю – отсутствие импульса. В этом случае логика называется положительной. Сигналы, соответствующие логическому нулю или логической единице, на входе и выходе схемы могут быть разными.

### 18.14. Логические элементы

Логическое устройство, выполняющее одну определённую логическую операцию над входными сигналами, называется **логическим элементом**. Система логических элементов, на базе которой можно построить логическую схему любой сложности, называется функционально полной.

Основными логическими элементами являются устройства, выполняющие следующие операции:

- 1) логического отрицания – элемент «НЕ»;
- 2) логического умножения – элемент «И»;
- 3) логического сложения – «ИЛИ».

#### 18.14.1. Логический элемент «ИЛИ»

Логический элемент «ИЛИ» имеет несколько входов и один общий выход (рис.18.14.1).

Логический элемент «ИЛИ» выполняет операцию логического сложения (дизъюнкции):

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n,$$

где  $F$  – функция,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  – аргументы (переменные, двоичные сигналы на входах).

Здесь функция  $F=0$ , если все её аргументы  $x_i$  равны нулю, и  $F=1$ , если один или несколько аргументов  $x_i$  равны единице.

Работу элемента «ИЛИ» с двумя входами иллюстрирует таблица истинности (рис.18.14.2.а) и временные диаграммы (рис.18.14.2.б).

Наиболее простой является диодная схема элемента «ИЛИ» (рис.18.14.3). Значение  $F=1$  формируется на выходе при подаче логической единицы на любой входной диод, поскольку подача положительного потенциала на любой вход открывает соответствующий диод, который и пропускает логическую единицу на выход.

Если число входов элемента «ИЛИ» превышает число входных сигналов, неиспользуемые входы заземляют, чтобы исключить влияние помех на работу логического элемента.

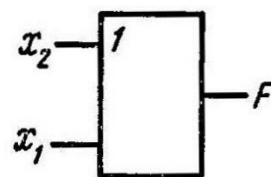
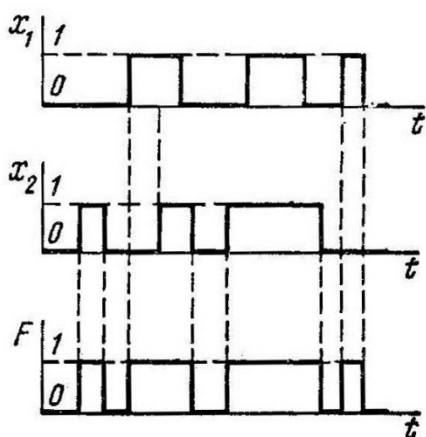


Рис.18.14.1

$x_1$	$x_2$	$F$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

а)



б)

Рис.18.14.2

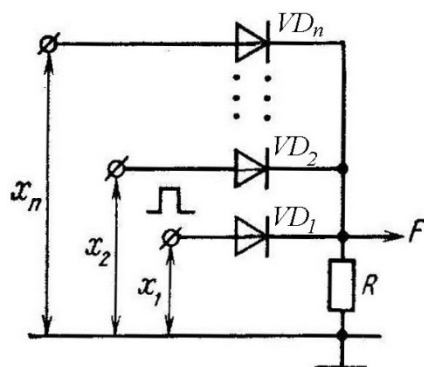


Рис.18.14.3

### 18.14.2. Логический элемент «И»

Логический элемент «И» имеет несколько входов и один выход (рис.18.14.4).

Логический элемент «И» выполняет операцию логического умножения (конъюнкции):

$$F = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n.$$

Здесь функция  $F=0$ , если хотя бы один из её аргументов  $x_i$  равен нулю; и  $F=1$ , если все аргументы равны единице.

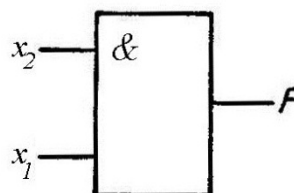
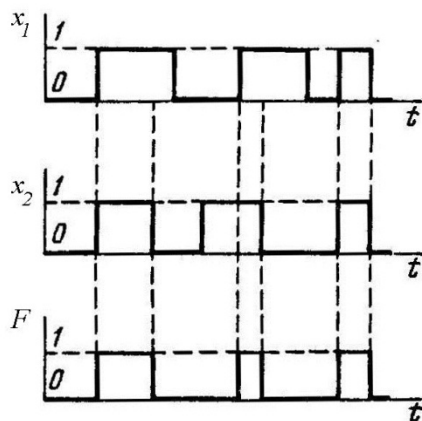


Рис.18.14.4

Работу элемента «И» с двумя входами иллюстрирует таблица истинности (рис.18.14.5.а) и временные диаграммы (рис.18.14.5.б). Элемент «И» является схемой совпадений: сигнал «1» на выходе формируется при совпадении логических единиц на всех входах.

$x_1$	$x_2$	$F$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

а)



б)

Рис.18.14.5

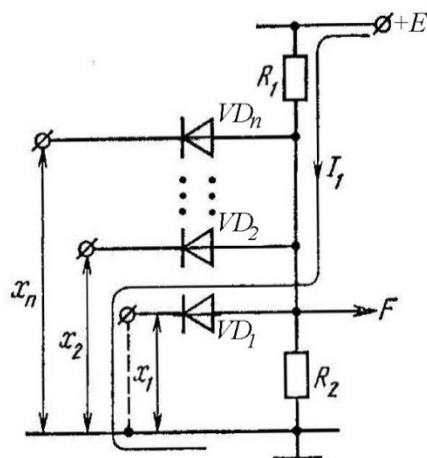


Рис.18.14.6

Схему логического элемента «И» можно реализовать с помощью диодов (рис.18.14.6). Отличие схемы элемента «И» на рис.18.14.6 от схемы элемента «ИЛИ» на рис.18.14.3 заключается в изменении полярности включения диодов и введении резистора  $R_1$ .

При подаче на все входы логических единиц все диоды закрываются. При этом на выходе формируется напряжение

$$U_{\text{ВЫХ}} = \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot R_2,$$

соответствующее логической единице на выходе:  $F=1$ .

При нулевом значении сигнала хотя бы на одном входе соответствующий диод открыт и, следовательно, шунтирует резистор  $R_2$ . В этом случае напряжение на выходе отсутствует, что соответствует логическому нулю  $F=0$ .

Если количество входов элемента «И» больше количества входных сигналов, неиспользуемые входы подключают к зажиму «+E». В этом случае диоды неиспользуемых входов закрыты, что уменьшает вероятность передачи помех на выход.

### 18.14.3. Логический элемент «НЕ»

Логический элемент «НЕ» имеет один вход и один выход (рис.18.14.7).

Логический элемент «НЕ» выполняет операцию логического отрицания (инверсии), поэтому логический элемент «НЕ» часто называют логическим инвертором. Логический элемент «НЕ» выполняет функцию:

$$F = \bar{x}.$$

Работу логического элемента «НЕ» иллюстрируют таблица истинности (рис.6.14.8.a) и временные диаграммы (рис.6.14.8.б).

