

ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

В. И. Каминев

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ



Вариант с онлайн-поддержкой

Юрайт
ПРАВО ОБОЗНАЧЕНИЕ

В. И. Каменев

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

**Книга доступна на образовательной платформе «Юрайт» urait.ru,
а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»**

Москва ■ Юрайт ■

УДК 514
ББК 22.151.3
К18

Автор:

Каменев Владимир Иванович — инженер, руководитель курса начертательной геометрии и технического черчения Всесоюзной промышленной академии Народного комиссариата тяжелой промышленности СССР.

Каменев, В. И.

К18 Аксонометрические проекции : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. И. Каменев. — Москва : Издательство Юрайт. — 237 с. — (Профессиональное образование). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-534-17783-1

Настоящая работа состоит из двух частей: Часть I «Метод аксонометрических построений» и Часть II «Альбом чертежей». В первой части дана теоретическая разработка основ метода аксонометрического проецирования. Во второй части даны таблицы инструктивных чертежей для практического применения метода аксонометрического проецирования с комментариями и пояснениями к ним.

Издание может представлять интерес не только для студентов, но и для научных работников, преподавателей и практикующих специалистов.

УДК 514
ББК 22.151.3

Разыскиваем правообладателей и наследников Каменева В. И.: <https://www.urait.ru/inform>
Пожалуйста, обратитесь в Отдел договорной работы: +7 (495) 744-00-12; e-mail: expert@urait.ru

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-5-534-17783-1

© Оформление. ООО «Издательство Юрайт», 2024

Оглавление

Предисловие от издательства	7
-----------------------------------	---

Часть I

МЕТОД АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

Глава 1. Теоретическое обоснование основных положений аксонометрии	11
Введение	11
1.1. Общие понятия	15
1.2. Показатели искажения	18
1.3. Подразделение аксонометрических проекций	23
1.4. Теорема Польке — Шварца	26
1.5. Теорема Польке	32
1.6. Прямоугольные аксонометрические проекции	36
1.7. Показатели искажения прямоугольной аксонометрической проекции	39
1.8. Способы построения эллипса	47
1.9. Масштабный эллипс	53
1.10. Теорема Вейсбаха	60
1.11. Теорема Гаусса	65
1.12. Прямоугольная триметрическая проекция	71
1.13. Прямоугольная изометрическая проекция	74
1.14. Прямоугольная диметрическая проекция	76
1.15. Косоугольная диметрическая проекция	82

Часть II

АЛЬБОМ ЧЕРТЕЖЕЙ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ С ИХ ОПИСАНИЕМ

Глава 2. Элементы аксонометрической проекции	87
2.1. Элементы прямоугольной аксонометрической проекции	87
Изометрическая прямоугольная проекция куба (таблица 1)	87
Построение изометрических видов плоских многоугольников (таблица 2)	92
Построение изометрического вида для сложного контура (таблица 3)	94

Вычерчивание изометрического изображения призмы (таблица 4)	96
Сечение призмы и пирамиды плоскостью (таблица 5)	98
Переход от ортогонального чертежа к аксонометрическому изображению (таблица 6)	101
Различные способы расположения параллелепипеда (таблица 7)	103
Способ построения комбинированных тел в аксонометрических проекциях (таблицы 8 и 9)	105
Последовательность действий при составлении аксонометрического изображения комбинированного тела (таблица 10)	109
Изображение окружностей в изометрической проекции (таблица 11)	111
Упрощенный способ вычерчивания окружностей в изометрической проекции (таблицы 12 и 12а)	115
Варианты расположения цилиндра по осям X, Y и Z (таблица 13)	120
2.2. Сечение тел вращения плоскостью	122
Сечение цилиндра плоскостью (таблица 14)	122
Сечение конуса плоскостью (таблица 15)	124
Сечение шара плоскостью (таблица 16)	127
Способ построения комбинированных тел в аксонометрических проекциях (таблица 17)	129
Разрезы на комбинированных телах (таблица 18)	131
Переход от ортогонального чертежа детали к ее аксонометрическому изображению (таблица 19)	133
2.3. Пересечение многогранников. Линии перехода. Винтовая линия	135
Пересечение призмы с призмой (таблица 20)	135
Пересечение призмы с пирамидой (таблица 21)	137
Пересечение пирамиды с пирамидой (таблица 22)	140
Пересечение призмы и пирамиды с цилиндром (таблица 23)	143
Пересечение конуса с призмой и пирамидой (таблица 24)	146
Пересечение цилиндров (таблица 25)	149
Пересечение цилиндра с конусом (таблица 26)	151
Пересечение конуса с конусом (таблица 27)	153
Пересечение шара с цилиндром и конусом (таблица 28)	155
Пересечение призмы с шаром и шара с шаром (таблица 29)	157
Линии перехода. Примеры из области машиностроительного черчения (таблица 30)	160
Изображение винтовой нарезки и пружин в аксонометрии (таблица 31)	164
Построение аксонометрического изображения комбинированного тела по его чертежу (таблица 32)	166
2.4. Элементы диметрической прямоугольной проекции	168
Основные элементы диметрической проекции (таблица 33)	168

Упрощенные способы вычерчивания окружностей в диметрической проекции (таблица 34)	172
Изображение окружности в диметрической прямоугольной проекции (таблица 35)	175
Составление диметрического изображения комбинированного тела по чертежу (таблица 36)	177
2.5. Элементы косоугольной (фронтальной) диметрической проекции	179
Косоугольная (фронтальная) диметрическая проекция (таблица 37)	179
Упрощенный способ изображения окружностей в косоугольной диметрии (таблица 38)	182
Составление косоугольного диметрического изображения по чертежу (таблица 39)	185
2.6. Сравнение аксонометрических проекций между собой	185
Сравнение аксонометрических изображений куба (таблица 40)	185
Сравнение прямоугольной и косоугольной аксонометрических проекций (таблицы 41, 42)	188
Глава 3. Образцы чертежей машиностроительных деталей и сборок	191
Глава 4. Техническое рисование	226
Технические рисунки деталей машин и машиностроительных сборок (таблицы 65—72)	226
Новые издания по дисциплине «Инженерная графика» и смежным дисциплинам	236

Предисловие от издательства

Настоящее пособие содержит теоретическую разработку основ метода аксонометрического проецирования и применение его к построению наглядных изображений объектов машиностроительной специальности.

В первой части настоящего пособия дано полное теоретическое обоснование всех основных положений аксонометрии. Во второй части помещен инструктивный материал для практического применения метода аксонометрических проекций при выполнении учащимися аксонометрических чертежей и аксонометрических эскизов (техническое рисование).

Аксонометрическими проекциями пользуются при выполнении беглых зарисовок разного рода деталей механизмов и сооружений. Как известно, такие наброски или зарисовки приходится делать в очень многих случаях инженерной практики. К аксонометрическим наброскам прибегают, например, во время проектировочной или изобретательской работы при обдумывании отдельных сложных частей проектируемого сооружения или механизма.

В таких случаях аксонометрические проекции помогают наиболее целесообразно спроектировать форму каждой вычерчиваемой детали.

Кроме того, к аксонометрическим зарисовкам прибегают при необходимости наиболее наглядно пояснить форму сложной детали лицам, не в достаточно полной степени владеющим методом ортогональных проекций и не имеющим возможности представить себе контуры детали или механизма по ортогональному чертежу. В этом смысле аксонометрические проекции, и в частности аксонометрические эскизы, широко используются не только в машиностроении, но и в строительном, а также и в монтажно-трубопроводном и электропроводном деле.

Данное пособие вышло еще в первой половине XX в., но основные его положения остаются актуальными и сегодня. В настоящее время большинство чертежей выполняется с использованием компьютера. Однако для наиболее полного понимания и усвоения аксонометрического метода необходимо уметь выполнять чертежи и «вручную». При этом следует не только уметь выполнять чертежи с использованием циркуля и линейки (как выполнено большинство чертежей, помещенных в альбоме), но и усвоить навыки свободно-

го скицирования от руки, т. е. научиться делать беглые зарисовки от руки.

Наконец, необходимо также отметить, что навыки, приобретаемые в упражнениях по составлению аксонометрических эскизных зарисовок, способствуют развитию у учащихся способности мыслить пространственно. В условиях высшей школы последнее обстоятельство является чрезвычайно важным фактором, значительно облегчающим усвоение ряда специальных дисциплин, как, например, теоретической и прикладной механики, курса строительной механики, деталей машин и ряда других.

Текст книги печатается по 4-му, дополненному изданию, вышедшему в 1946 г. (с исправлением опечаток, поправкой структуры книги и некоторым «осовремениванием» понятий), однако компоновка материала для удобства восприятия сделана по предыдущим изданиям. Все схемы даны в том виде, в каком они были изданы в то время, за исключением исправления некоторых мелких ошибок.

При проработке настоящего пособия следует иметь в виду, что чертежи, помещенные в первой части, названы рисунками, а чертежи, помещенные во второй части, в отличие от них, — таблицами. Отдельные изображения на таблицах названы фигурами.

2019 год

Часть I МЕТОД АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ



Глава 1

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ АКСОНОМЕТРИИ

Введение

Вопрос о точных графических построениях имеет большую историческую давность (работы Евклида, Архимеда и др.)¹. Однако углубленное научное обоснование эти методы начали получать после работ французского философа и математика Рене Декарта, жившего в XVII в. (1596—1650). Декартом была предложена система осей координат на плоскости и в пространстве, позволившая математикам и техникам решать на бумаге задачи метрического характера. Эта система осей координат была положена Декартом в основу разработанной им математической науки — *аналитической геометрии*.

С исчерпывающей полнотой и строгой научной обоснованностью теория точных метрических построений была разработана математиком Гаспаром Монжем², который в 1795 г. опубликовал результаты своей двадцатилетней работы под названием «Начертательная геометрия».

Этим трудом Монж показал, что основные задачи курса аналитической геометрии, требующие подчас очень сложных математических вычислений, могут быть решены путем сравнительно несложных графических построений.

Монжем был предложен особый прием, названный им *методом проекций*. Пользуясь методом проекций, можно составлять чертежи самых сложных предметов и сооружений и по изготовленным чертежам осуществлять в натуре все то, что на этих чертежах представлено графическим способом.

Изучающим настоящее пособие уже должно быть известно из курса начертательной геометрии, что в настоящее время все рабочие чертежи, по которым изготавливаются разного рода станки, двигатели, а также возводятся инженерно-строительные сооружения, обычно составляются по методу *ортогональных* (прямоугольных) *проекций*.

¹ III в. до н. э.

² Виднейший французский геометр, преподаватель Мезьерской высшей школы.

При этом каждая проекция ортогонального чертежа передает точно только вид какой-нибудь одной из сторон вычерченного предмета или сооружения, например одна из проекций дает понятие о виде начерченного предмета спереди, другая — о его боковом виде и третья — о виде этого предмета сверху.

Наружный вид какого-нибудь станка, двигателя или иного сложного по форме машиностроительного объекта, положим автомобиля, может быть достаточно точно передан по меньшей мере тремя, четырьмя ортогональными проекциями.

Так, для выявления наружного вида автомобиля необходимо начертить: 1) его вид сбоку (главный вид), 2) вид спереди, 3) вид сверху, а иногда, может быть, виды сзади и снизу.

Ни одна из перечисленных проекций, взятая самостоятельно, т. е. отдельно от других, не в состоянии передать хотя бы мало-мальски точно общий вид начерченного автомобиля.

На проекции главного вида будут отсутствовать детали, характеризующие внутреннее устройство кузова, например число мест, на которое данный автомобиль рассчитан. На виде спереди, взятом обособленно от других проекций, целый ряд подробностей также будет скрыт.

На виде сверху будут отсутствовать все размеры, характеризующие высоту его отдельных частей, мотора, кузова, подножек. Однако каждая из ортогональных проекций исчерпывающе ясно передает форму начерченной стороны предмета.

Таким образом *ортогональные проекции, отличаясь большой точностью в передаче форм отдельных видов предмета, не дают достаточно наглядного изображения общего вида этого предмета.*

Всем известно, что прочитать какой-нибудь сложный машиностроительный или инженерно-строительный чертеж могут только лица, хорошо технически подготовленные и умеющие разбираться в графических изображениях, т. е. по преимуществу лица, достаточно полно изучившие курс технического черчения и начертательной геометрии.

Отсутствие наглядности ортогонального чертежа побудило изыскать другие способы, дающие возможность более выпукло и наглядно изобразить вычерчиваемый предмет. Английскому ученому Виллиаму Фэричу¹ удалось (в 1820 г.) детально разработать и теоретически обосновать способ изображения предметов на бумаге, отличающийся большой степенью наглядности. Этот метод Фэрич назвал *методом изометрической перспективы*. Однако еще в 1619 г. астроном Кеплер приводит изометрическое изображение куба в виде правильного шестиугольника, вписанного в окруж-

¹ Профессор физики Кембриджского университета.

ность (см. табл. 1, фиг. 4), а в 1775 г. Карстен аналитически изложил теорию проецирования пространственных координатных осей на случайную плоскость и рассмотрел вопрос о показателях искажения. Большой заслугой Фэрича является широкая популяризация им идей метода аксонометрического проецирования и внедрение этого метода в инженерную практику.

Разработанный Фэричем прием положил основание рассматриваемому в настоящем пособии *методу аксонометрических проекций*.

Полное теоретическое обоснование метод аксонометрических проекций получил лишь во второй половине XIX и начале XX в. в связи с работами ряда виднейших ученых в области проективной геометрии (работы геометров Польке, Штейнера, Шварца и других).

Далее будет показано, что аксонометрическое изображение предмета представляет собой параллельную проекцию предмета на картинной плоскости. Однако изображаемый предмет для аксонометрического проецирования располагают в пространстве таким образом, чтобы на картинной плоскости получилось его отображение, подобное фотографическому снимку, по которому наш глаз обычно получает о предмете достаточно наглядное представление. Наглядность аксонометрического изображения получается за счет того, что проецируемый предмет поворачивают в пространстве и наклоняют в сторону зрителя настолько, чтобы на картинной плоскости получилось изображение сразу нескольких его сторон, а не одной только, как это имеет место в методе Монжа¹. Таким образом, изображение по методу Монжа состоит из нескольких отдельных видов проекций, по которым приходится судить о форме начерченного предмета, а аксонометрическое изображение в отличие от этого дает возможность на одной проекции получить отображение сразу нескольких видов предмета, например вида спереди, вида слева и вида сверху. Следовательно, аксонометрические проекции от проекций ортогональных отличаются большей наглядностью в передаче форм предмета. Понять чертеж, составленный в аксонометрии, может любое лицо совершенно без всякой технической подготовки.

Преимущество аксонометрической проекции по сравнению с ортогональной легко может быть установлено из рассмотрения нескольких примеров, приведенных в альбоме.

Например на фиг. 1 табл. 1 дан аксонометрический вид куба, а на фиг. 2 тот же куб начерчен в трех ортогональных проекциях, т. е. даны его вид спереди — грань, отмеченная двумя точками, вид

¹ Об этом подробно см. в параграфе 1.1.

сбоку — грань, отмеченная пятью точками, и вид сверху — грань, отмеченная тремя точками.

На фиг. 2 все эти три вида согласно правилам метода ортогональных проекций начерчены обособленно. Установить в данном случае зависимость одной проекции от другой могут только лица, технически подготовленные.

В отличие от этого в аксонометрии (см. фиг. 1) мы сразу на одном изображении охватываем взглядом начерченный предмет с трех его сторон. Видны передняя сторона предмета, отмеченная двумя точками, его боковая сторона, отмеченная пятью точками, и его верхняя грань, обозначенная тремя точками.

Таким образом, основное отличие аксонометрической проекции от ортогональной заключается в том, что в аксонометрическом изображении деталь приобретает рельефность форм, тогда как в ортогональном изображении деталь представляется безжизненно плоской.

Однако наряду с большим преимуществом аксонометрического изображения в отношении его наглядности этому изображению присущи некоторые весьма существенные недостатки.

Главный из этих недостатков заключается в *искажении форм детали*, начерченной в аксонометрии. Этот недостаток аксонометрического изображения легко усмотреть на фиг. 1 табл. 1¹.

Внимательно рассматривая куб, начерченный на фиг. 1, замечаем, что каждая из его трех граней, являющаяся фактически квадратом, в аксонометрии спроецировалась в виде ромба, т. е. все три грани получились представленными с искажением углов.

При этом некоторые из прямых углов квадратных граней куба превратились в тупые углы (см. углы около точки B_0), а некоторые углы превратились из прямых в острые (см. углы при точке A_0). Однако это искажение углов привычно для нашего глаза, и куб в аксонометрии получается вполне наглядным.

Еще более выпукло наглядность аксонометрических проекций по сравнению с ортогональными может быть установлена на более сложных примерах. Возьмем для сравнения табл. 6 — фиг. 1 и 2, фиг. 3 и 4, фиг. 5 и 6, фиг. 7 и 8. На фиг. 1, 3, 5 и 7 начерчены по способу ортогональных проекций деревянные бруски с врубками; на фиг. 2, 4, 6 и 8 эти же бруски представлены в аксонометрии. Форма врубок на фиг. 2, 4, 6 и 8 выясняется с большой наглядностью, несмотря на некоторые искажения углов.

Вторым существенным недостатком аксонометрических проекций является *значительная трудность их вычерчивания*, в особенности для деталей сложных форм (см. табл. 18, 19 и др.).

¹ Здесь и далее ссылки на фигуру таблицы подразумевают соответствующий чертеж во второй части пособия. — Прим. ред.

Чтобы правильно составить аксонометрический чертеж, необходимо помимо четкого усвоения основ метода аксонометрии иметь хорошо развитое пространственное представление и в некоторой мере нужно уметь рисовать.

Вследствие этих трудностей целесообразно изучение аксонометрических проекций проводить в конце курса технического черчения, т. е. после того, как учащийся уже хорошо освоится с графическими изображениями и получит навыки в умении работать с чертежными инструментами.

Применяются аксонометрические изображения по преимуществу для иллюстрации сложных предметов, форму которых желательно передать с наибольшей ясностью. Большей частью аксонометрическими видами поясняются ортогональные чертежи сложных деталей и сборок.

Преимущества аксонометрических проекций широко используются в архитектурно-строительных чертежах. Каждый проект того или иного архитектурного сооружения, представляемый, например, на конкурс, должен быть иллюстрирован аксонометрией общего вида сооружения (см. табл. 60).

При помощи аксонометрических проекций обычно вычерчиваются монтажные схемы трубопроводных сетей (см. табл. 59), а также схемы электропроводки. В ортогональных проекциях эти схемы совершенно не наглядны и не удобны для использования.

1.1. Общие понятия

Аксонометрическая проекция какого-нибудь предмета получается подобно ортогональной проекции посредством проецирования этого предмета параллельным пучком лучей на некоторую плоскость проекций, выбранную соответствующим образом.

При ортогональном проецировании направление проецирующего луча всегда выбирается параллельно одной из осей координат X , Y или Z и за счет этого на каждой плоскости проекций H , V или W получаем отображение только двух координатных осей, а третья ось, параллельно которой ведется проецирование, сливается в точку. Например, если взять в пространстве куб (рис. 1, а), расположенный в трехгранном координатном углу, образованном тремя взаимно перпендикулярными плоскостями H , V , W , то при проецировании этого куба по способу ортогональных проекций на некоторую плоскость V_1 (рис. 1, б) получим изображение двух координатных осей X и Z и грани куба, отмеченной двумя точками. Ось Y , параллельно которой ведется проецирование, на рис. 1, б слилась в точку O , грани, отмеченные пятью и тремя точками, проецируются в виде отрезков $a_x — a'$ и $a' — a_z$.

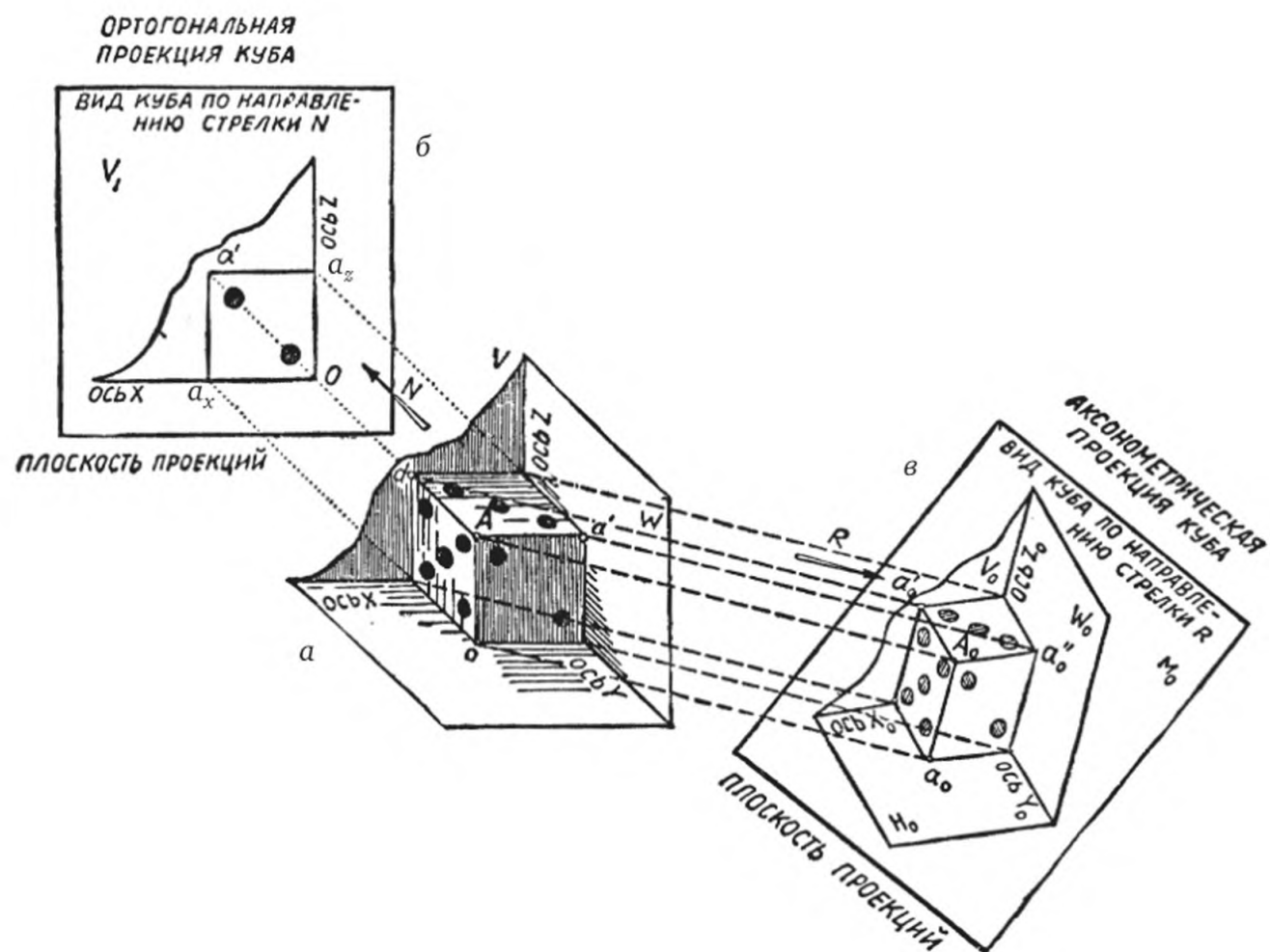


Рис. 1

Такой способ проецирования, как известно, дает возможность получить точное, неискаженное отображение граней проецируемого предмета, расположенных в плоскостях, параллельных выбранной плоскости проекций. В данном случае на рис. 1, б получили точную, неискаженную проекцию грани, отмеченной двумя точками. В отличие от этого для получения аксонометрической проекции данного куба необходимо выбрать направление проецирования, не совпадающее с направлением координатных осей X , Y и Z . В этом случае (рис. 1, в) на некоторой плоскости проекции M_0 получим изображение всех трех координатных осей X_0 , Y_0 и Z_0 , а следовательно, на плоскости M_0 изобразятся три грани проецируемого куба. Последнее обстоятельство придает аксонометрическому изображению (см. рис. 1, в) бóльшую выразительность по сравнению с изображением ортогональным (см. рис. 1, б). Однако нетрудно видеть, что на рис. 1, в все три грани куба, представляющие собой квадраты, проецируются на плоскости M_0 в виде параллелограммов или ромбов, т. е. в аксонометрии форма элементов предмета претерпевает искажения.

Если направление проецирующих лучей, отмеченное на рис. 1, в стрелкой R , встречает плоскость M_0 под прямым углом, то на этой плоскости получаем *прямоугольную аксонометрическую проекцию* данного предмета. Если же проецирующие лучи встретят плоскость M_0 не под прямым углом, то на плоскости M_0 получается изображение, носящее название *косоугольной аксонометрической проекции* начерченного тела.

Таким образом, *аксонометрические проекции, прямоугольные и косоугольные, получают посредством проецирования заданного объекта параллельным пучком лучей на некоторую плоскость аксонометрических проекций*. За счет этого для аксонометрии сохраняют силу основные положения, свойственные параллельному способу проецирования на плоскость, а именно:

- 1) аксонометрическая проекция отрезка прямой линии представляет собой также отрезок прямой линии;
- 2) аксонометрические проекции параллельных отрезков параллельны между собой;
- 3) аксонометрические проекции частей отрезка AB , разделенного точкой E в пропорциональном отношении $m : n$, также относятся между собой, как $m : n$, т. е.

$$\frac{AE}{EB} = \frac{ae}{eb} = \frac{m}{n};$$

- 4) аксонометрической проекцией окружности в самом общем случае является эллипс. В частных случаях окружность может спроецироваться на аксонометрической плоскости проекций M_0 в виде

отрезка прямой линии, и также возможен случай, когда окружность спроецируется на плоскости M_0 в виде окружности такого же диаметра, как и заданная.

1.2. Показатели искажения

Обозначим на рис. 1, а верхний угол куба через A и рассмотрим на рис. 2 получение аксонометрической проекции этой точки A обособленно (без проецирования самого куба). Тогда можно будет считать, что на рис. 2 показано проецирование точки пространства A на некоторую плоскость аксонометрических проекций M_0 . Получающаяся в результате такого проецирования на плоскости M_0 точка A_0 носит название *аксонометрической проекции точки A* . Точка a_0 на рис. 1, в и 2, б представляет собой аксонометрическую проекцию на плоскости M_0 горизонтальной проекции a точки A . За счет этого в аксонометрии точка a_0 носит название *вторичной проекции точки A* .

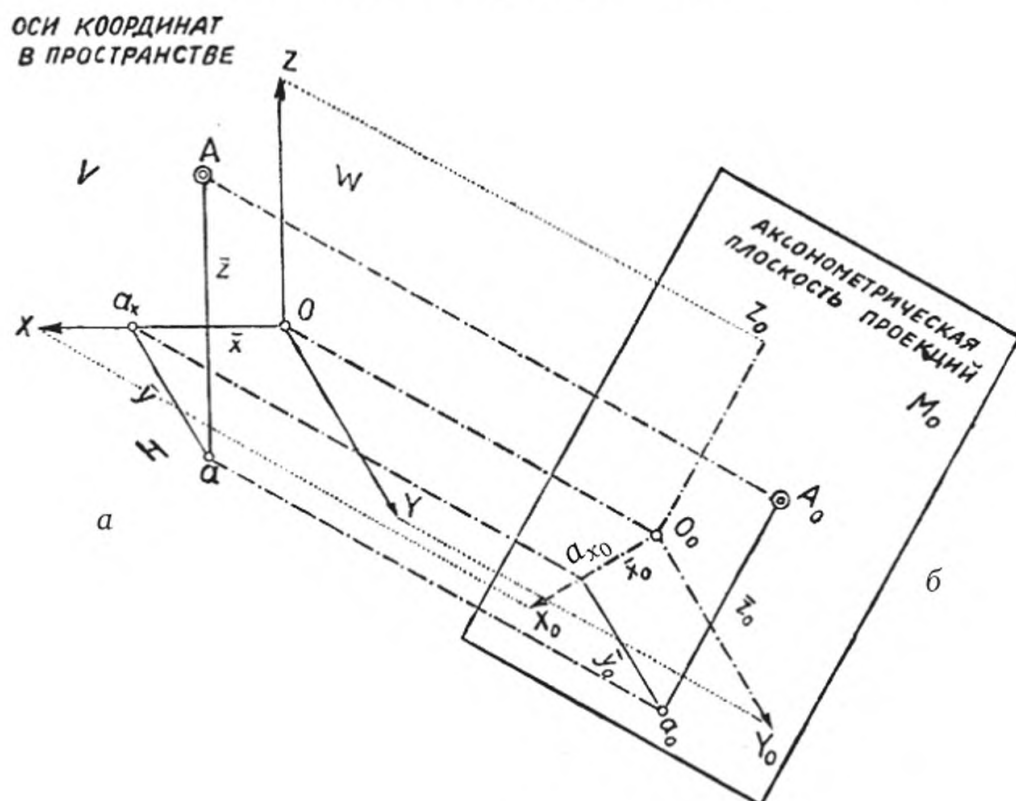


Рис. 2

У точки A вторичных проекций три. В дальнейшем вторичные проекции будем называть подобно ортогональным, но с припиской значка 0 внизу. У точки A будут вторичные проекции a_0 , a'_0 и a''_0 (см. рис. 1, в и рис. 3). Точка a_0 является аксонометрической проекцией горизонтальной проекции a , точка a'_0 есть аксонометрическая проекция первой вертикальной проекции a' , точка a''_0 представляет

собой аксонометрическую проекцию второй вертикальной проекции a'' , принадлежащей плоскости W .

Известно, что в методе ортогонального проецирования одна проекция не определяет положения точки в пространстве. Необходимо иметь не меньше двух проекций, чтобы положение точки A в пространстве было точно зафиксировано.

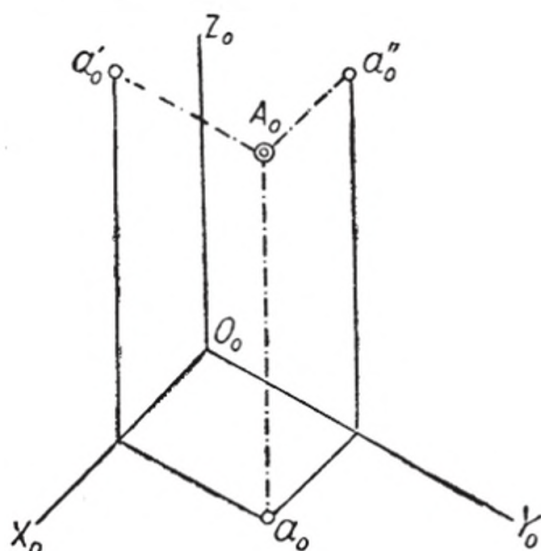


Рис. 3

Подобно этому и в аксонометрическом проецировании одна аксонометрическая проекция A_0 не определяет положения точки A в пространстве. Необходимы дополнительные данные. Рассматривая рис. 2, б, нетрудно видеть, что такими дополнительными данными, координирующими положение точки A в пространстве, могут быть, во-первых, аксонометрические проекции X_0 , Y_0 , Z_0 координатных осей X , Y , Z , к которым отнесена точка A , и, во-вторых, положение одной из вторичных проекций точки A , например положение точки a_0 .

Учтем также, что положение точки A_0 на плоскости может быть определено, если помимо осей X_0 , Y_0 и Z_0 на этой плоскости будут заданы две вторичные проекции точки A , например a_0 и a'_0 (рис. 4), так как в этом случае точка A_0 окажется расположенной на пересечении лучей, проведенных из точки a_0 параллельно оси Z_0 и из точки a'_0 параллельно оси Y_0 .

Поэтому, вместо того чтобы задавать на рис. 2, б положение аксонометрической проекции A_0 и одной из ее вторичных, например a_0 , можно задать для точки A две ее вторичные проекции, например a_0 и a'_0 . В том и другом случаях положение точки A в пространстве будет точно зафиксировано, если, конечно, будут при этом еще известны аксонометрические проекции X_0 , Y_0 и Z_0 координатных осей X , Y , Z (см. рис. 2, б и рис. 4).

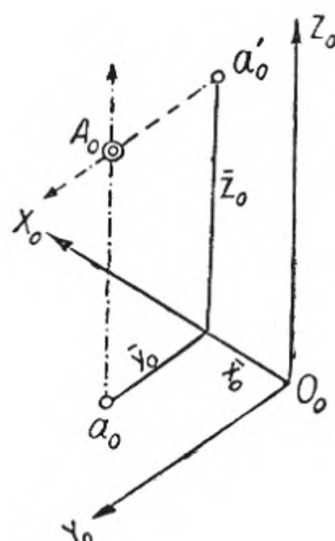


Рис. 4

Таким образом, при аксонометрическом способе проецирования положение точки A в пространстве определяется: а) либо аксонометрической проекцией A_0 и одной из ее вторичных (например a_0); б) либо двумя вторичными проекциями (например, a_0 и a'_0) при известном направлении аксонометрических осей X_0 , Y_0 и Z_0 в обоих случаях.

В предыдущем параграфе было отмечено, что плоскость M_0 для аксонометрического проецирования не должна быть перпендикулярной ни к одной из координатных осей X , Y и Z . За счет этого любой отрезок, расположенный в пространстве параллельно той или иной оси, спроецируется на плоскость M_0 с некоторым искажением его величины, а следовательно, и каждое звено координатной ломаной линии $O - a_x - a - A$ (см. рис. 2, а) спроецируется на плоскость M_0 также с искажением его размера. Аксонометрической проекцией координатного отрезка $\bar{x} = Oa_x$ будет отрезок $\bar{x}_0 = O_0a_{x_0}$.

Аксонометрической проекцией отрезка $\bar{y} = a_x a$ является отрезок $\bar{y}_0 = a_{x_0} a_0$, и аксонометрическая проекция координатного отрезка $\bar{z} = aA$ есть отрезок $\bar{z}_0 = a_0 A_0$.

Отрезок \bar{x}_0 представляет собой аксонометрическую проекцию абсциссы \bar{x} точки A , отрезок \bar{y}_0 — аксонометрическая проекция ординаты \bar{y} точки A и, наконец, \bar{z}_0 представляет собой аксонометрическую проекцию аппликаты \bar{z} проецируемой точки A . Обозначим отношение аксонометрической проекции \bar{x}_0 абсциссы точки A к ее истинной величине \bar{x} через p_x , отношение аксонометрической проекции \bar{y}_0 ординаты точки A к ее натуральной длине \bar{y} — через p_y и отношение аксонометрической проекции \bar{z}_0 к аппликате \bar{z} точки A — через p_z . Тогда для обозначений, сделанных на рис. 2, а, б, получим

$$p_x = \frac{O_0 a_{x_0}}{O a_x} = \frac{\bar{x}_0}{\bar{x}}; \quad p_y = \frac{a_{x_0} a_0}{a_x a} = \frac{\bar{y}_0}{\bar{y}}; \quad p_z = \frac{a_0 A_0}{a A} = \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}}. \quad (1)$$

Как видим, коэффициенты p_x , p_y и p_z представляют собой отвлеченные числа и показывают, в каком отношении изменяются координаты x , y и z точки A при проецировании их на плоскость M_0 .

В аксонометрии этим коэффициентам p_x , p_y и p_z присвоено название показателей искажения.

Зная величины показателей искажения p_x , p_y и p_z , можно определить аксонометрические масштабные единицы e_x , e_y и e_z , которые будут представлять собой какую-либо натуральную меру длины e (например, $e = 10$ мм), умноженную на соответствующий показатель искажения p_x , p_y или p_z .

Следовательно, учитывая сказанное, можно написать:

$$e_x = e \cdot p_x; e_y = e \cdot p_y; e_z = e \cdot p_z.$$

Для $e = 10$ мм будем иметь:

$$e_x = 10p_x; e_y = 10p_y; e_z = 10p_z.$$

Если же в качестве меры длины взять $e_z = 1$, то в этом случае показатели искажения окажутся равными аксонометрическим масштабным единицам:

$$e_x = p_x; e_y = p_y; e_z = p_z.$$

Пользуясь масштабными единицами e_x , e_y и e_z , можно строить на аксонометрических осях X_0 , Y_0 и Z_0 точки, заданные в пространстве координатами \bar{x} , \bar{y} и \bar{z} . В этом случае величины e_x , e_y и e_z будут служить масштабными мерами длины для откладывания размеров \bar{x} , \bar{y} и \bar{z} на осях X_0 , Y_0 и Z_0 .

На рис. 5 показаны аксонометрические оси X_0 , Y_0 и Z_0 и на них от точки O_0 отложены масштабные единицы e_x , e_y и e_z .

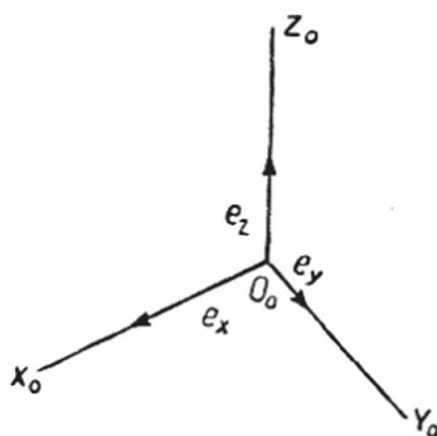


Рис. 5

Пользуясь этими единицами, можно построить аксонометрическую проекцию какой-либо точки A пространства, если будут даны ее пространственные координаты \bar{x} , \bar{y} и \bar{z} .

Допустим, требуется построить аксонометрическую проекцию A_0 точки A , имеющей координаты $\bar{x} = 20$ мм, $\bar{y} = 40$ мм и $\bar{z} = 35$ мм.

Если мерой длины в пространстве для всех трех осей X , Y и Z будем считать 1 см, т. е. выберем $e = 10$ мм, то вдоль аксонометрических осей X_0 , Y_0 и Z_0 нужно будет отложить размеры:

$$\bar{x}_0 = \frac{20}{10} \cdot e_x = 2e_x,$$

или, иначе говоря, две масштабные единицы, равные e_x ;

$$\bar{y}_0 = \frac{40}{10} \cdot e_y = 4e_y,$$

или, иначе говоря, четыре масштабные единицы, равные e_y ;

$$\bar{z}_0 = \frac{35}{10} \cdot e_z = 3,5e_z,$$

или, иначе говоря, три с половиной масштабные единицы, равные e_z .

Поставленная задача разрешена графически на рис. 6, где аксонометрическая проекция A_0 точки пространства A определена посредством построения координатной ломаной линии $O_0 - a_{x_0} - a_0 - A_0$. При этом для нахождения точки a_{x_0} вдоль оси X_0 отложены две аксонометрические масштабные единицы e_x . Затем из точки a_{x_0} проведена линия $a_{x_0} - a_0$ параллельно оси Y_0 и на ней отложены четыре масштабные единицы e_y , и, наконец, последнее звено $a_0 - A_0$ координатной линии $\bar{x}_0 - \bar{y}_0 - \bar{z}_0$ проведено параллельно оси Z_0 и вдоль него отложены три с половиной единицы e_z .

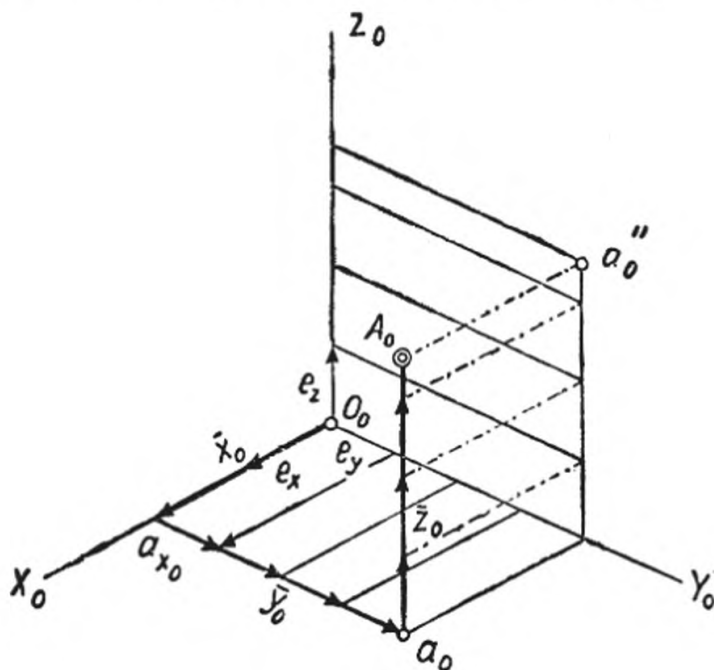


Рис. 6

1.3. Подразделение аксонометрических проекций

В разобранный выше случае (см. рис. 2) за счет разного наклона осей X , Y и Z к плоскости аксонометрического проецирования M_0 для осей X_0 , Y_0 и Z_0 были получены три разных показателя искажения P_x , P_y и P_z , связанных между собой следующей зависимостью:

$$P_x \neq P_y \neq P_z. \quad (2)$$

Аксонометрическим осям X , Y и Z , имеющим разные показатели искажения, а следовательно, и разные масштабные единицы e_x , e_y и e_z , присвоено название *триметрических осей*.

Если две оси, например X и Z , наклонены к плоскости аксонометрического проецирования под одинаковыми углами, а третья ось, например ось Y , — под иным углом, написанная выше зависимость принимает следующий вид:

$$P_x = P_y \neq P_z. \quad (3)$$

Аксонометрические оси X_0 , Y_0 и Z_0 , отвечающие этой зависимости, носят название *диметрических осей*.

Наконец, можно выбрать плоскость аксонометрического проецирования M_0 , к которой все три оси пространства X , Y и Z будут наклонены под одинаковыми углами.