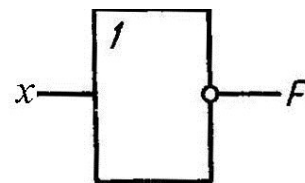
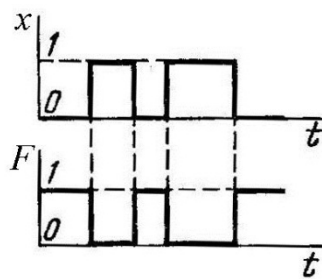


Рис.18.14.7

$x$	$F$
0	1
1	0

a)



б)

Рис.18.14.8

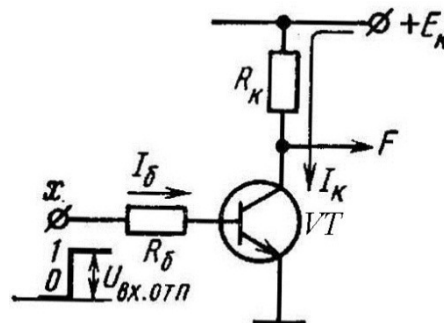


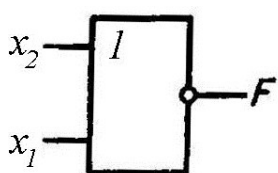
Рис.18.14.9

Логический элемент «НЕ» представляет собой транзисторную ключевую схему (рис.18.14.9). Если на вход подан логический ноль ( $x=0$ ), то есть  $U_{BX}=0$ , транзистор закрыт и напряжение на выходе  $U_{ВЫХ}=U_{КЭ}\approx E_K$ , что соответствует логической единице на выходе ( $F=1$ ).

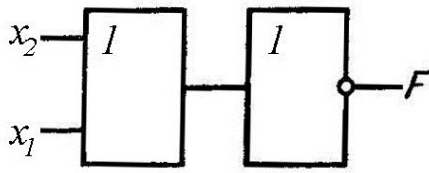
Если на вход подано напряжение  $U_{BX}=U_{BX. \text{откр.}}$ , что соответствует логической единице, транзистор открыт и напряжение на выходе равно нулю, что соответствует логическому нулю на выходе ( $F=0$ ). Открытое состояние транзистора обеспечивается заданием тока базы, переводящего транзистор в режим насыщения.

#### 18.14.4. Логический элемент «ИЛИ-НЕ»

Логический элемент «ИЛИ-НЕ» может иметь несколько входов и один выход. Условное обозначение логического элемента «ИЛИ-НЕ» приведено на рис.18.14.10.а. Он объединяет элементы «ИЛИ» и «НЕ» и выполняет операции «ИЛИ» и «НЕ», как показано на рис.18.14.10.б.



а)



б)

Рис.18.14.10

$x_1$	$x_2$	$F$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Рис.18.14.11

Логический элемент «ИЛИ-НЕ» с  $n$  входами выполняет логическую операцию:

$$F = \overline{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}.$$

Поэтому входной сигнал, соответствующий логической единице, на выходе элемента «ИЛИ» формирует логическую единицу, а окончательно, на выходе элемента «НЕ», получается логический ноль.

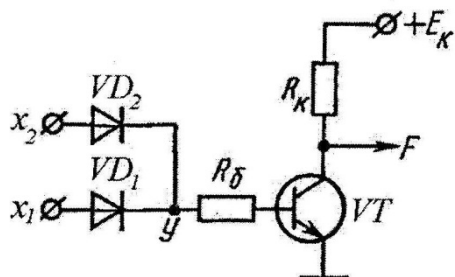


Рис.18.14.12

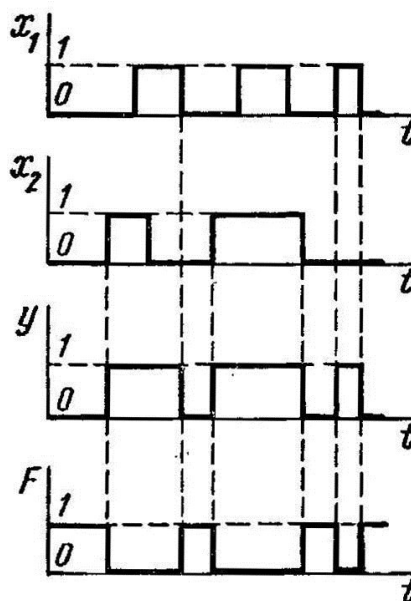


Рис.18.14.13

Принцип действия логического элемента «ИЛИ-НЕ» иллюстрируется таблицей истинности (рис.18.14.11) и временной диаграммой (рис.18.12.13). Принципиальная электрическая схема логического элемента «ИЛИ-НЕ» представляет собой последовательное соединение диодной схемы элемента «ИЛИ» и транзисторной схемы элемента «НЕ» (рис.18.14.12).

### 18.14.5. Логический элемент «И-НЕ»

Условное обозначение логического элемента «И-НЕ» с двумя входами приведена на рис.18.14.14.а. Его эквивалентная структура показана на рис.18.14.14.б. Если на все

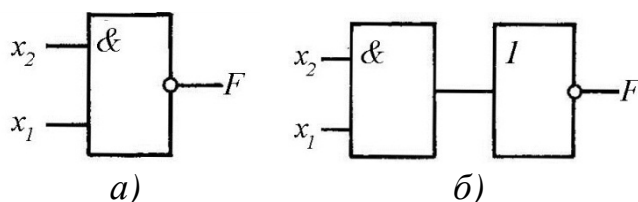


Рис.18.14.14

входы поданы логические единицы, на выходе формируется логический ноль. При логическом нуле на одном из входов на выходе создаётся логическая единица. Принцип действия логического элемента «И-НЕ» с двумя входами показан в таблице истинности (рис.18.14.15.а). Логическая функция элемента «И-НЕ» с двумя входами соответствует выражению:

$$F = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Временные диаграммы логического элемента «И-НЕ» с двумя входами приведена на рис.18.14.15.б, а принципиальная электрическая схема – на рис.18.14.15.в. При логических единицах на обоих входах диоды  $VD_1$  и  $VD_2$  закрыты. Электрическая цепь  $+E_K - R_6 - VD_3 - VD_4$  обеспечивает протекание тока базы транзистора  $I_6 \approx E_K / R_6$ . Транзистор открыт и находится в режиме насыщения, поэтому  $F=0$ .

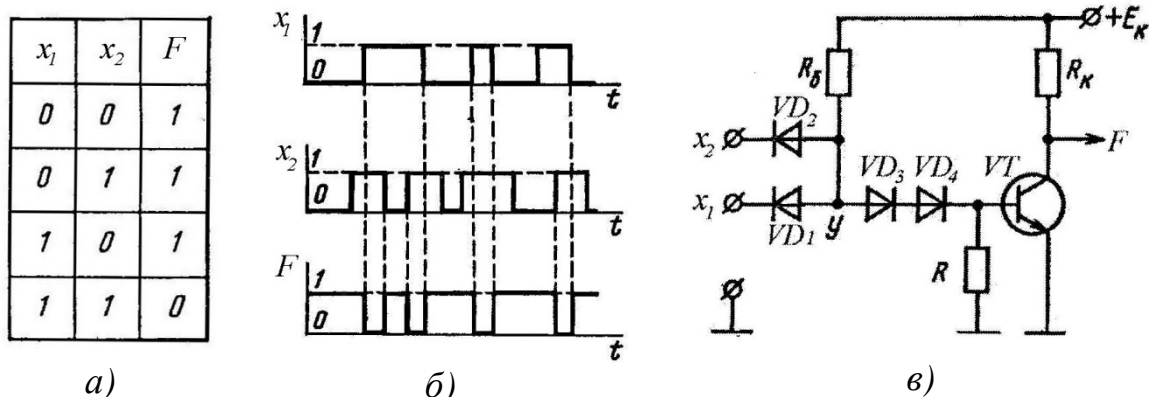


Рис.18.14.15

При логическом нуле на одном из входов (например, входе  $x_1$ ) открывается соответствующий диод (в рассмотренном случае  $VD_1$ ). Через открытый диод ( $VD_1$ ) и источник сигнала логического нуля течёт ток резистора  $R_6$  (рис.18.14.15.в). При этом цепь диодов  $VD_3 - VD_4$  шунтируется

цепью с проводящим диодом. Ток базы резистора равен нулю, транзистор закрыт, и  $F=1$ .

Поскольку напряжение на открытом диоде входной цепи, а также напряжение входа логического «0» реально больше нулевого потенциала, точка «у» на рис.18.14.15.в имеет положительный потенциал относительно эмиттера транзистора. В отсутствие диодов  $VD_3$  и  $VD_4$  это могло бы привести к отпираанию транзистора. При наличии диодов  $VD_3$  и  $VD_4$  напряжение между точкой «у» и эмиттером транзистора приложено к диодам, а напряжение  $U_{бэ}$  транзистора близко к нулю.

### 18.15. Счётчики импульсов

В устройствах цифровой обработки информации измеряемые параметры (например, перемещение, угол поворота, температура, давление, скорость) преобразуются в импульсы напряжения. Количество импульсов в соответствующем масштабе характеризует значение данного параметра и подсчитывается счётчиком импульсов, а затем выражается в виде цифр.

В зависимости от назначения различают простые и реверсивные счётчики. Простые счётчики могут быть суммирующими и вычитающими.

**Суммирующий счётчик** предназначен для выполнения счёта в прямом направлении, то есть для сложения. При поступлении очередного счётного импульса на вход суммирующего счётчика его показание увеличивается на единицу.

**Вычитающий счётчик** осуществляет счёт в обратном направлении, то есть выполняет операцию вычитания. Каждый счётный импульс, поступающий на вход вычитающего счётчика, уменьшает его показание на единицу.

**Реверсивные счётчики** выполняют операции счёта как в прямом, так и в обратном направлении, то есть могут работать в режиме сложения и вычитания.

Число импульсов, которое может быть сосчитано счётчиком, называется **коэффициентом счёта**. Быстродействие счётчика характеризуется частотой  $f_{сч}$  следования импульсов и связанным с ней временем  $t_{уст}$  установки счётчика. Величина  $t_{уст}$  определяет максимальное время протекания переходных процессов во всех разрядах счётчика с поступлением на вход очередного счётного импульса. Счётчики импульсов выполняют на основе триггеров. Счёт числа поступающих импульсов производится с использованием двоичной системы счисления.

Двоичные счётчики производят подсчёт поступающих импульсов в двоичной системе счисления. Основным узлом двоичного счётчика является триггер со счётным запуском.

Многоразрядные двоичные счётчики с непосредственной связью выполняют посредством последовательного соединения счётных триггеров. Счётный импульс подаётся на вход первого триггера. Счётные входы по-

следующих триггеров непосредственно связаны с прямыми выходами предыдущих триггеров: вход второго триггера соединён с выходом первого триггера, вход третьего соединён с выходом второго и так далее.

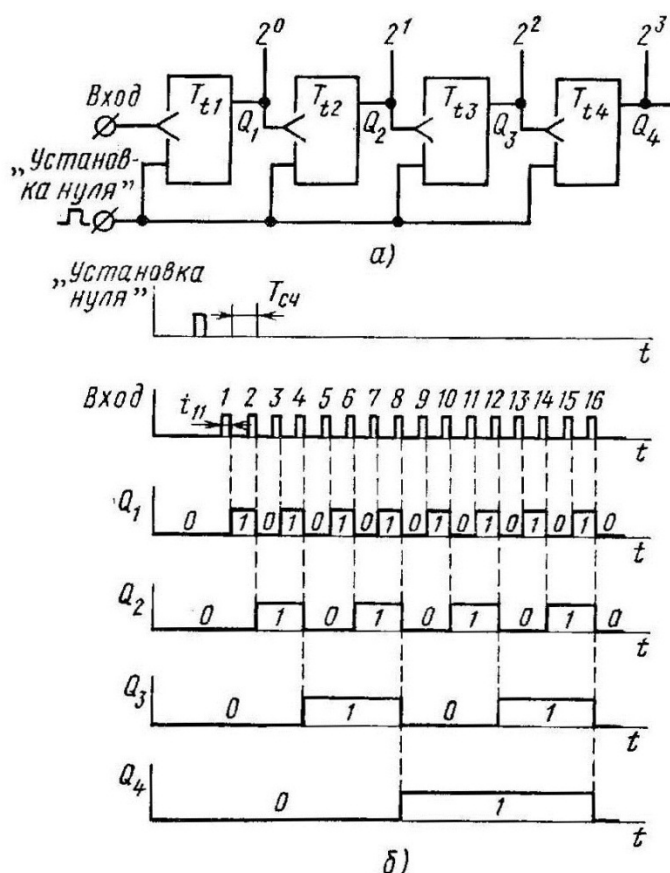


Рис.18.15.1

Структурная схема и принцип действия четырехразрядного двоичного счетчика показаны на рис.18.15.1. Работу схемы иллюстрируют временные диаграммы на рис.18.15.1.б и табл.18.15.1. До поступления счетных импульсов все разряды счетчика устанавливаются в состояние «0» ( $Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=0$ ) подачей импульса на вход «Установка нуля». При поступлении первого счетного импульса (рис.18.15.1.б) первый разряд счетчика подготавливается к переключению в противоположное состояние и после окончания действия входного импульса переходит в состояние  $Q=1$ . Счетчик записывает число «1».

Уровень «1» с выхода  $Q_1$  воздействует на счетный вход второго разряда, подготавливая его к переключению. По завершении второго счетного импульса первый разряд счетчика переходит в состояние «0», а второй разряд переключается в положение «1». В счетчике записывается число «2» с кодом «0010».

Подобным образом осуществляется работа схемы с приходом последующих импульсов. Первый разряд счетчика переключается с приходом каждого последующего импульса (рис.18.15.1.б), второй разряд – каждого второго импульса, третий разряд – каждого четвертого, а четвертый разряд срабатывает на каждый восьмой счетный импульс.

По окончании 15-го импульса все разряды счетчика устанавливаются в состояние «1» (рис.18.15.1.б, табл.18.15.1), а 16-й импульс переключает первый разряд счетчика в состояние «0». Уровень  $Q_1=0$  переводит второй разряд счетчика в состояние  $Q_2=0$ , что вызывает  $Q_3=0$ , а затем  $Q_4=0$ , то есть счетчик переходит в исходное состояние.

Таблица 18.15.1.

Число входных импульсов	Состояние триггеров счётчика			
	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1
16	0	0	0	0

В соответствии с рис.18.15.1.б и табл.18.15.1 установка в исходное состояние «0» двух последовательно включённых триггеров ( $T_1$  и  $T_2$ ) осуществляется четвёртым счётным импульсом, трёх триггеров ( $T_1 \div T_3$ ) – восьмым счётным импульсом и четырёх триггеров ( $T_1 \div T_4$ ) – шестнадцатым счётным импульсом. Поэтому модуль счёта двухразрядного, трёхразрядного и четырёхразрядного двоичных счётчиков равен соответственно 4, 8 и 16. Модуль счёта двоичного счётчика находят из соотношения  $K_{Cq}=2^N$ , где  $N$  - число разрядов счётчика.