В таком случае на плоскости аксонометрического проецирования M_0 получим *изометрические оси* X_0 , Y_0 и Z_0 , показатели искажения для которых будут связаны следующим соотношением:

$$P_x = P_y = P_z. \quad (4)$$

Слово «изометрический» в переводе с греческого означает «одинаковомерный». Слово «диметрический» следует перевести как «двухмерный» (в смысле одинаковых показателей искажения по двум осям). Наконец, «триметрическая проекция» есть проекция «трехмерная», с разными показателями искажения по всем трем осям.

Слово «аксонометрия» означает измерение по осям. Если проецирующие лучи R (см. рис. 1, в) встречаются аксонометрическую плоскость проекций M_0 под прямым углом, то на этой плоскости получаем *изометрическую, диметрическую или триметрическую прямоугольную проекцию*. Если проецирование ведется на плоскость M_0 под произвольным углом (не равным 90°), то на плоскости аксонометрического проецирования M_0 получаем *изометрическую, диметрическую или триметрическую косоугольную проекцию*.

Решим несколько задач.

Задача 1. Даны триметрические оси X_0 , Y_0 и Z_0 и масштабные единицы e_x , e_y и e_z (рис. 7). Требуется построить аксонометрическую проекцию A_0 точки пространства A , если известно положение ее вторичной проекции a_0 , а координата $\bar{z} = 6$ ед.

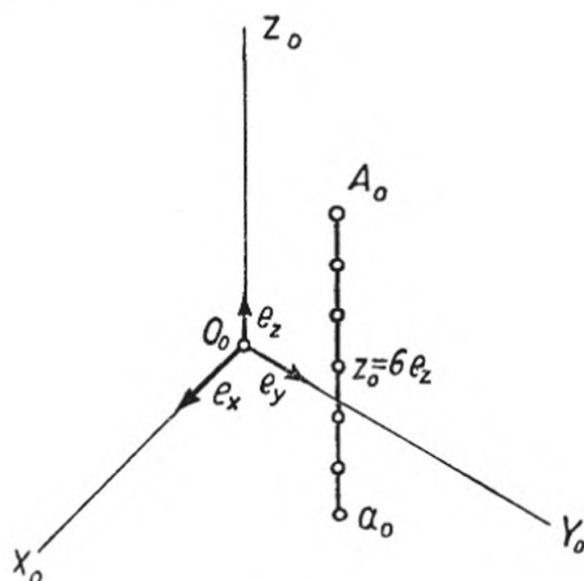


Рис. 7

Решение. Из точки a_0 проводим линию параллельно оси Z_0 и откладываем по этой линии вверх от точки a_0 координату \bar{z} , равную шести масштабным аксонометрическим единицам e_z . В результате намечаем искомую аксонометрическую проекцию A_0 точки пространства A .

Задача 2. Даны триметрические оси X_0 , Y_0 и Z_0 (рис. 8). Требуется построить аксонометрическую проекцию A_0 точки пространства A , если известно положение ее двух вторичных проекций a_0 и a_0'' .

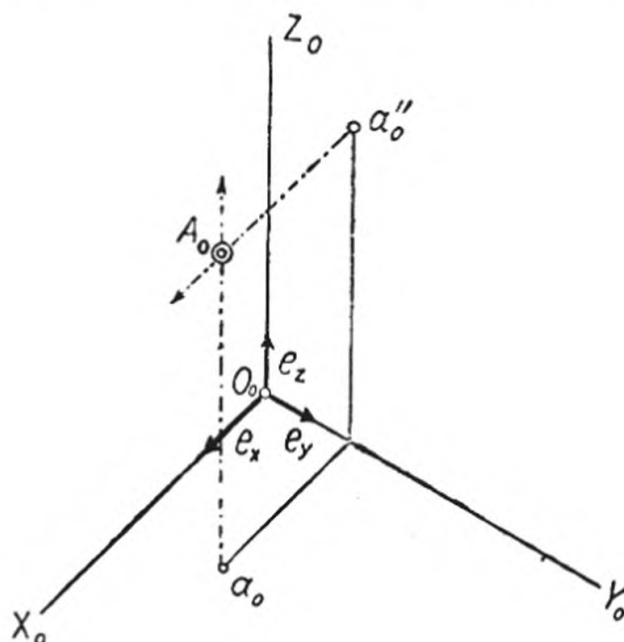


Рис. 8

Решение. Из точки a_0 проводим линию параллельно оси Z_0 , а из точки a''_0 — параллельно оси X_0 . На пересечении этих двух линий определяем искомую проекцию A_0 .

Если требуется по рис. 8 определить координаты точки A , то должны быть заданы масштабные единицы e_x, e_y, e_z или показатели искажения p_x, p_y и p_z .

Задача 3. Даны аксонометрические оси X_0, Y_0 и Z_0 и вторичная проекция a_0b_0 (рис. 9) некоторого отрезка AB , который по условиям задачи должен быть расположен параллельно плоскости H с удалением от нее на расстояние $\bar{z} = 6$ ед.

Требуется построить аксонометрическую проекцию A_0B_0 этого отрезка и найти его следы.

Решение. Из точек a_0 и b_0 (см. рис. 9) проводим линии параллельно оси Z_0 . На этих линиях откладываем шесть раз единицу e_z и получаем искомую аксонометрическую проекцию A_0B_0 отрезка AB .

Из начертательной геометрии известно, что следами отрезка прямой называются точки, в которых этот отрезок или его продолжение встречаются плоскости проекций.

Для решения задачи продолжаем вторичную проекцию a_0b_0 отрезка AB до встречи ее с осями X_0 и Y_0 в точках a_{x_0} и b_{y_0} . В точке a_{x_0} вторичная проекция a_0b_0 встречает ось X_0 , и следовательно, точка a_{x_0} есть вторичная проекция следа v , аксонометрическая проекция v_0 которого будет найдена на пересечении отрезка A_0B_0 с линией, проведенной через точку a_{x_0} параллельно оси Z_0 .

Таким же способом находим аксонометрическую проекцию другого следа.

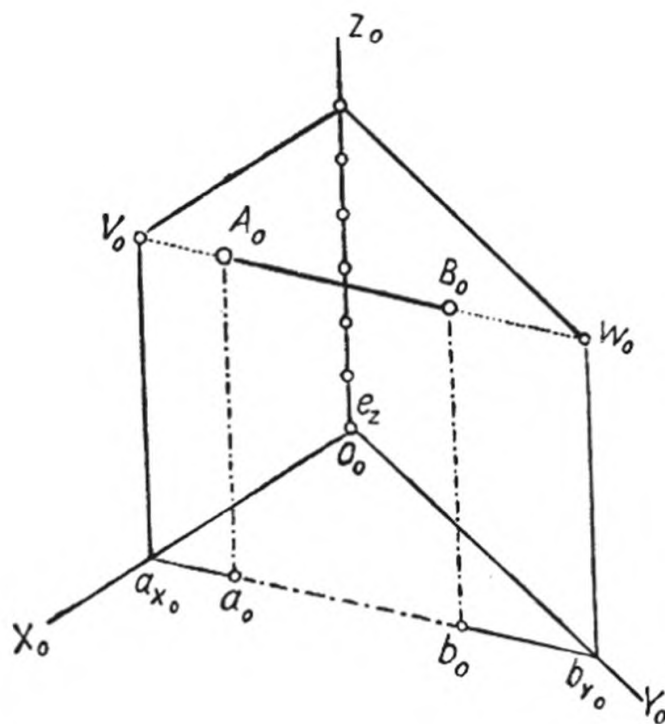


Рис. 9

1.4. Теорема Польке — Шварца

Если пространственный координатный угол, образованный плоскостями H , V и W , пересечь некоторой наклонной плоскостью M_0 , то эта плоскость не будет перпендикулярной ни к одной из осей X , Y или Z , поэтому такая плоскость M_0 , как известно, может быть принята за плоскость аксонометрического проецирования (рис. 10). Пересекаясь с осями координат X , Y и Z и с плоскостями проекций H , V и W , плоскость M_0 выделяет треугольник $A_0B_0C_0$, носящий название *треугольника следов*.

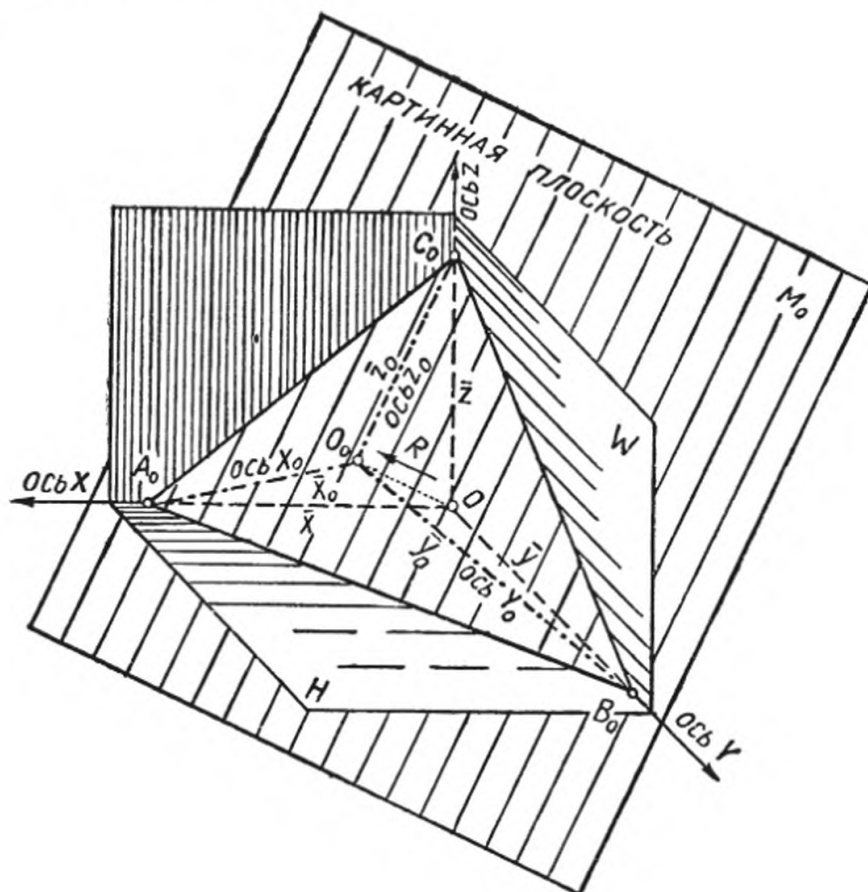


Рис. 10

Проецируя параллельным пучком лучей оси координат X , Y и Z на плоскость M_0 , в зависимости от направления проецирующего луча R получим проекцию O_0 начала координат O либо внутри треугольника следов (рис. 10 и 11), либо вне его (рис. 12 и 13).

В обоих случаях аксонометрические оси X_0 , Y_0 и Z_0 , исходя из точки O_0 , будут направлены к вершинам треугольника следов A_0 , B_0 и C_0 . Ниже будет доказано, что в случае прямоугольного проецирования на плоскости M_0 всегда получаем точку O_0 внутри треугольника следов. В случае же косоугольного проецирования начало аксонометрических осей координат может оказаться как внутри треугольника, так и вне его (см. рис. 10 и 12).

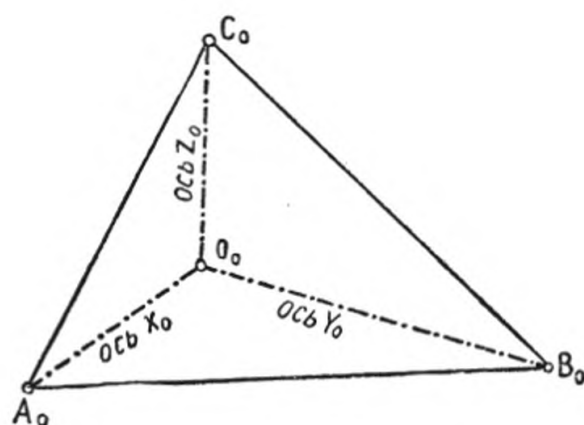


Рис. 11

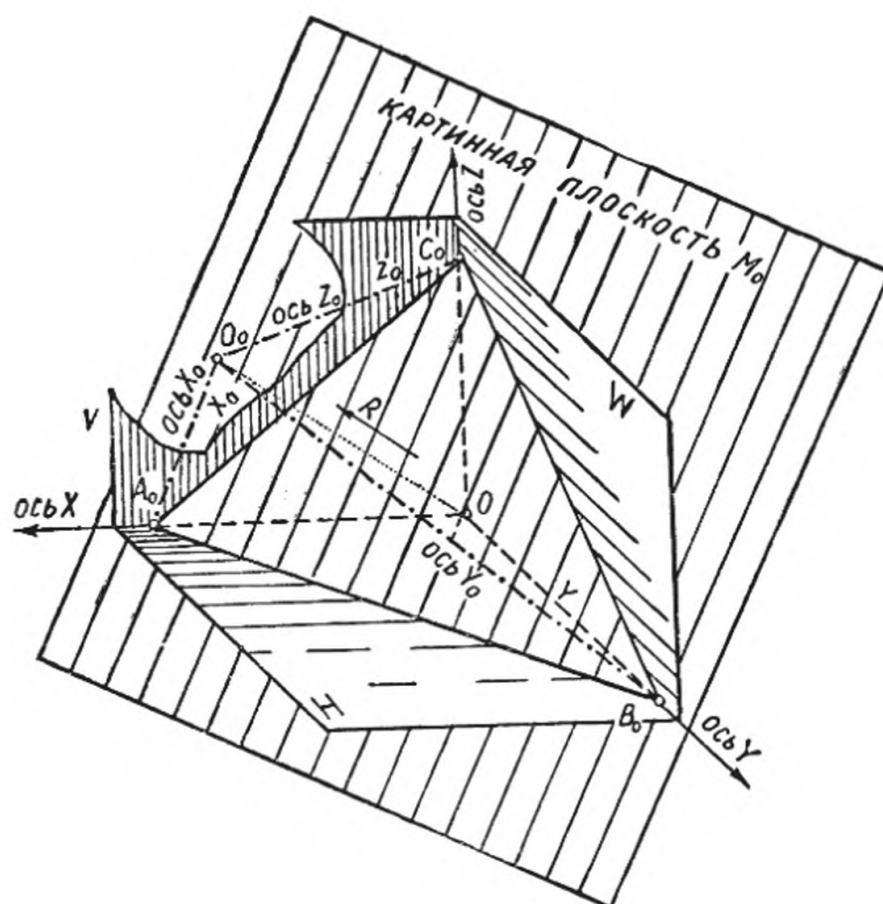


Рис. 12

Если в самом общем случае примем последнюю схему, то треугольник следов вместе с осями X_0 , Y_0 и Z_0 на плоскости M_0 спроецируется в виде замкнутого четырехугольника $O_0C_0B_0A_0$ с диагоналями O_0B_0 и A_0C_0 (см. рис. 12 и 13).

На рис. 11 и 13 отрезки аксонометрических осей X_0 , Y_0 и Z_0 между точкой O_0 и вершинами треугольника следов представляют собой как бы три луча разной длины, исходящие из одной точки O_0 , являющейся началом аксонометрических осей.

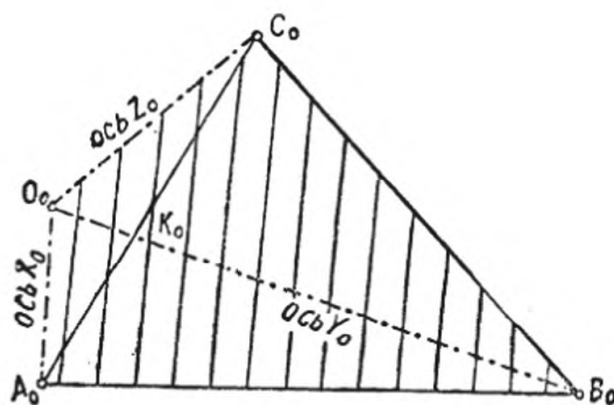


Рис. 13

Геометр К. Польке во второй половине XIX в. доказал теорему, явившуюся основой научного обоснования курса аксонометрических проекций. Эта теорема, известная под названием «Основного предложения аксонометрии», может быть сформулирована так.

Теорема Польке. Три отрезка любой величины (\bar{x}_0 , \bar{y}_0 и \bar{z}_0), исходящие из одной точки O_0 и не сливающиеся в одну прямую линию (см. рис. 10), на некоторой плоскости (M_0) могут быть приняты за параллельные проекции трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков пространства (\bar{x} , \bar{y} и \bar{z}).

Таким образом, Польке доказал, что всегда можно найти такое положение трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков, исходящих из одной точки O в пространстве, например отрезков осей координат \bar{x} , \bar{y} и \bar{z} , и такое направление проецирования, которые будут давать на некоторой плоскости M_0 произвольно выбранную систему аксонометрических осей с отложенными на них отрезками \bar{x}_0 , \bar{y}_0 и \bar{z}_0 , величина которых была выбрана произвольно.

В дальнейшем геометру А. Шварцу удалось в шестидесятых годах XIX в. обобщить теорему Польке. Шварц на основании положений проективной геометрии доказал, что теорема Польке является лишь следствием более общей теоремы, гласящей следующее.

Теорема Польке — Шварца. Любой полный четырехугольник с диагоналями на плоскости может быть принят за параллельную проекцию некоторого тетраэдра, подобного любому данному тетраэдру.

Учтем, что три отрезка \bar{x} , \bar{y} и \bar{z} , исходящие из одной точки O в пространстве, могут быть приняты за ребра тетраэдра, о котором и идет речь в теореме Шварца. Учтем также, что четырехугольник $A_0O_0C_0B_0$ (см. рис. 13) представляет собой проекцию тетраэдра $O_0A_0B_0C_0$ на плоскости треугольника следов $A_0B_0C_0$ (см. рис. 12). Для доказательства теоремы Польке — Шварца возьмем в пространстве тетраэдр $OABC$ (рис. 14, а), образованный тремя произвольной величины и произвольного направления отрезками OA , OB и OC , ис-

ходящими из общей точки O и составляющими между собой в пространстве любые углы.

Шварц доказал, что можно выбрать такое направление параллельного проецирования R , при котором на некоторой плоскости M_0 получим проекцию данного случайного тетраэдра $OABC$ в виде полного четырехугольника $O'_0A'_0B'_0C'_0$ (рис. 14, в), подобного любому заданному плоскому четырехугольнику $O_0A_0B_0C_0$ (рис. 14, г).

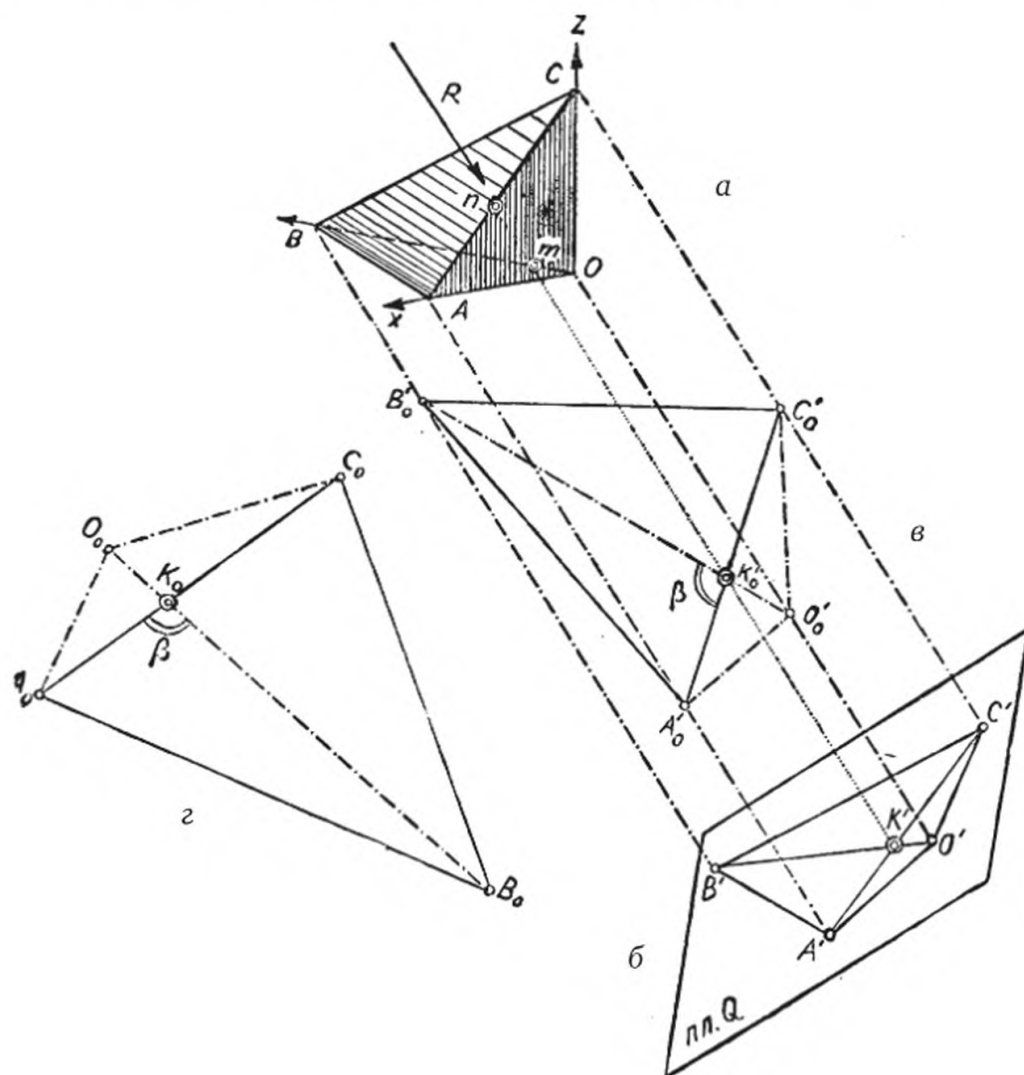


Рис. 14

Если это положение будет доказано, то можно направление трех случайных отрезков O_0A_0 , O_0C_0 и O_0B_0 на рис. 14, г принять за аксонометрические оси X_0 , Y_0 и Z_0 , а величину этих отрезков считать пропорциональной соответствующим масштабным единицам e_x , e_y и e_z .

Доказательство. Точку пересечения диагоналей A_0C_0 и O_0B_0 выбранного совершенно случайно плоского четырехугольника $O_0A_0B_0C_0$ (см. рис. 14, г) обозначим через K_0 . На ребрах тетраэдра AC и OB (см. рис. 14, а) наметим две точки p и m так, чтобы эти точ-

ки делили ребра AC и OB в том же пропорциональном отношении, в каком точка K_0 на рис. 14, z делит диагонали A_0C_0 и O_0B_0 четырехугольника $O_0A_0B_0C_0$.

Тогда для ребра AC напишем:

$$\frac{An}{nC} = \frac{A_0K_0}{K_0C_0} \quad (5)$$

и для ребра OB :

$$\frac{Om}{mB} = \frac{O_0K_0}{K_0B_0}. \quad (6)$$

Соединим теперь точку n с точкой m и направление линии nm примем за направление параллельного проецирования заданного тетраэдра. На рис. 14, a это направление зафиксировано стрелкой R . Тогда проецирующие лучи, касаясь ребер тетраэдра AB , AO , OC и CB , образуют в пространстве четырехгранную проецирующую призму.

Рассекаем эту четырехгранную проецирующую призму плоскостью Q (рис. 14, b), перпендикулярной к ее ребрам, т. е. плоскостью Q , перпендикулярной к направлению проецирования R , и строим на плоскости Q проекцию тетраэдра $ABCO$. За счет проецирования по направлению стрелки R на плоскости Q (см. рис. 14, b) точки n и m сольются в общую точку K' , а вершины тетраэдра $ABCO$ дадут проекции A' , B' , C' и O' .

В результате на плоскости Q получаем замкнутый четырехугольник, диагонали которого будут разделены точкой K' на части, пропорциональные частям деления точками n и m ребер тетраэдра AC и OB . Это получается за счет того, что при параллельном проецировании, как известно (см. параграф 1.1), пропорциональность частей отрезка в пространстве и проекций этих частей на плоскости проекций всегда сохраняется. После сказанного можно написать следующие соотношения:

$$\frac{An}{nC} = \frac{A'K'}{K'C'} \quad \text{и} \quad \frac{Om}{mB} = \frac{O'K'}{K'B'}.$$

Учитывая написанные выше соотношения (см. уравнения (5) и (6)), можно установить, что:

$$\frac{A_0K_0}{K_0C_0} = \frac{A'K'}{K'C'} \quad (7)$$

и

$$\frac{O_0K_0}{K_0B_0} = \frac{O'K'}{K'B'}. \quad (8)$$

Таким образом, заключаем, что точка K' (см. рис. 14, б) делит диагонали $A'C'$ и $O'B'$ четырехугольника $O'A'B'C'$ в таком же отношении, в каком точка K_0 делила диагонали A_0C_0 и O_0B_0 четырехугольника $O_0A_0B_0C_0$ (рис. 14, з).

В специальной главе о свойствах родственных фигур в курсе начертательной геометрии доказывается, что два плоских четырехугольника $O'A'B'C'$ и $O_0A_0B_0C_0$, у которых диагонали делятся в одинаковом пропорциональном отношении, «родственны» между собой.

Там же доказывается теорема, что какой-нибудь плоский четырехугольник $O'A'B'C'$ (см. рис. 14, б), родственный некоторому четырехугольнику $O_0A_0B_0C_0$ (см. рис. 14, з), можно рассматривать как ортогональную проекцию некоторого другого четырехугольника, подобного данному четырехугольнику $O_0A_0B_0C_0$.

Из сказанного заключаем, что можно подобрать такую плоскость M_0 , которая даст в сечении с нашей четырехгранной проецирующей призмой некоторый четырехугольник $O'_0A'_0B'_0C'_0$ (см. рис. 14, в), не только родственный четырехугольнику $O_0A_0B_0C_0$, но и подобный ему. Получив в результате параллельного проецирования случайного тетраэдра $OABC$ на некоторой плоскости M_0 четырехугольник $O'_0A'_0B'_0C'_0$ и затем увеличивая или уменьшая размеры этого четырехугольника $O'_0A'_0B'_0C'_0$ с сохранением подобия, можно получить на плоскости M_0 четырехугольник $O''_0A''_0B''_0C''_0$, не только подобный, но и в точности равный произвольно взятому четырехугольнику $O_0A_0B_0C_0$.

Таким образом, доказано, что произвольно взятый плоский четырехугольник $O_0A_0B_0C_0$ (см. рис. 14, з) или, что то же самое, взятые совершенно случайно три отрезка O_0A_0 (отрезок аксонометрической оси X_0), O_0B_0 (отрезок оси Y_0) и O_0C_0 (отрезок оси Z_0), исходящие из общей точки O_0 и направленные как угодно, оказались параллельными проекциями также совершенно случайного тетраэдра $ABCO$ (см. рис. 14, а), образованного тремя случайными отрезками некоторой пространственной системы координат $X(OA)$, $Y(OB)$ и $Z(OC)$.

Следствием из теоремы Польке — Шварца является теорема Польке, на основании которой *три случайных отрезка O_0A_0 , O_0B_0 и O_0C_0 , исходящие из одной точки O_0 на плоскости, могут являться параллельной проекцией трех равных отрезков, отложенных на трех ребрах прямого трехгранного координатного угла в пространстве*. Доказанная Шварцем теорема дала обобщенное теоретическое обоснование методу аксонометрических проекций, разработанному Фэричем за 40 лет до этого.

Здесь нелишним будет отметить, что профессором Московского университета Н. А. Глаголевым дано в 1924 г. дальнейшее обобщение теоремы Польке — Шварца. Глаголев показал, что сама теорема Польке — Шварца, касающаяся вопроса о проецировании тетраэ-

дра, является лишь предельным случаем весьма общего предложения о любых двух аффинных пространственных формах.

Н. А. Глаголев для некоторых случаев установил те условия, которым должны удовлетворять различные проекции вершин соответствующего многогранника, и показал, что если даны аффинные поверхности, то каждую из них можно привести в параллельно-перспективное положение с поверхностью, подобной другой.

Применив эту теорему к тетраэдрам и заметив, что два тетраэдра всегда аффинны, получаем следующее предложение: всякий тетраэдр можно привести в параллельно-перспективное положение с тетраэдром, подобным любому данному. Н. А. Глаголев показал, что теорема Польке — Шварца является предельным случаем только что указанного свойства тетраэдров.

1.5. Теорема Польке

Выше было отмечено, что основная теорема аксонометрии, гласящая, что *три произвольно выбранных отрезка на плоскости, выходящие из одной точки, могут быть приняты за параллельные проекции трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков, выходящих из некоторой точки пространства*, была впервые предложена геометром Польке. Доказательство своей теоремы Польке обосновал, базируясь на фокальных свойствах поверхностей второго порядка. Вывод теоремы Польке оказался очень сложным и недоступным для основной массы лиц, изучающих курс аксонометрии. Профессор Московского университета А. К. Власов предложил очень простое доказательство теоремы Польке, которое и приводится ниже. Это доказательство заимствовано из журнала «Математический сборник» (1925 г.), в котором была помещена статья профессора А. К. Власова под заголовком «Новое доказательство теоремы Pohlke».

Доказательство теоремы Польке. Пусть oa , ob , oc — три произвольных отрезка в плоскости чертежа, выходящие из одной точки o , и OA , OB , OC — три равных и взаимно перпендикулярных отрезка пространства, выходящие из точки O (рис. 15). Треугольник ABC — равносторонний. Покажем, что можно подобрать такое направление проецирующих лучей и такую плоскость α , что проекцией треугольной пирамиды $OABC$ будет фигура $O'A'B'C'$ на плоскости α , подобная фигуре $oabc$. Уменьшив или увеличив соответственным образом отрезки OA , OB , OC , не нарушая их равенства, можно получить в проекции этой измененной пирамиды фигуру, равную данной фигуре $oabc$, и таким образом теорема Польке будет доказана. Итак, доказательство рассматриваемой теоремы можно разбить на две части:

- а) определение направления проецирующих лучей;
- б) определение положения плоскости проекций α относительно проецирующих лучей.

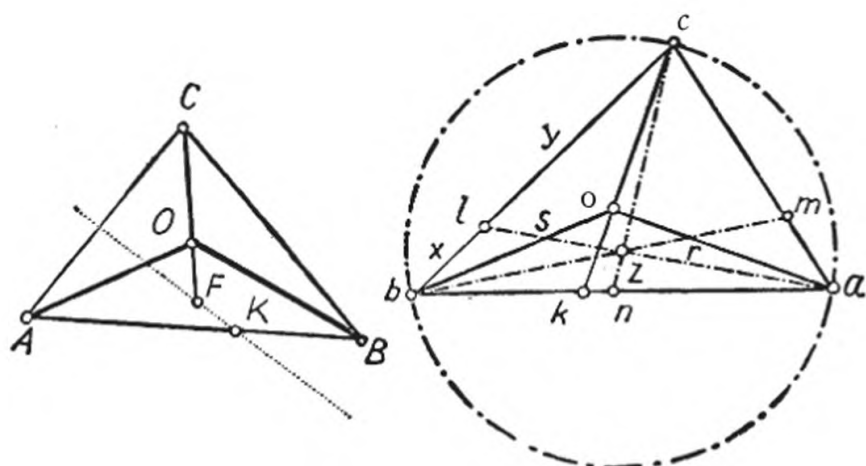


Рис. 15

а) Определение направления проецирующих лучей

Продолжим один из данных отрезков os до пересечения со стороной ab в точке k , которая, как принадлежащая двум прямым ab и so , должна быть проекцией двух различных точек K и F пространства, лежащих на соответствующих прямых AB и CO . Эти две точки можно найти, так как по свойству параллельной проекции должны иметь место пропорции

$$\frac{AK}{KB} = \frac{ak}{kb} \quad \text{и} \quad \frac{CF}{OF} = \frac{ck}{ok}.$$

Найдя точки K и F , тем самым определим направление проецирующих лучей по отношению к пирамиде $OABC$; прямая KF является одним из проецирующих лучей, дающим в проекции одну точку. Проецируя лучами этого направления пирамиду $OABC$ на какую-нибудь плоскость, получим в проекции некоторый $\Delta A_1 B_1 C_1$ с точкой O_1 , причем прямая $C_1 O_1$ пересечет сторону $A_1 B_1$ в точке K_1 , удовлетворяющей пропорциям:

$$\frac{A_1 K_1}{K_1 B_1} = \frac{AK}{KB} \quad \text{и} \quad \frac{C_1 K_1}{O_1 K_1} = \frac{CF}{OF}. \quad (9)$$

Тем же соотношениям удовлетворяет и данный Δabc с точкой o . Но при произвольном положении плоскости проекций $\Delta A_1 B_1 C_1$, вообще говоря, еще не будет подобным Δabc .

б) Определение положения плоскости проекций а относительно проецирующих лучей

Выберем теперь плоскость проекций так, чтобы в проекции получился $\Delta A'B'C' \sim \Delta abc$. Опишем около треугольника abc окружность,

и пусть z есть центр этой окружности. Линии $a - z$, $b - z$, $c - z$ пересекут стороны Δabc соответственно в точках l , m , n . На сторонах ΔABC найдутся соответственные точки L , M , N :

$$\frac{BL}{LC} = \frac{bl}{lc}; \quad \frac{CM}{MA} = \frac{cm}{ma}; \quad \frac{AN}{NB} = \frac{an}{nb}, \quad (10)$$

следовательно, в плоскости ΔABC найдется соответствующая точка Z . Можно описать около ΔABC эллипс с центром в точке Z . Точка Z занимает такое положение, что эта задача вполне возможна.

Проецирующие лучи уже определенного направления, проходящие через точки этого эллипса, образуют *эллиптический цилиндр*. Этот цилиндр можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится окружность. Центр этой окружности Z' лежит на оси цилиндра, проходящей через точку Z . Плоскость этого кругового сечения и будет искомой плоскостью α . В самом деле, пусть $\Delta A'B'C'$ — проекция ΔABC на этой плоскости α .

$\Delta A'B'C'$ вписан в окружность с центром в точке Z' , полученную в пересечении эллиптического цилиндра плоскостью α , и пусть точки L' , M' , N' будут проекциями точек L , M , N . По свойству параллельной проекции

$$\frac{BL}{LC} = \frac{B'L'}{L'C'} \quad \text{и} \quad \frac{AZ}{ZL} = \frac{A'Z'}{Z'L'}; \quad (11)$$

$A'Z'$ — радиус окружности, описанной около $\Delta A'B'C'$. Из этих пропорций следует, что

$$\Delta zbl \sim \Delta Z'B'L'.$$

Действительно, пусть

$$BL = X; LC = Y; bl = x; lc = y; B'L' = X'; L'C' = Y';$$

и

$$AZ = R; A'Z' = R'; az = r; ZL = S; Z'L' = S'; zl = s.$$

Предшествующие пропорции (11) принимают вид

$$\frac{X}{Y} = \frac{X'}{Y'}; \quad \frac{R}{S} = \frac{R'}{S'}. \quad (12)$$

Из равенства (10) следует:

$$\frac{X}{Y} = \frac{x}{y}; \quad \frac{R}{S} = \frac{r}{s}. \quad (13)$$

Следовательно, из уравнений (12) и (13)

$$\frac{x}{y} = \frac{X'}{Y'}; \quad \frac{r}{s} = \frac{R'}{S'}. \quad (14)$$

Кроме того,

$$bz = az = r.$$

Следовательно,

$$\frac{bz}{zl} = \frac{B'Z'}{Z'L'}, \quad \text{или} \quad \frac{bz}{B'Z'} = \frac{zl}{Z'L'}. \quad (15)$$

Хорды bc и $B'C'$ окружностей, описанных соответственно около Δabc и $\Delta A'B'C'$, проходят через точки l и L , отстоящие от соответствующих центров на расстояния s и S' . Следовательно,

$$x \cdot y = r^2 - s^2 \quad \text{и} \quad X' \cdot Y' = R'^2 - S'^2. \quad (16)$$

Из уравнений (13) и (16) имеем:

$$x^2 = (r^2 - s^2) \frac{X}{Y}; \quad X'^2 = (R'^2 - S'^2) \frac{X}{Y},$$

или

$$\frac{x^2}{r^2} = \left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right) \frac{X}{Y}; \quad \frac{X'^2}{R'^2} = \left(1 - \frac{S'^2}{R'^2}\right) \frac{X}{Y}. \quad (17)$$

Но по уравнению (14)

$$\frac{s}{r} = \frac{S'}{R'}.$$

Следовательно, из уравнений (17) получаем:

$$\frac{x^2}{r^2} = \frac{X'^2}{R'^2}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{r} = \frac{X'}{R'}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{X'} = \frac{r}{R'}.$$

Но

$$x = bl; \quad X' = B'L'; \quad r = bz \quad \text{и} \quad R' = B'Z',$$

следовательно,

$$\frac{bl}{B'L'} = \frac{bz}{B'Z'}. \quad (18)$$

Из уравнений (15) и (18) имеем:

$$\frac{bz}{B'Z'} = \frac{zl}{Z'L'} = \frac{bl}{B'L'}, \quad (19)$$

т. е. стороны $\Delta bz l$ и $\Delta B'Z'L'$ пропорциональны, и стало быть эти *треугольники подобны*.

Так же можно доказать, что и

$$\Delta cz l \sim \Delta C'Z'L'; \Delta az m \sim \Delta A'Z'M';$$

$$\Delta cz m \sim \Delta C'Z'M'; \Delta az n \sim \Delta A'Z'N';$$

$$\Delta bzn \sim \Delta B'Z'N'.$$

Из подобия этих треугольников следует и *подобие треугольников abc и $A'B'C'$* , т. е. $\Delta abc \sim \Delta A'B'C'$, что и требовалось доказать.

Таким образом, видим, что теорема Польке доказана профессором Власовым с исчерпывающей ясностью при исключительной простоте поясняющих рассуждений.

1.6. Прямоугольные аксонометрические проекции

Если направление параллельного проецирования, отмеченное на рис. 1 стрелкой R , составляет с плоскостью аксонометрических проекций M_0 прямой угол, то на этой плоскости M_0 получаются оси X_0 , Y_0 и Z_0 , представляющие собой прямоугольную аксонометрическую проекцию координатных осей пространства X , Y и Z (см. рис. 1, а). Любой предмет, отнесенный в пространстве к координатной системе X , Y и Z и спроецированный затем параллельным пучком лучей по направлению стрелки R , представится при этом на плоскости M_0 также в виде его аксонометрической проекции, отнесенной к аксонометрическим осям X_0 , Y_0 и Z_0 .

Докажем несколько основных положений метода прямоугольного аксонометрического проецирования.

Положение 1. В случае прямоугольного проецирования прямого трехгранного угла, образованного осями пространства X , Y и Z , на аксонометрическую плоскость проекций $A_0B_0C_0$ по схеме, представленной на рис. 16, начало аксонометрических проекций (точка O_0) лежит в ортоцентре треугольника следов $A_0B_0C_0$.

Другими словами, надо доказать, что аксонометрические оси X_0 , Y_0 и Z_0 при прямоугольном проецировании совпадают с направлением высот треугольника следов $A_0B_0C_0$. Проецирующие лучи на рис. 16, направленные по линии OO_0 , встречаются плоскость треугольника следов $A_0B_0C_0$ в точке O_0 под прямым углом. Встречая на своем пути ось Z и направляясь перпендикулярно к плоскости

$\Delta A_0 B_0 C_0$, эти лучи образуют внутри трехгранного угла заштрихованный треугольник $C_0 O f$. Докажем, что сторона $C_0 f$ этого треугольника, совпадающая с направлением аксонометрической оси Z_0 , представляет собой высоту треугольника следов $A_0 B_0 C_0$.

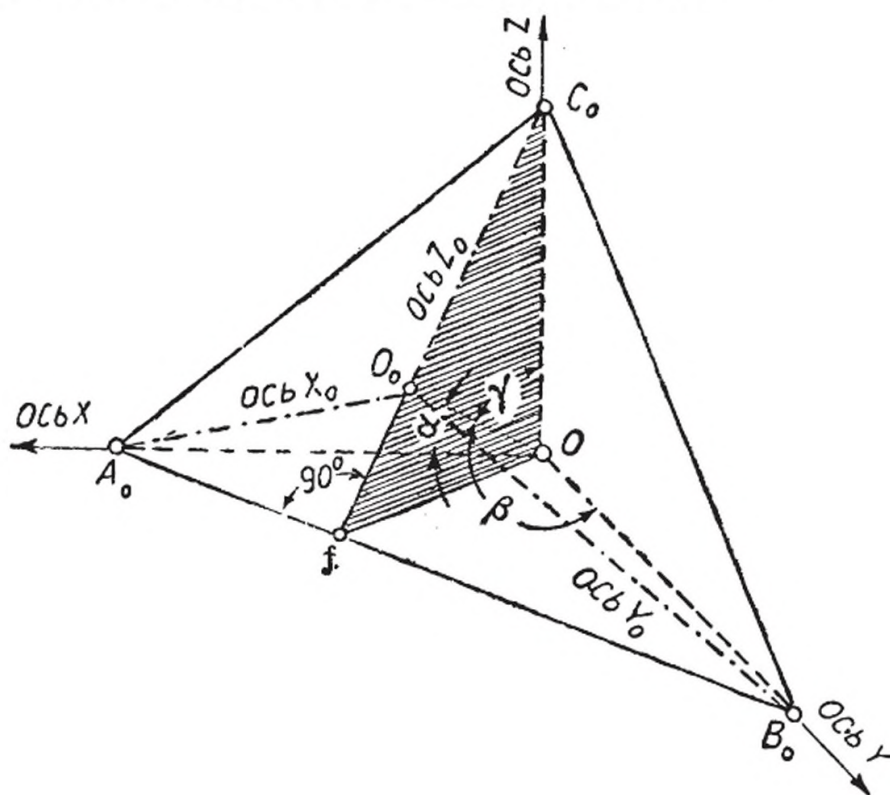


Рис. 16

Плоскость $\Delta A_0 B_0 C_0$ по условию наклонена под некоторым углом к плоскости H , проходящей через оси пространства X и Y , т. е. к плоскости $\Delta A_0 O B_0$, и сторона $A_0 B_0$ треугольника следов $A_0 B_0 C_0$ служит ребром двугранного угла, составленного этими плоскостями, т. е. угла, составленного плоскостью треугольника следов $A_0 B_0 C_0$ с плоскостью H .

Надо установить, что ось Z_0 направлена перпендикулярно к стороне $A_0 B_0$. Докажем это.

По условию ось пространства Z (см. рис. 16) направлена перпендикулярно к плоскости H , ограниченной на рис. 16 отрезками OA_0 и OB_0 осей пространства X и Y .

Проецирующая плоскость $\Delta OC_0 f$ проходит через отрезок OC_0 оси Z , поэтому плоскость $OC_0 f$ также перпендикулярна к отсеку плоскости H , ограниченному треугольником $A_0 O B_0$. Вместе с тем плоскость $\Delta OC_0 f$ перпендикулярна и к плоскости треугольника следов $A_0 B_0 C_0$, так как по условию имеем дело с прямоугольным проецированием на плоскость $\Delta A_0 B_0 C_0$ по направлению OO_0 .

Следовательно, плоскость $\Delta OC_0 f$ перпендикулярна одновременно к обоим граням двугранного угла пространства, образованного пло-

скостями $\triangle OA_0B_0$ и $\triangle A_0B_0C_0$. Такая плоскость, как известно из геометрии, должна оказаться перпендикулярной и к ребру A_0B_0 этого двугранного угла. Раз это так, то линия пересечения fC_0 плоскостей $\triangle OC_0f$ и $\triangle A_0B_0C_0$, совпадающая с направлением аксонометрической оси Z_0 , также будет перпендикулярна к линии A_0B_0 , т. е. линия fC_0 есть высота треугольника следов $A_0B_0C_0$.

Проводя те же рассуждения для двух других осей пространственного трехгранного угла $OA_0C_0B_0$, придем к выводу, что аксонометрические оси X_0 и Y_0 также являются высотами треугольника следов $A_0B_0C_0$ и, следовательно, точка O_0 , принадлежа одновременно трем аксонометрическим осям X_0 , Y_0 и Z_0 , должна лежать в ортоцентре треугольника следов $A_0B_0C_0$ (рис. 17), что и требовалось установить.

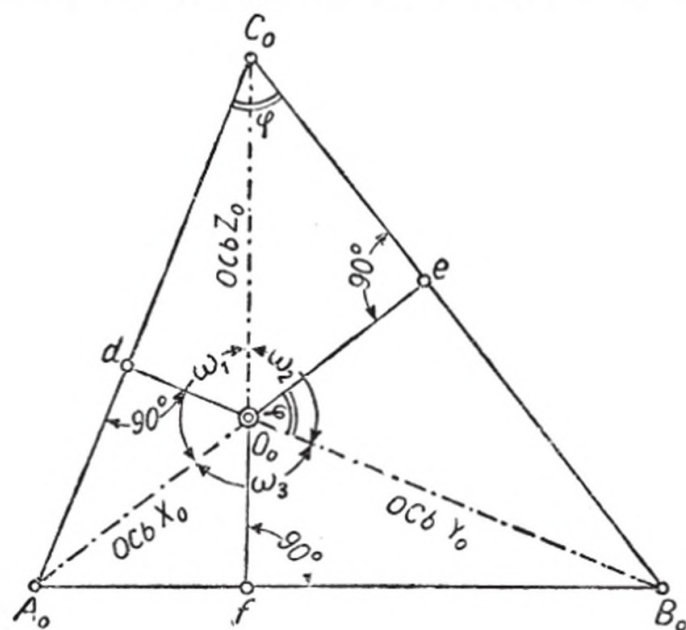


Рис. 17

Положение 2. Треугольник следов $A_0B_0C_0$ в случае прямоугольного проецирования координатного трехгранного угла, составленного тремя взаимно перпендикулярными осями X , Y , Z , есть треугольник остроугольный.

Представим себе, что точки A_0 и C_0 треугольника следов $A_0B_0C_0$ (см. рис. 16) закрепили неподвижно, а точку B_0 начинаем перемещать по направлению оси Y к началу координат O . В этом случае $\angle B_0 \triangle A_0B_0C_0$ начинает непрерывно увеличиваться, и только когда точка B_0 совпадет с точкой O , $\angle B_0$ превратится в прямой, так как в этом случае его сторона A_0B_0 совместится с осью X (отрезок A_0O), а другая сторона C_0B_0 сольется с осью Z (с отрезком OC_0). Если же, наоборот, точка $B_0 \triangle A_0B_0C_0$ при неподвижных точках A_0 и C_0 начнет двигаться по оси Y , удаляясь от точки O , то линейный угол B_0 будет непрерывно уменьшаться, потому что он представляет собой сечение прямого координатного угла пространства секущей плоскостью

$A_0B_0C_0$, наклон которой к ребру OB_0 , т. е. к оси Y , будет непрерывно уменьшаться. На основании сказанного приходим к выводу, что $\angle B_0$ должен быть острым. Если те же самые рассуждения провести в отношении $\angle A_0$ и $\angle C_0$, то придем к выводу, что и эти углы в данном случае должны оказаться углами острыми. Следовательно, можно заключить, что треугольник следов $A_0B_0C_0$ в случае прямоугольного проецирования прямого трехгранного координатного угла $OXYZ$ есть треугольник остроугольный (см. рис. 17).

Положение 3. В случае прямоугольного проецирования прямого трехгранного координатного угла $OA_0B_0C_0$ аксонометрические оси X_0 , Y_0 и Z_0 составляют между собой тупые углы.

Докажем, что $\angle \omega_3$ (см. рис. 17) — угол тупой.

Выше было доказано, что ось X_0 , а следовательно и линия A_0e есть высота $\triangle A_0B_0C_0$, следовательно $\angle A_0eB_0 = 90^\circ$ и $A_0e \perp C_0B_0$.

На том же основании линия $dB_0 \perp A_0C_0$.

Таким образом, $\angle C_0 \triangle A_0B_0C_0$ имеет стороны C_0B_0 и A_0C_0 , перпендикулярные к сторонам A_0e и dB_0 угла $eO_0B_0 = \varphi$ и, следовательно, эти углы равны, т. е. $\angle C_0 = \angle \varphi$.

Выше было доказано, что треугольник следов $A_0B_0C_0$ есть треугольник остроугольный, поэтому $\angle C_0$ — угол острый. Раз это так, то равный ему $\angle eO_0B_0 = \angle \varphi$ также есть угол острый.

Но острый угол $eO_0B_0 = \angle \varphi$ в данном случае составляет дополнение $\angle \omega_3$ до 180° , поэтому окончательно можно установить, что $\angle \omega_3$ должен быть тупым, что и требовалось доказать.

Проводя те же рассуждения для $\angle A_0O_0C_0 = \angle \omega_1$ и $\angle B_0O_0C_0 = \angle \omega_2$, убедимся, что и эти два угла могут быть только тупыми. Таким образом, оси X_0 , Y_0 и Z_0 прямоугольных аксонометрических проекций могут составлять попарно между собой только тупые углы. Это положение справедливо, конечно, только в том случае, если проецируемые координатные оси X , Y и Z в пространстве составляли между собой прямой трехгранный угол.

Резюмируя сказанное выше, приходим к выводу, что любые выбранные произвольно на плоскости три отрезка x_0 , y_0 и z_0 , исходящие из одной точки O_0 , могут быть приняты за направления осей прямоугольной аксонометрической проекции только в том случае, если эти отрезки составляют между собой попарно тупые углы.

1.7. Показатели искажения прямоугольной аксонометрической проекции

На рис. 16 дан тетраэдр с прямым трехгранным углом около точки O . Треугольная грань $A_0B_0C_0$ этого тетраэдра представляет собой треугольник следов на плоскости аксонометрического проецирования. Обозначим $\angle O_0OA_0$, составленный пространственной осью X

с направлением аксонометрического проецирования OO_0 , через α . Угол наклона оси Y к линии OO_0 обозначим через β , угол наклона оси Z к линии OO_0 — через γ и рассмотрим треугольники A_0O_0O , B_0O_0O и C_0O_0O . Линия OO_0 направлена перпендикулярно к плоскости $\Delta A_0B_0C_0$, поэтому все три перечисленных треугольника являются треугольниками прямоугольными с прямыми углами около вершины O_0 . Гипотенузами этих треугольников являются отрезки A_0O , B_0O и C_0O осей X , Y и Z , отсекаемые треугольником следов $A_0B_0C_0$, а отрезки A_0O_0 , B_0O_0 и C_0O_0 осей X_0 , Y_0 и Z_0 служат катетами треугольников A_0O_0O , B_0O_0O и C_0O_0O соответственно.

На основании сказанного можно написать:

$$A_0O_0 = A_0O \sin \alpha; B_0O_0 = B_0O \sin \beta \text{ и } C_0O_0 = C_0O \sin \gamma.$$

Отсюда

$$\frac{A_0O_0}{A_0O} = \sin \alpha; \quad \frac{B_0O_0}{B_0O} = \sin \beta; \quad \frac{C_0O_0}{C_0O} = \sin \gamma.$$

Отношение $\frac{A_0O_0}{A_0O}$ показывает, в каком отношении изменился отрезок OA_0 , отложенный на оси X , при аксонометрическом проецировании его на плоскость $\Delta A_0B_0C_0$, а следовательно, как известно из предыдущего, это отношение $\frac{A_0O_0}{A_0O}$ представляет собой показатель искажения p_x .

Два остальных отношения дают показатели p_y и p_z искажений для осей Y_0 и Z_0 .

Следовательно, можно написать:

$$\frac{A_0O_0}{A_0O} = p_x = \sin \alpha; \quad \frac{B_0O_0}{B_0O} = p_y = \sin \beta; \quad \frac{C_0O_0}{C_0O} = p_z = \sin \gamma. \quad (20)$$

Если бы по каждой оси X , Y и Z в пространстве отложить отрезок, равный некоторой единице длины, например $e = 1$ см, то на аксонометрических осях получили бы аксонометрические масштабные единицы e_x , e_y и e_z .

Выше было установлено, что

$$e_x = e \cdot p_x, e_y = e \cdot p_y \text{ и } e_z = e \cdot p_z.$$

В нашем случае

$$e = 1 \text{ и } p_x = \sin \alpha, p_y = \sin \beta \text{ и } p_z = \sin \gamma,$$

поэтому для данного случая можно определить, что

$$e_x = 1 \cdot p_x; e_y = 1 \cdot p_y \text{ и } e_z = 1 \cdot p_z,$$

или окончательно

$$e_x = \sin \alpha, e_y = \sin \beta \text{ и } e_z = \sin \gamma. \quad (21)$$

Следовательно, чтобы получить величину аксонометрических единиц e_x , e_y и e_z , нужно величину масштабной единицы e умножить соответственно на $\sin \alpha$, $\sin \beta$ и $\sin \gamma$. Таким образом, согласно уравнениям (20) показатели искажения прямоугольной аксонометрии представляют собой синусы углов наклона координатных осей пространства X , Y и Z к направлению аксонометрического проецирования OO_0 .

Так как плоскость $\Delta A_0 B_0 C_0$ наклонена ко всем трем осям X , Y и Z , то, следовательно, α , β и γ — углы острые, поэтому показатели искажения p_x , p_y и p_z представляют собой правильные дроби.

Из сказанного можно сделать заключение, что при прямоугольном проецировании все отрезки, направленные параллельно осям пространства X , Y и Z , уменьшают свою величину, и для того, чтобы получить размер l аксонометрической длины какого-нибудь отрезка L , необходимо умножить истинную величину заданного отрезка на соответствующий показатель искажения, например:

$$l_{x_0} = L_x p_x; \quad l_{y_0} = L_y p_y; \quad l_{z_0} = L_z p_z,$$

где l_{x_0} , l_{y_0} , l_{z_0} — аксонометрическая длина отрезков, отложенных в пространстве параллельно осям X , Y или Z .

Обращаясь к рис. 18, можно написать несколько соотношений, связывающих между собой показатели искажения p_x , p_y и p_z . Для этого совместим прямой угол пространства $A_0 O B_0$ с плоскостью треугольника следов $A_0 B_0 C_0$, вращая $\Delta A_0 O B_0$ вокруг стороны $A_0 B_0$. В совмещенном треугольнике $A_0 O_1 B_0$ угол у вершины O_1 — прямой, поэтому окружность, описанная на стороне $A_0 B_0$ как на диаметре, должна пройти через точку O_1 . Выше было указано, что $O f \perp A_0 B_0$, поэтому в совмещенном положении отрезок также будет перпендикулярен к $A_0 B_0$, и, следовательно, на основании соответствующей теоремы из курса геометрии отрезок $O_1 f$ — средняя пропорциональная между отсекаемыми точкой f частями диаметра $A_0 B_0$:

$$\frac{\overline{A_0 f}}{\overline{O_1 f}} = \frac{\overline{O_1 f}}{\overline{f B_0}},$$

или

$$\overline{O_1 f}^2 = \overline{A_0 f} \cdot \overline{f B_0}. \quad (22)$$

Из $\Delta A_0 f O_1$ запишем $\overline{A_0 f}^2 + \overline{O_1 f}^2 = \overline{A_0 O_1}^2$, или

$$\overline{A_0 f} = \sqrt{\overline{A_0 O_1}^2 - \overline{O_1 f}^2}. \quad (23)$$

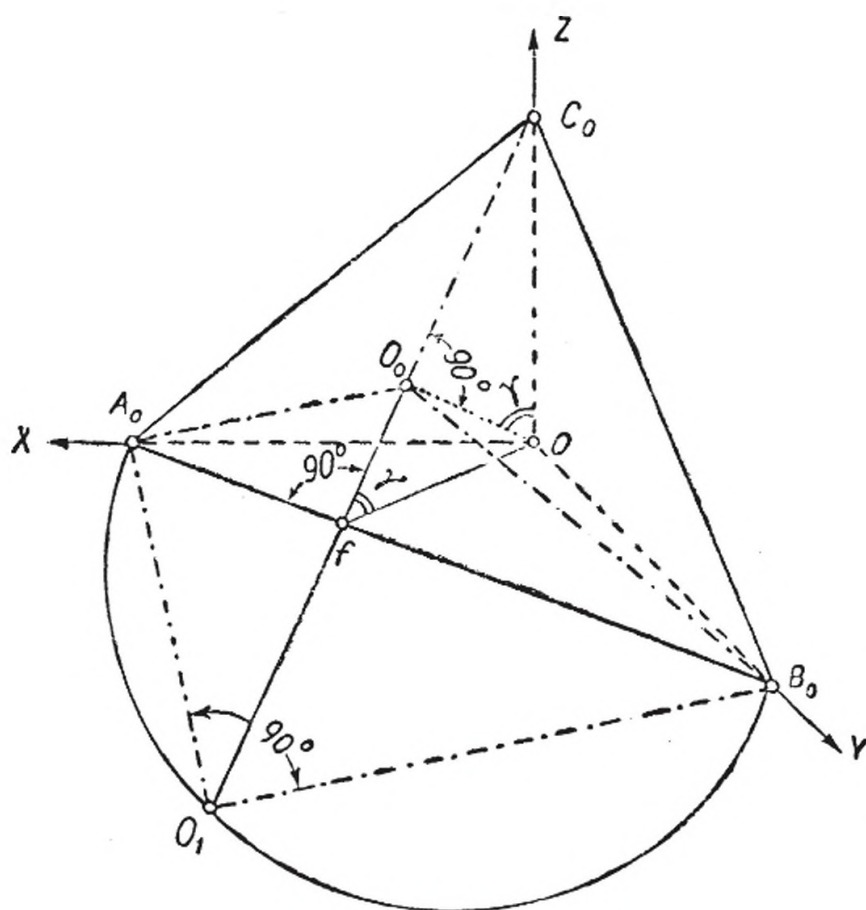


Рис. 18

Из $\Delta B_0 f O_0$ найдем также, что

$$\overline{f B_0} = \sqrt{\overline{B_0 O_1}^2 - \overline{O_1 f}^2}. \quad (24)$$

Подставив найденные величины $A_0 f$ и $f B_0$ из уравнений (23) и (24) в уравнение (22), имеем:

$$\overline{O_1 f}^2 = \sqrt{\overline{A_0 O_1}^2 - \overline{O_1 f}^2} \cdot \sqrt{\overline{B_0 O_1}^2 - \overline{O_1 f}^2}.$$

Возводим обе части в квадрат и получаем:

$$\overline{O_1 f}^2 \cdot \overline{O_1 f}^2 = (\overline{A_0 O_1}^2 - \overline{O_1 f}^2) \cdot (\overline{B_0 O_1}^2 - \overline{O_1 f}^2).$$

Производим умножение и получаем:

$$\overline{O_1 f}^2 \cdot \overline{O_1 f}^2 = \overline{A_0 O_1}^2 \cdot \overline{B_0 O_1}^2 - \overline{A_0 O_1}^2 \cdot \overline{O_1 f}^2 - \overline{O_1 f}^2 \cdot \overline{B_0 O_1}^2 + \overline{O_1 f}^2 \cdot \overline{O_1 f}^2.$$

Собираем члены, содержащие $\overline{O_1 f}^2$, в левую часть:

$$\overline{O_1 f}^2 \cdot \overline{O_1 f}^2 + \overline{A_0 O_1}^2 \cdot \overline{O_1 f}^2 + \overline{O_1 f}^2 \cdot \overline{B_0 O_1}^2 - \overline{O_1 f}^2 \cdot \overline{O_1 f}^2 = \overline{A_0 O_1}^2 \cdot \overline{B_0 O_1}^2.$$

После сокращения имеем

$$\overline{A_0O_1}^2 \cdot \overline{O_1f}^2 + \overline{O_1f}^2 \cdot \overline{B_0O_1}^2 = \overline{A_0O_1}^2 \cdot \overline{B_0O_1}^2.$$

Выносим $\overline{O_1f}^2$ за скобку:

$$\overline{O_1f}^2 (\overline{A_0O_1}^2 + \overline{B_0O_1}^2) = \overline{A_0O_1}^2 \cdot \overline{B_0O_1}^2.$$

Определяем значение $\overline{O_1f}^2$:

$$\overline{O_1f}^2 = \frac{\overline{A_0O_1}^2 \cdot \overline{B_0O_1}^2}{\overline{A_0O_1}^2 + \overline{B_0O_1}^2}. \quad (25)$$

В прямоугольном треугольнике A_0O_0O угол $O_0OA_0 = \alpha$, поэтому

$$\overline{OO_0} = \overline{OA_0} \cos \alpha,$$

откуда

$$\overline{OA_0} = \frac{\overline{OO_0}}{\cos \alpha} = \overline{A_0O_1}. \quad (26)$$

В прямоугольном треугольнике B_0O_0O угол $O_0OB_0 = \beta$, поэтому

$$\overline{OO_0} = \overline{OB_0} \cos \beta,$$

откуда

$$\overline{OB_0} = \frac{\overline{OO_0}}{\cos \beta} = \overline{B_0O_1}. \quad (27)$$

Стороны $\angle O_0OC_0 = \angle \gamma$ перпендикулярны к сторонам $\angle O_0fO$, поэтому $\angle O_0fO = \angle \gamma$.

Из прямоугольного треугольника OO_0f можно написать, что катет

$$\overline{OO_0} = \overline{Of} \cdot \sin \gamma,$$

откуда

$$\overline{Of} = \frac{\overline{OO_0}}{\sin \gamma} = \overline{O_1f}. \quad (28)$$

Подставив найденные значения $\overline{OA_0}$, $\overline{OB_0}$ и \overline{Of} в уравнение (25), получим

$$\frac{\overline{OO_0}^2}{\sin^2 \gamma} = \frac{\frac{\overline{OO_0}^2}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\overline{OO_0}^2}{\cos^2 \beta}}{\frac{\overline{OO_0}^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{\overline{OO_0}^2}{\cos^2 \beta}}.$$

Делаем преобразование:

$$\frac{\overline{OO_0^2}}{\sin^2 \gamma} \cdot \frac{\overline{OO_0^2}}{\cos^2 \alpha} + \frac{\overline{OO_0^2}}{\sin^2 \gamma} \cdot \frac{\overline{OO_0^2}}{\cos^2 \beta} = \frac{\overline{OO_0^2}}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\overline{OO_0^2}}{\cos^2 \beta}.$$

После сокращения имеем:

$$\frac{1}{\sin^2 \gamma} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} \right) = \frac{1}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta},$$

или

$$\sin^2 \gamma = \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} \right),$$

или

$$\sin^2 \gamma = \frac{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta},$$

откуда находим:

$$\sin^2 \gamma = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta.$$

Но

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad \text{и} \quad \cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta,$$

поэтому

$$\sin^2 \gamma = 1 - \sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \beta,$$

откуда окончательно

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2. \quad (29)$$

Раньше (см. уравнение (20)) было показано, что

$$\sin \alpha = p_x; \quad \sin \beta = p_y \quad \text{и} \quad \sin \gamma = p_z,$$

поэтому приходим к выводу, что

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 2. \quad (30)$$

В результате сделанных вычислений видим, что в случае прямоугольного аксонометрического проецирования (триметрического, диметрического или изометрического) сумма квадратов показателей искажения по осям X_0 , Y_0 и Z_0 должна равняться 2.

Раньше (см. параграфы 1.2 и 1.7) установлено, что

$$p_x = \frac{e_x}{e}; \quad p_y = \frac{e_y}{e}; \quad p_z = \frac{e_z}{e}.$$

Поэтому на основании уравнения (30)

$$\frac{e_x^2}{e^2} + \frac{e_y^2}{e^2} + \frac{e_z^2}{e^2} = 2,$$

или

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 2e^2, \quad (31)$$

откуда

$$e = \frac{\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}}{\sqrt{2}}. \quad (32)$$

Пользуясь выведенной формулой, можно определить натуральный размер масштабной единицы для прямоугольного проецирования, если известны три аксонометрические масштабные единицы e_x , e_y и e_z . Если принять $e = 1$, то из уравнения (31) получим:

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 2.$$

Зависимость (31) или аналогичную ей (32), связывающие между собой натуральную масштабную единицу e и аксонометрические масштабные единицы e_x , e_y и e_z , можно представить графически следующим образом (рис. 19).

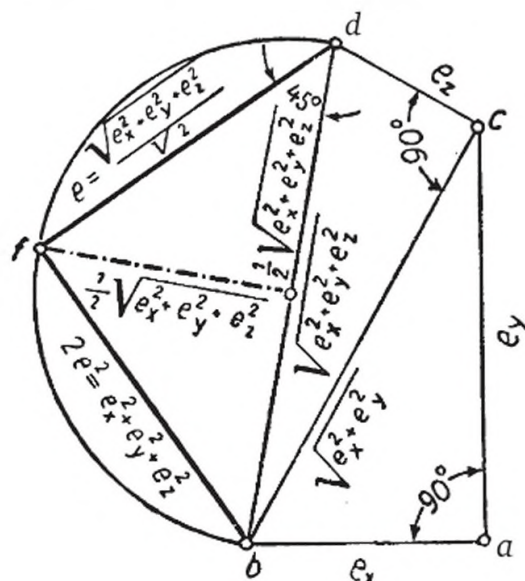


Рис. 19

На отрезках $ab = e_x$ и $ac = e_y$ строим прямоугольный треугольник abc .

Гипотенуза bc Δabc может быть определена по теореме Пифагора:

$$\overline{bc}^2 = e_x^2 + e_y^2; \quad bc = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}.$$

Далее на отрезке $bc = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$ и на отрезке e_z , как на катетах, строим второй прямоугольный треугольник bcd , гипотенуза bd которого определится из уравнения

$$\overline{bd}^2 = (\sqrt{e_x^2 + e_y^2})^2 + e_z^2; \quad bd = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}.$$

Наконец, на отрезке bd строим равнобедренный прямоугольный треугольник bfd , каждый катет которого и даст величину искомой натуральной масштабной единицы e .

Действительно, обозначив через e катеты bf и df равнобедренного прямоугольного треугольника bdf , имеем:

$$\overline{bd}^2 = (\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2})^2 = e^2 + e^2,$$

или

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 2e^2,$$

откуда окончательно имеем:

$$e = \frac{\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}}{\sqrt{2}},$$

что и требовалось получить.

Выше (см. уравнение (20)) было доказано, что

$$p_x = \sin \alpha = \frac{e_x}{e}; \quad p_y = \sin \beta = \frac{e_y}{e}; \quad p_z = \sin \gamma = \frac{e_z}{e},$$

поэтому

$$\sin \alpha = \frac{e_x \sqrt{2}}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}} \quad \text{и} \quad \sin^2 \alpha = \frac{2e_x^2}{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}.$$

Но $\sin^2 \alpha < 1$, поэтому

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 > 2e_x^2,$$

следовательно:

$$\begin{cases} e_y^2 + e_z^2 > e_x^2, \\ e_z^2 + e_x^2 > e_y^2, \\ e_x^2 + e_y^2 > e_z^2. \end{cases} \quad (33)$$

Эти три неравенства показывают, что на отрезках e_x^2 , e_y^2 и e_z^2 всегда можно построить треугольник, так как сумма любых двух из них, как видим, всегда больше третьего.

1.8. Способы построения эллипса

Для изложения дальнейшей части курса необходимо вспомнить способы построения эллипсов.

На рис. 20 и 21 показаны способы построения эллипса по его главным осям, а на рис. 22, 23, 23' даны способы построения эллипса по двум сопряженным диаметрам a_0b_0 и c_0d_0 .

Напомним, что диаметр a_0b_0 (см. рис. 22), сопряженный данному диаметру c_0d_0 , делит пополам хорды, параллельные диаметру c_0d_0 , и наоборот.

Для построения эллипса по заданным его главным осям на рис. 20 описаны две вспомогательные окружности.

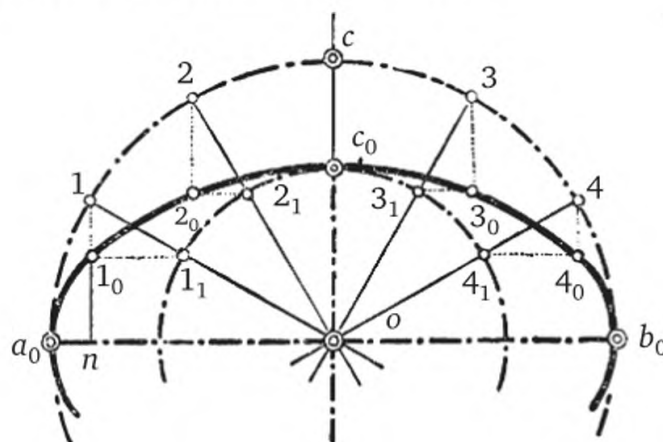


Рис. 20

Диаметр большой окружности принят равным большой оси эллипса, а диаметр малой окружности равен малой оси эллипса.

Разделив большую окружность на произвольное число частей, намечаем на ней точки 1, 2, 3, 4, Соединяя затем точки 1, 2, 3, 4, ... с центром O, получаем на малой окружности точки $1_0, 2_0, 3_0, 4_0, \dots$.

Закончив это предварительное построение, проводим из точек 1, 2, 3, 4, ... вертикальные линии, а из точек $1_0, 2_0, 3_0, 4_0, \dots$ горизонтальные линии до пересечения с проведенными уже из точек 1, 2, 3, 4, ... вертикальными линиями.

Полученные в местах пересечения точки $1_0, 2_0, 3_0, 4_0, \dots$ соединяем по лекалу и этим самым намечаем очертание эллипса, отвечающего заданным осям a_0b_0 и c_0d_0 (см. рис. 20). Нетрудно видеть, что сделанное построение сводится по существу к построению эллипса как фигуры, родственной двум построенным окружностям. Действительно, если принять большую ось эллипса a_0b_0 за ось родства, а точки c_0 и c, расположенные на продолжении малой оси, — за родственные точки при совмещенных центрах родственной окружности и эллипса в точке O, то можно рассматривать точки эллипса $1_0, 2_0, 3_0, 4_0, \dots$ как точки, родственные точкам окружности 1, 2, 3, 4,

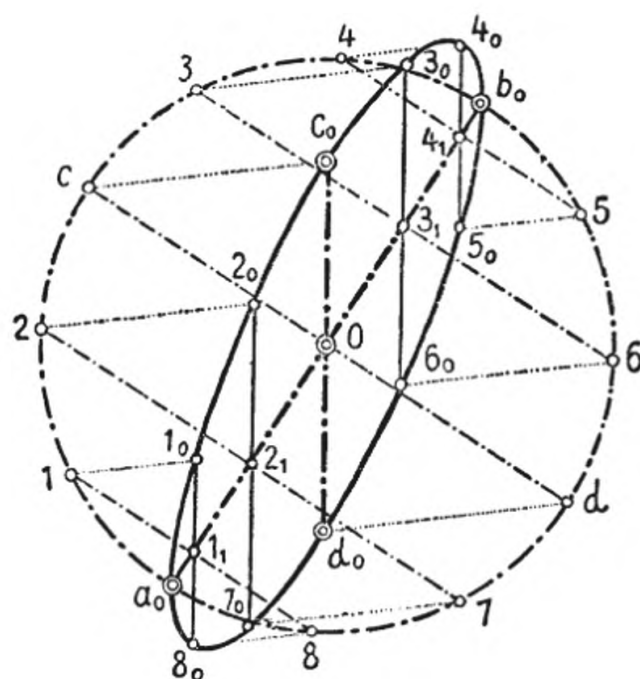


Рис. 22

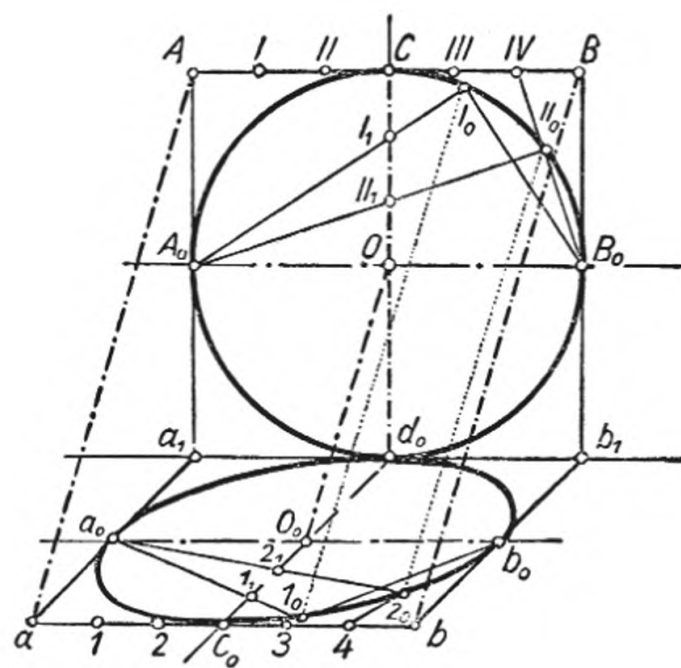


Рис. 23

На рис. 21 показан другой способ построения эллипса по его главным осям.

В данном случае эллипс строится при помощи ключа пропорциональности (рис. 21, а). Для построения ключа откладываем по горизонтальной линии отрезок om произвольной величины и в точке o на перпендикуляре os'' к линии om откладываем размеры большой и малой полуосей эллипса. Намеченные в результате этого по-

строения точки c_1 и c'' соединяем с точкой m . Делим далее отрезок om на несколько частей точками 1, 2, 3 и, проводя через точки деления 1, 2, 3 вертикальные линии $1-1'', 2-2'', 3-3''$, намечаем на линиях mc_1 и mc'' отрезки, пропорциональные отрезкам линии om .

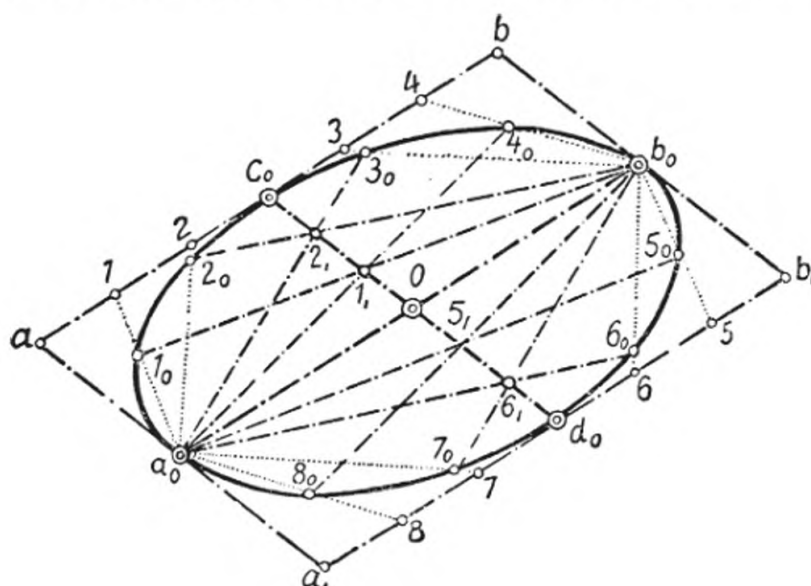


Рис. 23'

После построения ключа пропорциональности переходим к определению точек $1_0, 2_0, 3_0, \dots$, принадлежащих эллипсу.

Для этой цели описываем радиусом o_0a_0 окружность (рис. 21, б) и, перенося на нее точки $1'', 2'', 3'', \dots$, намечаем точки $1', 2', 3', \dots$. После этого точки эллипса $1_0, 2_0, 3_0, \dots$ будут найдены в местах пересечения вертикальных линий $1'-1_0, 2'-2_0, 3'-3_0, \dots$ с горизонтальными линиями $1_1-1_0, 2_1-2_0, 3_1-3_0, \dots$.

Убедиться в том, что фигура $a_01_02_03_0c_03_0\dots$ есть эллипс, можно следующим способом.

Принимаем ось a_0b_0 за ось абсцисс X , а ось o_0c' — за ось ординат Y .

Тогда можно будет написать для какой-либо точки эллипса, например для точки 3_0 , и соответствующей точки ($3'$), отношение ординат в таком виде:

$$\frac{\overline{y}_{3_0}}{y_{3'}} = \frac{\overline{3-3_1}}{3-3''}. \quad (34)$$

Здесь

$$\overline{3-3_1} = m - 3 \operatorname{tg} \beta; \quad \overline{3-3''} = m - 3 \operatorname{tg} \alpha.$$

Подставляя эти значения в уравнение (34), получаем

$$\frac{\overline{y}_{3_0}}{\overline{y}_{3'}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{const}, \quad (35)$$

откуда

$$\bar{y}_{3'} = \bar{y}_{3_0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (36)$$

Следовательно, для данного ключа отношение ординат точек окружности $7', 2', 3', \dots$ к ординатам точек кривой $1_0, 2_0, 3_0, \dots$ есть величина постоянная. Уравнение окружности может быть выражено через координаты X и Y принадлежащих ей точек, в частности через координаты точки $3'$, следующим образом:

$$\bar{x}_{3'}^2 + \bar{y}_{3'}^2 = R^2.$$

Подставляя сюда значение $\bar{y}_{3'}$, выраженное через ординату \bar{y}_{3_0} в (36), получим:

$$\bar{x}_{3'}^2 + \bar{y}_{3_0}^2 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \beta} = R^2,$$

или после преобразования будем иметь

$$\frac{\bar{x}_{3'}^2}{R^2} + \frac{\bar{y}_{3_0}^2}{R^2 \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = 1, \quad (37)$$

т. е. уравнение эллипса, имеющего полуоси:

$$a = R \quad \text{и} \quad b = R \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha},$$

что и требовалось доказать.

На рис. 22 показано построение эллипса по его двум сопряженным диаметрам $a_0 b_0$ и $c_0 d_0$, заданным по величине и по направлению. Нетрудно видеть, что в данном случае эллипс также рассматривается как фигура, родственная окружности, описанной на его диаметре $a_0 b_0$. Направление родства определяется путем соединения точки окружности c с концом c_0 сопряженного диаметра $c_0 d_0$. Диаметр $c_0 d_0$ в данном случае будет родственным диаметром окружности cd , а хорды $1_0 - 8_0, 2_0 - 7_0, 3_0 - 6_0, \dots$ родственны соответственно одноименным хордам окружности. Точки эллипса $1_0, 2_0, c_0, 3_0, 4_0, \dots$ оказываются в этом случае родственными точкам $1, 2, 3, c, 3, 4, \dots$ окружности. Число точек на окружности может быть взято произвольно.

На рис. 23 и 23' показан другой способ построения эллипса по двум его сопряженным диаметрам. Этот способ основан на свойствах аффинного преобразования отрезков сторон квадрата, описанного около окружности, в аффинно соответствующие им отрезки

Делим пополам отрезок Y'_0X_0 и из полученной точки c , как из центра, проводим полуокружность через центр эллипса O .

Точки m и n пересечения этой полуокружности с линией Y'_0X_0 лежат на главных осях эллипса. При этом отрезок $mX_0 = a$ равен по величине большой полуоси эллипса Om_0 , а отрезок $nX_0 = b$ равен малой полуоси эллипса On_0 .

Вычерчивание эллипса при помощи кругов кривизны

Для приближенного построения эллипса можно применить прием, показанный на рис. 25. На главных осях m_0m_0 и n_0n_0 строим прямоугольник.

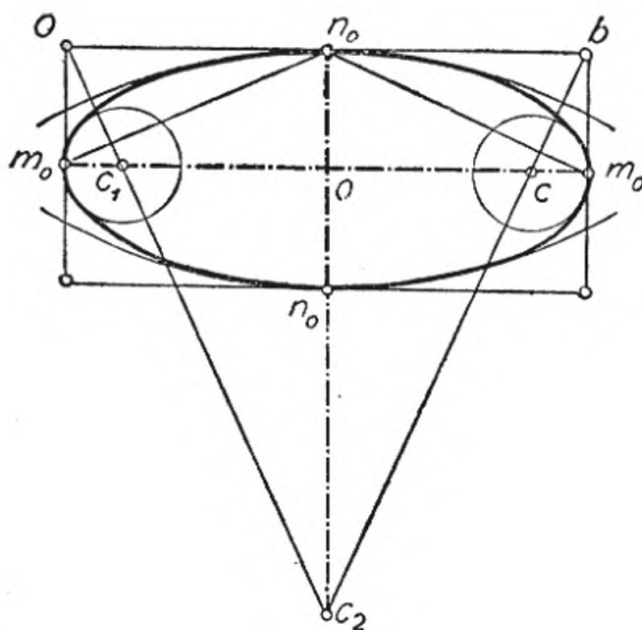


Рис. 25

Соединив точку n_0 с точками m_0 и m_0 , опускаем на линии $n_0 — m_0$ перпендикуляры из точек a и b . Эти перпендикуляры в пересечении с главными осями намечают точки c , c_1 и c_2 , являющиеся центрами, из которых можно циркулем описать значительную часть очертания эллипса. Участки, отмеченные пунктиром, должны быть соединены при этом по лекалу или на глаз от руки.

1.9. Масштабный эллипс

В случае прямоугольного аксонометрического проецирования отрезки, параллельные координатным осям пространства X , Y и Z , изменяют величину в сторону уменьшения. Истинная величина какого-нибудь отрезка AB (рис. 26), расположенного в пространстве параллельно, например, оси X , может быть получена, если его аксо-

нометрическую проекцию A_0B_0 разделить на показатель искажения той оси, параллельно которой этот отрезок расположен.

В данном случае проекцию A_0B_0 надо разделить на показатель искажения

$$p_x = \frac{e_x}{e}.$$

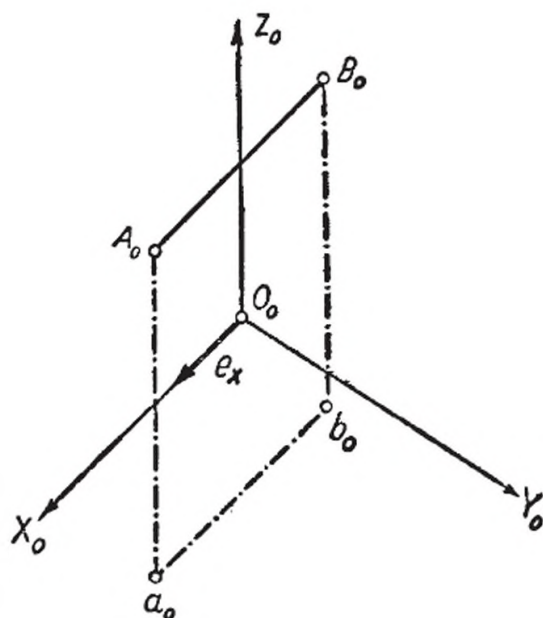


Рис. 26

Получим

$$AB = \frac{A_0B_0}{p_x} = \frac{A_0B_0}{e_x} \cdot e.$$

Полученное выражение $AB = \frac{A_0B_0 \cdot e}{e_x}$ может быть представлено графически.

Для этой цели берем две прямые EF и EP (рис. 27), составляющие острый угол произвольной величины. Затем на стороне EF от точки E откладываем масштабную единицу e_x и на той же стороне EF также от точки E откладываем измеряемую проекцию A_0B_0 .