В двоичных счётчиках коэффициент счёта может быть равен 2, 4, 8, 16, 32 и так далее. Однако практически возникает необходимость в счётчиках, коэффициент счёта которых не соответствует указанным значениям. Например, требуются счётчики с коэффициентом счёта  $K_{Cq}=3, 10$  и так далее. Такие счётчики выполняют на основе двоичных счётчиков. Общий принцип их построения основан на исключении у счётчика с  $K_{Cq}=2^N$  требуемого числа «избыточных» состояний. Число  $S$  избыточных состояний определяется разностью:

$$S=2^N - K_{Cq},$$

где  $2^N$  – количество состояний двоичного счётчика,  $K_{Cq}$  – требуемый коэффициент счёта. Число триггеров такого счётчика выбирают по минимуму величины  $S$ . Например, для построения счётчика с  $K_{Cq}=3$  на двух триггерах и счётчика с  $K_{Cq}=10$  на трёх триггерах следует исключить соответственно 1 и 6 состояний.

## 18.16. Регистры

**Регистрами** называют функциональные узлы, предназначенные для приёма, хранения, передачи и преобразования информации. В зависимости от способа записи информации (то есть кода числа) различают параллельные, последовательные и параллельно-последовательные регистры.

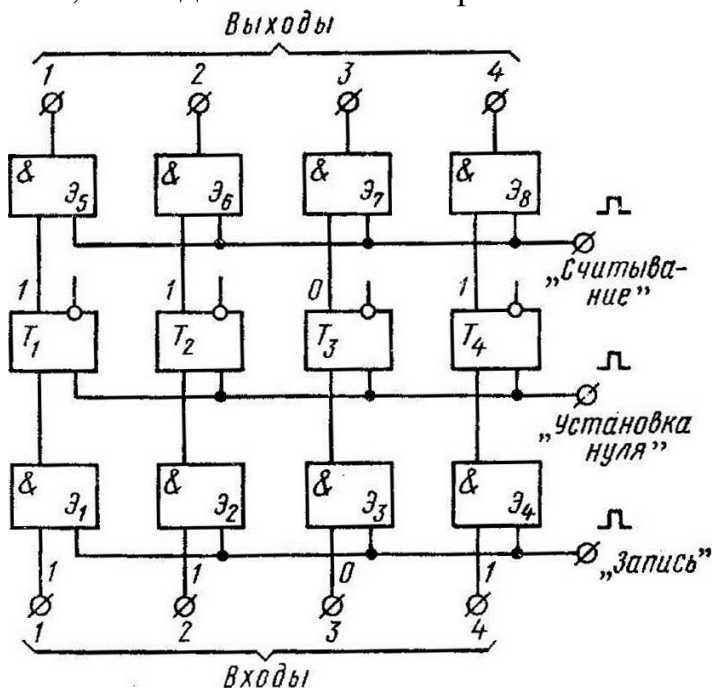


Рис.18.16.1

Параллельный  $N$  – разрядный регистр состоит из  $N$  триггеров. Число входов каждого триггера соответствует количеству источников информации. Каждый триггер имеет один вход в случае одного источника информации. При двух и трёх параллельных каналах информации триггер разряда имеет соответственно два и три входа. Запись цифровой информации того или иного канала в регистр осуществляется по цепи управления регистром.

Принцип построения параллельных регистров при одном канале четырёхразрядной цифровой информации показан на структурной схеме (рис.18.16.1). Здесь  $T_1$  – триггер младшего разряда,  $T_4$  – триггер старшего разряда,  $\mathcal{E}_1 \div \mathcal{E}_4$  – элементы, предназначенные для управления записью информации в регистр,  $\mathcal{E}_5 \div \mathcal{E}_8$  – элементы, необходимые для управления считыванием информации из регистра.

Перед записью двоичного числа все триггеры устанавливают в состояние «0» подачей импульса на вход «Установка нуля». Для записи в регистр входной информации подают импульс записи, открывающий входные элементы «И». Код входного числа записывается в регистр. Например, если на вход поступил код 1011, что соответствует числу 11 (табл.18.15.1), то это число будет записано в регистр. По завершении операции записи информация, переданная в регистр, сохраняется, несмотря на то, что входная информация может измениться.

В параллельных регистрах запись слова (двоичного числа) осуществляется параллельным кодом, то есть во все разряды регистра одновременно. Их функция состоит в приёме, хранении и передаче информации (двоичного числа). Поэтому параллельные регистры называют также **регистрами памяти**.

Параллельный  $N$  – разрядный регистр состоит из  $N$  триггеров. Число входов каждого триггера соответствует количеству источников информации. Каждый триггер имеет один вход в случае одного источника информации.

Для считывания информации подают импульс на вход «Считывание». На выходные шины регистра поступает код числа, записанного в регистр. При этом записанное в регистр число сохраняется. Для получения новой информации описанные операции повторяются.

При построении параллельных регистров наибольшее распространение получили *D*-триггеры, позволяющие выполнять параллельные регистры на малом количестве элементов.

### 18.17. Шифраторы и дешифраторы

На рис.18.17.1.а показана принципиальная схема шифратора для преобразования десятичного числа в код двоичного числа, а на рис. 18.17.1.б представлено его условное обозначение. Входы обозначены десятичными цифрами, а выходы – двоичными кодовыми эквивалентами. Символ *CD* соответствует английскому слову *coder*. Входами шифратора являются ключи  $K_0 \div K_9$ , которые служат для ввода цифр десятичного числа разряда единиц. Выходы – это вертикальные проводники, соединённые через резисторы  $R_1 \div R_4$  с источником энергии и корпусом. Диоды каждого горизонтального проводника (строки) вместе с

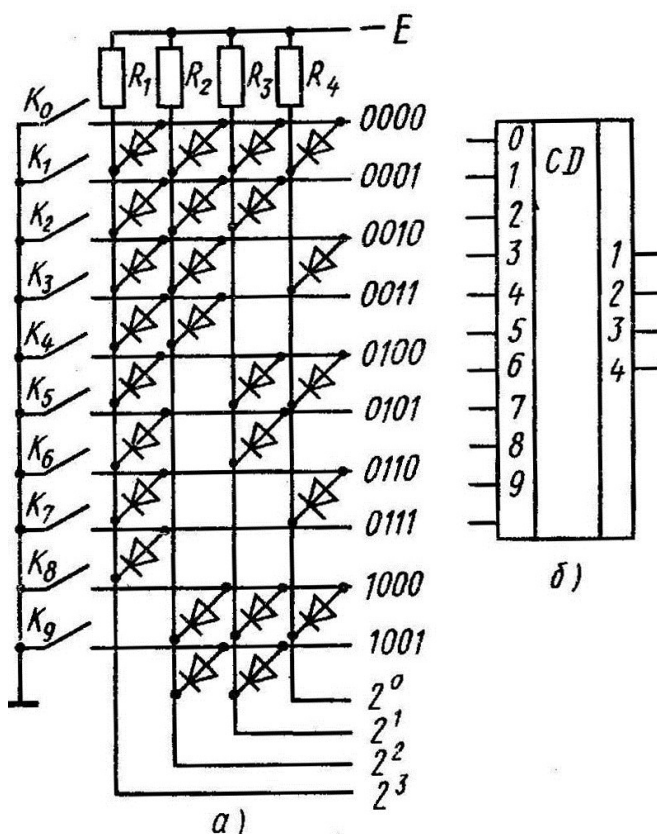


Рис.18.17.1

резисторами образуют элементы «И». Код двоичного числа формируется из электрических сигналов, соответствующих сумме слагаемых

$$N = \sum_{k=0}^n 2^k,$$

где  $N$  – двоичное число,  $n$  – разряд числа. При нажатии определённого ключа элемент «И» формирует электрический сигнал, являющийся кодом двоичного числа.