На стороне EP откладываем натуральную единицу e и, проведя из точки t линию tn параллельно линии cd , получаем графически величину En , равную искомой истинной величине отрезка AB , соответствующего отрезку A_0B_0 . Действительно, на рис. 27 из подобия треугольников tEn и cEd можно написать:

$$\frac{En}{Ed} = \frac{Em}{Ec} \quad \text{или} \quad \frac{AB}{e} = \frac{A_0B_0}{e_x},$$

откуда

$$AB = \frac{A_0 B_0}{e_x} \cdot e = \frac{A_0 B_0}{p_x}.$$

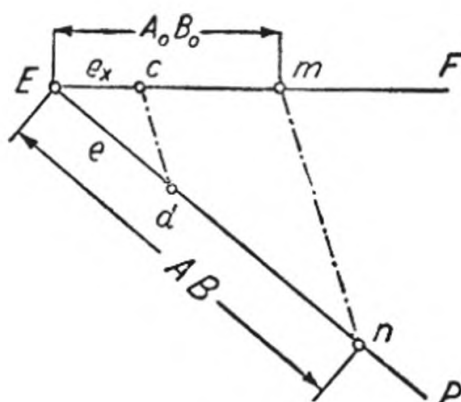


Рис. 27

Для определения истинной величины отрезков, расположенных в пространстве под углом к осям X и Y , но в плоскостях, параллельных, например, плоскости H (проходящей через оси X и Y), прибегнем к следующему приему (рис. 28).

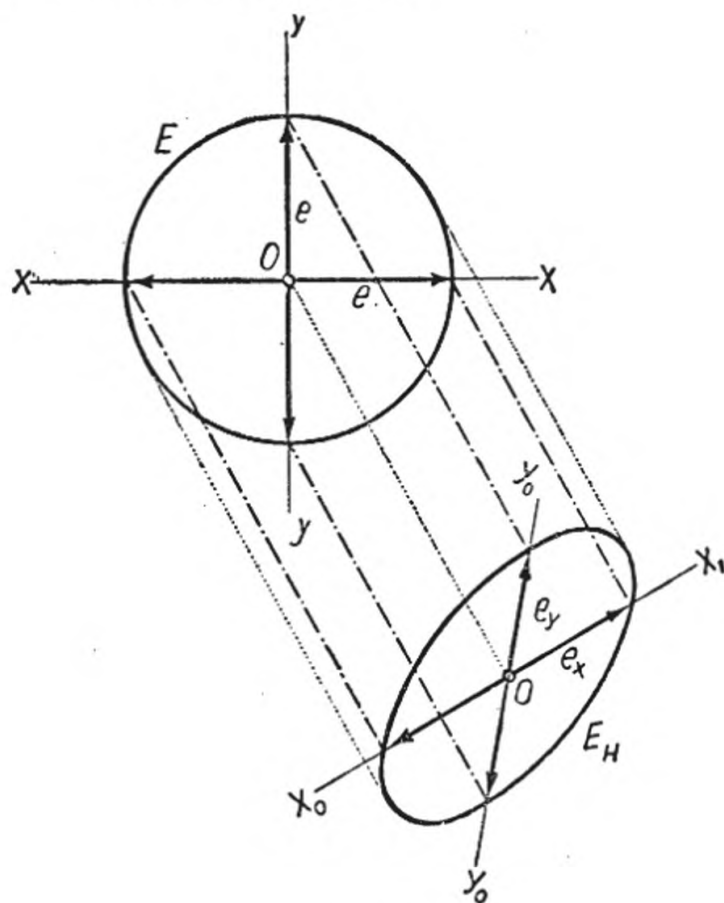


Рис. 28

Опишем на плоскости H из точки O окружность E радиусом, равным натуральной величине масштабной единицы $R = e$. Эта окружность может быть принята за масштабный круг E для плоскости H . Проекция круга E на аксонометрической плоскости в общем случае изобразится в виде некоторого эллипса E_H (см. рис. 28), которому в аксонометрии присвоено название *масштабного эллипса* для плоскости H .

Следовательно, масштабный эллипс E_H на рис. 28 представляет собой в общем случае параллельную проекцию некоторого масштабного круга E , описанного в пространстве на плоскости H из точки O радиусом, равным масштабной единице e . За счет этого в случае прямоугольного проецирования большая ось ss' эллипса E_H на рис. 29 должна оказаться равной неискаженной величине диаметра $D = 2e$ масштабного круга E . Значит размер большой оси масштабного эллипса E_H в этом случае должен оказаться равным удвоенной масштабной единице.

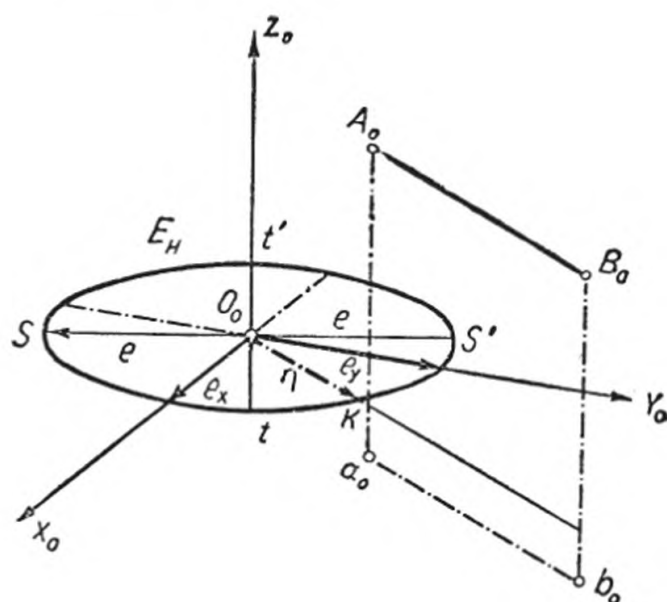


Рис. 29

По направлению большая ось ss' масштабного эллипса E_H на рис. 29 должна расположиться перпендикулярно к оси Z_0 , потому что в пространстве ось Z перпендикулярна к любому диаметру масштабного круга E , а следовательно, она будет перпендикулярна и к тому диаметру масштабного круга E , проекцию которого изображает собой большая ось ss' эллипса E_H .

В то же время следует учесть, что большая ось масштабного эллипса есть проекция диаметра масштабного круга, параллельного плоскости треугольника следов, поэтому эта ось должна оказаться перпендикулярной не только к оси Z , но и к проекции оси Z на плоскости треугольника, т. е. аксонометрической оси Z_0 . Последнее может быть установлено на основании соответствующей теоремы

из курса начертательной геометрии, по смыслу которой прямой угол проецируется на плоскости проекций без искажения в том случае, если хотя бы одна из его сторон была расположена параллельно этой плоскости проекций.

Из этого можно заключить также, что малая ось tt' эллипса E_H (на рис. 29), будучи перпендикулярной его большой оси, должна совпадать с направлением аксонометрической оси Z_0 .

Если бы масштабные круги были описаны в пространстве из точки O на плоскостях V или W , то большие оси отвечающих им эллипсов E_V и E_W на плоскости аксонометрических проекций расположились бы перпендикулярно к осям Y_0 и X_0 , а малые оси этих эллипсов были бы направлены вдоль осей X_0 и Y_0 .

На рис. 30 показан способ построения масштабного эллипса E_H для случая, когда известны направление и величина хотя бы одного его диаметра ii' и размер большой оси ss' .

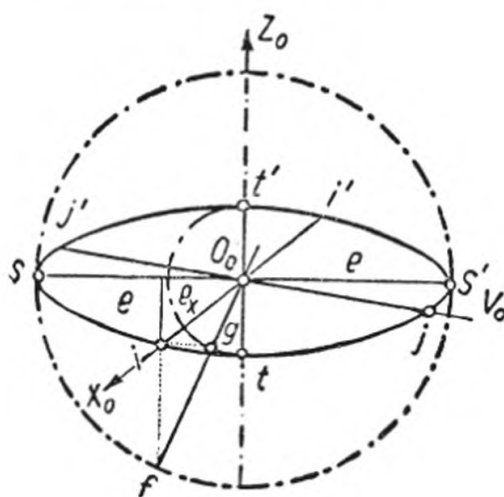


Рис. 30

По горизонтальному направлению влево и вправо от точки O_0 откладываем величину e и этим намечаем конечные точки s и s' большой оси эллипса. На оси X_0 откладываем масштабную единицу e_x и этим намечаем точки i и i' , принадлежащие эллипсу E_H . Пользуясь точками s и i , определяем размер tt' малой оси эллипса. Для этого из точки O_0 радиусом $e = O_0s$ описываем большую окружность. Через точку i проводим линию if параллельно оси Z_0 . Соединив точку f с O_0 и проведя из точки i линию параллельно ss' , получим точку g . Малая полуокружность, описанная из точки O_0 радиусом O_0g , дает возможность наметить точки t и t' , принадлежащие концам малой оси масштабного эллипса.

После этого, пользуясь приемами, рассмотренными при изучении рис. 20 и 21, можно построить сколько угодно точек, принадлежащих искомому эллипсу.

Соединяя точки $s, s', t, t', i, i', j, j', \dots$ по лекалу или циркулем (частями), получаем очертание масштабного эллипса E_H .

ной геометрии, например задачи на построение заданных углов, деление угла на части, проведение перпендикуляра к прямой и др.

Для примера решим задачу на построение при помощи масштабного эллипса перпендикуляра к прямой.

Задача. К прямой AB , расположенной в пространстве параллельно плоскости H , восставить перпендикуляр в точке F . На рис. 34 прямая AB задана аксонометрической проекцией A_0B_0 и вторичной проекцией a_0b_0 .

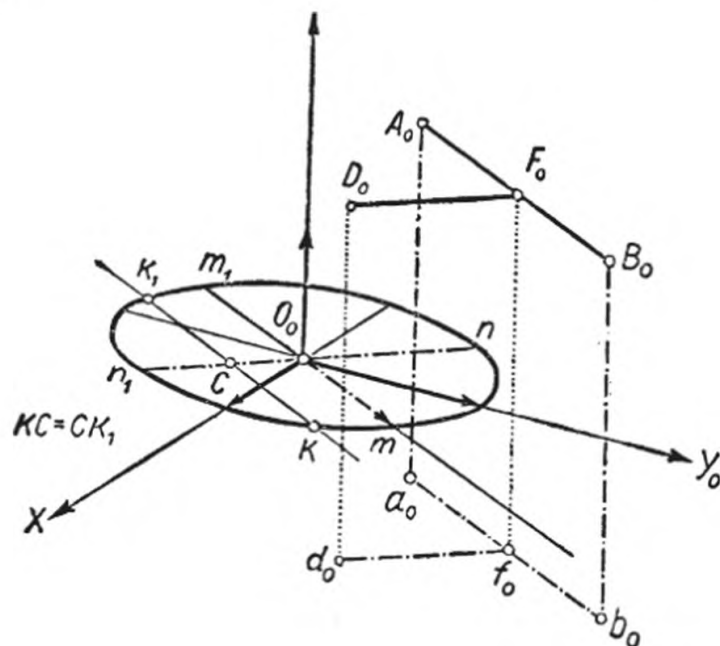


Рис. 34

Решение. Проводим в масштабном эллипсе диаметр $mm_1 \parallel a_0b_0$ и строим сопряженный ему диаметр nn_1 . Диаметр nn_1 как сопряженный будет перпендикулярен в пространстве к диаметру mm_1 . Поэтому, чтобы закончить решение поставленной перед нами задачи, следует провести из точки F_0 линию $F_0D_0 \parallel nn_1$, и получим аксонометрическую проекцию F_0D_0 отрезка FD , перпендикулярного к AB .

Для построения же сопряженного диаметра nn_1 проводим любую хорду $kk_1 \parallel mm_1$. Точка c , делящая пополам хорду kk_1 , дает возможность определить направление диаметра nn_1 , сопряженного диаметру mm_1 .

1.10. Теорема Вейсбаха¹

Теорема. Аксонометрические оси X_0 , Y_0 и Z_0 являются биссектрисами углов треугольника, стороны которого равны или пропорциональны квадратам аксонометрических масштабных единиц.

¹ Julius Weisbach (1806—1841) — профессор прикладной математики Фрейбургской горной академии.

Эта теорема, выведенная Вейсбахом для прямоугольных аксонометрических проекций, дает возможность построить направление аксонометрических осей X_0 , Y_0 и Z_0 при заданных аксонометрических масштабных единицах e_x , e_y и e_z . Для доказательства теоремы Вейсбаха рассмотрим масштабный эллипс E_H , расположенный в плоскости H_0 , проходящей через оси O_0A_0 и O_0Y_0 (рис. 35). Учитывая обозначения на рис. 35, будем иметь:

$$\angle \alpha = 180 - \omega_1;$$

$$\angle \beta = 180 - \omega_2,$$

отрезки $O_0a = e_x$, $O_0b = e_y$, где e_x , e_y — масштабные единицы по осям X_0 и Y_0 соответственно.

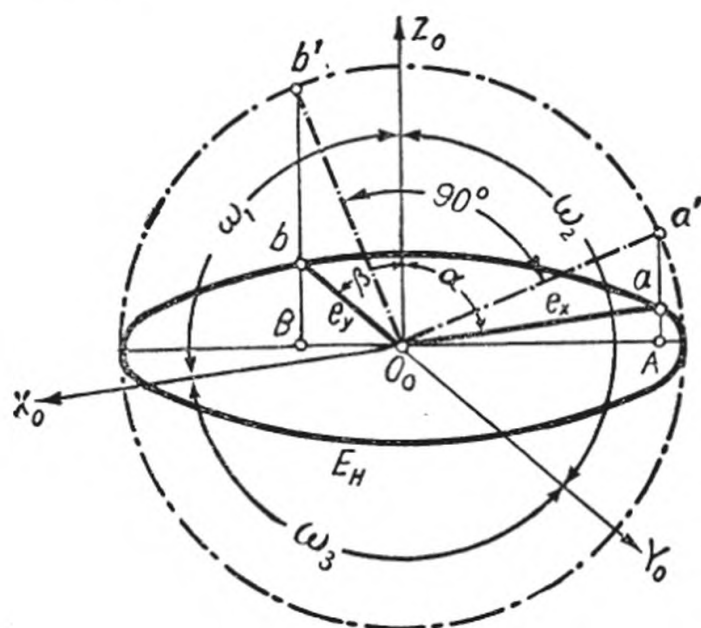


Рис. 35

Пользуясь сопряженными диаметрами $2e_x$ и $2e_y$ эллипса E_H , строим круг, ему родственный. Ось родства выбираем совпадающей с большей осью эллипса. Центр эллипса и круга располагаем в точке O_0 .

Тогда на окружности можно наметить точки a' и b' , родственные точкам a и b эллипса E_H .

Радиусы окружности O_0a' и O_0b' окажутся в этом случае взаимно перпендикулярными, так как они родственны двум сопряженным полу диаметрам O_0a и O_0b эллипса E_H .

Имеем: $\triangle O_0a'A = \triangle O_0b'B$, ибо $O_0a' = O_0b'$ и оба острых угла образованы взаимно перпендикулярными сторонами.

Отсюда заключаем, что

$$O_0A \cdot Aa' = O_0B \cdot Bb'.$$

Кроме того, на основании соотношений родства имеем

$$\frac{aA}{Aa'} = \frac{bB}{Bb'}.$$

Перемножая два последних уравнения, имеем

$$O_0A \cdot Aa' \cdot \frac{aA}{Aa'} = O_0B \cdot Bb' \cdot \frac{bB}{Bb'},$$

или

$$O_0A \cdot aA = O_0B \cdot bB. \quad (38)$$

В ΔO_0aA угол у вершины a — $\angle\alpha$, а гипотенуза $O_0a = e_x$, поэтому катеты равны

$$O_0A = e_x \sin \alpha \text{ и } Aa = e_x \cos \alpha.$$

По тем же соображениям для ΔO_0Bb пишем соотношения:

$$O_0B = e_y \sin \beta \text{ и } Bb = e_y \cos \beta.$$

Найденные значения для O_0A , Aa , O_0B и Bb подставляем в уравнение (38) и получаем:

$$e_x \sin \alpha \cdot e_x \cos \alpha = e_y \sin \beta \cdot e_y \cos \beta,$$

откуда

$$e_x^2 \sin \alpha \cos \alpha = e_y^2 \sin \beta \cos \beta.$$

Делая преобразование, имеем

$$\frac{e_x^2}{e_y^2} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}.$$

Но $\angle\alpha = 180 - \omega_1$ и $\angle\beta = 180 - \omega_2$, поэтому

$$\frac{e_x^2}{e_y^2} = \frac{\sin 2(180^\circ - \omega_2)}{\sin 2(180^\circ - \omega_1)},$$

что равносильно уравнению

$$\frac{e_x^2}{e_y^2} = \frac{\sin 2\omega_2}{\sin 2\omega_1}.$$

Посредством таких же рассуждений найдем

$$\frac{e_y^2}{e_z^2} = \frac{\sin 2\omega_1}{\sin 2\omega_3}.$$

Из последних двух уравнений пишем:

$$e_y^2 : e_x^2 : e_z^2 = \sin 2\omega_1 : \sin 2\omega_2 : \sin 2\omega_3. \quad (39)$$

Соотношение (39) подтверждает положение, высказанное Вейсбахом, что аксонометрические оси представляют собой биссектрисы углов треугольника, стороны которого равны или пропорциональны квадратам аксонометрических масштабных единиц.

Чтобы в этом убедиться, возьмем (рис. 36) какой-нибудь треугольник PQR и предположим, что PO_0 , QO_0 и RO_0 есть биссектрисы углов $P = \alpha$, $Q = \beta$ и $R = \gamma$.

Тогда согласно обозначениям на рис. 36 получим

$$\angle \omega_3 = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Но $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, поэтому

$$\begin{aligned} \angle \omega_3 &= \alpha + \beta + \gamma - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma = \\ &= \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \right) + \frac{\gamma}{2} = \frac{180^\circ}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

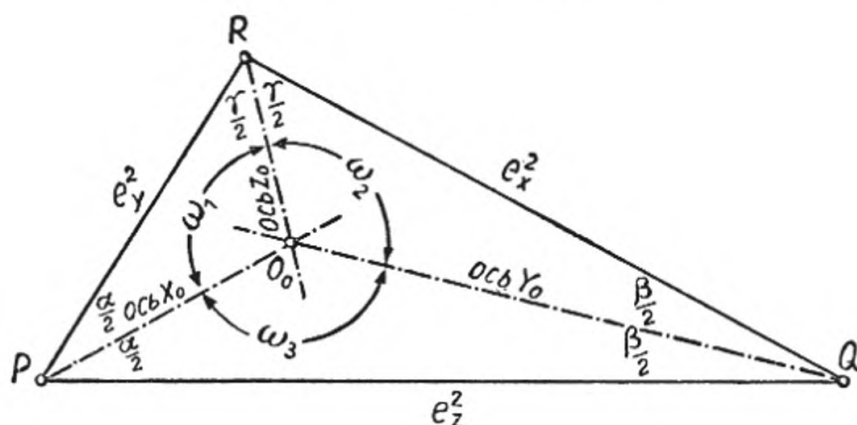


Рис. 36

Следовательно,

$$\frac{\gamma}{2} = \omega_3 - 90^\circ,$$

или

$$\angle \gamma = 2(\omega_3 - 90^\circ).$$

Таким же образом получим

$$\angle \beta = 2(\omega_1 - 90^\circ) \text{ и } \angle \alpha = 2(\omega_2 - 90^\circ).$$

Стороны треугольника относятся как синусы противолежащих углов, поэтому

$$RP : RQ : PQ = \sin \beta : \sin \alpha : \sin \gamma.$$

Подставляя найденные значения для углов α , β и γ , имеем:

$$RP : RQ : PQ = \sin 2\omega_1 : \sin 2\omega_2 : \sin 2\omega_3. \quad (40)$$

Это уравнение (40) тождественно с выведенным выше уравнением и в нем:

$$RP = e_y^2; \quad RQ = e_x^2; \quad PQ = e_z^2.$$

Следовательно, теорема доказана. Построив треугольник на квадратах масштабных единиц или на величинах, им пропорциональных, и разделив углы этого треугольника пополам, получаем направление аксонометрических осей.

При этом ось X_0 будет биссектрисой $\angle \alpha$, противолежащего стороне $RQ = e_x^2$, ось Y_0 — биссектрисой $\angle \beta$, противолежащего стороне $RP = e_y^2$, и, наконец, ось Z_0 — биссектрисой $\angle \gamma$, противолежащего стороне $PQ = e_z^2$.

Размер отрезков $RP = e_y^2$, $RQ = e_x^2$, $PQ = e_z^2$, нужных для построения треугольника PQR , может быть получен алгебраически путем возведения в квадрат числа миллиметров, содержащихся в длинах масштабных единиц e_x , e_y и e_z , и, кроме того, величины, пропорциональные e_x^2 , e_y^2 , e_z^2 , могут быть также определены графически по способу, показанному на рис. 37.

На рис. 37 от точки O по оси X вправо отложены масштабные единицы e_x , e_y и e_z , а вверх по оси Y — натуральная масштабная единица e .

Соединив точку f с концами отрезков e_x , e_y и e_z и построив у точек a , b и c углы 90° , на оси Y получим графически отрезки, пропорциональные e_x^2 , e_y^2 и e_z^2 . Чтобы убедиться в этом, опишем на отрезке fk как на диаметре полуокружность. Эта полуокружность, пройдя через точку c , дает возможность написать следующее соотношение:

$$\frac{e_z}{e_z^2} = \frac{e}{e_z}.$$

Но $e = 1$, поэтому

$$e_z^2 = e_z^2,$$

т. е. получаем тождество, что и требовалось доказать.

Масштабные единицы e_x , e_y и e_z пропорциональны показателям искажения p_x , p_y и p_z и связаны с ними следующей зависимостью:

$$e_x = e \cdot p_x; \quad e_y = e \cdot p_y; \quad e_z = e \cdot p_z.$$

Следовательно, для получения направления аксонометрических осей можно строить треугольник $P'Q'R'$ на квадратах показателей искажения p_x^2, p_y^2, p_z^2 , условно понимая под величиной квадратов этих отвлеченных чисел некоторые реальные линейные величины, взятые в каком-либо масштабе.

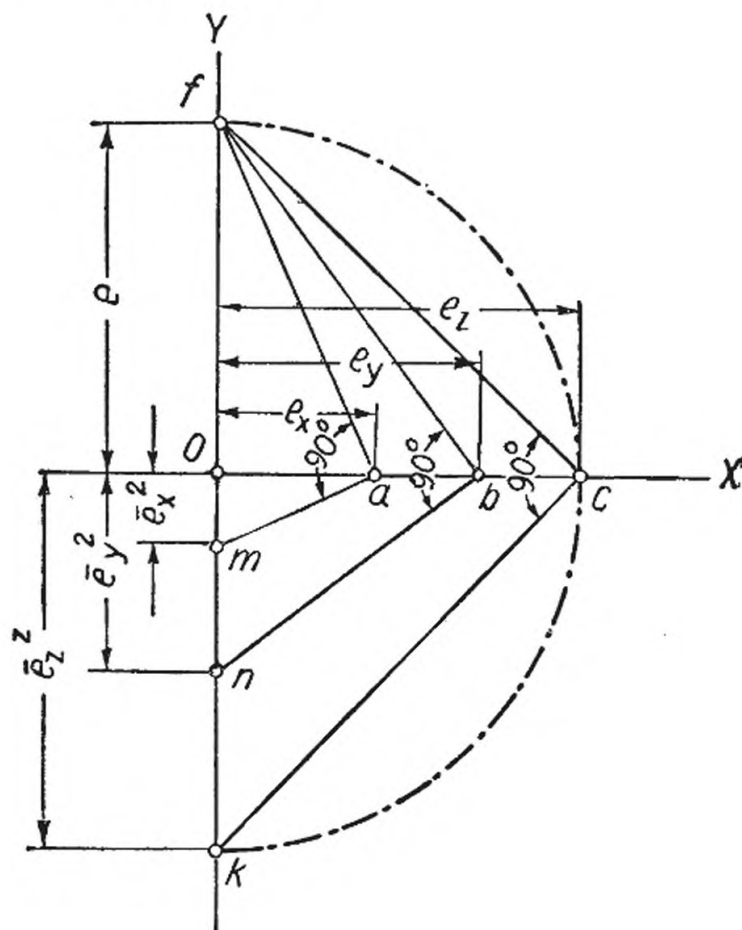


Рис. 37

В этом случае направления аксонометрических осей будут совпадать с биссектрисами углов $\Delta P'Q'R'$.

1.11. Теорема Гаусса¹

Теорема. Чтобы выходящие из одной точки на плоскости три отрезка e_x, e_y и e_z можно было принять за прямоугольные проекции трех равных взаимно перпендикулярных отрезков в пространстве, необходимо и достаточно, чтобы векторная сумма квадратов векторов, представленных этими отрезками, была равна нулю.

Вывод этой теоремы, опубликованной Гауссом без доказательства, был сделан в 1890-е гг. А. Шварцем.

¹ Friedrich Gauß (1777—1855) — профессор Геттингенского университета.

По смыслу теоремы Гаусса в случае прямоугольного аксонометрического проецирования существует определенная зависимость размеров аксонометрических масштабных единиц e_x , e_y и e_z от выбранного направления аксонометрических осей X_0 , Y_0 и Z_0 .

Как известно, в косоугольной аксонометрии эта зависимость отсутствовала, и на основании теоремы Польке — Шварца можно выбирать произвольно не только направление осей X_0 , Y_0 и Z_0 , но и размер масштабных единиц e_x , e_y и e_z для этих осей. Для доказательства теоремы Гаусса построим $\triangle QRP$ (рис. 38) на отрезках, длина которых пропорциональна величинам \bar{e}_x^2 , \bar{e}_y^2 и \bar{e}_z^2 , и придадим им направление, отмеченное стрелками. Последовательное отложение векторов на рис. 38, как известно, представляет графическое их сложение.

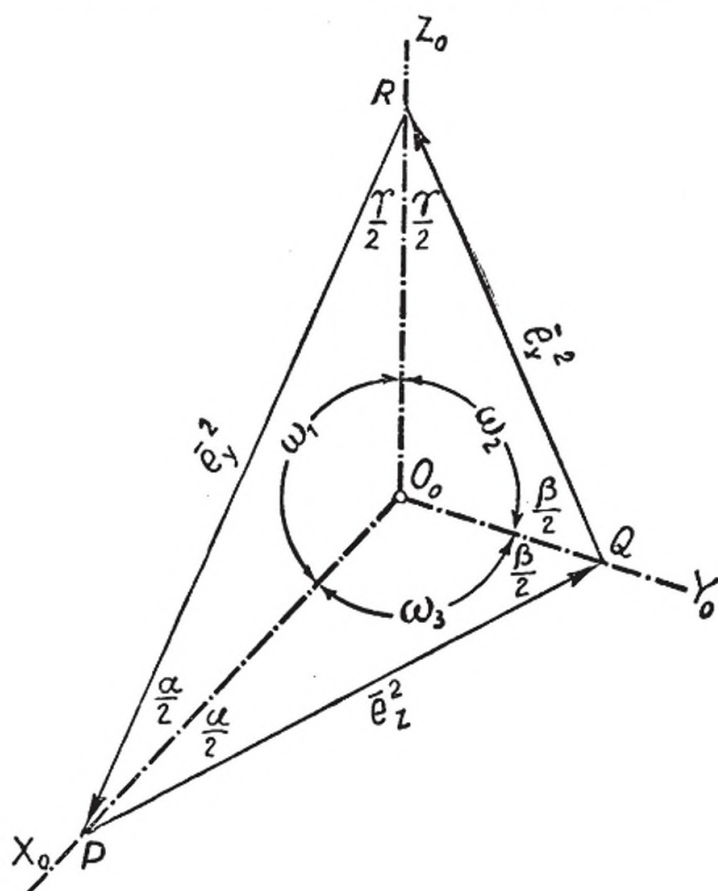


Рис. 38

Мы знаем, что если при векторном сложении ломаная линия, образованная векторами, замыкается, то это говорит о том, что сумма складываемых векторов равна нулю.

Следовательно, в нашем случае замкнутый треугольник PQR , построенный на векторах, длина которых пропорциональна \bar{e}_x^2 , \bar{e}_y^2 и \bar{e}_z^2 , может быть выражен условно уравнением

$$\bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2 + \bar{e}_z^2 = 0.$$

Значение величин, пропорциональных e_x^2 , e_y^2 и e_z^2 , можно определить графически по способу, представленному на рис. 37, или алгебраически.

На основании теоремы Вейсбаха аксонометрические оси X_0 , Y_0 и Z_0 суть биссектрисы углов P , Q и R ΔPQR , стороны которого равны или пропорциональны квадратам аксонометрических масштабных единиц e_x^2 , e_y^2 и e_z^2 . Поэтому, разделив пополам углы $P = \alpha$, $Q = \beta$ и $R = \gamma$ (см. рис. 38), получим направления аксонометрических осей X_0 , Y_0 и Z_0 .

После сделанных построений выбираем некоторую прямоугольную систему координатных осей M , N на плоскости с началом в точке C (рис. 39) и переносим в эту точку построенные на рис. 38 векторы \bar{e}_x^2 , \bar{e}_y^2 и \bar{e}_z^2 , сохраняя их направление.

Обозначим конец вектора \bar{e}_x^2 через a , конец вектора \bar{e}_y^2 — через b , конец вектора \bar{e}_z^2 — через f и выразим каждый вектор комплексным числом типа $n + mi$, где под коэффициентами n и m будем понимать координаты конечных точек a , b и f векторов \bar{e}_x^2 , \bar{e}_y^2 и \bar{e}_z^2 в системе осей N и M .

В этом случае:

- вектору \bar{e}_x^2 соответствует комплексное число $n_a + m_a i$;
- вектору \bar{e}_y^2 соответствует комплексное число $n_b + m_b i$;
- вектору \bar{e}_z^2 соответствует комплексное число $n_f + m_f i$.

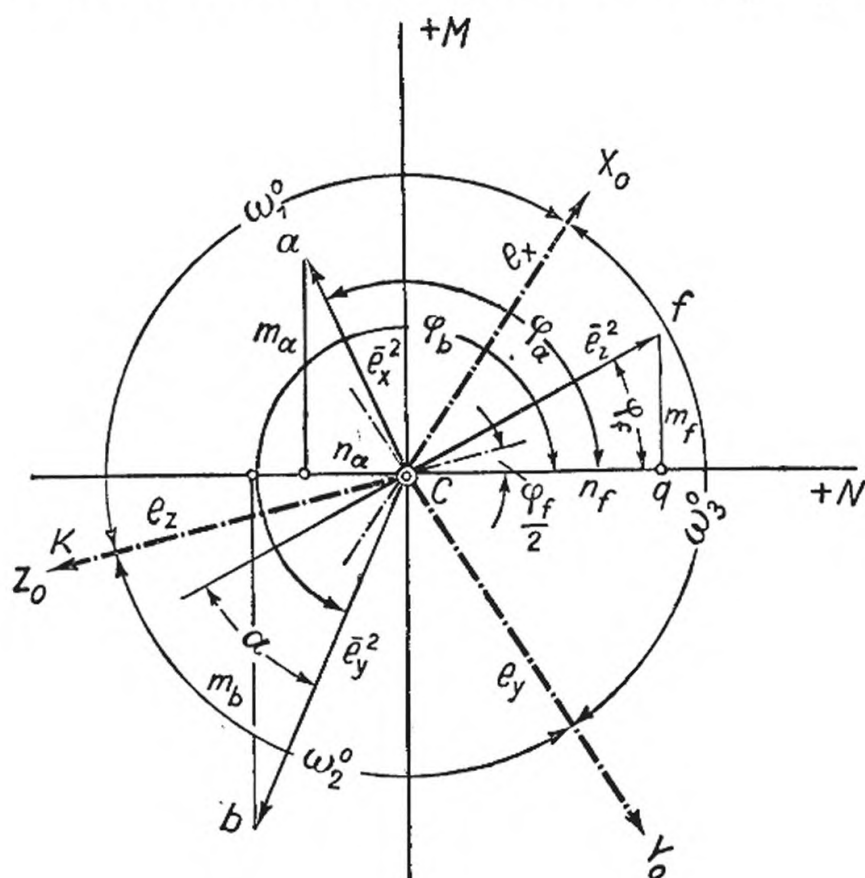


Рис. 39

Найдем теперь величину и направление векторов \bar{e}_x , \bar{e}_y и \bar{e}_z . Для этого придется извлечь квадратные корни из комплексных чисел $n_a + m_a i$, $n_b + m_b i$ и $n_f + m_f i$. Для извлечения квадратного корня из комплексного числа необходимо извлечь корень из его модуля ρ и разделить пополам его амплитуду φ .

Модулем комплексного числа, как известно, называется величина

$$\rho = \sqrt{n^2 + m^2},$$

а амплитудой

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{m}{n}$$

(в нашем случае $\rho_1 = e_x^2$, $\rho_2 = e_y^2$, $\rho_3 = e_z^2$). Поэтому, извлекая корни четвертой степени из модулей чисел $n_a + m_a i$, $n_b + m_b i$ и $n_f + m_f i$, получаем величины, равные масштабным аксонометрическим единицам e_x , e_y и e_z :

- $\rho_1 = \sqrt[4]{n_a^2 + m_a^2}$ дает размер аксонометрической единицы e_x ;
- $\rho_2 = \sqrt[4]{n_b^2 + m_b^2}$ дает размер аксонометрической единицы e_y ;
- $\rho_3 = \sqrt[4]{n_f^2 + m_f^2}$ дает размер аксонометрической единицы e_z .

Направление векторов \bar{e}_x , \bar{e}_y и \bar{e}_z получим, разделив пополам амплитуды векторов \bar{e}_x^2 , \bar{e}_y^2 и \bar{e}_z^2 , т. е. разделив пополам углы φ_a , φ_b и φ_f . Действительно, из ΔfCq (см. рис. 39) имеем:

$$Cf = n_f + m_f i.$$

Но $n_f = Cq = e_z^2 \cos \varphi_f$ и $m_f = qf = e_z^2 \sin \varphi_f$, поэтому

$$Cf = e_z^2 \cos \varphi_f + i e_z^2 \sin \varphi_f = e_z^2 (\cos \varphi_f + i \sin \varphi_f).$$

Полученное выражение есть тригонометрическая форма комплексного числа $n_f + m_f i$. Зададимся вопросом, каково же будет направление вектора, длина которого равна e_z ? Назовем искомый вектор (см. рис. 39) через CK и получим:

$$\overline{CK} = e_z = \sqrt{e_z^2} = \sqrt{Cf} = \sqrt{e_z^2 (\cos \varphi_f + i \sin \varphi_f)}. \quad (41)$$

Формула для извлечения корня из комплексного числа может быть получена из формулы Муавра:

$$[\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Здесь n — показатель степени. Для нашего случая $n = 1/2$:

$$\sqrt{\rho(\cos \varphi_f + i \sin \varphi_f)} = \sqrt{\rho} \left(\cos \frac{\varphi_f + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\varphi_f + 2k\pi}{2} \right).$$

Здесь k — цикличность угла φ_f .

Следовательно, для нашего случая

$$\overline{CK} = \sqrt{Cf} = \sqrt{e_z^2} \left(\cos \frac{\varphi_f + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\varphi_f + 2k\pi}{2} \right)$$

и окончательно для случая, когда $k = 0$, имеем:

$$\overline{CK} = e_x \left(\cos \frac{\varphi_f}{2} + i \sin \frac{\varphi_f}{2} \right) = \sqrt[4]{n_f^2 + m_f^2} \left(\cos \frac{\varphi_f}{2} + i \sin \frac{\varphi_f}{2} \right). \quad (42)$$

Сравнивая выражение (42) с выражением (41), приходим к выводу, что величина вектора

$$\overline{CK} = e_z = \rho = \sqrt[4]{n_f^2 + m_f^2},$$

а его направление фиксируется амплитудой $\frac{\varphi_f}{2}$, что и было установлено выше.

Масштабные единицы e_x , e_y и e_z на рис. 39 за счет двузначности квадратного корня можно откладывать в двух направлениях от начала координат C .

Гаусс показал, что можно выбрать такие три направления для векторов e_x , e_y и e_z (из шести возможных), которые дадут на рис. 39 углы ω_1^0 , ω_2^0 и ω_3^0 , в точности равные углам ω_1 , ω_2 и ω_3 между аксонометрическими осями X_0 , Y_0 и Z_0 (см. рис. 38).

Действительно, на основании теоремы Вейсбаха известно, что аксонометрические оси представляют собой биссектрисы углов треугольника QPR , построенного на отрезках, пропорциональных \bar{e}_x^2 , \bar{e}_y^2 и \bar{e}_z^2 , поэтому, приняв обозначения по рис. 38, получим:

$$\omega_1 = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \frac{\gamma + \alpha}{2},$$

но $\gamma + \alpha = 180^\circ - \beta$, поэтому

$$\omega_1 = 180^\circ - \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{180^\circ + \beta}{2};$$

$$\omega_2 = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2},$$

но $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$, поэтому

$$\omega_2 = 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ + \alpha}{2}, \quad (43)$$

но $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, поэтому

$$\omega_3 = 180^\circ - \frac{180^\circ - \gamma}{2} = \frac{180^\circ + \gamma}{2}.$$

Далее, пользуясь обозначениями углов на рис. 39, можно написать, что амплитуда вектора \bar{e}_z^2 есть $\angle \varphi_f$, поэтому \bar{e}_z имеет два значения:

$$1) \angle \frac{\varphi_f}{2} \text{ или } 2) \angle \frac{\varphi_f}{2} + 180^\circ.$$

На рис. 39 амплитуда для вектора \bar{e}_z взята равной $\angle \frac{\varphi_f}{2} + 180^\circ$.

Угол, составленный вектором \bar{e}_y^2 и продолжением вектора \bar{e}_z^2 , на рис. 39 равен $\angle \alpha$ (см. рис. 38).

Поэтому можно написать, что амплитуда для вектора \bar{e}_y^2 будет равна амплитуде вектора \bar{e}_z^2 плюс 180° и плюс $\angle \alpha$, т. е. амплитуда вектора \bar{e}_y^2 равна

$$\varphi_f + 180^\circ + \alpha.$$

При этом амплитуда вектора \bar{e}_y может иметь также двойное значение:

$$1) \frac{\varphi_f}{2} + \frac{180^\circ}{2} + \frac{\alpha}{2} \text{ или } 2) \frac{\varphi_f}{2} + \frac{180^\circ}{2} + \frac{\alpha}{2} + 180^\circ.$$

На рис. 39 взято второе из возможных значений амплитуды вектора \bar{e}_y , равное $\frac{\varphi_f}{2} + \frac{180^\circ}{2} + \frac{\alpha}{2} + 180^\circ$.

Определим теперь, например, $\angle \omega_2^0$, составленный на рис. 39 векторами \bar{e}_y и \bar{e}_z . Этот угол равен разности амплитуд векторов \bar{e}_y и \bar{e}_z .

Таким образом,

$$\omega_2^0 = \frac{\varphi_f}{2} + \frac{180^\circ}{2} + \frac{\alpha}{2} + 180^\circ - \frac{\varphi_f}{2} - 180^\circ,$$

откуда

$$\omega_2^0 = \frac{180^\circ + \alpha}{2}. \quad (44)$$

В результате, сравнивая выражение (44) с (43), можно заключить, что угол ω_2 , составленный аксонометрическими осями Y_0 и Z_0 на рис. 38, в точности равен углу ω_2^0 , составленному векторами e_y и e_z на рис. 39, т. е. $\angle \omega_2 = \angle \omega_2^0$, и аналогичными рассуждениями может быть доказано, что $\angle \omega_1 = \angle \omega_1^0$ и $\angle \omega_3 = \angle \omega_3^0$, что и требовалось установить.

Анализируя сделанный вывод, приходим к заключению, что направление трех выходящих из одной точки на плоскости отрезков e_x , e_y и e_z только тогда можно принять за направление осей X_0 ,

Y_0 и Z_0 прямоугольной аксонометрической проекции, а сами отрезки e_x , e_y и e_z — за аксонометрические масштабные единицы для этих осей, когда векторная сумма квадратов трех векторов, представленных этими отрезками, будет равна нулю. При этом аксонометрические оси X_0 , Y_0 и Z_0 по направлению совпадут на основании теоремы Вейсбаха с направлением биссектрис углов треугольника, построенного на отрезках \bar{e}_x^2 , \bar{e}_y^2 и \bar{e}_z^2 (или на отрезках, им пропорциональных), представляющего собой графически векторную систему $\bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2 + \bar{e}_z^2 = 0$.

1.12. Прямоугольная триметрическая проекция

Триметрической проекцией называется такая аксонометрическая проекция, для которой $e_x \neq e_y \neq e_z$. Для косоугольного проецирования была выведена теорема Польке — Шварца, на основании которой любые три отрезка, исходящие на плоскости из одной точки, могли быть приняты за параллельные проекции трех любых отрезков, случайно расположенных в пространстве. Для прямоугольных аксонометрических проекций к этой теореме вводятся ограничительные условия, согласно которым направления прямоугольных аксонометрических осей X_0 , Y_0 и Z_0 и величины масштабных единиц e_x , e_y и e_z находятся между собой в определенной зависимости, устанавливаемой теоремой Гаусса.

По смыслу теоремы Гаусса исходящие из одной точки на плоскости три отрезка e_x , e_y и e_z можно принять за прямоугольные аксонометрические проекции трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков в пространстве только в том случае, если векторная сумма квадратов трех векторов, представленных этими отрезками, равна нулю.

Кроме того, выше было показано, что в случае прямоугольного аксонометрического проецирования получается остроугольный треугольник следов, и аксонометрические оси X_0 , Y_0 и Z_0 составляют попарно тупые углы. Наконец, на основании теоремы Вейсбаха направления осей X_0 , Y_0 и Z_0 прямоугольной аксонометрической проекции должны совпадать с биссектрисами углов треугольника, построенного на трех отрезках, равных или пропорциональных по длине квадратам масштабных единиц, т. е. на отрезках \bar{e}_x^2 , \bar{e}_y^2 и \bar{e}_z^2 .

Перечисленные выше положения дают возможность построить оси триметрической прямоугольной проекции, если заданы e_x , e_y и e_z , и, кроме того, решить обратную задачу, т. е. определить масштабные единицы e_x , e_y и e_z для заданного направления триметрических осей X_0 , Y_0 и Z_0 .

Рассмотрим первый случай. Допустим, что надо построить оси X_0 , Y_0 и Z_0 некоторой прямоугольной аксонометрической проекции

и определить масштабные единицы e_x , e_y и e_z , соответствующие направлению этих осей. Для прямоугольной аксонометрии оси X_0 , Y_0 и Z_0 , как было сказано выше, должны попарно составлять тупые углы.

Поэтому, взяв точку O_0 (рис. 40), проводим три луча, составляющие между собой тупые углы ω_1 , ω_2 и ω_3 . Приняв направление этих трех лучей за направление аксонометрических осей X_0 , Y_0 и Z_0 , строим треугольник следов $A_0B_0C_0$, для которого оси X_0 , Y_0 и Z_0 будут высотами. Сторону C_0B_0 проводим перпендикулярно к оси Z_0 из любой точки m , взятой на продолжении оси X_0 . Сторону A_0C_0 проводим из точки C_0 перпендикулярно к оси Y_0 , сторону A_0B_0 проводим из точки A_0 перпендикулярно к оси Z_0 .

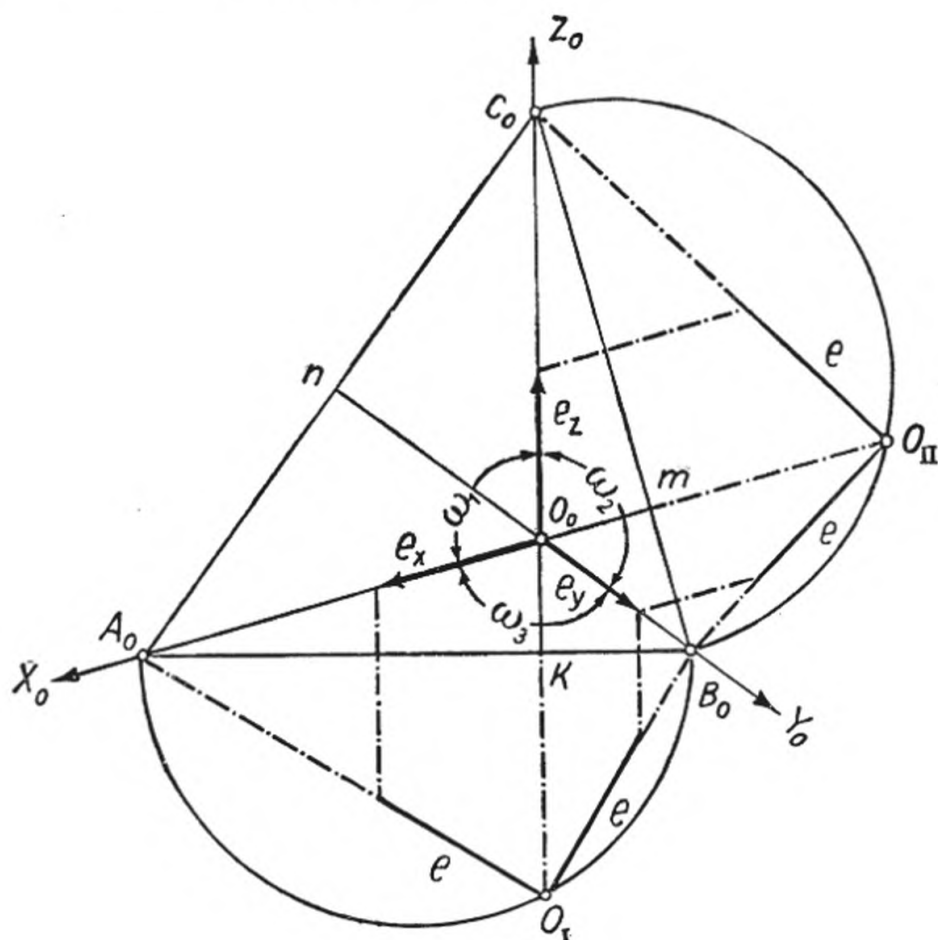


Рис. 40

Далее, для определения масштабных единиц e_x , e_y и e_z совмещаем грани A_0OB_0 и B_0OC_0 пространственного тетраэдра, показанного на рис. 18, с плоскостью треугольника следов $A_0B_0C_0$. Как это сделать, уже известно. Для этого на сторонах A_0B_0 и B_0C_0 $\Delta A_0B_0C_0$ (см. рис. 40) строим полуокружности и на этих полуокружностях намечаем точки O_I и O_{II} , отвечающие совмещенному положению начала координат O с плоскостью $\Delta A_0B_0C_0$. На рис. 40 пространственный

тетраэдр и его вершина O не показаны, чтобы не осложнять изображения. Наметив точки O_I и O_{II} на продолжении осей Z_0 и X_0 , откладываем по линиям $O_I A_0$ и $O_I B_0$ от точки O_I какую-нибудь линейную масштабную единицу, равную, например, отрезку e , и переносим затем ее на оси X_0 и Y_0 . В результате сделанного построения на осях X_0 и Y_0 будут намечены искомые масштабные единицы e_x и e_y . После этого, пользуясь точкой O_{II} , находим последнюю масштабную единицу e_z для оси Z_0 . Таким образом, задача решена и найдены три масштабные единицы e_x , e_y и e_z для выбранных случайно трех осей X_0 , Y_0 и Z_0 , составляющих между собой на плоскости тупые углы ω_1 , ω_2 и ω_3 .

Решим обратную задачу. Допустим, даны три масштабные единицы e_x , e_y и e_z некоторой прямоугольной триметрической проекции и требуется наметить для них направление осей X_0 , Y_0 и Z_0 . Как известно, задаваясь величиной масштабных единиц e_x , e_y и e_z , следует считаться с соотношением, выведенным выше (см. соотношение (33)).

Вейсбахом доказана теорема (см. параграф 1.10), на основании которой аксонометрические оси суть равноделящие углов треугольника, стороны которого равны или пропорциональны квадратам аксонометрических единиц. Поэтому для решения поставленной задачи возводим в квадрат величины заданных или выбранных масштабных единиц e_x , e_y и e_z и строим на них треугольник PQR (рис. 41).

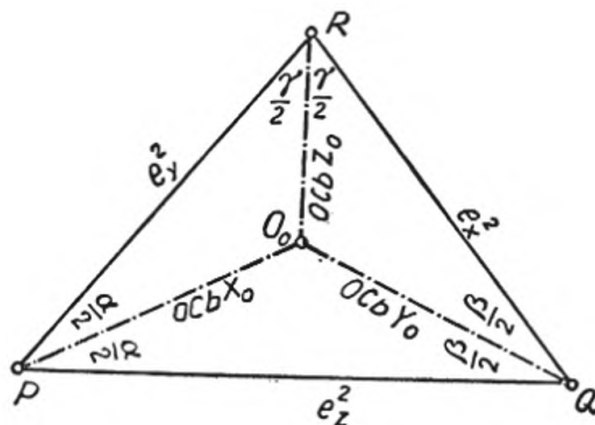


Рис. 41

Возведение в квадрат величин, пропорциональных отрезкам e_x , e_y и e_z , можно сделать графически (см. рис. 37).

Деля пополам углы этого треугольника PQR , на основании теоремы Вейсбаха получаем оси X_0 , Y_0 и Z_0 , соответствующие заданным (или выбранным) трем масштабным единицам e_x , e_y и e_z . Пользование триметрическими осями неудобно, так как приходится прибегать к трем различным масштабным единицам, поэтому триметрическая проекция редко применяется.

1.13. Прямоугольная изометрическая проекция

Если все три оси X , Y и Z одинаково наклонены к плоскости треугольника следов, мы получаем изометрическую проекцию, для которой все показатели искажения имеют одно и то же значение, т. е.

$$P_x = P_y = P_z,$$

поэтому для изометрической проекции

$$e_x = e_y = e_z.$$

Ранее было установлено, что для прямоугольной аксонометрии существует следующее соотношение между показателями искажения:

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 2e^2.$$

Поэтому для изометрической проекции можно написать:

$$3e_x^2 = 3e_y^2 = 3e_z^2 = 2e^2,$$

или

$$e_x = e_y = e_z = e\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816e,$$

кроме того,

$$P_x = P_y = P_z = 0,816. \quad (45)$$

Таким образом, все отрезки, параллельные в пространстве осям X , Y и Z , в изометрической проекции сокращаются примерно в 0,82 раза.

Так как в прямоугольной изометрии $e_x = e_y = e_z$, то, конечно, будут равны и квадраты этих единиц, т. е. можно написать равенство

$$e_x^2 = e_y^2 = e_z^2.$$

Таким образом, для прямоугольной изометрии треугольник, построенный на отрезках, равных или пропорциональных квадратам масштабных единиц, будет равносторонний.

А если это так, то на основании теоремы Вейсбаха изометрические оси, будучи биссектрисами равностороннего треугольника (рис. 42), должны составлять углы

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 120^\circ. \quad (46)$$

Учтем также, что окружности, спроецированные по способу изометрии, обращаются в эллипсы, малые оси которых должны на ос-

новании сказанного в параграфе 1.9 совпадать с направлением изометрических осей X_0 , Y_0 и Z_0 , а большие оси этих эллипсов должны иметь направление, перпендикулярное к осям X_0 , Y_0 и Z_0 .

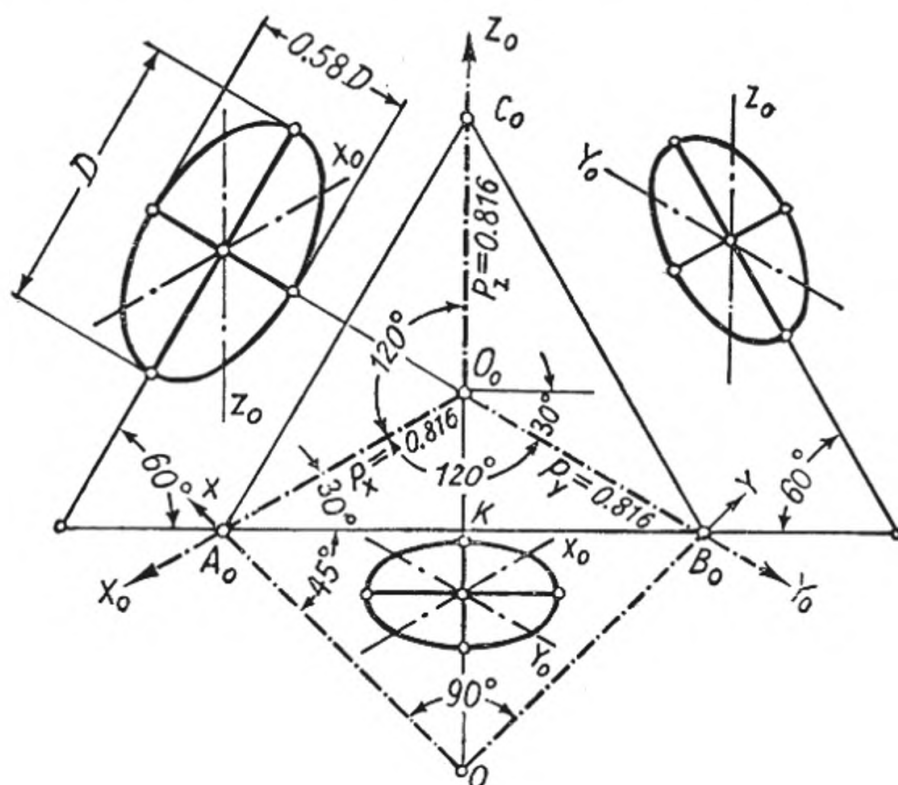


Рис. 42

Таким образом, большая ось эллипса, отображающего проекцию окружности, расположенной в горизонтальных плоскостях, будет равна натуральной величине диаметра проецируемой окружности (см. параграф 1.9) и будет направлена горизонтально, а большие оси эллипсов, отображающих изометрические проекции окружностей, расположенных в плоскостях, параллельных плоскостям проекций V и W , должны быть наклонены к горизонту под углом 60° .

Малые оси всех трех эллипсов равны $0,58D$ (см. рис. 42).

Чтобы убедиться в этом, сравним ΔA_0OB_0 (см. рис. 18), представляющий собой часть плоскости проекции H , с его изометрической проекцией, выраженной на рис. 42 треугольником $A_0O_0B_0$.

Из ΔA_0OB_0 можно написать:

$$OK = A_0K \operatorname{tg} 45^\circ = A_0K.$$

Из $\Delta A_0O_0B_0$ очевидно, что изометрическая проекция O_0K отрезка пространства OK равна

$$O_0K = A_0K \operatorname{tg} 30^\circ = 0,577A_0K;$$

$$O_0K \approx 0,58A_0K.$$

Делим почленно выведенные соотношения и получаем:

$$\frac{O_0K}{OK} = \frac{0,58A_0K}{A_0K},$$

или

$$\eta = \frac{O_0K}{OK} = 0,58. \quad (47)$$

Отсюда делаем заключение, что отрезки, расположенные в плоскостях, параллельных плоскостям H , V или W и направленные перпендикулярно к сторонам A_0B_0 , A_0C_0 или B_0C_0 треугольника следов, сокращаются в 0,58 раза против натуры. Таким образом, приходим к выводу, что, в то время как большие оси эллипсов, расположенные параллельно сторонам треугольника следов, равны истинной длине диаметров проецируемых окружностей, малые оси их, будучи перпендикулярными к сторонам треугольника следов, должны составлять по величине 0,58 от размера больших осей. Так как стороны B_0C_0 , C_0A_0 и A_0B_0 перпендикулярны соответственно к осям X_0 , Y_0 и Z_0 , то можно заключить, что малые оси трех эллипсов, расположенных в плоскостях, параллельных W_0 , V_0 и H_0 , будут по направлению совпадать с осями X_0 , Y_0 и Z_0 .

Изометрические оси X_0 и Y_0 , составляя между собой угол 120° , наклонены (см. рис. 42) к горизонтальной линии под углом 30° . Это облегчает вычерчивание изометрических проекций, так как для их построения можно применить чертежный треугольник с углами 30 , 60 и 90° . Большим удобством изометрической проекции является также равенство показателей искажения p_x , p_y и p_z масштабных единиц $e_x = e_y = e_z$ и, кроме того, однотипность всех трех эллипсов, изображающих изометрическую проекцию окружности, описанной в плоскостях, параллельных плоскостям проекций H , V и W .

Все эти обстоятельства способствовали широкому применению изометрических изображений.

1.14. Прямоугольная диметрическая проекция

Диметрическая проекция характеризуется тем, что показатели искажения по двум осям равны между собой, а по третьей оси показатель искажения имеет иное значение, отличное от первых двух, т. е. для диметрии можно, например, написать:

$$p_x = p_z \neq p_y.$$

Мы знаем, что показатели искажения p_x , p_y и p_z прямоугольной аксонометрии связаны между собой уравнением

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 2.$$

Для диметрии это уравнение может быть записано так:

$$2p_x^2 + p_y^2 = 2.$$

Обычно принимают значения

$$p_x = p_z = 2p_y,$$

хотя возможны и иные соотношения. Тогда

$$p_x^2 = 4p_y^2,$$

и из третьего уравнения получим

$$2p_x^2 + p_y^2 = 2 \cdot 4p_y^2 + p_y^2 = 2,$$

или

$$9p_y^2 = 2,$$

откуда

$$p_y = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,4714 \quad (48)$$

и

$$p_z = p_x = 2p_y = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2 \cdot 0,4714 = 0,9428. \quad (49)$$

Определим углы ω_1 , ω_2 и ω_3 между осями диметрической прямоугольной проекции, имеющей показатели искажения

$$p_x = p_z = 2p_y.$$

Для этой цели построим треугольник следов $A_0B_0C_0$ (рис. 43). Ось Z_0 направляем вертикально.

Известно, что углы ω_1 , ω_2 и ω_3 должны быть тупыми и оси X_0 , Y_0 и Z_0 представляют собой высоты $\Delta A_0B_0C_0$.

В треугольнике $A_0O_0C_0$ сторона $A_0O_0 = O_0C_0$, так как показатели искажения по этим осям равны между собой, $p_x = p_z$. Угол A_0OC_0 , составленный в пространстве осями X и Z , прямой. Поэтому из $\Delta A_0O_1C_0$, представляющего собой совмещение угла A_0OC_0 с плоскостью треугольника следов $A_0B_0C_0$, можно написать:

$$C_0F = A_0F = C_0O_1 \cos 45^\circ$$

и

$$C_0F = C_0O_1 \cdot 0,707 = C_0O_1 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

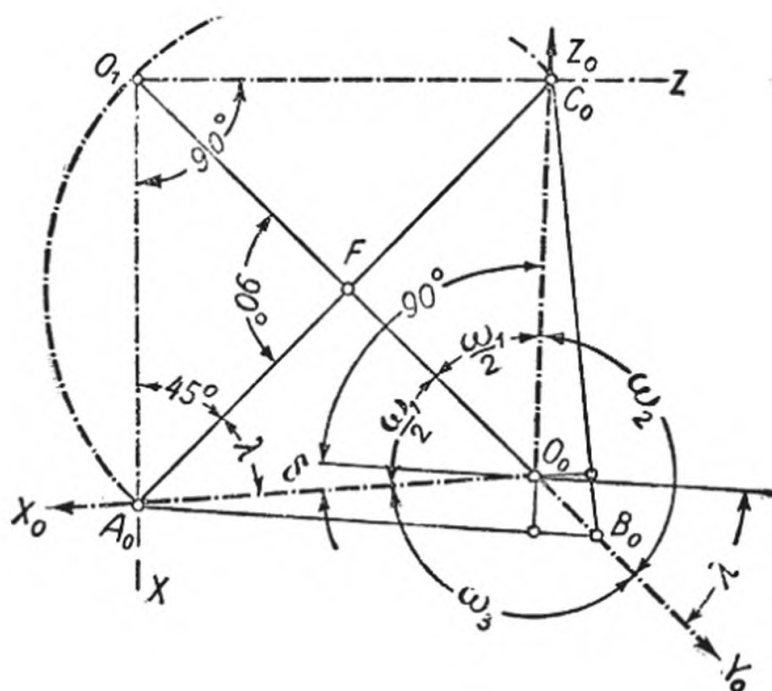


Рис. 43

Далее, из $\triangle O_0FC_0$ имеем:

$$\sin \frac{\omega_1}{2} = \frac{C_0F}{C_0O_0}.$$

Но $C_0O_0 = p_z C_0O_1$ и $C_0F = C_0O_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому

$$\sin \frac{\omega_1}{2} = \frac{C_0O_1 \sqrt{2}}{2p_z C_0O_1} = \frac{\sqrt{2}}{2p_z}.$$

Выше мы установили (см. выражение (49)), что

$$p_z = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

поэтому

$$\sin \frac{\omega_1}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4} = 0,75,$$

откуда по таблицам синусов находим угол:

$$\frac{\omega_1}{2} \approx 48^\circ 35' \quad \text{и} \quad \omega_1 = 2 \cdot 48^\circ 35' = 97^\circ 10'. \quad (50)$$

Угол наклона оси X_0 к горизонту

$$\delta = \omega_1 - 90^\circ = 97^\circ 10' - 90^\circ = 7^\circ 10'. \quad (51)$$

Определяя далее углы ω_2 и ω_3 , учтем, что

$$\omega_2 + \omega_3 = 360^\circ - \omega_1 = 360^\circ - 97^\circ 10' = 262^\circ 50',$$

откуда

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{262^\circ 50'}{2} = 131^\circ 25'$$

и

$$\lambda = \omega_2 - 90^\circ = 41^\circ 25'.$$

На рис. 44 показаны оси прямоугольной диметрической проекции для случая $p_x = p_z = 2p_y$.

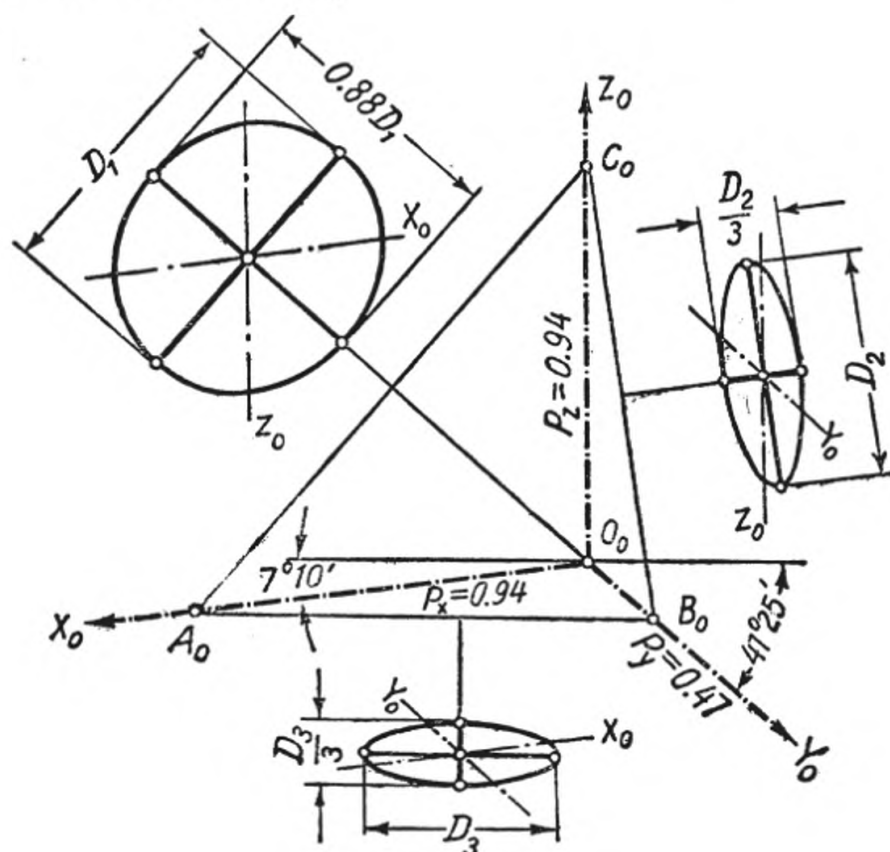


Рис. 44

В этом случае все отрезки, направленные параллельно осям X и Z , сокращают свою величину в 0,94 раза, а отрезки, параллельные оси Y , имеют показатель искажения $p_y = 0,47$. Отрезки, расположенные параллельно сторонам A_0B_0 , B_0C_0 и A_0C_0 , сохраняют фактический размер и, наконец, отрезки, перпендикулярные к сторонам A_0B_0 и C_0B_0 , как увидим ниже, сокращаются в 0,33 раза, а отрезки, перпендикулярные стороне A_0C_0 , имеют показатель искажения 0,88.

Действительно, из $\Delta A_0 O_1 F$ по рис. 43 имеем:

$$O_1 F = FA_0 \operatorname{tg} 45^\circ, \quad (52)$$

а из $\Delta A_0 O_0 F$ диметрическая проекция отрезка $O_1 F$ есть

$$O_0 F = FA_0 \operatorname{tg} \lambda = FA_0 \operatorname{tg} \frac{180^\circ - \omega_1}{2} = FA_0 \operatorname{tg} \frac{180^\circ - 97^\circ 10'}{2} = FA_0 \operatorname{tg} 41^\circ 25'.$$

Разделив последнее выражение на выражение (52), получаем, что показатель искажения

$$\eta = \frac{O_0 F}{O_1 F} = \frac{FA_0 \operatorname{tg} 41^\circ 25'}{FA_0 \operatorname{tg} 45^\circ} \approx 0,88, \quad (53)$$

что и требовалось установить.

Для определения показателей искажения по направлениям, перпендикулярным сторонам $A_0 B_0$ и $B_0 C_0$ треугольника следов, необходимо выяснить (см. рис. 16) отношение проекции $O_0 f$ к истинной величине отрезка $O f$. Для этой цели рассмотрим на рис. 16 заштрихованный треугольник $f O C_0$. На рис. 45 $\Delta f O C_0$ представлен без искажения, которое он претерпел на рис. 16.

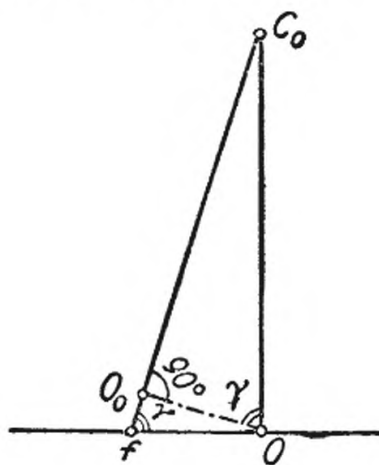


Рис. 45

В $\Delta f O O_0$ угол у вершины f равен углу γ , так как $f O \perp O C_0$ и $O O_0 \perp f C_0$.

Выше мы установили (см. выражение (49)), что $p_z = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Но согласно выражению (20) $p_z = \sin \gamma$, поэтому $\sin \gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, откуда

$$\sin^2 \gamma = \frac{8}{9}. \quad (54)$$

Для определения интересующего нас отношения

$$i = \frac{O_0 f}{O f} = \cos \gamma \quad (55)$$

учтем, что $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$, поэтому

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}.$$

Подставляя значение $\cos \gamma$ в уравнение (55), получаем

$$i = \frac{O_0 f}{O f} = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}. \quad (56)$$

Далее, подставляя сюда значение для $\sin^2 \gamma$, имеем

$$i = \frac{O_0 f}{O f} = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3} = 0,33, \quad (57)$$

что и требовалось установить.

Для третьего направления, перпендикулярного к $A_0 C_0$ (см. рис. 44), соотношение

$$\eta = \frac{O_0 f'}{O f'}$$

примет вид

$$\eta = \frac{O_0 f'}{O f'} = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}.$$

Согласно выражению (20) $\sin \beta = p_y$, а по уравнению (48) $p_y = \frac{\sqrt{2}}{3}$, поэтому $\sin^2 \beta = \frac{2}{9}$ и получим

$$i' = \frac{O_0 f'}{O f'} = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{7}{9}} = 0,88. \quad (58)$$

Это же соотношение было выведено выше другим способом (см. выражение (53)).

Выведенные соотношения могут быть приняты для построения эллипсов, являющихся диметрическими проекциями окружностей, расположенных в плоскостях, параллельных плоскостям проекций H , V и W .

Эллипсы, относящиеся к плоскости V , будут иметь соотношение осей (см. рис. 44)

$$\frac{d}{D} = 0,88,$$

а эллипсы, относящиеся к плоскостям H и W , будут иметь соотношение (см. рис. 44)

$$\frac{d}{D} = \frac{1}{3} = 0,33.$$

Большие оси этих эллипсов могут быть легко построены, так как они всегда располагаются перпендикулярно к осям X_0 , Y_0 и Z_0 , а малые оси, будучи в свою очередь перпендикулярными к большим осям, совпадают с направлением осей X_0 , Y_0 и Z_0 .

1.15. Косоугольная диметрическая проекция

Осями косоугольной аксонометрической проекции на основании теоремы Польке — Шварца могут считаться любые три отрезка на плоскости, исходящие из одной точки и не сливающиеся в одну прямую линию. Выбор масштабных единиц для косоугольной аксонометрической проекции может быть произведен по нашему усмотрению и вне зависимости от взятого направления осей X_0 , Y_0 и Z_0 . Выше (см. параграфы 1.1 — 1.5) вопрос о косоугольной аксонометрической проекции был рассмотрен подробно, поэтому здесь ограничимся лишь указаниями общего характера. Наибольшее применение в технике нашла диметрическая косоугольная проекция, носящая название *фронтальной косоугольной диметрии*. Эта проекция отличается достаточной выразительностью изображения при исключительной простоте графического построения. Оси X_0 и Z_0 для этой проекции берут под прямым углом, а ось Y_0 направляют под углом 45° к горизонту (рис. 46). На основании соображений, изложенных в параграфе 1.2, по направлению осей X_0 и Z_0 откладывают истинную реально замеренную длину отрезков, а по оси Y_0 все размеры сокращают в два раза (конечно, возможны и любые другие сокращения), т. е. показатели искажения принимают равными $p_x = 1$; $p_z = 1$ и $p_y = \frac{1}{2}$.

Окружность, расположенная в плоскости $X — Z$ или в плоскости, ей параллельной, не меняет формы и размера, а окружности, вписанные в плоскости, параллельные двум другим плоскостям $X — Y$ и $Y — Z$, представляются в виде эллипсов, главные оси которых не перпендикулярны осям X_0 , Y_0 и Z_0 . Все необходимые соотношения выписаны непосредственно на рис. 46 и в табл. 37.

В заключение приводим таблицу наиболее принятых соотношений элементов аксонометрической проекции. В таблице даны шесть разновидностей аксонометрии, отличающиеся наиболее простыми соотношениями масштабных единиц и углов наклона осей X_0 и Y_0 к горизонту.

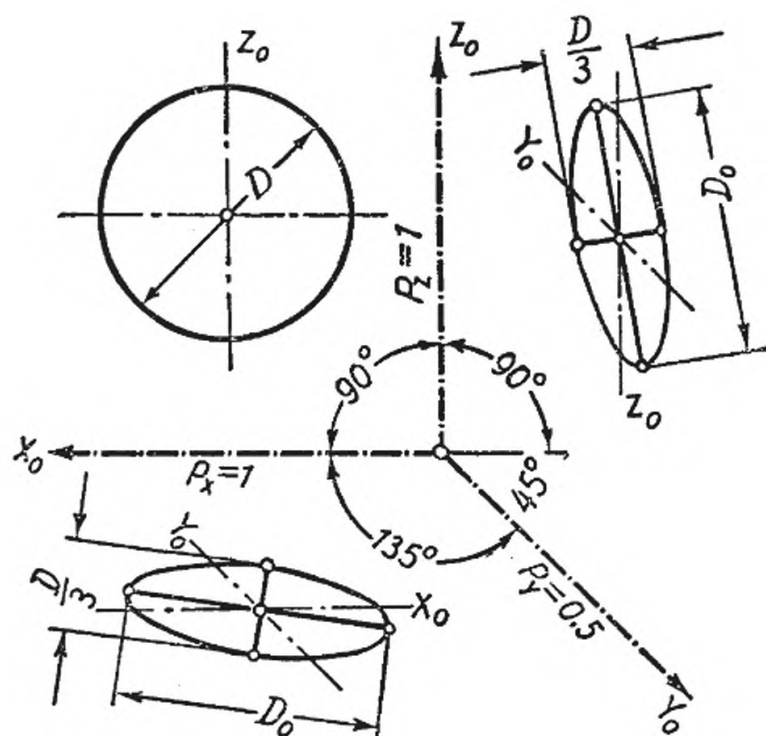


Рис. 46

Данные этой таблицы представлены графически на рис. 47, из рассмотрения которого можно установить, что наибольшей простотой построения отличаются изображения изометрическое и косоугольное диметрическое (см. изображения 1 и 2), а наибольшей наглядностью — прямоугольное диметрическое (см. изображение 3) и прямоугольное триметрическое (см. изображение 5).

Номер изображения на рис. 47	Род проекции	$e_x : e_y : e_z$	$e_z : e$	tg φ	tg ψ
				прибл.	прибл.
1	Прямоугольная изометрическая	1 : 1 : 1	0,8165	$\varphi = 30^\circ$	$\psi = 30^\circ$
2	Косоугольная диметрическая	$1 : \frac{1}{2} : 1$	1	$\varphi = 0^\circ$	$\psi = 45^\circ$
3	Прямоугольная диметрическая	$1 : \frac{1}{2} : 1$	0,9428	1 : 8	7 : 8
4		$1 : \frac{1}{3} : 1$	0,9733	1 : 18	17 : 18
5	Прямоугольная триметрическая	$\frac{5}{6} : \frac{2}{3} : 1$	0,9670	1 : 5	1 : 3
6		$\frac{9}{10} : \frac{1}{2} : 1$	0,9853	1 : 11	1 : 3

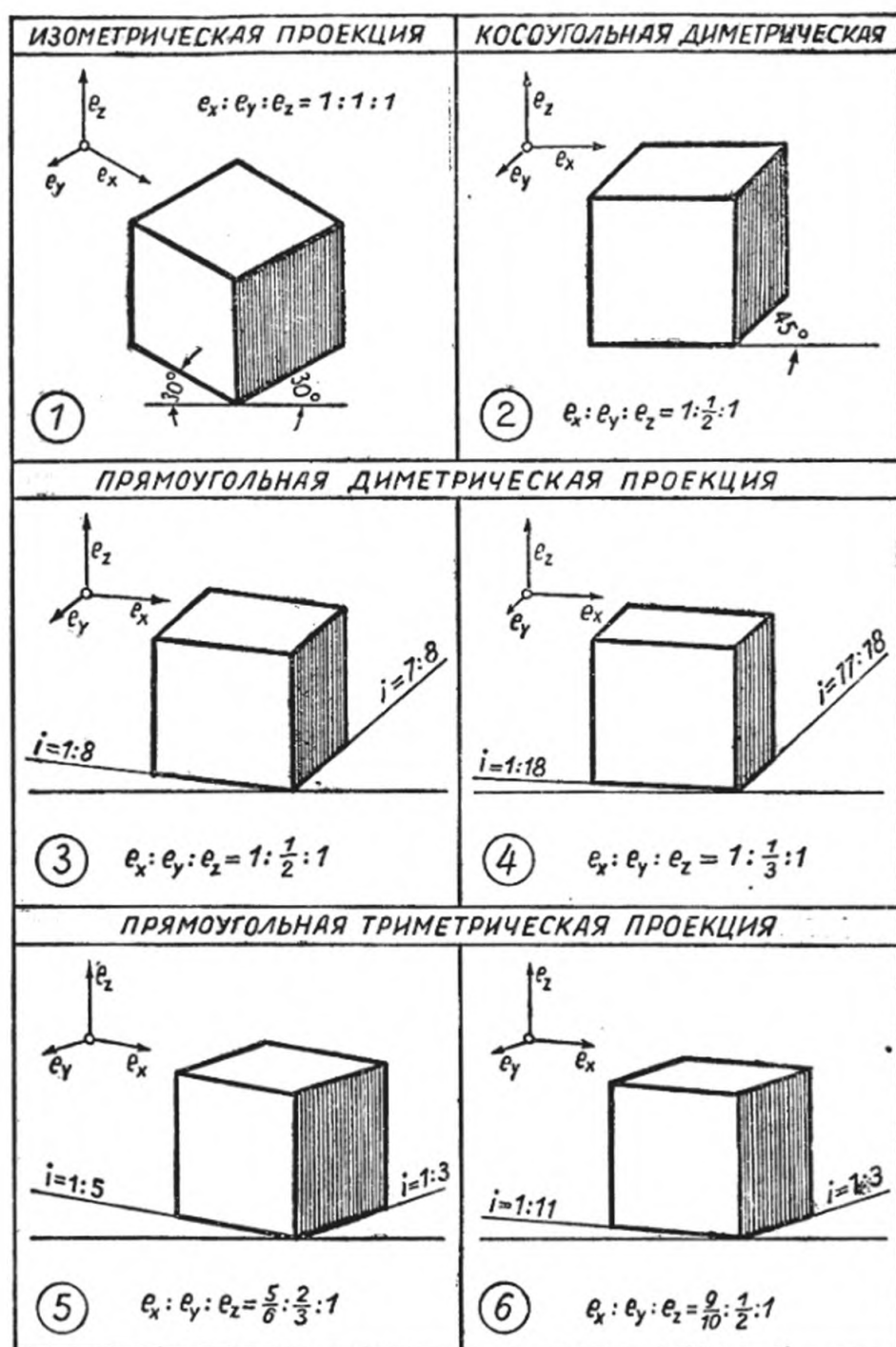


Рис. 47

Часть II
АЛЬБОМ ЧЕРТЕЖЕЙ
АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ
ПРОЕКЦИЙ
С ИХ ОПИСАНИЕМ

Глава 2

ЭЛЕМЕНТЫ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

2.1. Элементы прямоугольной аксонометрической проекции

Изометрическая прямоугольная проекция куба (таблица 1)

В параграфах 1.1, 1.3 и 1.13 было дано теоретическое обоснование элементов прямоугольной изометрической проекции. Было показано, что эта проекция получается при параллельном проецировании заданного объекта на аксонометрическую плоскость проекции M_0 , расположенную перпендикулярно к направлению проецирующих лучей и одинаково наклоненную ко всем трем осям пространства X , Y и Z .

Прямоугольное изометрическое изображение, как известно, характеризуется тем, что углы, составленные осями X_0 , Y_0 и Z_0 (парно), равны каждый 120° , и размеры отрезков, расположенных параллельно этим осям, претерпевают уменьшение в 0,82 раза, т. е. показатели искажения

$$p_x = p_y = p_z = 0,82.$$

Покажем, что прямоугольная изометрическая проекция какого-нибудь тела, например куба (фиг. 1, табл. 1), может быть получена из его ортогональной проекции (проекция Монжа) (фиг. 2) посредством двух поворотов этого предмета перед фасадной плоскостью проекций V до такого положения, когда его диагональ CB (фиг. 3 и 4), займет горизонтальное положение.

Докажем, что в этом случае на фасадной плоскости V получится изометрическое изображение $A_0N_0R_0E_0L_0P_0$ куба (фиг. 4).

На фиг. 2 куб представлен в трех проекциях (см. «положение 1»). Для большей наглядности сделанных построений куб дан в виде игровой кости, грани которой отмечены точками. Вид спереди (фиг. 2) отмечен двумя точками, вид сверху — тремя и вид слева — пятью.

Обозначим левое ребро куба буквами $A(a, a', a'')$ и $B(b, b', b'')$ и после этого сделаем первый поворот куба вокруг вертикальной оси на угол 45° . Куб после этого поворота займет «положение 2» (фиг. 3). Ребро AB после первого поворота выдвинется в сторону зрителя и окажется посередине фасадной проекции (см. проекцию $a'b'$). Отметим диагональ куба CB на проекции вида слева (фиг. 3) штрихпунктирной чертой $c''b''$. Опустим из точки a'' перпендикуляр $a''k$ на диагональ $c''b''$ и после этого сделаем второй поворот куба, наклоняя последний углом B в сторону зрителя до момента, при котором диагональ CB займет горизонтальное положение (фиг. 4), показывающее «положение 3» куба.

Если теперь спроецировать куб $ANCERB$ на фасадную плоскость V по направлению стрелки M , то получим изображение $A_0N_0R_0E_0L_0P_0$, удовлетворяющее всем условиям изометрической проекции. Углы между осями X_0, Y_0 и Z_0 , совпадающими с горизонтальными и вертикальными ребрами куба, оказываются при этом равными каждый 120° , и все стороны куба претерпевают искажение, характеризуемое показателями

$$p_x = p_y = p_z = 0,82.$$

Очертание куба на фасадной плоскости V в этом случае (фиг. 4) представится в виде *правильного шестиугольника*.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим на фиг. 3 $\Delta c''a''b''$. Катет $c''a''$ этого треугольника — диагональ нижней квадратной грани куба. Если размер ребер куба обозначить через a ($a''b'' = a$), а катет $c''a''$ — через l ($c''a'' = l$), то по теореме Пифагора для нижнего квадратного основания куба можно написать:

$$a^2 + a^2 = l^2,$$

откуда

$$l = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Далее обозначим в $\Delta c''a''b''$ острый угол при вершине b'' через α . Тогда из $\Delta c''a''b''$ получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c''a''}{a''b''} = \frac{l}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} = 1,414,$$

откуда

$$\alpha = 54^\circ 45', \text{ или } \alpha \approx 55^\circ.$$

Нетрудно видеть по фиг. 4, что для приведения диагонали $c''b''$ в горизонтальное положение CB необходимо весь куб наклонить вперед на зрителя: $\angle BAA'_0 = \angle CBA = \angle c''b''a'' = \alpha \approx 55^\circ$. Проецируя

теперь куб на фасадную плоскость по направлению стрелки M , можно убедиться, что все вертикальные ребра его уменьшатся по длине в 0,82 раза. Действительно, из $\triangle ABA'_0$ (фиг. 4) получаем:

$$A'_0B = A_0B_0 = AB \sin 55^\circ.$$

Но $AB = a$, поэтому

$$A_0B_0 = a \sin 55^\circ = a \cdot 0,82,$$

откуда показатель искажения для параллельных ребер A_0B_0 , P_0L_0 и N_0R_0 получается равным $p_z = 0,82$. Тогда

$$A_0B_0 = L_0P_0 = N_0R_0 = p_z \cdot a \approx 0,82a.$$

Докажем, что и два других показателя p_x и p_y также равны 0,82. Рассмотрим на фиг. 4 верхнюю грань куба. Грань эта представляет ромб, вертикальная диагональ которого B_0E_0 является проекцией заднего ребра куба CE . Но ребро $CE \parallel AB$, поэтому можно написать, что диагональ

$$B_0E_0 = B_0A_0 = 0,82a.$$

Горизонтальная диагональ R_0L_0 , как было уже выяснено выше, равна

$$R_0L_0 = c''a'' = l = a\sqrt{2}.$$

Обозначив точку пересечения диагоналей E_0B_0 и R_0L_0 через n , можно считать, что $\triangle E_0B_0L_0$ — равнобедренный, так как точка n должна лежать на середине диагонали E_0B_0 , потому что эта точка принадлежит диагонали R_0L_0 и является проекцией точки R , показанной на плоскости W посередине между точками E и B (фиг. 4).