**Дешифраторы** – устройство для расшифровки информации (от французского слова *dechiffre* – *расшифровывать, разбирать*). Дешифраторы применяют в устройствах вывода информации в ЭВМ для преобразо-

вания двоичных эквивалентов в десятичные числа. На рис.18.17.2.а представлена принципиальная электрическая схема дешифратора двоичных чисел в десятичные в виде матрицы с диодными элементами **И**. Входные шины (горизонтальные на рис.18.17.2.а) схемы присоединены к инверсным и прямым выходам триггеров, выходные шины (вертикальные выводы 0÷9) могут подключаться к индикаторам или принтеру для распечатки цифр.

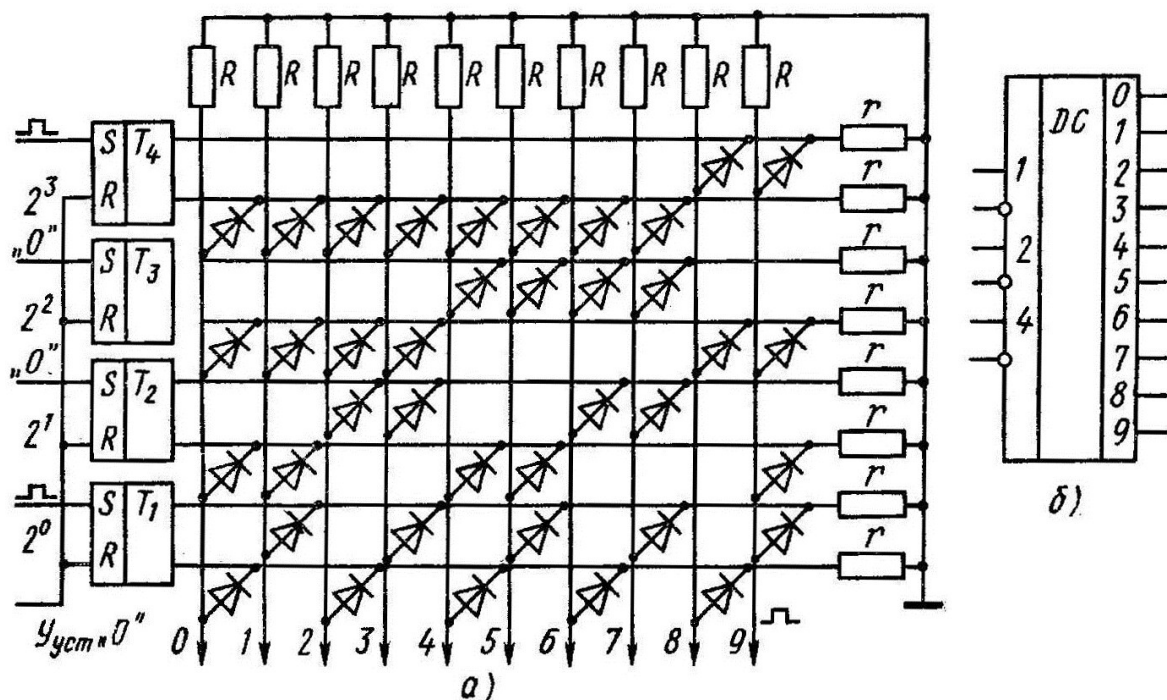


Рис.18.17.2

Условное обозначение дешифратора приведено на рис.18.17.2.б. Здесь прямые и инверсные входы, изображённые слева, принимают двоичные числа, а показанные справа выходы обозначены десятичными цифрами.

## 18.18. Сумматоры

**Сумматором** называется узел арифметического устройства цифровой вычислительной машины или отдельный прибор, осуществляющий арифметическое сложение двоичных чисел. Сложение многоразрядных двоичных чисел производится однотипными действиями, которые осуществляются в каждом разряде с помощью одноразрядного двоичного сумматора. Принципиальная электрическая схема сумматора двоичных чисел приведена на рис.18.18.1. Операция сложения выполняется путём подачи соответствующих разрядов двух чисел  $a_i$  и  $b_i$  на информационные входы  $D$  двух  $D$ -триггеров:  $D_a$  и  $D_b$ . Числа в триггеры записываются подачей тактового импульса  $u_T$  на тактовые входы  $C$  обоих триггеров.

Для анализа операции суммирования предположим, что  $a_1=0$  и  $b_1=0$ . После подачи тактового импульса  $u_T$  эти числа поступают на выходы  $D$ -триггеров. При этом на входы элемента  $И_1$  поступают сигналы  $a_1=0$  и  $\bar{b}_1=0$ , а на выходе элемента  $И_1$  формируется сигнал  $a_1\bar{b}_1=0$ . На входы элемента  $И_2$  поступают сигналы  $\bar{a}_1=0$  и  $b_1=0$ . Это обеспечивает на выходе элемента  $И_2$  сигнал  $\bar{a}_1b_1=0$ . Сигналы  $a_1\bar{b}_1=0$  и  $\bar{a}_1b_1=0$ , поступающие на входы элемента **ИЛИ**, формируют сигнал, соответствующий сумме чисел  $a_1$  и  $b_1$ :  $S = \bar{a}_1b_1 + a_1\bar{b}_1 = 0$ .

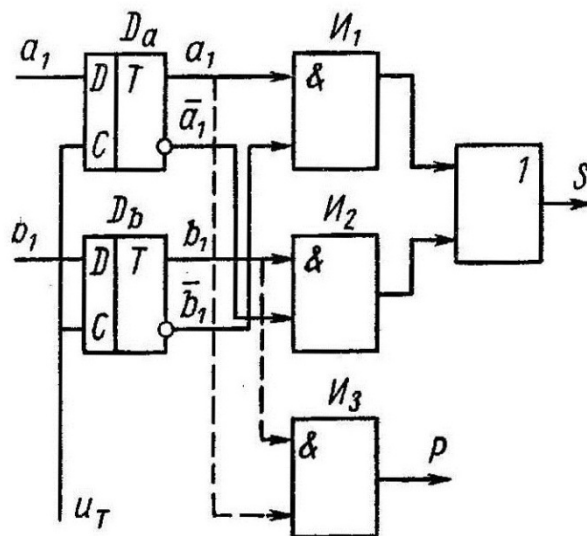


Рис.18.18.1

Например, если  $a_1=1$  и  $b_1=0$ , то на выходе элемента  $И_1$  формируется сигнал  $a_1\bar{b}_1=1$ , а на выходе элемента  $И_2$  вырабатывается сигнал  $\bar{a}_1b_1=0$ . В результате на выходе элемента **ИЛИ** получается сигнал суммы  $S=1$ . Аналогично формируется сигнал суммы в каждом разряде двоичного одноразрядного сумматора и при других сочетаниях входных чисел.

Для сложения многоразрядных двоичных чисел используют многоразрядные сумматоры, которые в зависимости от ввода чисел делятся на две группы: последовательного и параллельного действия. Сумматор *последовательного* действия состоит из одноразрядного сумматора (рис.18.18.1), на входы которого последовательно подаются числа каждого разряда, начиная с младшего. Сумма, формируемая на выходе последовательного сумматора, также представляется в последовательном коде. Суммирование осуществляется при поступлении тактовых импульсов  $u_T$ . При поступлении первого тактового импульса суммируются числа первого разряда, при поступлении второго тактового импульса – числа второго разряда и так далее. Для сумматора последовательного действия характерно малое количество элементов, однако он обладает низким быстродействием.