В $\triangle L_0nB_0$ имеем:

$$nB_0 = \frac{B_0E_0}{2} = \frac{0,82}{2}a = 0,41a$$

и

$$nL_0 = \frac{R_0L_0}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

По теореме Пифагора

$$\overline{B_0L_0}^2 = \overline{nB_0}^2 + \overline{nL_0}^2,$$

или

$$B_0L_0 = \sqrt{\overline{nB_0}^2 + \overline{nL_0}^2} = \sqrt{0,41^2 a^2 + \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{0,668} \approx 0,82a.$$

Сторона B_0L_0 параллельна направлению A_0P_0 , принятому нами за направление оси X_0 (фиг. 4), и показатель p_x по этому направлению оказался, как видим, также равным 0,82, т. е. $p_x = 0,82$.

В результате и все остальные ребра, параллельные оси X_0 , уменьшатся в размере в 0,82 раза, т. е.

$$B_0L_0 = R_0E_0 = A_0P_0 = p_x a = 0,82a.$$

Но мы установили, что $\Delta B_0L_0E_0$ — равнобедренный, поэтому ребро

$$E_0L_0 = B_0L_0 = 0,82a.$$

Отсюда заключаем, что и $p_y = 0,82$, следовательно,

$$E_0L_0 = R_0B_0 = N_0A_0 = p_y a = 0,82a.$$

Таким образом, заключаем, что $\Delta B_0L_0E_0$ не только равнобедренный, но и равносторонний, и что все ребра куба на проекции $A_0N_0R_0E_0L_0P_0B_0$ получают сокращение своего размера в 0,82 раза, а очертание куба на плоскости V за счет этого представляется в виде правильного шестиугольника, вокруг которого можно описать окружность из вершины куба B_0 (фиг. 4).

Ромб $R_0E_0L_0B_0$ диагональю E_0B_0 делится на два равносторонних треугольника $E_0B_0L_0$ и $E_0B_0R_0$.

Каждый угол равностороннего треугольника

$$\gamma = \frac{2d}{3} = \frac{2 \cdot 90}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ.$$

На основании этого приходим к выводу, что

$$\angle R_0B_0L_0 = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ.$$

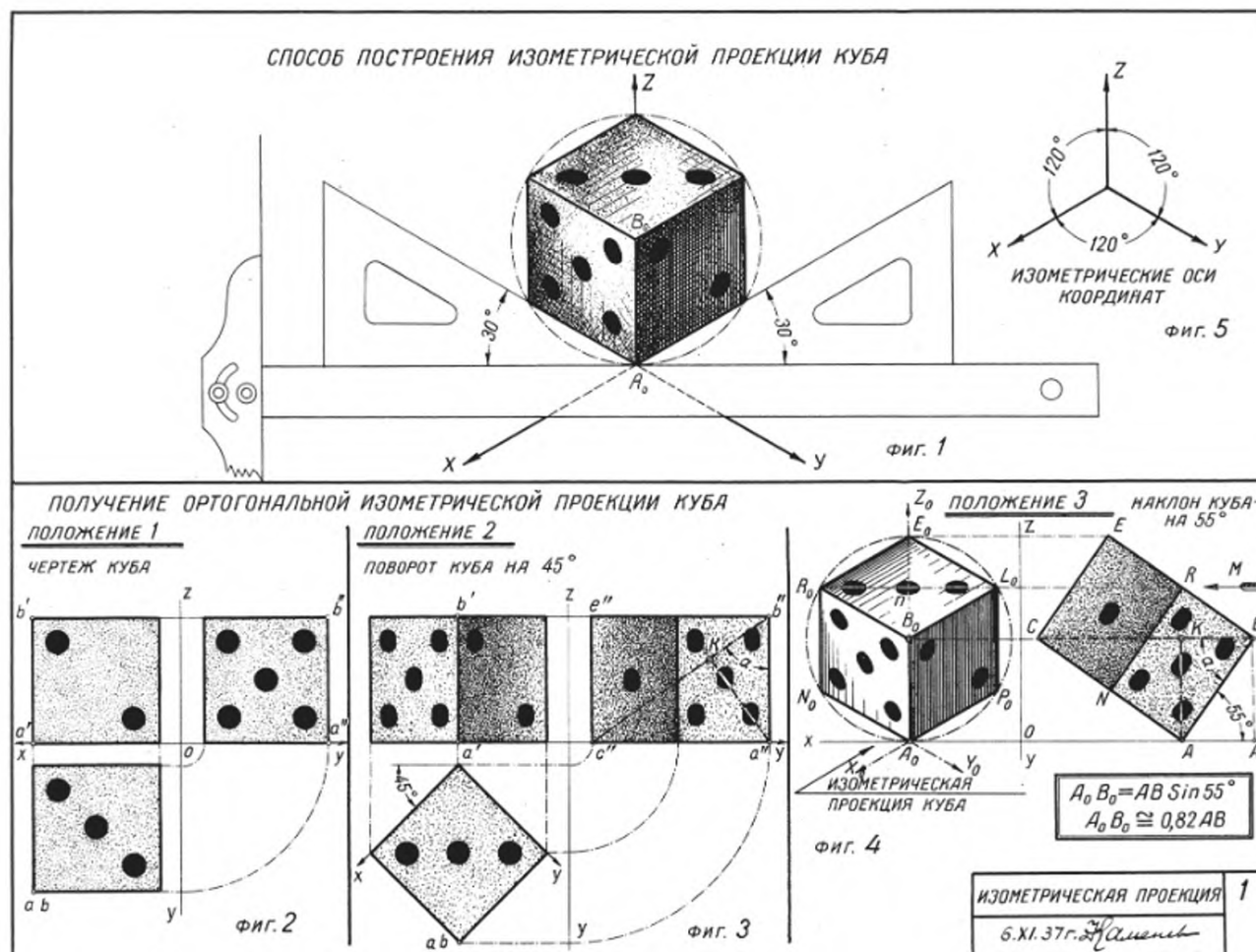
В результате таких же рассуждений придем к выводу, что и $\angle L_0B_0A_0$ и $\angle R_0B_0A_0$ также по величине равны 120° . Приняв направление ребер A_0B_0 , P_0L_0 и R_0N_0 за направление оси Z_0 , ребер A_0P_0 , B_0L_0 и R_0E_0 — за направление оси Y_0 и ребер куба E_0L_0 , R_0B_0 и N_0A_0 — за направление оси X_0 , убеждаемся, что изображению $A_0N_0R_0E_0L_0P_0$ присущи все свойства прямоугольной изометрической проекции, что и требовалось установить.

Значит, получившееся после второго поворота на фасадной плоскости V изображение $A_0N_0R_0E_0L_0P_0B_0$ (фиг. 4) представляет собой *изометрическую проекцию куба*.

При этом ребра куба на изометрическом изображении уменьшили свой размер в 0,82 раза против исходного.

Таблица 1

Изометрическая прямоугольная проекция куба



Здесь следует оговориться, что обычно этим сокращением при вычерчивании изометрических видов предметов для упрощения пренебрегают, и тогда получаются изображения, в точности подобные изометрическому, но более крупные — в $\eta = \frac{1}{0,82} = 1,22$ раза.

Для куба такое увеличенное изображение дано на фиг. 1, где попутно показан также и способ построения изометрических осей при помощи чертежного треугольника с углом 30° при вершине.

На фиг. 5 изометрические оси начерчены отдельно.

Построение изометрических видов плоских многоугольников (таблица 2)

Перед тем как приступить к составлению изометрических видов предметов, ограниченных плоскими поверхностями, необходимо ознакомиться со способом построения изометрических проекций плоских многоугольников.

В частности, разберем способ построения изометрических проекций: а) квадрата, б) прямоугольника, в) шестиугольника, г) более сложных профилей, представляющих комбинации разного вида прямоугольников, треугольников и трапеций. На фиг. 1 табл. 2 дан в ортогональной проекции квадрат. Для его построения прежде всего были проведены две взаимно перпендикулярные оси X и Y . Затем на этих осях были намечены точки A, B, C, D посредством отложения вправо и влево, вниз и вверх от места пересечения осей размера L , равного половине стороны квадрата. Закончив эти подготовительные действия, провели через намеченные точки C и D стороны квадрата, параллельные оси X , а через точки A и B — стороны квадрата, параллельные оси Y .

Обведя толстыми линиями начерченный контур, получили (фиг. 1) квадрат, вычерченный на ортогональных осях X и Y .

Для построения этого же квадрата на изометрических осях порядок действий остается абсолютно тем же самым. Разница заключается только в том, что оси X и Y не будут уже взаимно перпендикулярными, а пересекаются под углом 120° .

Последовательность действий, которые приходится проделать для построения изометрического вида квадрата, показана на фиг. 2—4.

На фиг. 2 проведены изометрические оси под углом 120° одна к другой. По этим осям отложен размер L и намечены точки A и B на оси X и точки C и D на оси Y .

На фиг. 3 через точки C и D проведены стороны квадрата, параллельные оси X , а через точки A и B — две другие стороны, параллельные оси Y . После угощения контурных линий квадрат, начерченный в изометрии, показан на фиг. 4.

На фиг. 5 в ортогональном виде изображен прямоугольник, имеющий большую сторону $2L$, а малую сторону $2l$.

КВАДРАТ	ПРЯМОУГОЛЬНИК	ШЕСТИУГОЛЬНИК
<p>Fig. 1</p>	<p>Fig. 5</p>	<p>Fig. 9</p>
<p>1 РАЗМЕТКА</p> <p>Fig. 2</p>	<p>1 РАЗМЕТКА</p> <p>Fig. 6</p>	<p>1 РАЗМЕТКА</p> <p>Fig. 10</p>
<p>2 ПОСТРОЕНИЕ</p> <p>Fig. 3</p>	<p>2 ПОСТРОЕНИЕ</p> <p>Fig. 7</p>	<p>2 ПОСТРОЕНИЕ</p> <p>Fig. 11</p>
<p>3 ОБВОДКА</p> <p>Fig. 4</p>	<p>3 ОБВОДКА</p> <p>Fig. 8</p>	<p>3 ОБВОДКА</p> <p>Fig. 12</p>

На фиг. 8 дан изометрический вид этого же прямоугольника.

Фигуры 6 и 7 показывают последовательный ход построения.

На фиг. 9 дан ортогональный чертеж правильного шестиугольника. На фиг. 12 изображен изометрически этот шестиугольник, а на фиг. 10 и 11 дан способ построения изометрической проекции этого шестиугольника.

Вершины вычерчиваемого шестиугольника на фиг. 9 отмечены цифрами 1—6. При этом вершины 1 и 4, лежащие на оси X , отмечены двумя кружками. Ось Y пересекает середины сторон 2—3 и 5—6 в точках O и D .

На фиг. 10 построение изометрического вида шестиугольника произведено следующим образом.

Прежде всего проведены изометрические оси, пересекающиеся под углом 120° . После этого по оси X вправо и влево на расстоянии L отмечены точки 1 и 4, а по оси Y отложен размер l , представляющий половину расстояния от точки C до точки D .

Через точки C и D проведены линии параллельно оси X . От точек C и D по этим линиям отложен размер n , равный по величине половине стороны шестиугольника. В результате этого наметились точки 2, 3, 5 и 6, представляющие собой вершины шестиугольника.

После этого остается только соединить точку 1 с точками 2 и 6, а точку 4 — с точками 5 и 3, чтобы получить изометрический вид шестиугольника (фиг. 11 и 12).

Построение изометрического вида для сложного контура (таблица 3)

На фиг. 1 табл. 3 изображен контур продольного сечения анкерной плиты, вычерченный по способу ортогонального проецирования, а на фиг. 2 тот же контур дан в виде изометрического изображения. При этом на фиг. 2 дано два варианта расположения заданного контура.

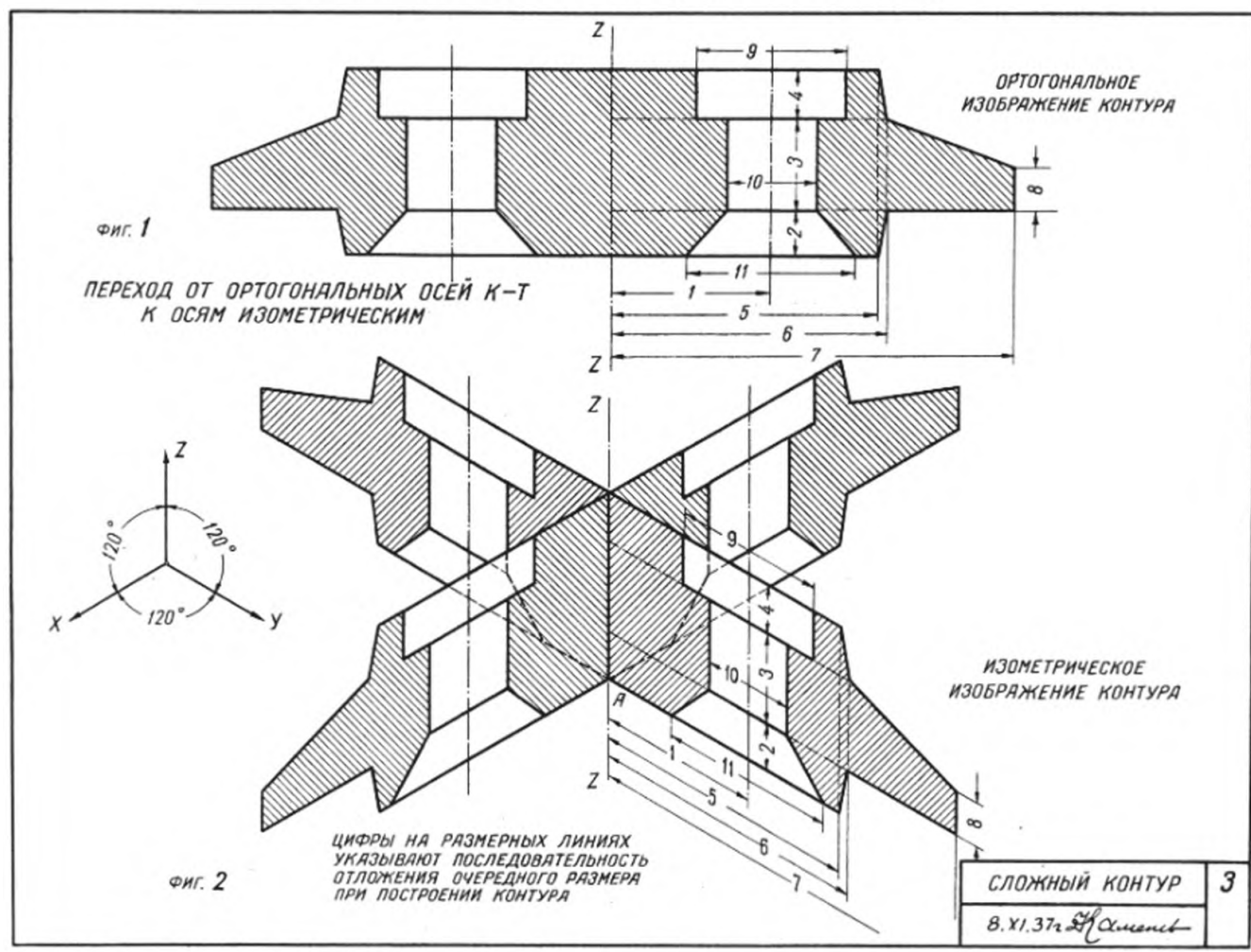
По первому варианту контур расположен в плоскости $Z — Y$, по второму — в плоскости $Z — X$.

Построение изометрической проекции контура сводится к отложению по изометрическим осям размеров, снятых с ортогонального чертежа. Получающимся при этом сокращением по осям обычно пренебрегают и на изометрических осях откладывают действительные размеры элементов контура, снятые непосредственным обмером с ортогонального чертежа.

На фиг. 1 цифры на размерных линиях указывают последовательность, в какой должны быть отложены размеры при построении изометрического изображения на фиг. 2.

Таким образом, после проведения на фиг. 2 оси $Z — Z$ в первую очередь откладывается размер 1 и наносятся вертикальные осевые линии, проходящие по центру двух отверстий (незаштрихованные места).

Построение изометрического вида для сложного контура



После этого по нижней кромке контура от точки A вправо и влево проводят линии параллельно выбранной изометрической оси, например параллельно оси $Y - Y$. Затем на оси Z откладывают размеры 2, 3 и 4 и через точки отложения проводят линии, параллельные оси $Y - Y$.

Сделав это построение, отмечают на нижней линии крайнюю точку, зафиксированную размером 5, на второй линии откладывают размеры 6 и 7, а на третьей и четвертой снова откладывают размеры 6 и 5.

Отложив после этого размер 8, вычерчивают наружный контур плиты, а отложив еще размеры 9, 10 и 11, наносят контур отверстий, имеющих в плите; так как контур плиты симметричен относительно оси $Z - Z$, то размеры 1, 5, 6, 7, 9, 10 и 11 следует откладывать сразу и вправо и влево от оси симметрии, т. е. от оси $Z - Z$.

Вычерчивание изометрического изображения призмы (таблица 4)

На фиг. 1—6 табл. 4 дано шесть вариантов расположения шестигранной призмы в пространстве. На фиг. 1 главная ось шестиугольника направлена вдоль изометрической оси X , а высота призмы отложена вдоль оси Z , т. е. основания призмы лежат в горизонтальных плоскостях.

На фиг. 2 главная ось шестиугольного основания совпадает с осью Y , а основания призмы, как и на фиг. 1, расположены в горизонтальных плоскостях. На фиг. 3 и 4 призма касается горизонтальной плоскости одним из ее ребер, а на фиг. 5 и 6 горизонтально расположены нижняя и верхняя грани призмы. Во всех случаях шестиугольник построен по координатам его вершин по способу, изложенному выше (фиг. 9—12, табл. 2).

На фиг. 7 дан ортогональный вид сечения заготовки под рельс. На фиг. 8—11 дан изометрический вид отрезка заготовки этого сечения при разном расположении его на изометрических осях.

Способ построения изометрической проекции этого сечения виден на фиг. 8.

Построение по фиг. 8 начато с проведения координатных осей Z и Y . После этого по оси Z вертикально вверх намечают пять характерных точек (отмечено кружками). Эти точки соответствуют изломам контура рельсовой заготовки. Через каждую намеченную точку проведены линии параллельно оси Y . На нижней линии размечена ширина подошвы рельса.

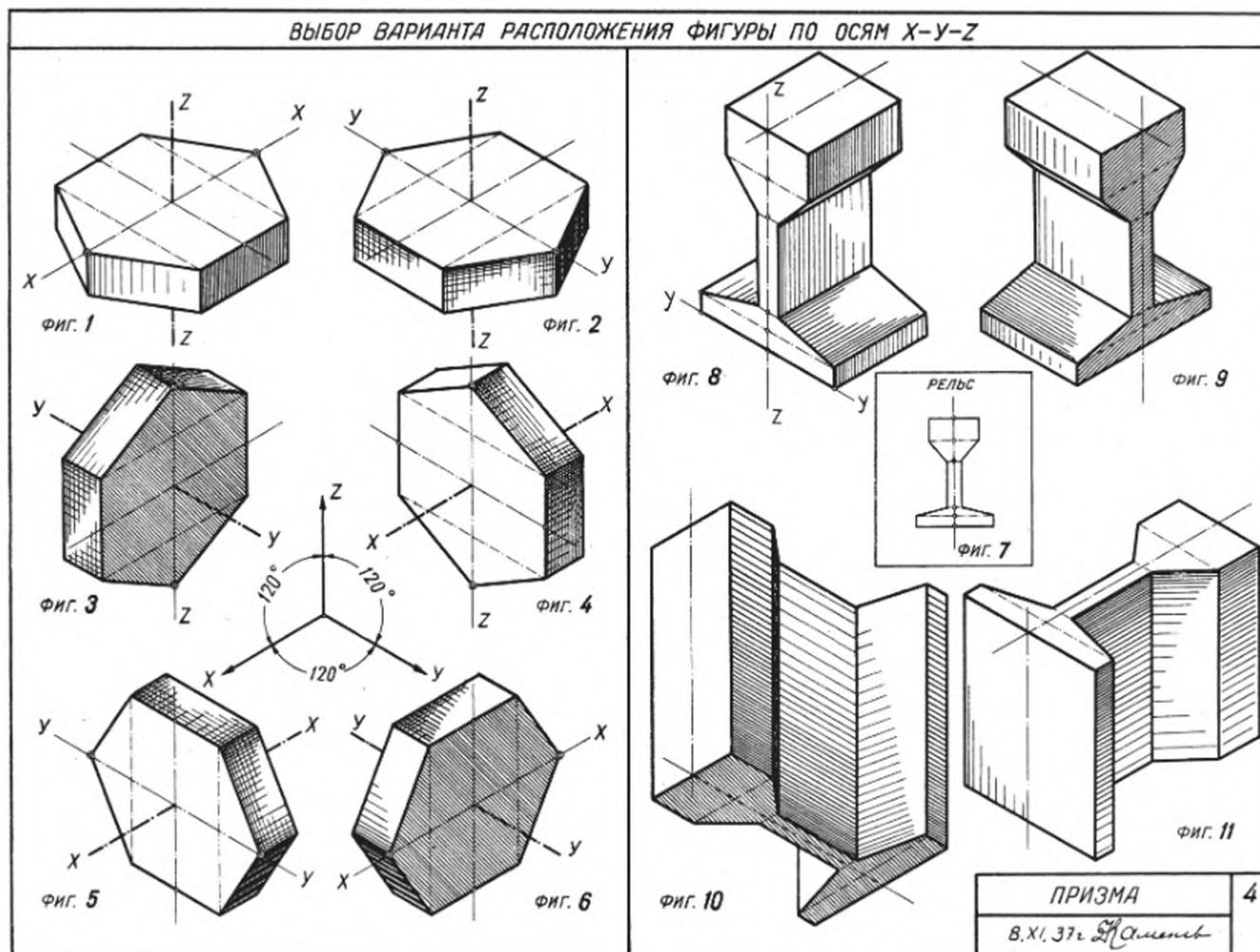
Через намеченные на подошве точки проводим вертикальные линии (параллельно оси Z). Далее намечаем контур шейки рельса.

Таким же способом строим головку рельса, для чего по самой верхней линии раскладываем размер ее ширины, намечаем две крайние верхние точки и через них проводим вниз вертикальные линии до излома контура головки.

Таблица 4

Вычерчивание изометрического изображения призмы

ВЫБОР ВАРИАНТА РАСПОЛОЖЕНИЯ ФИГУРЫ ПО ОСЯМ X-Y-Z



Утолтив контурные линии, получаем изометрический вид рельса на координатных осях $Z — Y$.

Таким же способом строим то же самое сечение на осях $Z — X$ (фиг. 9) и $X — Y$ (фиг. 10 и 11).

На фиг. 10 главная ось симметрии сечения расположена по оси Y , а на фиг. 11 эта ось совмещена с координатной осью X .

Таким образом, необходимо отчетливо запомнить правило, что в изометрии построение плоских фигур всегда производится нанесением всех характерных точек излома контура. При этом вся разметка характерных точек вычерчиваемого сечения производится вдоль заранее начерченных аксонометрических осей, почему таким проекциям и присвоено название аксонометрических, т. е. осемерных.

Чтобы закончить построение призматического отрезка рельсовой заготовки, необходимо из всех точек излома контура отложить вдоль третьей оси размер длины ребер призмы и соединить последовательно намеченные точки.

Сечение призмы и пирамиды плоскостью (таблица 5)

Сечение призмы плоскостью (фиг. 1—3)

На фиг. 1 табл. 5 ортогональный чертеж пятигранной призмы, поставленной на горизонтальную плоскость проекции и рассеченной вертикально проецирующей плоскостью P , имеющей следы P_v и P_h .

На фиг. 2 и 3 дано изометрическое изображение этой призмы, причем на фиг. 2 ось симметрии основания AB призмы направлена вдоль изометрической оси X , а на фиг. 3 эта же ось AB направлена вдоль оси Y . Способ построения фиг. 2 и 3 совершенно тождествен, поэтому рассмотрим только способ построения фиг. 2.

Порядок действия таков. Наметив точку C , проводят через нее изометрические оси X и Y под углом 30° к горизонту. Затем измеряют циркулем по фиг. 1 расстояние от центра пятиугольника до точки 1 и этот размер откладывают на оси X фиг. 2. В результате наметится точка A .

Таким же способом намечают точку B .

Из точки B проводят линию параллельно оси Y и, замерив по фиг. 1 расстояние до точек 3 и 4 от горизонтальной оси симметрии, откладывают это расстояние от точки B по направлению, параллельному оси Y . Для построения точек 2 и 5 необходимо предварительно на фиг. 2 наметить точку C , затем через точку C провести линию параллельно оси Y и на этой линии отложить расстояние до точек 2 и 5 от горизонтальной осевой линии, замеренное циркулем по фиг. 1. Учтем, что здесь, как и во всех остальных случаях, изометрическим сокращением по осям для упрощения сделанных

построений пренебрегаем. После того как изометрическая проекция пятиугольного основания призмы будет построена, замеряем по фиг. 1 высоту ребер призмы и на фиг. 2 заканчиваем изображение целой (не усеченной) призмы. Далее учитываем, что на фиг. 1 секущая плоскость P отрезала от каждого ребра некоторую часть, и так как сокращением размеров по осям пренебрегаем, то, замерив на фиг. 1 по проекции главного вида размеры, фиксирующие высотное положение точек $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ и $5'$, откладываем эти размеры на фиг. 2 и в результате получаем форму пятиугольного среза I , II , III , IV и V . Точки K и N могут быть определены, если на оси X верхнего основания призмы отложить толщину оставшейся не усеченной части; замер этой толщины необходимо сделать на фиг. 1 также вдоль главной горизонтальной оси, проходящей через точку 1 .

Сечение пирамиды плоскостью (фиг. 4—6)

На фиг. 4—6 табл. 5 показан способ построения пирамиды, усеченной вертикально проецирующей плоскостью P , имеющей следы P_v и P_h . На фиг. 4 дан ортогональный чертеж этой пирамиды (в трех проекциях). Изометрическое изображение пирамиды дано на фиг. 5 и 6. При этом на фиг. 5 главная ось симметрии основания пирамиды AB направлена вдоль оси X , а на фиг. 6 — вдоль оси Y .

Рассмотрим способ построения для фиг. 5. Построение начинаем с проведения изометрических осей X и Y через точку E . Затем на этих осях строим изометрическую проекцию пятиугольного основания пирамиды и, отложив по оси Z от точки E размер высоты пирамиды, намечаем контуры целой (не усеченной) пирамиды. Все размеры для построения фиг. 5 берем путем непосредственного обмера циркулем по фиг. 4 (сокращением размеров по осям пренебрегаем).

Далее необходимо на фиг. 5 наметить точки $I—V$, фиксирующие контур сечения. Непосредственным обмером по фиг. 4 эти точки наметить нельзя, так как направление ребер пирамиды не совпадает с направлением изометрических осей.

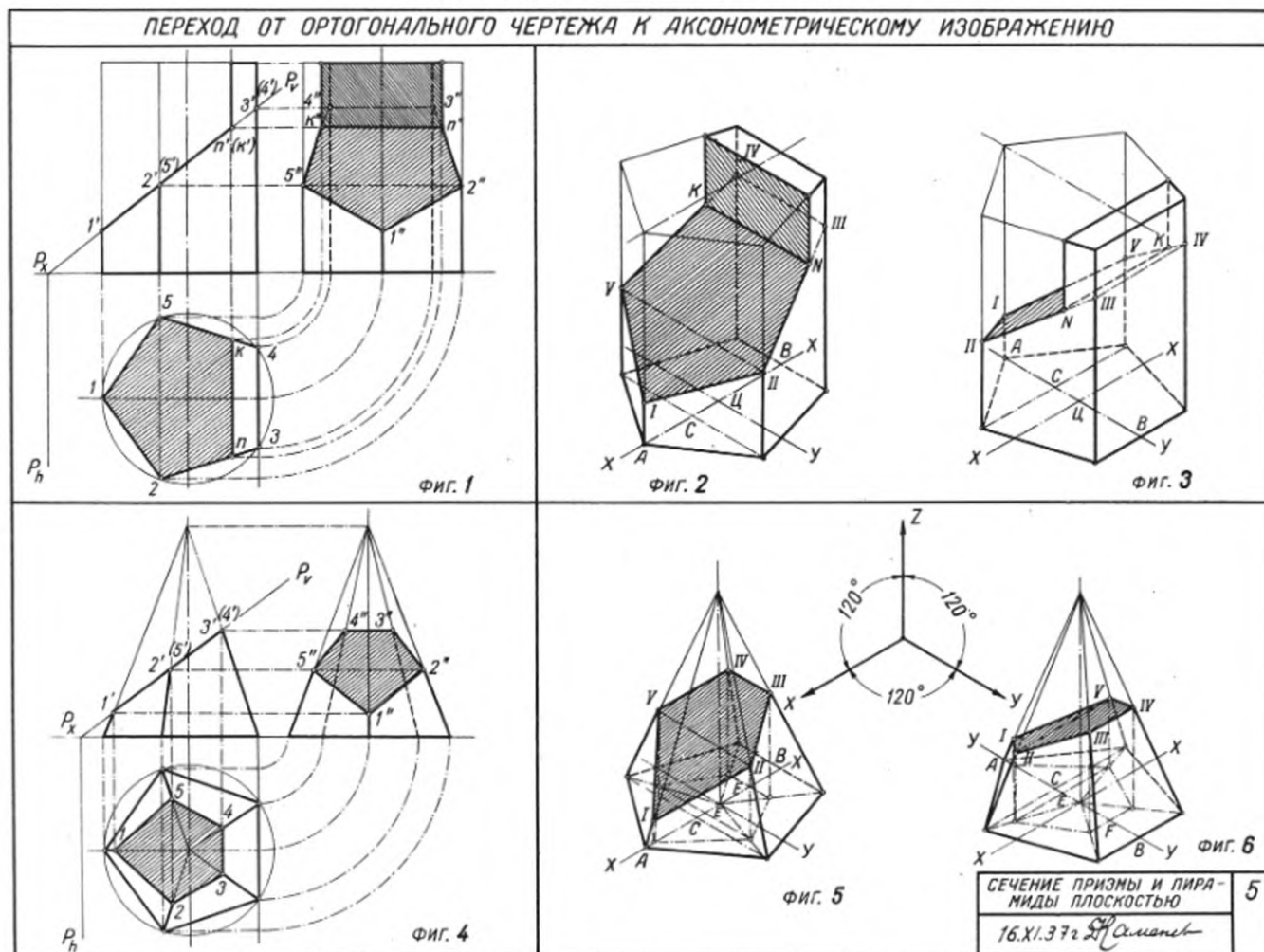
Для нанесения на фиг. 5 точек $I—V$ следует предварительно на плоскости основания пирамиды нанести вторичную изометрическую проекцию контура сечения $1, 2, 3, 4$ и 5 по фиг. 4. На фиг. 5 этот контур нанесен штрихпунктирной чертой.

Чтобы закончить построение контура $I—V$ на фиг. 5, необходимо из каждой вершины штрихпунктирного пятиугольника провести вертикальные линии до пересечения с ребрами пирамиды.

Этим самым спроецируем контур сечения $1—5$ с плоскости основания пирамиды (штрихпунктирный пятиугольник) в пространство.

Фиг. 6 строится таким же приемом, только главную ось симметрии основания пирамиды следует направить вдоль оси Y .

Сечение призмы и пирамиды плоскостью



Переход от ортогонального чертежа к аксонометрическому изображению (таблица 6)

На фиг. 2, 4, 6 и 8 табл. 6 дан способ построения деревянных врубок, форма и размеры которых заданы ортогональным чертежом (фиг. 1, 3, 5 и 7).

Способ построения этих врубок в достаточной мере прост. Необходимо только твердо запомнить основное правило аксонометрии, заключающееся в том, что *вычерчивание какого-нибудь тела, имеющего сложные вырезы, всегда должно начинаться с изображения этого же тела, но поначалу начерченного без всяких вырезов.*

Например, вычерчивая врубку по фиг. 1, следует на фиг. 2 расчертить прежде всего брусок, из которого эта врубка вырезана, и только уже после этого наметить кусок материала, который от него должен быть отрезан.

Другими словами, аксонометрия любой врубки легче всего может быть построена, если придерживаться последовательности действий, совершаемых плотником или столяром для ее осуществления.

Таким образом, построение врубки по фиг. 1 следует начинать следующим образом.

1. Наметить точку *A*.
2. Построить торец бруска *ABCD*. При этом линию *AB* надо провести вертикально, т. е. параллельно оси *Z*, а линию *AC* наклонно, т. е. в данном случае параллельно оси *Y* (фиг. 2). После этого по намеченным осям откладываем размеры торца бруска, т. е. по оси *Z* откладываем размер 20 мм, а по оси *Y* размер 30 мм (фиг. 1, вид слева).
3. Через все четыре вершины параллелограмма *ABCD* проводим вправо, вверх наклонные линии параллельно оси *X* (фиг. 2) и по ним откладываем длину бруска, взятую с ортогонального чертежа (фиг. 1), т. е. размер 70 мм.

Закончив построение наружных форм целого бруска, расчерчиваем срез, для чего прежде всего намечаем от точки *B* его длину, т. е. точку *K*. По фиг. 1 можно видеть, что размер среза *BK* должен быть равен 30 мм.

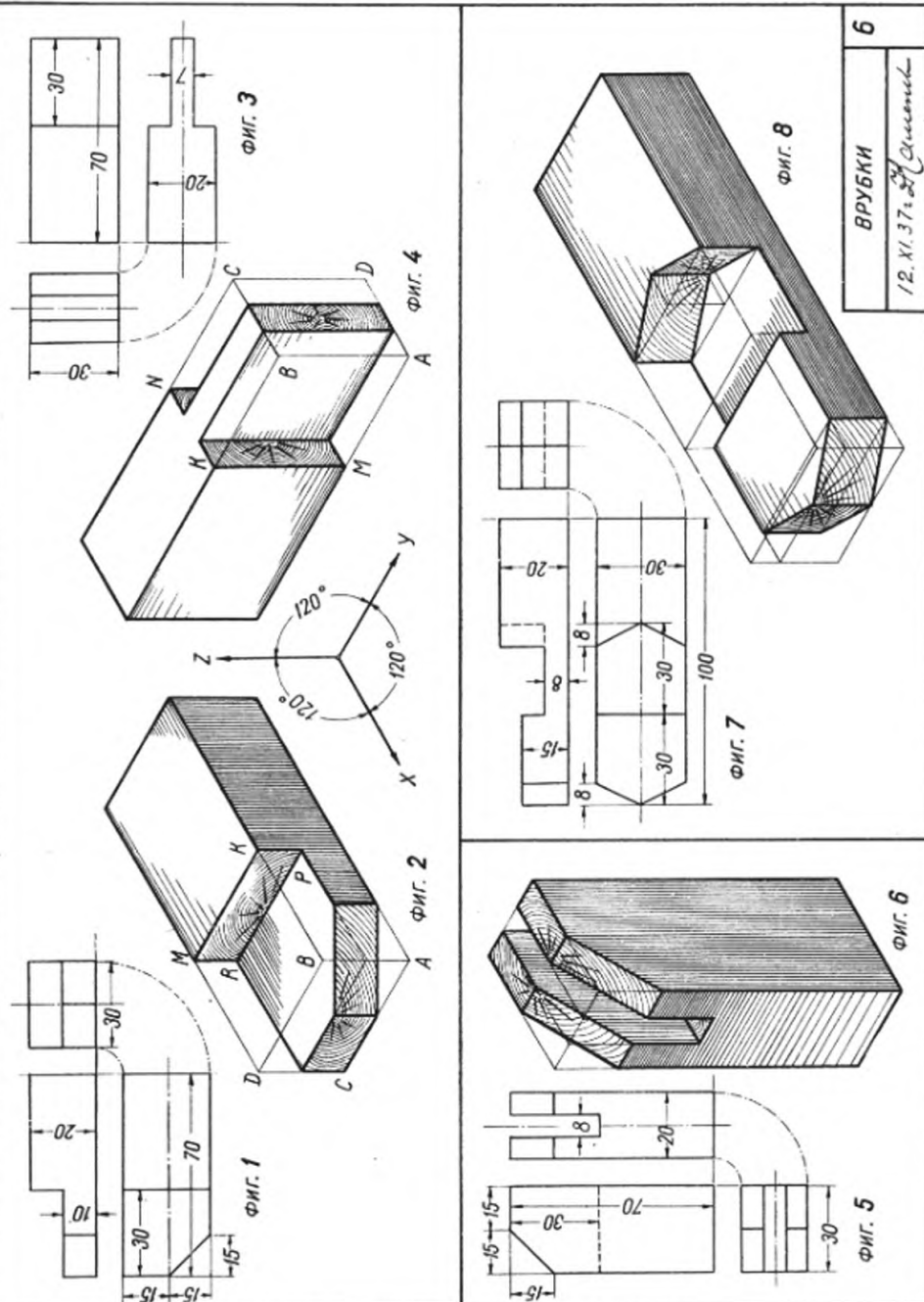
После этого проводим линию *KM*, т. е. намечаем границу запила, и через точки *K* и *M* проводим вертикально вниз глубину среза, т. е. откладываем размер 10 мм (фиг. 1). Наконец, из вновь намеченных точек *P* и *R* проводим влево вниз две линии параллельно оси *X* и размечаем контур отрезанного угла.

На фиг. 4 начерчена врубка, изображающая тип врубок, применяемых, например, для вязки оконных рам. На фиг. 3 в виде ортогонального чертежа заданы все размеры для этой врубки.

Длина бруска, как и в предыдущем случае, равна 70 мм, толщина бруска — 20 мм, ширина его — 30 мм, размер длины срезанной части — 30 мм, а толщина шипа — 7 мм.

Переход от ортогонального чертежа к аксонометрическому изображению

ПЕРЕХОД ОТ ОРТОГОНАЛЬНОГО ЧЕРТЕЖА К АКСОНОМЕТРИЧЕСКОМУ ИЗОБРАЖЕНИЮ



Вычерчивание фиг. 4 производится следующим образом.

1. Выбираем координатную ось для большего измерения бруска, т. е. для его длины. В данном случае брусок расположен вдоль оси Y .

2. Чертим по известному нам правилу торец бруска, т. е. параллелограм $ABCD$. Размеры ширины и высоты ромба берем из фиг. 3.

3. Через каждую вершину параллелограмма проводим линию параллельно оси Y (фиг. 4).

4. Ограничиваем длину бруска, отложив по каждой из намеченных линий размер 70 мм.

Эти четыре операции являются подготовительными. После того как брусок вычерчен полностью, можно приступить к расчерчиванию самой врубки.

Для этого от точки B откладываем размер BK длины вырубki 30 мм (фиг. 4). В результате отложения получаем точку K . Проводим через точку K линию KM . Из точек K и M откладываем глубину подрезок для шипа, равную $\frac{20-7}{2} = 6,5$.

В результате будет расчерчен шип. Совершив обводку, т. е. утолщение контурных линий, и штриховку, получим наглядную картину бруска с шипом.

На фиг. 6 и 8 тем же способом сделаны более сложные врубки. Для их построения опять-таки прежде всего на заранее выбранных осях начерчен целый, неразрезанный брусок, а потом с ним в последовательном порядке проделаны все операции, которые совершает плотник для получения данной врубки.

Из сравнения аксонометрического вида врубок фиг. 2, 4, 6, 8 с ортогональным чертежом тех же врубок на фиг. 1, 3, 5 и 7 бросается в глаза несравненно бóльшая наглядность аксонометрического изображения перед ортогональным, несмотря на некоторые искажения углов, свойственные аксонометрии.

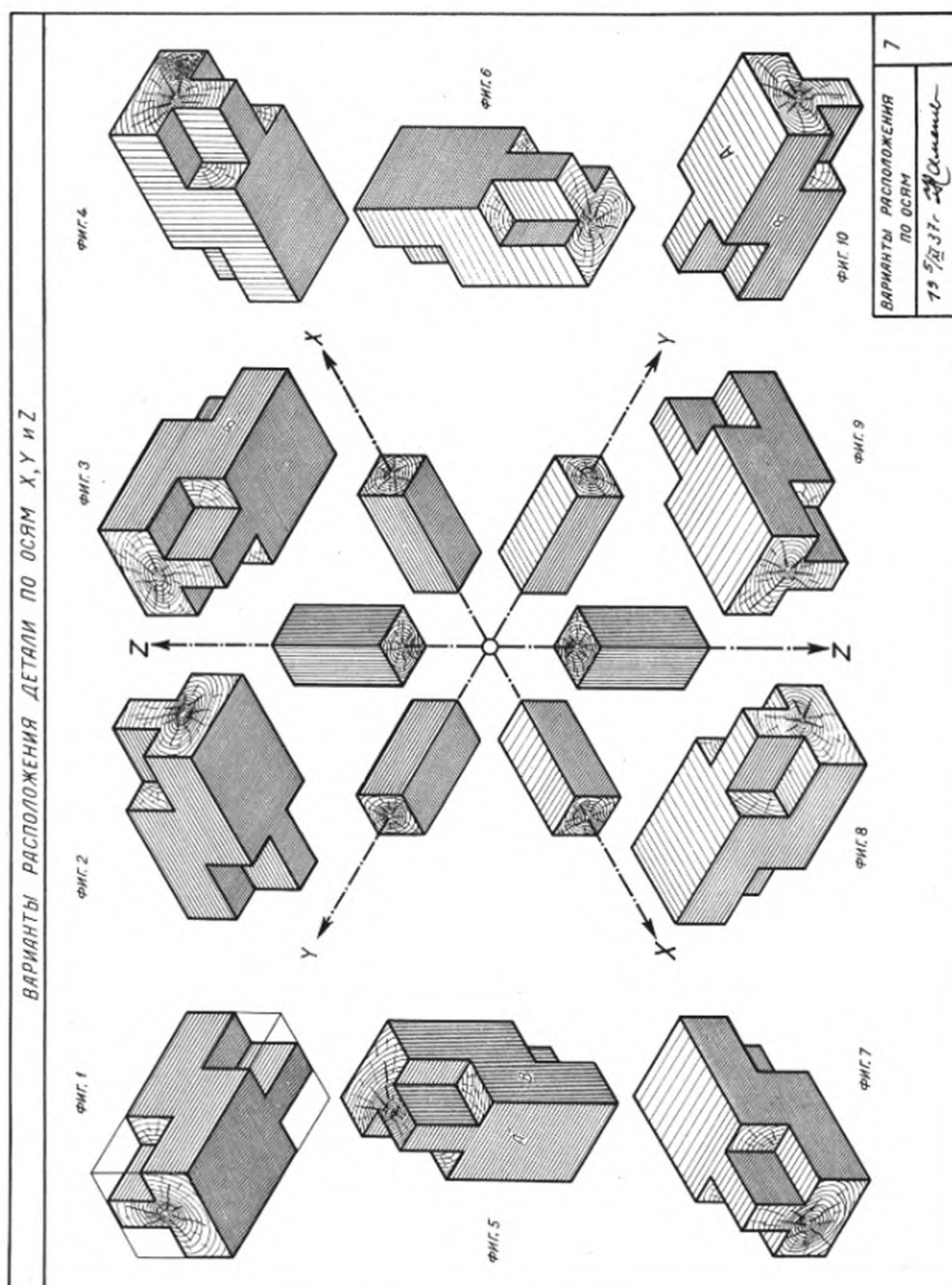
Положение бруска в пространстве может быть выбрано по усмотрению лица, вычерчивающего аксонометрический вид, но всегда это направление целесообразно намечать параллельно аксонометрическим осями X , Y и Z .

Различные способы расположения параллелепипеда (таблица 7)

В табл. 7, в центре, показан способ вычерчивания бруска в изометрии при самом разнообразном положении этого бруска в пространстве.

В центре листа проведены координатные изометрические оси и начерчено шесть исходных положений бруска без вырезов, а на фиг. 1—10 начерчен брусок, имеющий одинаковую врубку на обоих концах.

Различные способы расположения параллелепипеда



На фиг. 1 брусок начерчен расположенным параллельно оси Y и в предположении рассматривания его зрителем снизу. На фиг. 2 также дан вид бруска снизу, но самый брусок расположен параллельно оси X . На фиг. 3 и 4 дано то же самое положение бруска, что и на фиг. 1 и 2, но брусок перевернут верхней гранью вниз, при этом фиг. 3 соответствует фиг. 1, а фиг. 4 — фиг. 2.

На фиг. 5 и 6 брусок расположен вертикально, т. е. параллельно оси Z . На фиг. 5 дан вид этого бруска при взгляде на него несколько сверху, а на фиг. 6 при взгляде снизу. Кроме того, фиг. 5 отличается от фиг. 6 еще и тем, что брусок на фиг. 5 повернут к зрителю другой стороной, не той, что на фиг. 6.

Фигуры 7—10 показывают изометрический вид бруска, положенного параллельно осям X или Y . Брусок начерчен в предположении взгляда на его верхнюю сторону. В остальном изображения по фиг. 7—10 сходны с изображениями по фиг. 1—4.

Необходимо и здесь еще раз подчеркнуть основное правило, заключающееся в том, что при изображении аксонометрических видов предварительно брусок должен быть начерчен целиком, без срезов, так, как это сделано на фиг. 1 (см. тонкие линии), и уже только после этого расчерчивают и делают самую врубку.

Как и в предыдущих случаях, брусок легче всего может быть начерчен, если его построение начать с нанесения контуров торца.

Способ построения комбинированных тел в аксонометрических проекциях (таблицы 8 и 9)

На фиг. 1—4 табл. 8 даны изометрические изображения четырех комбинированных тел. Для каждого тела сбоку дана схема, из которой виден порядок действий, выполняемых при построении изометрического изображения вычерчиваемого тела.

Для построения тела по фиг. 1 рекомендуется начертить сначала габаритный контур бруска, из которого можно вырезать данный предмет, наметив затем контуры вырезаемой части.

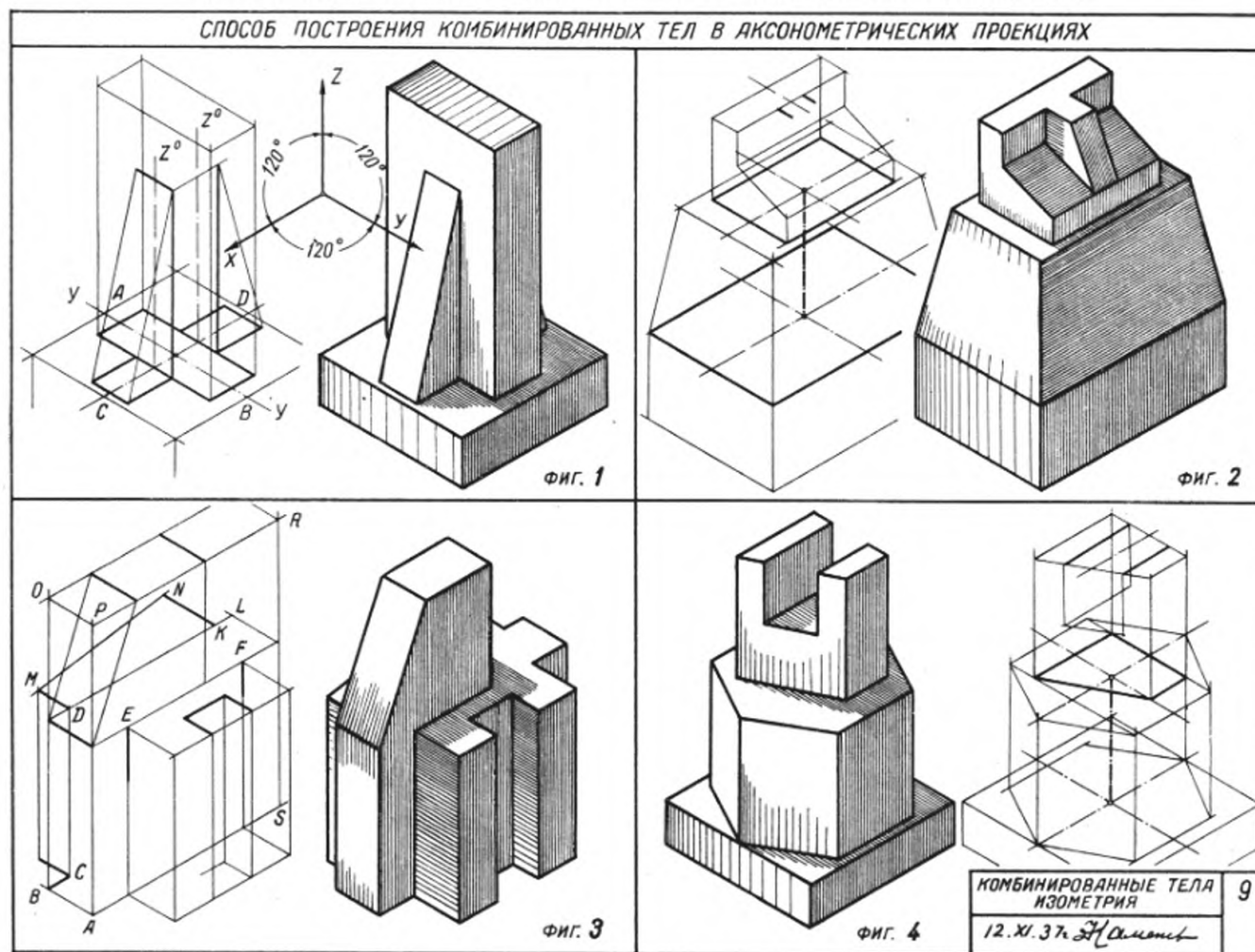
Строя изометрическое изображение фиг. 2, также сначала следует начертить габаритный параллелепипед, отвечающий размерам бруска, из которого можно потом выделить ту часть материала, которая будет отрезана при изготовлении оголовка.

При построении изометрического изображения комбинированного тела по фиг. 3 и 4 рекомендуется придерживаться схемы построения, несколько отличной от используемой для фиг. 1 и 2.

Здесь сначала строят нижнюю часть фигуры, а затем на ее верхнем основании причерчивают верхнюю часть. Вычерчивать нижнюю часть фиг. 3 и 4 начинают с проведения изометрических осей. Затем на этих осях для фиг. 3 строят изометрическое изображение прямоугольного основания детали, а для фиг. 4 — контур шестиугольного основания.

Таблица 9

Способ построения комбинированных тел в аксонометрических проекциях (2)



Наметив контуры нижнего основания, откладывают от точки пересечения осей вверх по оси Z высоту нижней части предмета. В результате намечается точка, отвечающая центру верхнего основания пирамидальной части.

Далее через эту точку проводят изометрические оси и на этих осях чертят верхнее основание нижней части, а также контур нижнего основания верхней призматической части. Для фиг. 3 это будет контур треугольника, а для фиг. 4 — параллелограм.

Штриховка

Чтобы придать изображению большую наглядность, на вычерченное изображение при помощи штриховки наносят тени в предположении, что предмет освещен слева и сверху (в тени будут находиться правые грани предмета).

Падающую тень от верхней части предмета тоже полезно нанести, так как это придает еще большую выразительность изображению.

На освещенные передние грани штриховку следует наносить очень умеренно — только для того, чтобы подчеркнуть наклон той или иной плоскости. Возможно, конечно, точное построение контуров падающей и собственной теней предмета. Однако здесь следует оговориться, что ввиду сложности такого построения к точному нанесению контуров тени прибегают сравнительно редко и наносят тени лишь условно, на глаз. Если требуется на вычерченном изображении проставить размеры частей предмета, то это делают, придерживаясь тех же правил, что и при составлении ортогонального чертежа, только цифры располагают в той плоскости, размер которой они фиксируют.

Размеры, фиксирующие высоту предмета, ставят так, как это сделано на фиг. 2—4 (лучший способ простановки высотных размеров дан на фиг. 2).

В табл. 9 показаны тела более сложной формы, чем в табл. 8. Изображая изометрический вид предмета по фиг. 1 табл. 9, необходимо мысленно расчленив предмет на составные части, из которых его будет собирать модельщик.

Таких частей четыре: нижняя опорная плита, вертикальная стойка и два подкоса треугольной формы.

Каждую из составных частей чертим отдельно, наблюдая за тем, чтобы правильно присоединить одну часть к другой. Для этого на каждой начерченной части необходимо обязательно наносить изометрические оси. На этих осях строим контур нижнего прямоугольного основания вертикальной стойки (см. параллелограм AB). Затем, отложив высоту, заканчиваем контур вертикальной доски.

Чтобы закончить изображение, необходимо к вертикальной доске правильно причертить подкосы, для чего вдоль оси X вычерчи-

ваем прямоугольные основания C и D , по которым подкосы присоединены к опорной плите.

После этого намечаем оси Z_0Z_0 и на них строим контуры прямоугольников, по которым подкосы присоединяются к вертикальной стойке.

Построение чертежа по фиг. 2 начинают с проведения осей для нижней призматической части. Затем, отложив высоту пирамидальной части и нанеся новые оси, на этих осях вычерчивают малое основание усеченной пирамиды.

На тех же верхних осях расчерчивают контур нижней части основания угольника, являющегося третьей составной частью детали.

Построение изометрического изображения предмета по фиг. 3 ведут в такой же последовательности. Расчленяют предмет на составляющие его части. Таких частей можно наметить три: основная часть, т. е. средняя доска $ABOPRS$, к этой доске причерчивают спереди брусок EF и с противоположной стороны косо срезанный брусок $CDMNK$. Только после этого можно перейти к нанесению подробностей в виде разного рода срезов и пазов, имеющих на детали.

Фиг. 4 также вычерчивается по частям: сначала нужно начертить нижнюю фундаментную доску, затем к этой доске причерчивается шестигранная призма. Нижнее основание этой призмы располагается на осях X и Y , размеченных на верхней поверхности опорной доски.

Наконец, на осях, нанесенных на верхнем основании шестигранной призмы, чертят нижнее основание третьей верхней четырехгранной призмы. В самую последнюю очередь наносится контур прорези, имеющейся в верхней части призмы.

Последовательность действий при составлении аксонометрического изображения комбинированного тела (таблица 10)

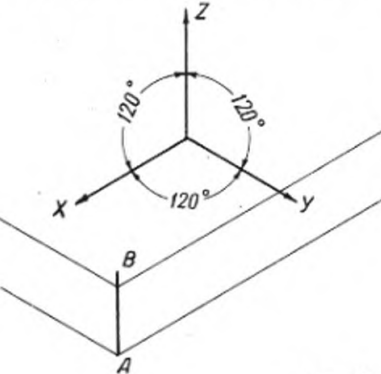
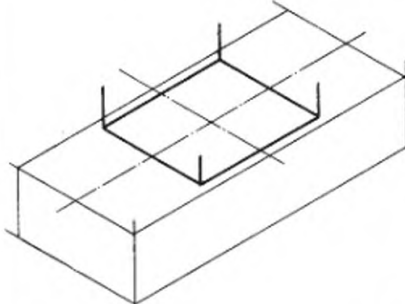
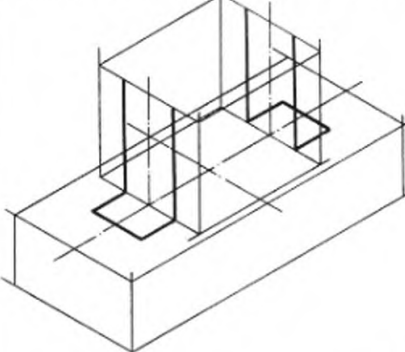
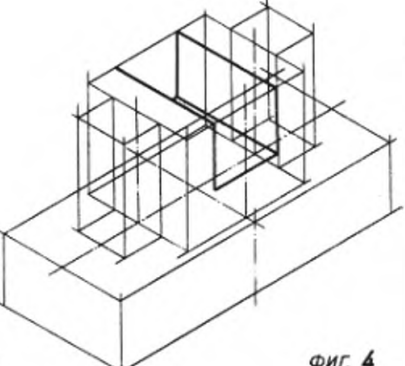
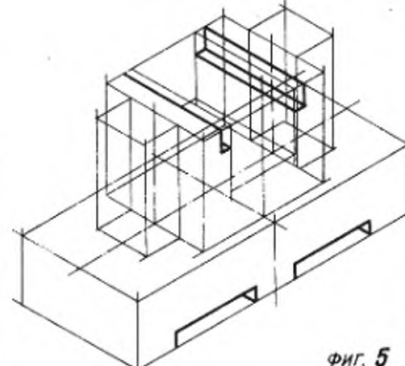
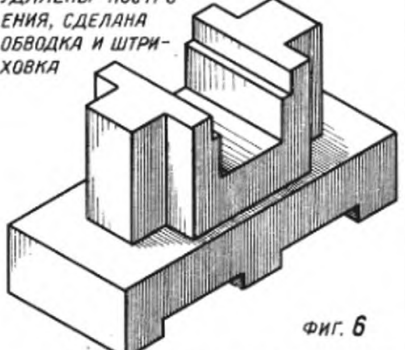
На фиг. 6 табл. 10 дано изометрическое изображение комбинированного тела, напоминающего форму корпуса подшипника (упрощенную). На фиг. 1—5 показана последовательность действий, которых необходимо придерживаться при вычерчивании этого изображения.

Рассмотрим эти действия.

На фиг. 1 показана первая стадия работы: проведена вертикальная линия AB переднего угла опорной плиты и намечен контур боковых граней опорной плиты.

На фиг. 2 закончено изображение опорной плиты, на ее поверхность нанесены изометрические оси и на этих осях намечен контур основания верхней части.

Последовательность действий при составлении аксонометрического изображения комбинированного тела

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЙ ПРИ СОСТАВЛЕНИИ АКСОМЕТР. ИЗОБРАЖЕНИЯ КОМБИНИРОВАННОГО ТЕЛА		
<p>1 ПОСТРОЕНИЕ НАЧАТО С ЛИНИИ А-В</p>  <p>Фиг. 1</p>	<p>2 НАНЕСЕНЫ ОСИ И КОНТУР ВЕРХН. ЧАСТИ</p>  <p>Фиг. 2</p>	<p>3 НАНЕСЕНЫ КОНТУРЫ БОКОВЫХ ЧАСТЕЙ</p>  <p>Фиг. 3</p>
 <p>Фиг. 4</p> <p>НАНЕСЕН КОНТУР СРЕДНЕЙ ВЫЕМКИ</p>	 <p>Фиг. 5</p> <p>5 НАНЕСЕНЫ МЕЛКИЕ ПОДРОБНОСТИ</p>	<p>6 УДАЛЕНЫ ПОСТРОЕНИЯ, СДЕЛАНА ОБВОДКА И ШТРИХОВКА</p>  <p>Фиг. 6</p>
КОМБИНИРОВАННОЕ ТЕЛО (КОРПУС ПОДШИПНИКА)		10
11.XI.37з		

На фиг. 3 закончен наружный контур (габаритный) верхней части и причерчены грани двух призматических выступов, которыми эти выступы примыкают к опорной плите и верхней основной части корпуса подшипника. На фиг. 3 эти грани выделены утолщенной линией.

На фиг. 4 закончено вычерчивание боковых выступов и нанесен в общих чертах контур средней выемки, обозначенной утолщенной линией.

На фиг. 5 построение закончено нанесением мелких подробностей, отмеченных толстой чертой.

На фиг. 6 деталь показана в законченном виде. Для этого были удалены резинкой все линии построения, обведены линии видимого контура и нанесены штриховкой тени, придающие изображению большую наглядность.

Тени нанесены в предположении, что свет падает на предмет слева и сверху, поэтому густой штриховкой покрыты правые грани детали, находящиеся в тени.

Кроме того, полезно нанести (в умеренном количестве) падающие от верхней части тени, например на опорной плите.

Таким образом, и в данном примере перед вычерчиванием аксонометрического изображения детали последнюю мысленно расчленяют на несколько частей простейшей формы (опорная плита, средняя часть, боковые выступы), эти части наносят постепенно на чертеж в виде габаритных контуров и только после этого вычерчивают подробности и чертеж отделявают штриховкой.

Изображение окружностей в изометрической проекции (таблица 11)

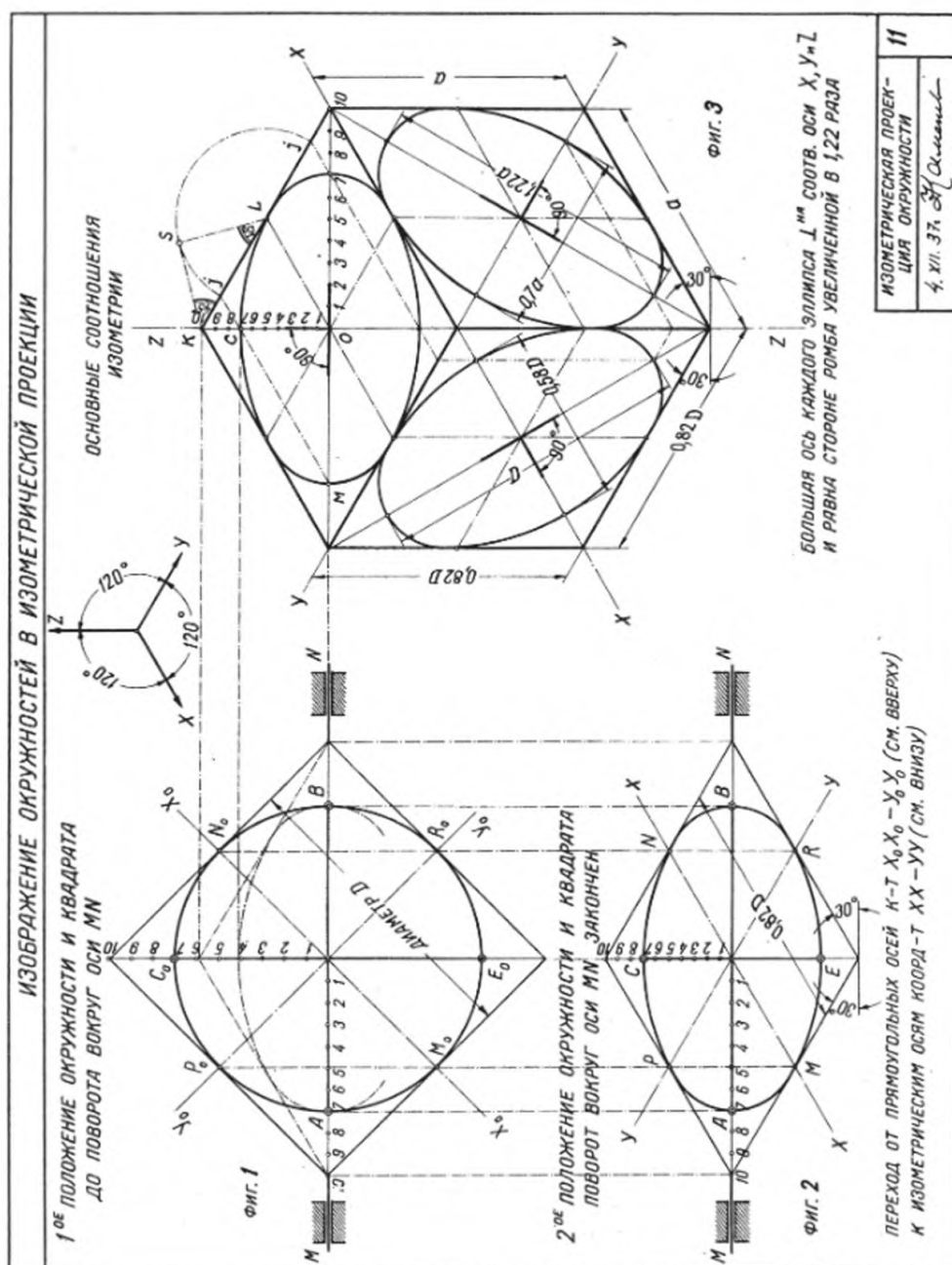
Выше изучался способ построения изометрических проекций плоских многоугольников и предметов, ограниченных плоскостями.

В табл. 11 показан способ построения в изометрии окружностей.

Рассмотрим способ построения изометрической проекции для окружности. Из начертательной геометрии известно, что проекцией окружности в общем случае является эллипс. На фиг. 1 вверху начерчена окружность, вписанная в квадрат. Диаметр этой окружности, а следовательно и размер каждой стороны квадрата, равен D .

Проведем оси симметрии квадрата X_0 и Y_0 . Окружность касается квадрата в точках пересечения этих осей с его сторонами. Эти точки отмечены четырьмя маленькими кружочками. Концы вертикального и горизонтального диаметров окружности отметим двумя кружочками. Для получения изометрического вида окружности, вписанной в квадрат, начнем вращать весь квадрат вокруг горизонтальной диагонали MN . При вращении горизонтальный диаметр окружности, отмеченный буквами A и B , останется на месте, не изменит своей величины, а вертикальный диаметр C_0E_0 начнет уменьшаться.

Изображение окружностей в изометрической проекции



При наклоне квадрата на угол 55° к горизонту его оси X_0, Y_0 превратятся, как мы знаем (см. описание табл. 1), в изометрические оси X, Y и весь квадрат превратится в ромб, все стороны которого получат сокращение в 0,82 раза (фиг. 2).

В параграфе 1.13 показано, что при наклоне квадрата вертикальный диаметр окружности, вписанной в него, т. е. диаметр C_0A_0 , уменьшится до величины CE , сократившись при этом в 0,58 раза.

К этому же выводу можно прийти путем следующих рассуждений.

Из геометрии известно, что окружность, вписанная в квадрат, делит его диагонали почти точно в пропорции 7 к 3. Это и отмечено на фиг. 1 табл. 11 (см. точки A и C_0).

Выше (при описании табл. 1) было показано, что при наклоне куба по фиг. 4 табл. 1 малая диагональ ромба E_0B_0 представляет собой проекцию на плоскости V заднего ребра куба CE . За счет этого размер малой диагонали E_0B_0 на фиг. 4 табл. 1 будет равен величине ребер куба, умноженной на показатель искажения $p_z = 0,82$. Из начертательной геометрии известно, что пропорциональность частей отрезка при параллельном проецировании на плоскость сохраняется. На основании этого заключаем, что размер вертикальной диагонали ромба на фиг. 2 табл. 11 равен $0,82D$, где D — размер стороны квадрата (фиг. 1 табл. 11). Интересующий нас размер малой оси CE эллипса будет составлять $\frac{7}{10}$ от размера D , т. е.

$$EC = 0,7 \cdot 0,82D \approx 0,58D,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, окружность в изометрии превращается в эллипс с большой осью D и малой осью $0,58D$.

Из построения на фиг. 2 ясно, что для изображения эллипса имеется восемь характерных, легко определяемых точек A, B, C, E, M, N, P и R .

Расстояние от точки A до точки B равно фактическому диаметру вычерчиваемой окружности.

Расстояние от точки C до точки D равно 0,58 от истинного диаметра окружности.

Точки M и N лежат на оси X , и расстояние между ними равно 0,82 от истинного диаметра, наконец, точки P и R лежат на оси Y на таком же расстоянии друг от друга, как и точки M и N .

Другими словами, размер PR равен 0,82 диаметра окружности, вписанной в квадрат.

При изучении фиг. 1 табл. 1 установлено, что все три видимые грани куба в изометрической проекции представляются ромбами совершенно одинакового размера. Поэтому способ получения изометрической проекции окружности во всех трех гранях куба будет

тождественным с только что рассмотренным (при описании фиг. 2, табл. 11).

На фиг. 3 начерчен изометрический вид куба с окружностями, вписанными во все его три видимые грани. Из рассмотрения фиг. 3 видно, что эллипсы тождественны между собой, но расположены по-разному.

Необходимо обратить особое внимание на то обстоятельство, что *большая ось эллипса в изометрии располагается вдоль большой диагонали соответствующего ромба, а малая ось — вдоль малой диагонали того же ромба.*

При изучении фиг. 2 установлено, что обе оси эллипсов всегда получаются взаимно перпендикулярными (на фиг. 2 ось $AB \perp$ оси CE).

Для построения фиг. 2 для вычислений принята неизменная величина стороны квадрата D . На практике эллипс удобнее чертить, исходя из величины стороны ромба, которую обозначим буквой a . В этом случае большая ось эллипса получается равной $1,22a$, а малая ось — $0,7a$ (фиг. 3).

Нахождение длины большой и малой осей эллипса можно сделать, кроме того, еще другим способом, как это отмечено на фиг. 1—3. *Для этого следует запомнить, что большая и малая оси эллипса, вписанного в ромб, всегда делят его диагонали на две неравные части, находящиеся между собой в пропорциональном отношении, почти точно равном $7 : 3$.*

Следовательно, при построении эллипса прежде всего нужно: 1) провести изометрические оси, 2) начертить ромб и 3) наметить все характерные точки эллипса. Четыре из восьми точек лежат на изометрических осях, остальные четыре находятся на диагоналях, деля эти диагонали в пропорции $7 : 3$.

Как правило, при аксонометрическом скицировании эллипсы вычерчивают от руки, вписывая их в заранее расчерченный ромб. При этом внутри ромба предварительно намечают все характерные точки эллипса.

Однако в ученических работах, а также и при работе тушью можно использовать способ вычерчивания эллипса при помощи чертежного циркуля. В этом случае, конечно, можно получить только приближенный вид эллипса, так как кривизна линий эллипса совершенно своеобразна, поэтому никакими частями дуг окружности описана быть не может.

На фиг. 3 табл. 11, вверху, показан графический прием, пользуясь которым, можно определять главные оси эллипса, вписываемого в ромб или в параллелограм.

Для этого в точках K и L к стороне ромба проводят линии под углом 45° . Через точку S пересечения этих линий описывают полу-

окружность радиусом LS и затем из точек j, j проводят линии параллельно сторонам ромба. Эти две линии на диагоналях ромба намечают точки C и M , являющиеся концевыми точками главных осей эллипса, вписанного в ромб (или в параллелограм). Линия jM , будучи параллельной изометрической оси X , пройдет через точку C , делящую полудиagonal OK в пропорции $7 : 3$ в том случае, если точка j разделит линию KL также в пропорции $7 : 3$.

Убедимся в этом. Из прямоугольного треугольника KSL можно написать:

$$KS^2 + SL^2 = KL^2.$$

Но

$$KS = SL = jL,$$

поэтому

$$2jL^2 = KL^2,$$

или

$$jL = \frac{KL}{\sqrt{2}} = 0,7KL.$$

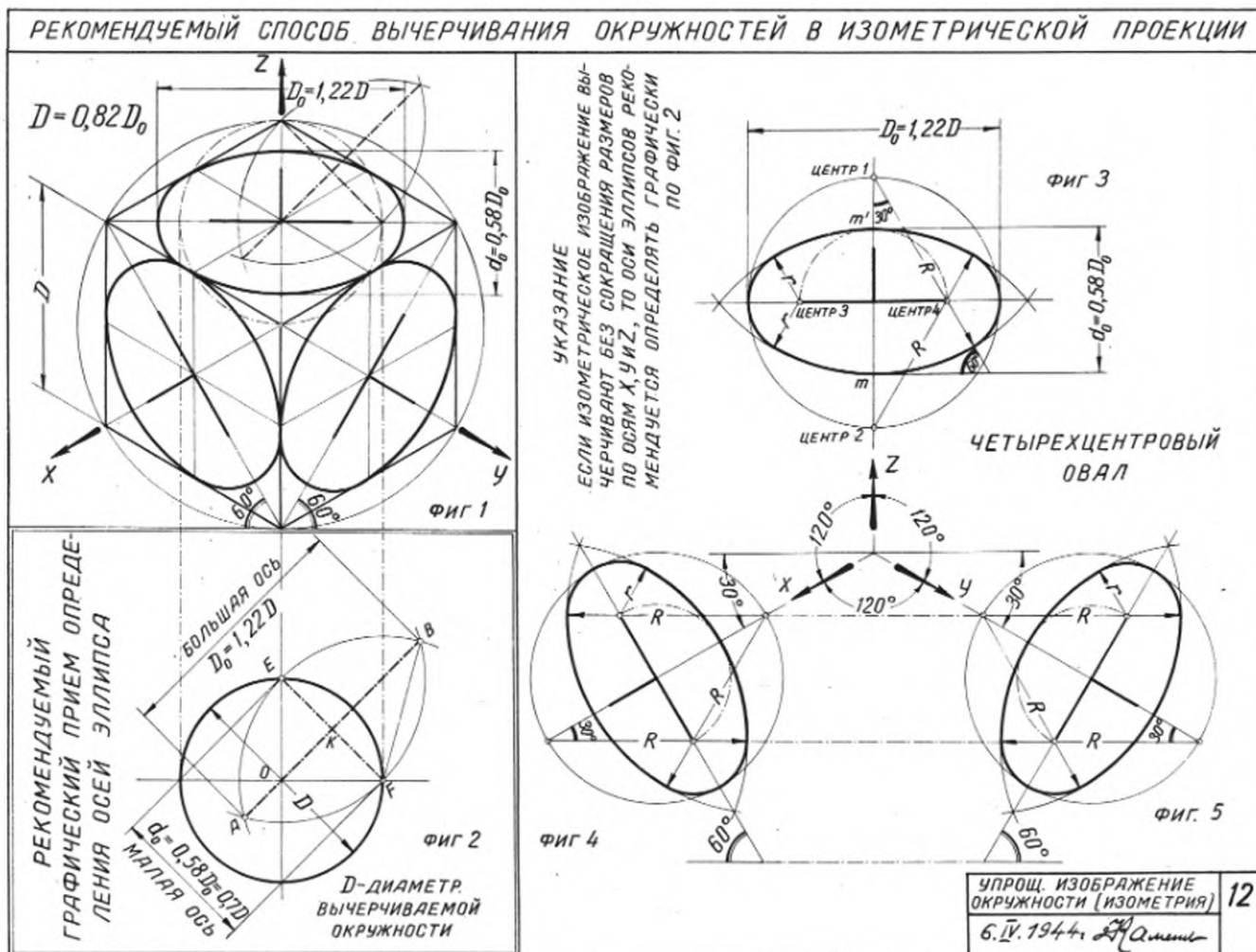
Следовательно, точка j действительно делит отрезок KL в пропорции $7 : 3$, поэтому линия jM разделит полудиagonal OK также в пропорции $7 : 3$, что и требовалось установить.

Упрощенный способ вычерчивания окружностей в изометрической проекции (таблицы 12 и 12а)

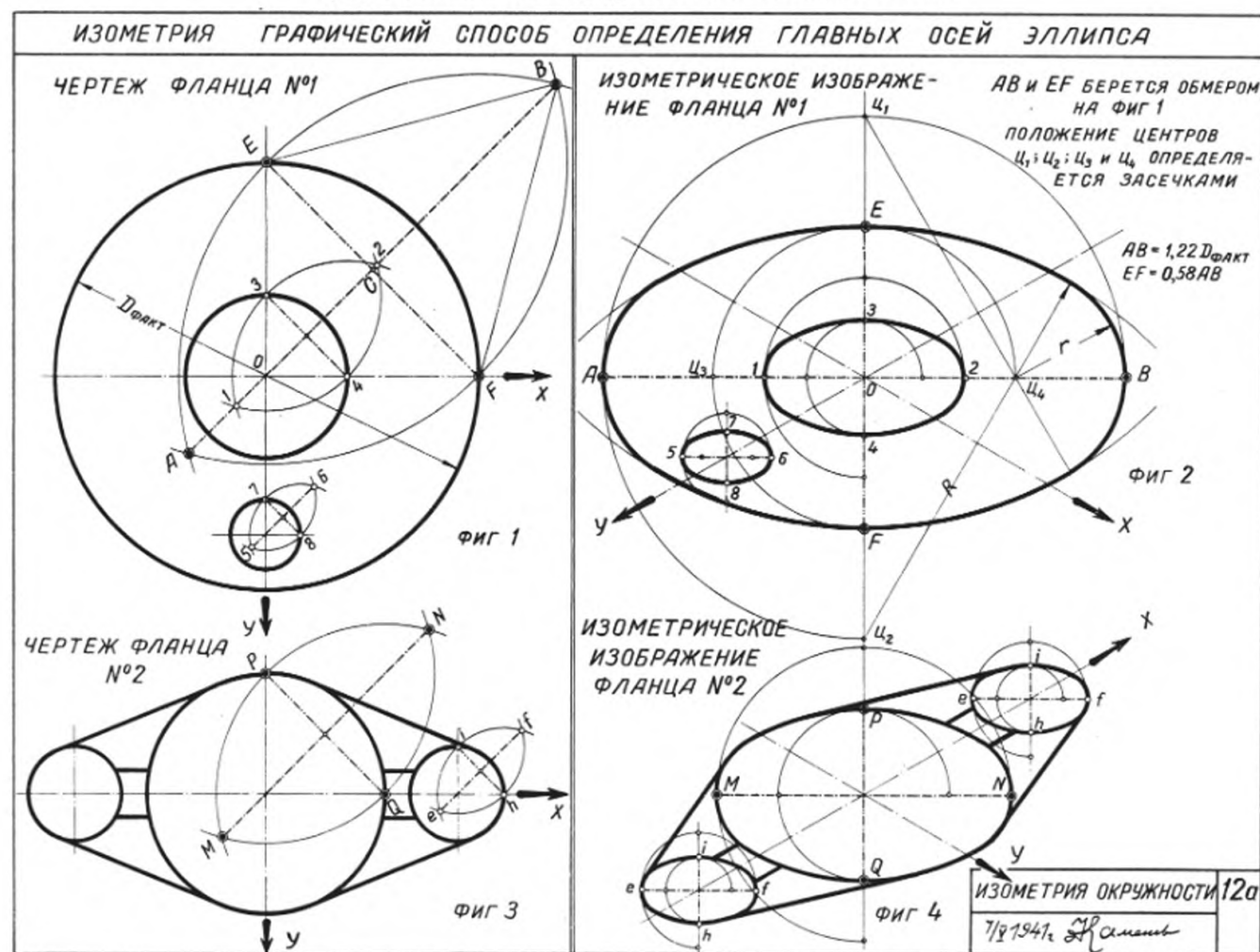
Из табл. 11 очевидно, что окружность, вписанная в одну из граней куба, может находиться в трех взаимно перпендикулярных плоскостях — в горизонтальной плоскости XY , в вертикальной XZ и в вертикальной YZ . Однако, так как все три видимые грани куба в изометрической проекции изображаются тремя в точности равными один другому ромбами, то и окружности, вписанные в грани куба, в изометрии будут проецироваться в виде трех абсолютно одинаковых эллипсов, имеющих большие оси равными диаметру окружности, вписанной в грань куба, а малые оси равными $0,58$ от больших осей.

Главная ось эллипса, вписанного в верхний ромб, как очевидно из табл. 11, располагается горизонтально, а главные оси эллипсов, вписанных в боковые грани куба (см. табл. 11), направлены по диагоналям граней куба и, следовательно, составляют с горизонтом угол 60° (табл. 12, фиг. 1, 4 и 5).

Упрощенный способ вычерчивания окружностей в изометрической проекции



Графический способ определения главных осей эллипса



При вычерчивании окружности диаметром D в изометрической проекции без учета получающихся сокращений размеров по осям в 0,82 раза необходимо размер большой оси эллипса увеличивать до $D_0 = \frac{D}{0,82} \approx 1,22D$, а малую ось принимать равной

$$d_0 = 0,58D_0 = 0,7D.$$

Получить размеры осей эллипса $D_0 = 1,22D$ и $d_0 = 0,7D$ можно графически. Для этого (фиг. 2 табл. 12) проводят две взаимно перпендикулярные оси, чертят вокруг центра O окружность диаметром D и из точек E и F делают засечки, пересекающиеся в точках A и B . Соединив затем точку A с точкой B и точку E с точкой F , получают размеры главных осей эллипса:

$$AB = D_0 \approx 1,22D;$$

$$EF = d_0 \approx 0,7D.$$

Действительно, из прямоугольного треугольника EOF можно написать:

$$EF^2 = (0,5D)^2 + (0,5D)^2;$$

$$EF = \sqrt{2(0,5D)^2} = 0,5D\sqrt{2} \approx 0,7D;$$

$$EF = d_0 \approx 0,7D.$$

Из прямоугольного треугольника FKB можно написать:

$$KB^2 + KF^2 = FB^2.$$

Но $FB = EF = 0,7D$; $KB = 0,5AB$; $KF = 0,5EF$.

Следовательно

$$(0,5AB)^2 + (0,5 \cdot 0,7D)^2 = (0,7D)^2;$$

$$0,25AB^2 + 0,122D^2 = 0,49D^2;$$

$$AB = \sqrt{4(0,49D^2 - 0,122D^2)} = 2\sqrt{0,37D^2} \approx 1,22D,$$

т. е. $AB = D_0 \approx 1,22D$.

Определив таким графическим приемом главные оси эллипсов, можно приступить к вычерчиванию их.

При этом вычерчивание эллипсов по точкам можно производить от руки или пользуясь лекалом, однако оба способа встречаются на практике обычно большие затруднения, так как, во-первых, для них требуется предварительно вычислить большое количество точек, принадлежащих эллипсу (не менее восьми), во-вторых, требу-

ется достаточная твердость руки, верность глаза и умение работать по лекалу.

Поэтому в ряде руководств по графике авторы предложили несколько способов, используя которые, можно с достаточной степенью точности заменить эллипс четырехцентровым овалом и этот овал вычерчивать при помощи кругового циркуля. Автором настоящего пособия разработан способ, приведенный в табл. 12. Применяя этот способ, можно циркулем построить овал, близко тождественный к форме эллипса, изображающего изометрическую проекцию окружности.

Рассмотрим этот способ.

Допустим, требуется начертить овал, отвечающий диаметру окружности D_0 по фиг. 3 табл. 12. Проводим горизонтальную и вертикальную оси и на этих осях циркулем чертим окружность, имеющую диаметр D_0 . В местах пересечения этой окружности с вертикальной осью наметим две точки, названные на фиг. 1 *центр 1* и *центр 2*.

Откладываем по вертикальной линии размеры малой оси эллипса a_0 и этим определяем точки m и m' .

Из центров 1 и 2 описываем через точки m и m' циркулем две дуги. Затем циркулем, поставленным в центр большой окружности, прочерчиваем полуокружность через точку m' и этим намечаем две новые точки — *центр 3* и *центр 4*.

Заканчиваем овал, описав циркулем две дуги — одну из точки 3, другую — из точки 4.

Радиус r вычислять не приходится, так как он уже определен положением точек *центр 3* и *центр 4*.

Чтобы начертить овал по фиг. 4 и 5, следует сделать те же самые построения, которые мы проделали, вычерчивая овал по фиг. 3, только при этом главную ось овала необходимо провести под углом 60° к горизонту, а малую ось — под прямым углом к ней, т. е. под углом 30° к горизонту. Построение обеих осей легко сделать, имея под рукой чертежный треугольник с углами 30 и 60° .

Изучая изометрическую проекцию, уместно запомнить несколько соотношений, свойственных этой проекции, в частности полезно запомнить, что для изометрии

$$d_0 = 0,58D_0.$$

При вычерчивании изометрических изображений получающимся сокращением размеров по осям X , Y и Z в 0,82 раза обычно пренебрегают и вследствие этого получают изображение предмета, увеличенное в

$$\eta = \frac{1}{0,82} = 1,22 \text{ раза.}$$

Поэтому необходимо учесть, что, так как диаметр окружности (большая ось эллипса) в изометрии равен натуральной величине окружности, вписанной в грань куба, то, пренебрегая сокращением размеров по осям X , Y и Z , необходимо диаметр окружности (большую ось эллипса) увеличить в 1,22 раза. На фиг. 1—4 размер $D_0 = 1,22D$, где D — фактический диаметр окружности, вписанной в квадрат.