Сумматор *параллельного* действия является многоразрядным. Его каждый разряд образован одноразрядным сумматором. Каждый одноразрядный сумматор формирует сигнал суммы и сигнал переноса в старший разряд, если сумма, полученная при сложении двух чисел, превышает 1.

Схемы, позволяющие формировать сигнал переноса в старший разряд, называются *полусумматорами*. Полусумматор получают дополнением схемы одноразрядного сумматора (рис.18.18.1) элементом  $И_3$ , на выходе

которого формируется сигнал переноса  $P=a_1b_1$ . Если  $a_1=1$  и  $b_1=1$ , то на выходе элемента  $\mathbf{И}_3$  появляется сигнал переноса  $P=a_1b_1=1$ .

### 18.19. Микропроцессоры

**Микропроцессор** – это полупроводниковый прибор, выполненный в виде одной или нескольких больших интегральных микросхем с программируемой логикой, предназначенный для обработки информации и управления, рассчитанный на совместную работу с устройствами памяти, ввода – вывода информации и другими периферийными устройствами.

Микропроцессор состоит из арифметико-логического устройства (АЛУ), устройства управления (УУ), блока внутренних регистров, аппаратуры и шин, обеспечивающих связь внутренних устройств между собой и с внешней аппаратурой (рис.18.19.1). Арифметико-логическое устройство осуществляет простейшие арифметические и логические операции над числами и адресами, представленными в двоичном виде: сложение, вычитание, сдвиги, логическое умножение **И**, логическое сложение **ИЛИ** и другие операции. Структура арифметико-логического устройства содержит, как правило, сумматор, дешифратор, сдвигающий регистр, регистр для временного хранения операндов (входных элементов данных, над которыми выполняется операция) и другие регистры и элементы. Арифметико-логические устройства различных микропроцессоров отличаются друг от друга лишь деталями структуры и количеством регистров.

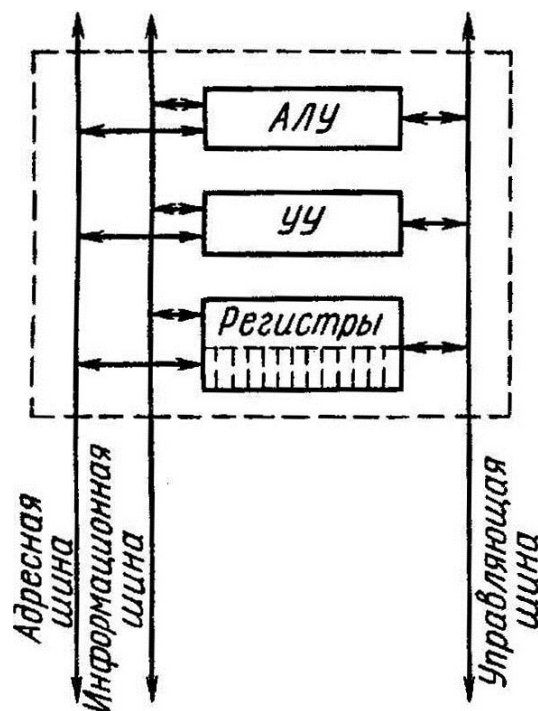


Рис.18.19.1

Блок внутренних регистров образует внутреннюю сверхоперативную память микропроцессора и содержит специальные регистры и регистры общего назначения. Регистры связаны между собой и с другими внутренними регистрами шинами. Регистры общего назначения предназначены для хранения промежуточных результатов, адресов и команд, формируемых в ходе выполнения программы. Их используют также для выполнения функций специальных регистров. К специальным регистрам относятся накопительный регистр, регистр адреса, регистр состояний и другие.

Связь внутренних устройств микропроцессора между собой и с внешней аппаратурой осуществляется с помощью шин. В соответствии с

передаваемыми по шинам сигналами различают информационные, адресные и управляющие шины. Шина представляет собой группу линий связи, число которых соответствует количеству разрядов одновременно передаваемой по шине двоичной информации.

Микропроцессор применяется совместно с запоминающим устройством программы (ЗУП), запоминающим устройством данных (ЗУД) и устройством ввода-вывода (УВВ). Система, состоящая из микропроцессора и перечисленных устройств, называется микропроцессорной системой (рис.18.19.2).

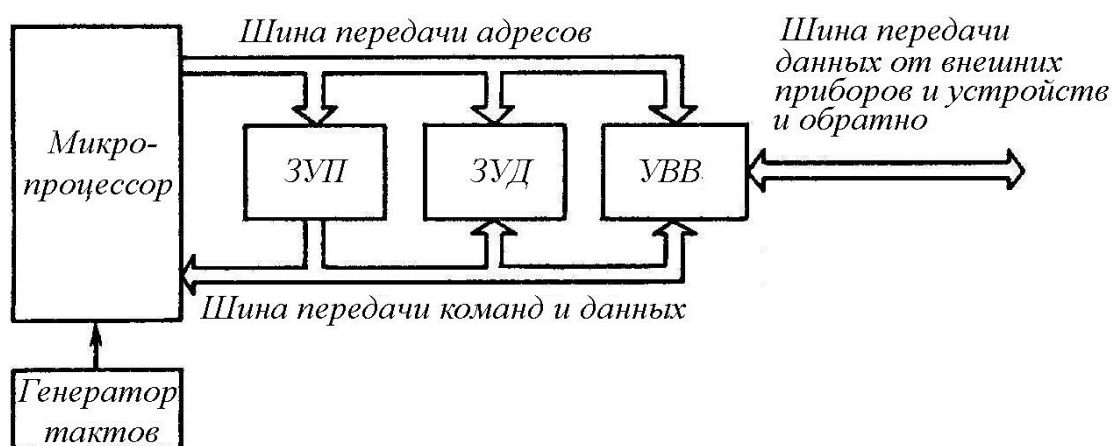


Рис.18.19.2

Запоминающее устройство программы предназначено для хранения команд, составляющих программу работы микропроцессора, и выполняется таким образом, чтобы записанная в нём информация сохранялась при перерывах подачи питающего напряжения. Запоминающее устройство данных используется для хранения данных, предназначенных для обработки микропроцессором. Устройство ввода-вывода информации обеспечивает ввод данных в запоминающее устройство данных и их вывод к внешним приборам и устройствам.

Микропроцессорные системы оперируют информацией в двоичной системе счисления. Каждый разряд двоичного числа называется **битом**. Например, *1110* является 4-битовым двоичным числом, *110* – 3-битовым числом. Крайний слева бит имеет наибольший вес, поэтому его называют *старшим битом* (разрядом). Крайний справа бит имеет наименьший вес и называется *младшим битом* (разрядом). Обозначение битов *16 - разрядного* двоичного числа показано на рис.18.19.3.

Группа битов, которую обрабатывает микропроцессор, составляет *слово*. Количество битов в слове, содержащем информацию о данных, зависит от типа микропроцессора. Длина наиболее распространённых слов составляет 4, 8, 12 и 16 *бит*. Количество битов в слове для передачи данных определяется, в частности, числом разрядов приёмных регистров, вхо-

дящих в сверхоперативную память микропроцессора. В зависимости от длины слова, предназначенного для передачи данных, различают 4, 8, 12 и 16 – битовые микропроцессоры.

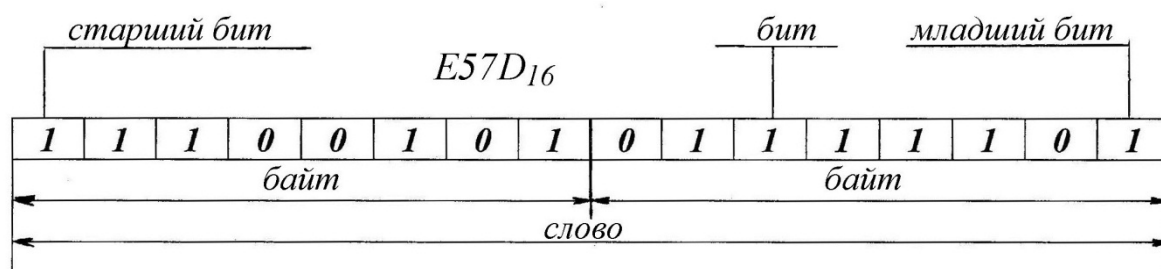


Рис.18.19.3

Длина слова, предназначенного для передачи адресов (то есть для адресации) к запоминающему устройству памяти и запоминающему устройству данных, может превышать длину слова для передачи данных (соответственно может быть больше и число проводников в шине передачи данных). Это позволяет существенно увеличить объём памяти запоминающего устройства памяти и запоминающего устройства данных. Например, при длине адресного слова в 16 бит в шине передачи адресов содержится 16 проводников и может быть опрошено  $2^{16}=65536$  ячеек запоминающего устройства.

Биты, образующие слово, подразделяют на группы. Группа, состоящая из 8 бит, называется **байтом** (рис.18.19.3). Деление слова на байты позволяет упростить представление двоичного слова, применив *шестнадцатиричную форму записи числа*, то есть *шестнадцатиричный код*. Для перевода двоичного кода в шестнадцатиричный используют табл.18.19.1.

Табл.18.19.1

Десятичное число	Двоичный код	Шестна- дцатирич- ный код	Десятичное число	Двоич- ный код	Шестна- дцатирич- ный код
0	0000	0	8	1000	8
1	0001	1	9	1001	9
2	0010	2	10	1010	A
3	0011	3	11	1011	B
4	0100	4	12	1100	C
5	0101	5	13	1101	D
6	0110	6	14	1110	E
7	0111	7	15	1111	F

Например, двоичное число, представленное на рис.18.19.3, в шестнадцатиричном коде имеет вид:  $E57D_{16}$ . Представление двоичного числа в шестнадцатиричном коде позволяет уменьшить вероятность появления ошибок при составлении программы работы микропроцессора, а также упростить технику её трансляции.

Функционирование узлов и блоков микропроцессорной системы (рис.18.19.2) осуществляется с помощью генератора тактовых импульсов. Для выполнения микропроцессором одной команды, хранящейся в запоминающем устройстве памяти, требуется несколько периодов тактовых импульсов. Продолжительность выполнения команды называется **командным циклом**. Он может составлять один или несколько машинных циклов. В машинный цикл входят цикл выборки и исполнительный цикл (рис.18.19.4). Во время цикла выборки микропроцессор определяет адрес команды, находящейся в запоминающем устройстве программы, и считывает эту команду в микропроцессор. За время исполнительного цикла микропроцессор осуществляет выполнение считанной команды.

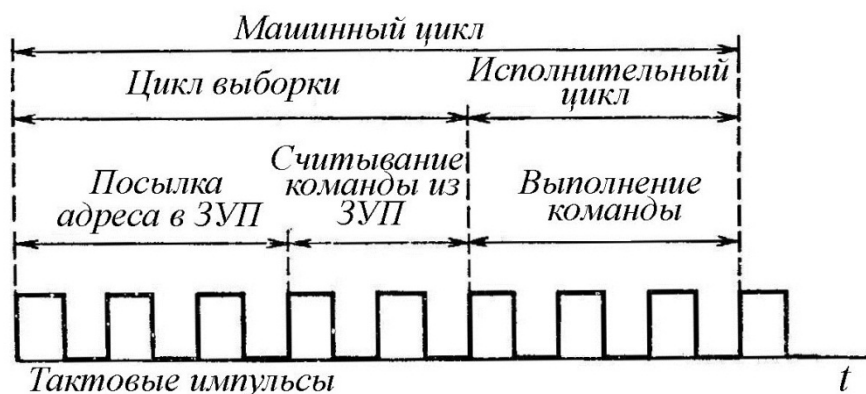


Рис.18.19.4

Микропроцессор представляет собой сложное цифровое устройство, состоящее из большого числа функциональных узлов. Несмотря на многообразие микропроцессоров можно построить функциональную схему, содержащую общие отдельные функциональные узлы микропроцессоров (рис.18.19.5).

**Счётчик команд** содержит адрес команды (1, 2, 3,...), выбираемой микропроцессором из запоминающего устройства программ в текущий момент времени. Он представляет собой суммирующий счётчик, содержание которого увеличивается на единицу к концу выполнения текущей команды. Это обеспечивает выбор адреса следующей команды из запоминающего устройства программ. Микропроцессор может работать с подпрограммами. В этом случае в счётчик команд принудительно записывается число, соответствующее адресу первой команды подпрограммы, а к завершению последней команды в подпрограмме счётчик команд устанавливается на адрес команды основной программы. Количество ячеек (битов), из которых состоит счётчик команд, зависит от типа микропроцессора. Например, при 16-битовом счётчике команд микропроцессор имеет возможность обращаться к запоминающему устройству программ, содержащему  $2^{16}$  команд (адресов).

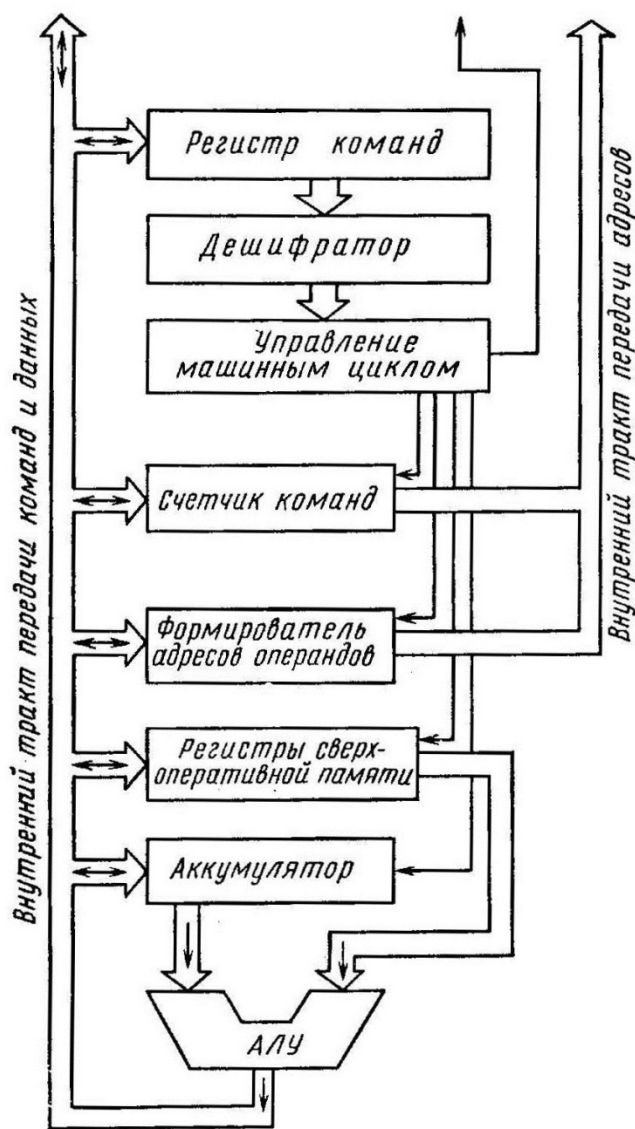


Рис.18.19.5

*Аккумулятор* представляет собой основной регистр, предназначенный для ввода данных в микропроцессор и вывода их из него. В аккумулятор поступает операнд из запоминающего устройства данных перед проведением соответствующей операции в арифметико-логическом устройстве. В аккумулятор вводится результат операции, выполненной в арифметико-логическом устройстве.

*Регистры сверхоперативной памяти* предназначены для временного хранения данных до проведения операций в арифметико-логическом устройстве. Например, если требуется выполнить операцию арифметического сложения двух чисел, то одно число предварительно хранится в аккумуляторе, а второе содержится в одном из регистров сверхоперативной памяти. У большинства микропроцессоров количество регистров сверхоперативной памяти равно шести.

*Регистр команд* предназначен для хранения в микропроцессоре команды, считанной из запоминающего устройства программ, на время её выполнения. Выполнение команды осуществляется цепями управления (управление машинным циклом), которые получают с выхода дешифратора сигналы, необходимые для приведения в действие требуемых узлов микропроцессора.

*Формирователь адресов операндов* состоит из одного или нескольких регистров, в которых составляется адрес данных перед обращением в запоминающее устройство данных.

*Арифметико-логическое устройство* осуществляет операции сложения, вычитания, сравнения, а также операции **И**, **ИЛИ** над двумя числами (операндами) с выдачей результата по одному выходу. Вид операции задаётся командным кодом, содержащимся в регистре команд.

К моменту начала выполнения программы микропроцессор необходимо перевести в исходное состояние. Для этого предусмотрена подача сигнала «Установка нуля», которым все регистры микропроцессора, в том числе и счётчик команд, устанавливаются в исходное нулевое состояние. Регистр адреса команд устанавливается на соответствующий адрес запоминающего устройства программ. Старт-адрес первого слова команды обычно представляется числом «ноль».

Рассмотрим осуществление команды передачи операнда из запоминающего устройства программ в аккумулятор микропроцессора. В запоминающем устройстве программ хранятся коды операций, которые может выполнять микропроцессор, а также адреса операндов запоминающего устройства данных. Команда передачи данных из запоминающего устройства данных в аккумулятор микропроцессора состоит из трёх байтов (рис.18.19.6).

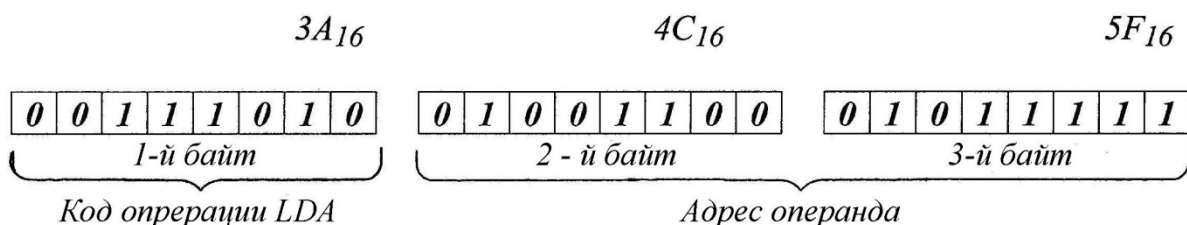


Рис.18.19.6

Первый байт команды характеризует код операции, которую необходимо выполнить (в данном случае  $3A_{16}$  – код команды «Загрузка аккумулятора» микропроцессора, LDA). Вторым и третьим байтами указывается соответственно 16-битовый адрес операнда, хранящийся в запоминающем устройстве программ.

Микропроцессор производит такую последовательность операций при выполнении данной команды.

Хранящийся в запоминающем устройстве программ байт команды с адресом «0» по шине передачи команд посылается в микропроцессор, где он и принимается в регистр команд. Код операции дешифруется. С помощью устройства управления подготавливаются соответствующие цепи для осуществления операции. Счётчик команд устанавливается на адрес «1» запоминающего устройства программ, то есть содержание счётчика увеличивается на единицу.

Второй байт команды, хранящийся под адресом «1» в запоминающем устройстве программ (в данном случае второй байт определяет первую часть кода адреса операнда  $4C_{16}$ ), посылается в блок формирования адреса операнда. Счётчик команд переводится на адрес «2» команды запоминающего устройства программ. Микропроцессор с адресом «2» выбирает третий байт команды из запоминающего устройства программ, в данном случае число  $5F_{16}$ , определяющее вторую часть полного адреса

операнда, и посылает его в блок формирования адреса операнда. Следующий шаг работы микропроцессора связан с выбором операнда из запоминающего устройства данных по адресу  $4C5F_{16}$  и посылкой его через такт передачи данных в аккумулятор микропроцессора.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдберг О.Д. Электромеханика /О.Д. Гольдберг, С.П. Хелемская. – М.: Академия. – 2007. – 504 С.
2. Касаткин А.С. Курс электротехники / А.С. Касаткин, М.В. Немцов. – М.: Высшая школа. – 2009. – 360 С.
3. Прянишников В.А. Теоретические основы электротехники. Курс лекций. / В.А. Прянишников. – С-Пб.: Корона. – 2000. – 364 С.
4. Марченко А.Л. Основы электроники /А.Л. Марченко. – М.: ДМК Пресс. – 2009. – 292 С.
5. Жеребцов И.П. Основы электроники /И.П. Жеребцов. – С-Пб.: Энегроатомиздат. 2010. – 352 С.
6. Зиновьев Г.С. Силовая электроника /Г.С. Зиновьев. – М.: ЮРАЙТ. 2012. – 670 С.
7. Угрюмов Е.П. Цифровая схемотехника /Е.П. Угрюмов. – С-Пб.: БХВ-Петербург. – 2010. – 798 С.
8. Сергеев А.Г. Метрология. Стандартизация. Сертификация/ А.Г. Сергеев, М.В. Латышев, В.В. Терегеря. – М.: Логос. – 2005. – 560 С.
9. Ларионов А.Н. Курс лекций по дисциплине «Электротехника и электроника. Часть III /Ларионов А.Н., Сафонов С.А., Чабала А.П. – Воронеж: ВВАИУ. – 2005. – 102 С.

Учебное издание

Ларионов А.Н., Кураков Ю.И.,  
Воищев В.С., Маликов И.Н.,  
Ларионова Н.Н., Звенигородский И.И., Греков В.С.,  
Пахомов А.В., Ефремов А.И.

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОНИКИ И ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебное пособие

Редактор Е.В. Прохорова

Компьютерная верстка Л.А. Козьменко

Подписано в печать 28.10.2015 г. Формат 60х84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Печать офсетная. Бумага офсетная.

Гарнитура Таймс Бумага кн.-журн. П. л. 27,06

Тираж 101 экз. Заказ № 12862

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Воронежский государственный аграрный университет  
имени императора Петра I»

Типография ФГБОУ ВО Воронежский ГАУ

394087, г. Воронеж, ул. Мичурина, 1

Информационная поддержка: <http://tipograf.vsau.ru>