Из аналогичных соображений, вычерчивая, например, круглый фланец диаметром $D_{\text{факт}}$ по фиг. 1 (табл. 12а), следует большую ось AB эллипса на фиг. 2 (табл. 12а) взять равной $AB = 1,22D_{\text{факт}}$, а малую ось эллипса EF принять равной $EF = 0,58AB$.

Вместо этих вычислений рекомендуется пользоваться рассмотренным выше графическим способом определения размера осей эллипсов, большой AB и малой EF . Для этой цели следует начертить циркулем окружность по ее фактическому диаметру $D_{\text{факт}}$ (фиг. 1, табл. 12а). Затем, соединив точку E с точкой F , нужно сделать две засечки радиусом EF : одну — из точки E , вторую — из точки F . В результате получим (фиг. 1) точки A и B , соединив которые, будем иметь отрезок $AB = 1,22D_{\text{факт}}$. Размер AB , как уже установлено выше, соответствует длине большой оси эллипса на фиг. 2 табл. 12а. Расстояние же от точки E до точки F определяет собой размер малой оси эллипса, так как это расстояние — сторона квадрата, вписанного в окружность, следовательно, $EF \approx 0,7D_{\text{факт}}$, что и соответствует $EF = 0,58AB$, ибо $AB = 1,22D_{\text{факт}}$.

Действительно,

$$EF = 0,58 \cdot 1,22D_{\text{факт}} = 0,7D_{\text{факт}}$$

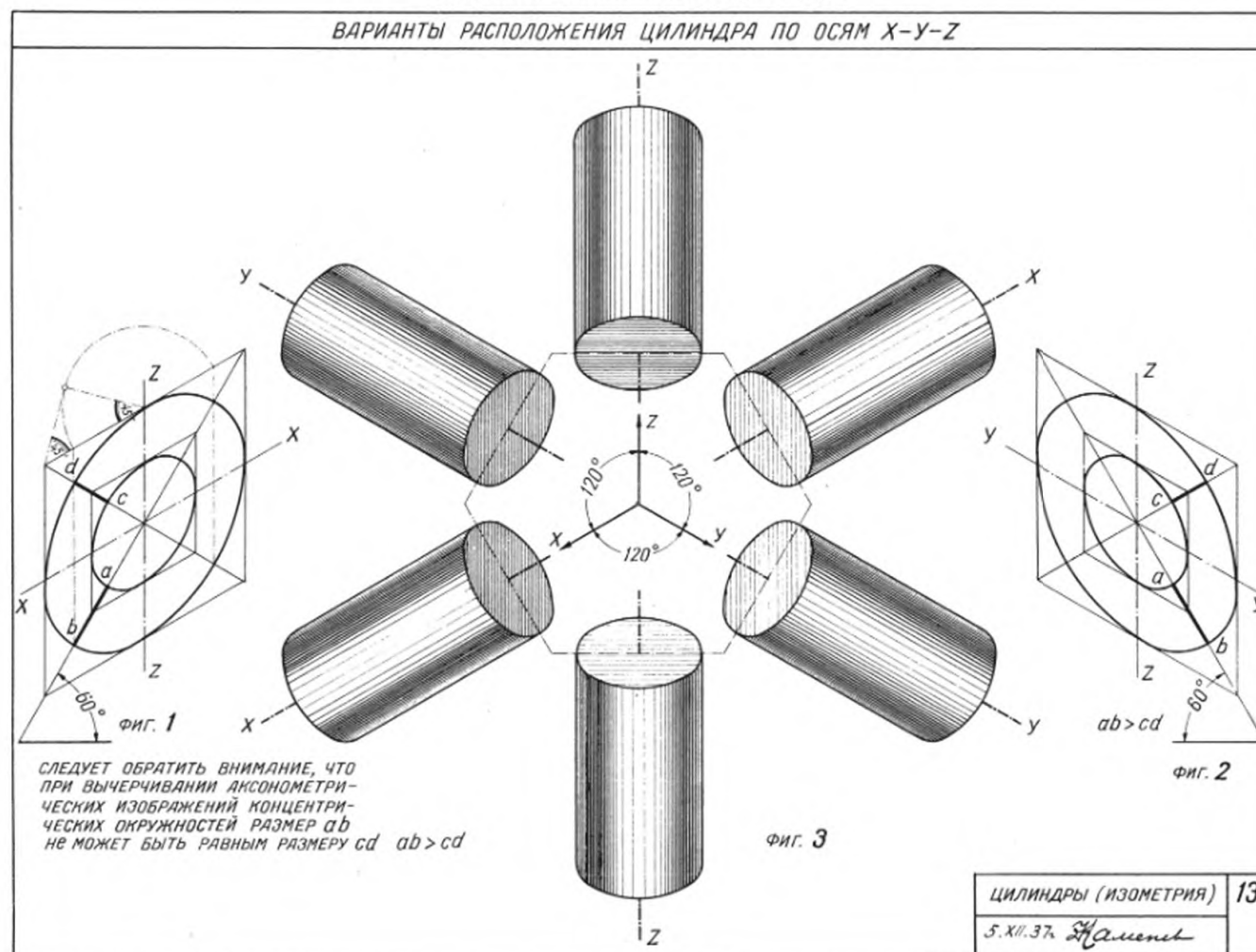
Этим же графическим приемом на фиг. 1 табл. 12а определены оси 1 — 2, 3 — 4, 5 — 6 и 7 — 8 для двух других эллипсов, начерченных на фиг. 2 табл. 12а.

На фиг. 3 табл. 12а таким же способом определен размер осей MN , PQ и ef , ih двух эллипсов для очертаний продолговатого фланца, начерченного в изометрической проекции на фиг. 4 табл. 12а.

Варианты расположения цилиндра по осям X , Y и Z (таблица 13)

На фиг. 1 и 2 табл. 13 даны изометрические проекции концентрических окружностей, вписанных в квадраты. При вычерчивании изометрических видов концентрических окружностей учащиеся часто допускают ошибку и размер ab принимают равным размеру cd , т. е. внутренний эллипс проводят параллельно контуру наружного эллипса. Следует помнить (это уже указывалось при рассмотрении фиг. 2 табл. 11), что при изометрическом превращении диаметр окружности по большой оси эллипса сохраняет фактический размер, а по направлению малой оси эллипса уменьшается в 0,58 раза.

Варианты расположения цилиндра



Поэтому и толщина стенки ab пустотелого цилиндра на фиг. 1 и 2 должна сохранить фактический размер, а та же самая толщина стенки пустотелого цилиндра, обмеренная по направлению малой оси эллипса, уменьшится в 0,58 раза против исходной, т. е.

$$dc = 058ab.$$

На фиг. 3 табл. 13 дано шесть изометрических видов цилиндра, расположенного вдоль осей X , Y и Z . Цилиндр в пространстве может занимать, вообще говоря, бесчисленное множество различных положений, однако если главную ось цилиндра расположить вдоль изометрических осей X , Y и Z , то количество изображений уменьшится до шести. Все шесть вариантов изображения цилиндра, главная ось которого направлена вдоль изометрических осей X , Y и Z , даны на фиг. 3 табл. 13.

Чтобы придать большую наглядность сделанным изображениям, на цилиндры штриховкой наносят тени, причем, помимо того что у затемненных мест штриховка сгущается, у этих же мест постепенно увеличивается и толщина линий штриховки. Торцы левых трех цилиндров заштрихованы гуще, чем торцы правых, так как предполагается направление света слева и сверху.

2.2. Сечение тел вращения плоскостью

Сечение цилиндра плоскостью (таблица 14)

В табл. 14 приведены способы сечения цилиндра плоскостью.

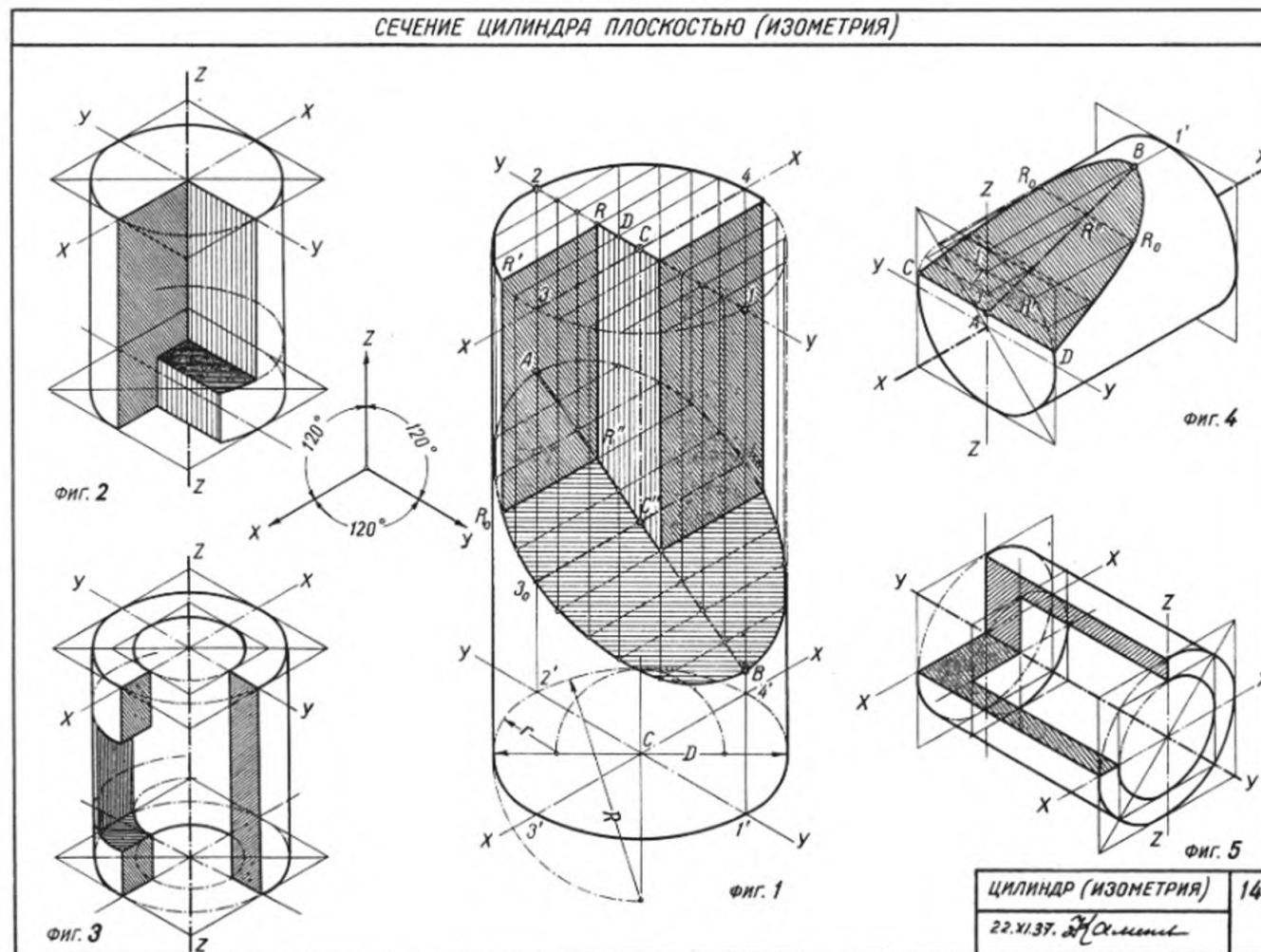
Рассмотрим приведенные примеры.

На фиг. 1 дана изометрическая проекция цилиндра. Чтобы сделать наклонный срез цилиндра, поступают следующим образом. Проводят прежде всего образующие $1 - 1'$ и $2 - 2'$, на которых будут лежать верхняя и нижняя точки A и B сечения. Положение точек A и B на образующих $1 - 1'$ и $2 - 2'$ должно быть задано. Соединив точки A и B , получают главную ось сечения. Для получения малой оси эллиптического сечения проводят вспомогательную вертикальную плоскость через ось XX . Эта плоскость рассечет цилиндр по образующим 3 и 4 и даст возможность наметить точки 3_0 и 4_0 . Для этого предварительно должна быть определена точка C'' , которая получается в месте пересечения вертикальной оси цилиндра CC с главной осью сечения AB .

Имея положение точек A , B , 3_0 и 4_0 , можно было бы уже построить эллипс, изображающий изометрическую проекцию сечения, для чего пришлось бы воспользоваться одним из способов, рассмотренных в ч. 1 настоящего пособия (см. рис. 20 и 21). Однако в данном случае эллипс сечения обычно строят иначе и именно тем же способом, которым были определены точки 3_0 и 4_0 .

Сечение цилиндра плоскостью

СЕЧЕНИЕ ЦИЛИНДРА ПЛОСКОСТЬЮ (ИЗОМЕТРИЯ)



Рассекают цилиндр рядом вспомогательных вертикальных плоскостей, проходящих, например, через точки D , R и т. д., затем, намечая образующие цилиндра, по которым та или иная вспомогательная плоскость рассекает заданный цилиндр, ищут, пользуясь точками R и R'' , точку R_0 , принадлежащую искомому сечению.

Чем чаще будут сделаны вспомогательные сечения (вертикальными плоскостями), тем больше наметится точек, принадлежащих эллиптическому сечению. Каждая вспомогательная плоскость даст две точки сечения. На фиг. 1, кроме наклонного сечения, цилиндр вырезан еще и вертикально секущими плоскостями. При этом два сечения, заштрихованные густой наклонной штриховкой, сделаны в плоскостях, параллельных координатной плоскости ZX , и одно, заштрихованное редкими вертикальными штрихами, сделано в вертикальной плоскости, параллельной плоскости ZY , проходящей через продольную ось цилиндра.

На фиг. 2 показан способ сечения цилиндра тремя вертикальными и одной горизонтальной плоскостью. Горизонтальная секущая плоскость дает на фиг. 2 эллипс, обозначенный штрихпунктирной чертой и, конечно, в точности равный по размерам эллипсам верхнего и нижнего оснований. Часть этого штрихпунктирного эллипса выделяет наружный контур имеющейся на фиг. 2 ступеньки (густо заштрихованной).

На фиг. 3 начерчен в разрезе пустотелый цилиндр. На боковой поверхности цилиндра имеется вертикальная прорезь, для вычерчивания контуров которой предварительно необходимо на цилиндре начертить эллипсы горизонтальных сечений. Эти эллипсы на фиг. 3 нанесены тонкой штрихпунктирной чертой.

На фиг. 4 цилиндр срезан наклонной плоскостью. Форма сечения представляет собой часть эллипса. Способ построения сечения в данном случае в точности аналогичен изученному выше (см. фиг. 1). Вспомогательные горизонтальные секущие плоскости проведены через точки 2, 3 и A , намеченные на оси Z .

Пользуясь секущей плоскостью, проходящей через точку 2, намечаем точки R_0 и R_0' . Чтобы найти эти точки, используют точку R'' и образующую R' .

На фиг. 5 дан пустотелый цилиндр, имеющий донышко. Чтобы выяснить на чертеже толщину дна, на фиг. 5 сделан вырез четвертой части цилиндра.

Вертикальное сечение сделано в плоскости ZY , а горизонтальные — в плоскости XU .

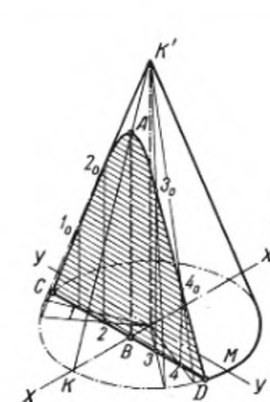
Сечение конуса плоскостью (таблица 15)

Сечение конуса наклонной плоскостью, перерезающей все его образующие, есть эллипс.

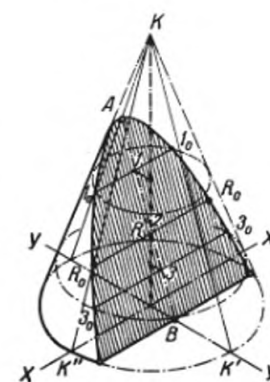
Способ построения этого сечения для изометрической проекции показан на фиг. 1 табл. 15.

Сечение конуса плоскостью

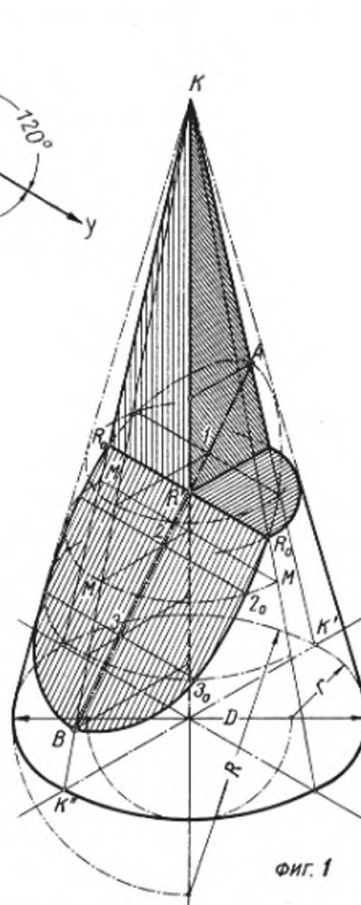
СЕЧЕНИЕ КОНУСА ПЛОСКОСТЬЮ (ИЗОМЕТРИЯ)



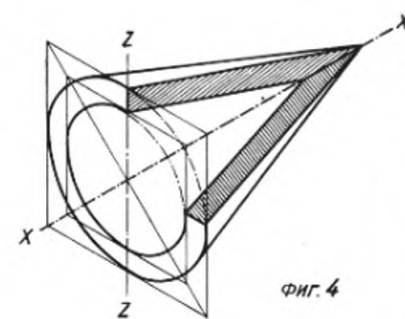
ФИГ. 2



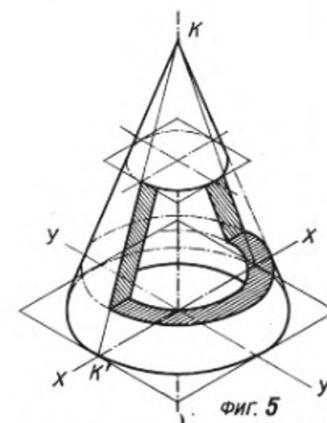
ФИГ. 3



ФИГ. 1



ФИГ. 4



ФИГ. 5

КОНУС (ИЗОМЕТРИЯ)

24.XI.37.2/Самонет

15

Чтобы построить искомое сечение, поступаем следующим образом. По заданным размерам строим конус и на его образующих KK' и KK'' намечаем верхнюю и нижнюю точки сечения, т. е. точки A и B .

Прямая AB будет служить большой осью эллипса и, следовательно, будет находиться в секущей плоскости. Точка R' пересечения высоты конуса с прямой AB даст возможность определить две точки эллипса сечения. Эти точки R_0 и R_0 лежат на образующих конуса, проведенных в плоскости ZY через ось конуса. Чтобы определить еще несколько точек, принадлежащих сечению, намечаем на оси конуса в промежутке между точками A и B несколько точек (желательно на равном расстоянии одна от другой) и через эти точки проводим вспомогательные плоскости перпендикулярно к вертикальной оси конуса. Полученные сечения (в реальности окружности) на изометрической проекции конуса будут представлены в виде эллипсов. На фиг. 1 проведены три вспомогательные плоскости. Одна из них дает эллипс, отмеченный буквами M , M и M . Этот эллипс пересекается с наклонно секущей плоскостью по хорде, проведенной через точку 2 параллельно оси Y , и на нем лежат две точки, принадлежащие эллипсу наклонного сечения. Одна из этих точек отмечена цифрой 2_0 .

Таким же способом определяется положение остальных точек, например, точки 3_0 и др. Соединив плавной чертой найденные точки, получаем контур эллипса сечения. Точки 1 — 3 на линию AB проецируют с оси конуса, где для этой цели предварительно был намечен ряд точек на равном расстоянии одна от другой. Эти же точки, предварительно размеченные на оси конуса, и являются центрами эллипсов, например эллипса M , M , M .

На фиг. 1, кроме наклонного направления, конус рассечен еще в вертикальных плоскостях ZX , ZY и в горизонтальной плоскости, проходящей через точку R' . На фиг. 2 табл. 15 конус рассечен плоскостью, проведенной параллельно его вертикальной оси (высоте). В результате получилось сечение, ограниченное гиперболой.

Для построения точек, принадлежащих гиперболе, т. е. точек $C1_0$, 2_0 , $A3_0$, 4_0 и D , поступаем так. На оси XX на заданном расстоянии от оси YY намечается точка B . Если теперь через точку B провести хорду CD параллельно оси Y , то получим след вертикальной секущей плоскости, дающей в сечении с конусом контур, ограниченный гиперболой. На самом следе должны лежать вторичные проекции 1 — 4 точек 1_0 — 4_0 , принадлежащие гиперболе, причем точки 1_0 — 4_0 будут найдены, если через их проекции 1 — 4 провести вертикальные вспомогательные плоскости, проходящие через ось конуса. Эти вспомогательные плоскости рассекают заданный конус по образующим, на которых должны быть отмечены точки 1_0 — 4_0 в пересечениях с вертикальными линиями, проведенными через их проекции 1 — 4.

На фиг. 3 показано сечение конуса наклонной плоскостью, проведенной параллельно образующей KK' . В этом случае заштрихованное сечение будет ограничено параболой. Чтобы построить контур сечения, поступают так. На заданном расстоянии от оси XX через точку B проводят горизонтальный след секущей плоскости (параллельно оси XX).

Через точку B параллельно образующей KK' проводят ось параболы. Точка R пересечения линии AB с вертикальной осью конуса дает возможность наметить точки R_0 и R_0 . Эти точки лежат на образующих KK'' . Чтобы найти еще несколько точек, принадлежащих линии сечения, намечают предварительно на оси конуса несколько точек, располагая их на одинаковом расстоянии по высоте одна от другой, и через эти точки рассекают конус горизонтальными плоскостями.

От сечения конуса горизонтальными плоскостями на его поверхности получаются окружности, проецирующиеся на фиг. 3 в виде эллипсов. Эти окружности пересекутся наклонной плоскостью по хордам 1_01_0 , 3_03_0 . Хорды проводят через точки 1 и 3 , расположенные на линии AB и спроецированные с оси эллипса, где для этой цели, как уже отмечалось, предварительно было намечено несколько точек.

Размеченные на оси конуса точки служат центрами вспомогательных эллипсов. Способы построения разрезов для пустотелых конусов (фиг. 4 и 5) понятны без особых разъяснений.

Сечение шара плоскостью (таблица 16)

В сечении шара плоскостью получается окружность, которая в изометрической проекции проецируется в виде эллипса.

На фиг. 1 табл. 16 шар рассечен горизонтальной плоскостью, проходящей через его центр, и тремя вертикальными плоскостями, две из которых проходят через центр шара, а третья не проходит через него.

Чтобы сделать вырез, представленный на фиг. 1, поступают следующим образом.

Чертят на поверхности шара три главных эллипса. Один из них располагают в экваториальной плоскости XY , два других — в меридиональных плоскостях XZ и YZ .

Главная ось эллипса экваториального сечения расположится горизонтально, а главные оси меридиональных эллипсов будут наклонены под углом 60° к горизонту. Оси этих трех главных эллипсов должны, конечно, пересекаться в центре шара. Центр четвертого эллипса смещен по оси Y на расстояние K от центра шара.

Чтобы правильно графически построить последний эллипс, необходимо прежде всего выяснить размер сопряженных диаметров этого эллипса, расположенных по изометрическим осям X и Z , кроме того, выяснить размер и направление большей оси эллипса.

Размер сопряженных диаметров эллипса легко получается, если из центра искомого эллипса провести вертикальную линию параллельно оси Z до пересечения с меридиональным эллипсом, вычерченным в плоскости ZY .

Половина вертикального диаметра искомого эллипса на фиг. 1 отмечена буквой R .

Диаметр, сопряженный только что найденному, будет расположен вдоль оси X , и его величина намечается точками пересечения линии, проведенной через центр эллипса параллельно оси X в пределах экваториального эллипса.

Для получения главной оси эллипса через центр искомого эллипса следует провести линию под углом 60° к горизонту и на этой оси от центра эллипса отложить размер, равный величине R , помноженной на 1,22, т. е. большая полуось искомого эллипса $L = 1,22R$.

На фиг. 1 все эллипсы вычерчены упрощенно в виде овалов. При этом только что рассмотренный эллипс (точнее, овал) очерчен из четырех центров (центры 13 — 16).

Упрощенный способ построения эллипсов был рассмотрен выше (см. табл. 12).

На фиг. 2 показан шар с вырезанной четвертью. Чтобы сделать вырез, необходимо вычертить два эллипса — один в экваториальной плоскости XU и второй в плоскости ZY . Наклон главной оси последнего составляет с горизонтом угол 60° .

На фиг. 3 вырезана четвертая часть нижнего полушария. Контур сечений ограничен частями эллипса, при этом один эллипс расположен в плоскости ZX , второй — в плоскости ZY .

Таким же способом на фиг. 4 вырезана четвертая часть из шарового пояса, а на фиг. 5 вырезана четвертая часть из пустотелой полусферы. Все сделанные построения оставлены на фиг. 5, и в них нетрудно разобраться.

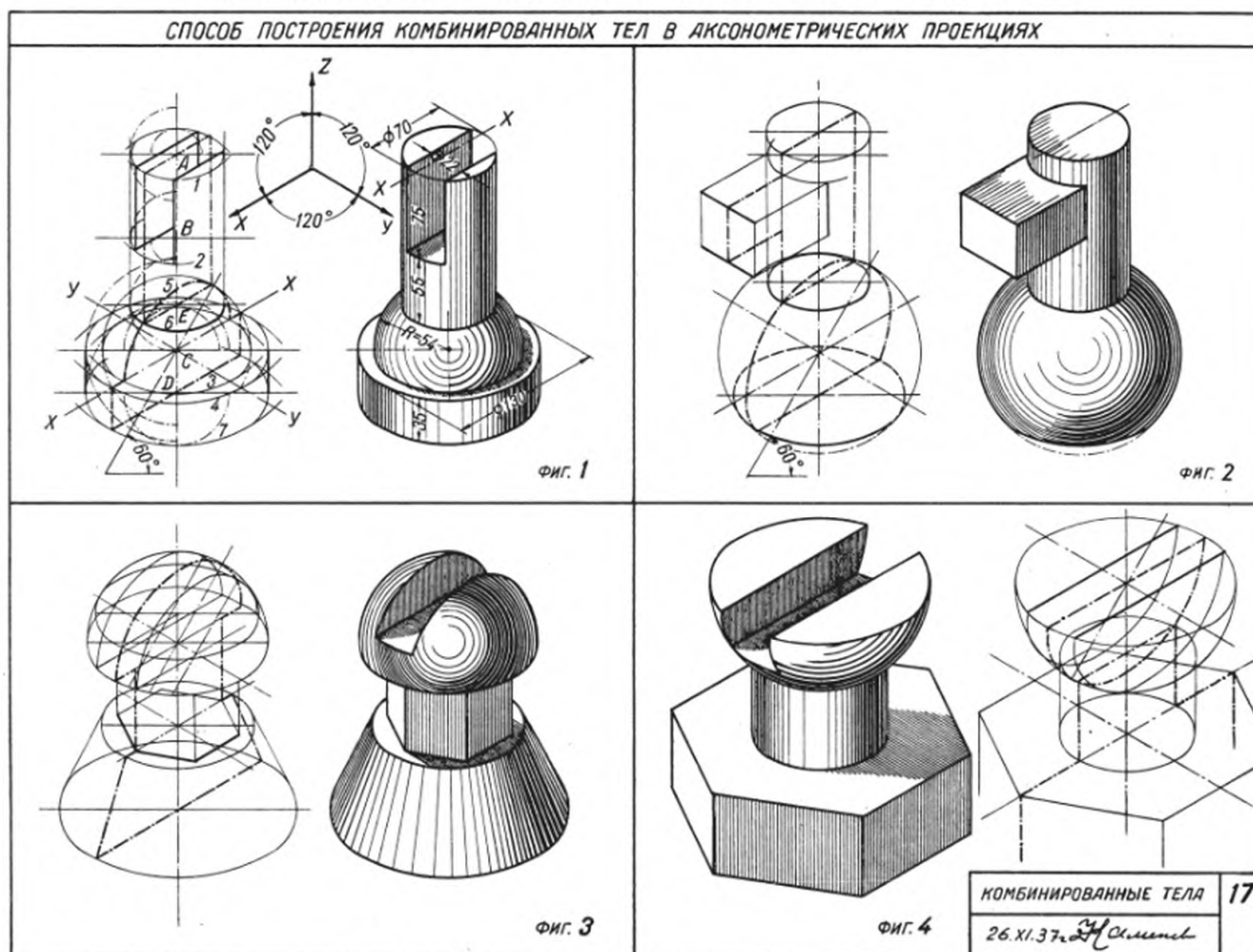
Говоря о способах вычерчивания шара, в заключение следует отметить, что диаметр шара на изометрической проекции равен действительной величине диаметра проецируемого шара. Поэтому, если (как это обычно делают при вычерчивании видов разного рода комбинированных тел) сокращением размеров по осям пренебречь, то необходимо диаметр шаровых частей этих тел увеличить в 1,22 раза.

Способ построения комбинированных тел в аксонометрических проекциях (таблица 17)

В табл. 17 даны изометрические проекции четырех комбинированных тел. При этом рядом с каждым изображением дана подробная схема всех необходимых построений.

Тело, показанное на фиг. 1, можно мысленно расчленить на три составные части: нижний цилиндр, шаровой пояс и верхний цилиндр.

Способ построения комбинированных тел в аксонометрических проекциях



В верхнем цилиндре сделана прорезь. Построение начато с вычерчивания нижнего цилиндра. Для этой цели на осях X , Y был вычерчен эллипс верхнего основания этого цилиндра, отмеченный на схематическом изображении фиг. 1 цифрой 4. Центр этого эллипса обозначен буквой C .

Далее от точки C отложена вниз высота нижнего цилиндра и намечена точка D — центр нижнего основания цилиндра. Вокруг точки D вычерчен эллипс, обозначенный цифрой 7.

Построение нижнего цилиндра закончено проведением двух его крайних образующих. Далее на осях X , Y около центра C построен эллипс 3, представляющий собой нижнее основание средней части, т. е. полусферы.

Чтобы правильно присоединить верхний цилиндр к полусфере, сделано диаметрально сечение, представляющее штрихпунктирный эллипс 5. Пользуясь эллипсом и зная размер диаметра верхнего цилиндра, намечаем точку E . Точка E — центр нижнего основания верхнего цилиндра. Вокруг точки E построен эллипс 6. Далее от точки E кверху от оси Z отложена высота верхнего цилиндра и около точки A выстроено его верхнее основание — эллипс 1. Чтобы правильно оформить вертикальную прорезь, была намечена на оси Z точка B и вокруг нее построен эллипс 2.

Если сокращением размеров по осям пренебречь, то большие оси всех начерченных эллипсов (1 — 7) должны быть увеличены в 1,22 раза против исходного.

Простановка размеров фиксирует величину всех элементов комбинированного тела. Штриховка придает изображению большую наглядность.

Способ построения остальных фигур (2—4) совершенно тождествен с только что рассмотренным. Все линии построения оставлены на пояснительных схемах. Необходимо только отметить, что построение комбинированных тел значительно облегчается, если, помимо основных построений, наносить еще и контур диаметральных сечений этих тел. На схемах к фиг. 1—5 контур диаметральных сечений построен толстой штрихпунктирной чертой.

Контур диаметральных сечений помогает правильно «собрать» комбинированное тело.

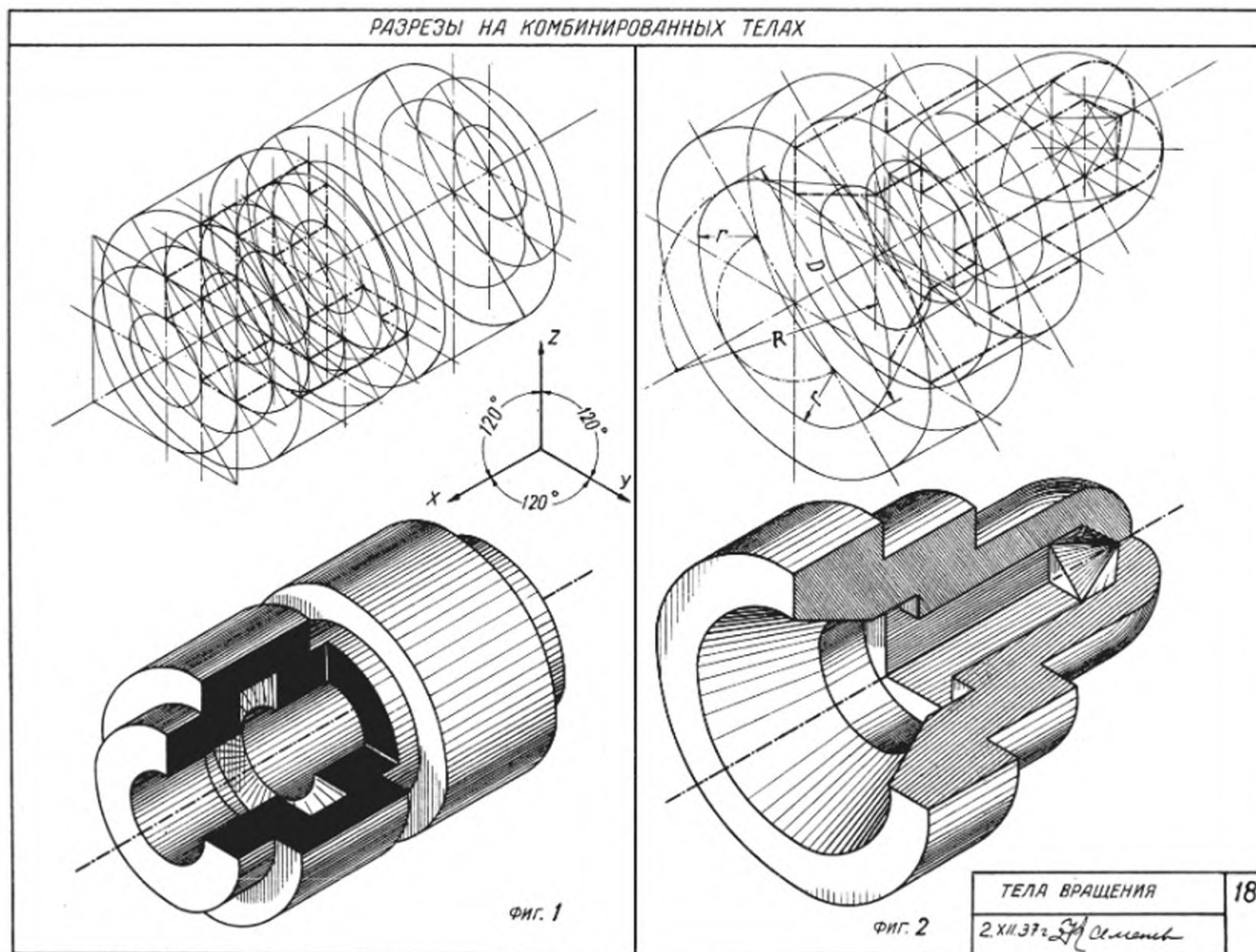
Нанесение контура диаметральных, продольных и поперечных сечений особенно необходимо для тел, на которых предполагается делать разрезы.

Разрезы на комбинированных телах (таблица 18)

В табл. 18 даны изометрические изображения двух комбинированных тел. Первое тело (фиг. 1) состоит исключительно из цилиндров; на фиг. 2 начерчено тело из трех цилиндров, заканчивающихся шаровой поверхностью.

Разрезы на комбинированных телах

РАЗРЕЗЫ НА КОМБИНИРОВАННЫХ ТЕЛАХ



Внутри тела имеется выемка: сначала коническая, затем переходящая в цилиндр и заканчивающаяся четырехгранной призмой и пирамидой. Вычерчивание произведено на оси X , и все необходимые построения, в которых учащемуся нетрудно будет разобраться, нанесены на вспомогательных схемах.

На этих же вспомогательных схемах нанесены толстой штрихпунктирной чертой продольные сечения. Пользуясь этими сечениями, на фиг. 1 и 2 нанесли контур разрезов. Разрезанные стенки на фиг. 1 залиты тушью, а на фиг. 2 заштрихованы под углом 45° к горизонту.

Для придания наглядности изображению нанесена штриховка теней. Сгущением и одновременным утолщением штриховки выявлен рельеф цилиндрических, конических и шаровых частей тела.

Переход от ортогонального чертежа детали к ее аксонометрическому изображению (таблица 19)

Слева вверху в табл. 19 дан чертеж машиностроительной детали, вычерченной в трех проекциях (с разрезами). На чертеже показана крышка сальника.

Изометрическое изображение этой детали дано справа внизу в табл. 19. На остальных двух изображениях показан способ построения этой детали. Деталь состоит из опорной плиты и пустотелого цилиндрического выступа посередине. Опорная плита имеет округленные торцы и продолговатые щели для болтов. Чтобы нанести контур округленных частей опорной доски, необходимо предварительно построить эллипсы на тех уровнях по высоте, на которых имеются эти округленные части.

После того как все необходимые подготовительные построения будут закончены, необходимо нанести контуры продольного и поперечного сечений, чтобы по этим контурам можно было сделать вырез четвертой части. Контуры сечений на левом нижнем изображении нанесены утолщенной штрихпунктирной чертой. Сокращение размеров по изометрическим осям не учитывалось, поэтому большие оси всех эллипсов приняты равными фактическим диаметрам окружностей, увеличенным в 1,22 раза. Это и отмечено на правом верхнем изображении, где размер $D = 1,22a$.

2.3. Пересечение многогранников.

Линии перехода. Винтовая линия

Пересечение призмы с призмой (таблица 20)

На фиг. 1 табл. 20 показан случай полного пересечения трехгранной призмы ABE с четырехгранной призмой 1—4.

Предположим, что по заданию осевая линия верхней грани трехгранной призмы C_1C пересекается с осью четырехгранной призмы OO' в точке C .

В этом случае, чтобы построить линию контура пересечения заданных призм, поступим так: рассежем вертикальную призму горизонтальными плоскостями; при этом первую, верхнюю, плоскость проведем через грань EB , а вторую, вспомогательную горизонтальную, плоскость проведем через ребро A . В результате на вертикальной призме будет получен трапециевидный контур сделанных сечений.

Верхний контур для наглядности отштрихован и дает возможность наметить линии пересечения грани EB с гранью 1 — 2 и гранью 3 — 4 вертикальной призмы. На грани 1 — 2 наметится линия E_0B_0 , а на грани 3 — 4 линия $E'_0B'_0$.

Нижнее сечение дает возможность наметить точку входа A_0 ребра A в грань 1 — 2 и точку выхода A'_0 этого ребра из грани 3 — 4 четырехгранной призмы. Чтобы наметить контур нижнего горизонтального сечения, необходимо выяснить положение точки C_3 ; для этого нужно рассеять трехгранную призму вертикальной плоскостью, проведя последнюю через вертикальную ось четырехгранной призмы. Контур этой вспомогательной вертикальной плоскости на фиг. 1 отмечен утолщенной штрихпунктирной чертой и обозначен буквами C , C_1 , C_2 и C_3 .

Для определения точки C_2 из точки A проводим линию параллельно оси Y (см. размер M). Найдя положение точки C_3 и построив контур трапециевидного сечения, на периметре этого контура определяем точку входа A_0 ребра A и точку выхода A'_0 .

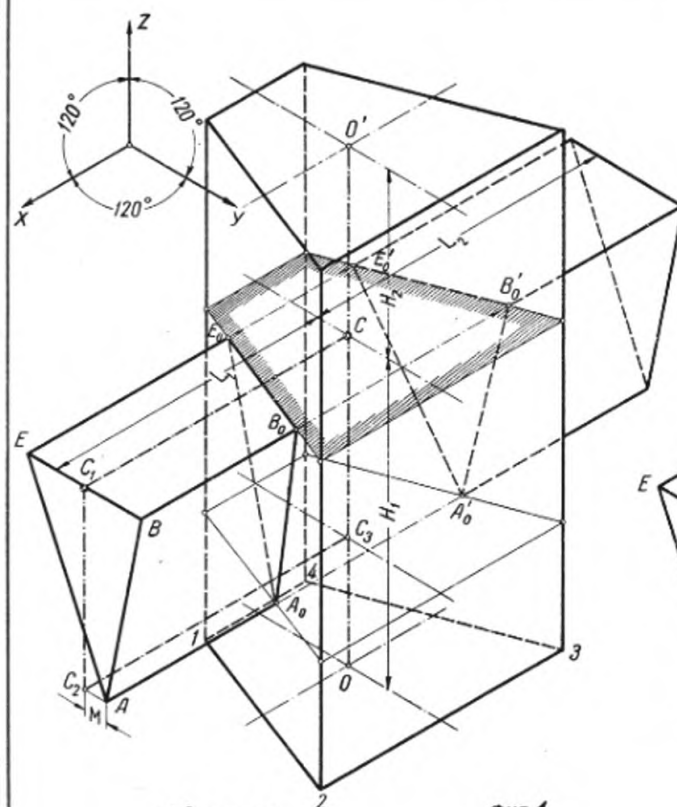
Чтобы закончить решение поставленной задачи, соединяем точку A_0 с точками B_0 и E_0 , а точку A'_0 — с точками B'_0 , E'_0 .

Треугольник $E_0B_0A_0$ будет представлять собой контур, по которому трехгранная призма входит в грань 1 — 2 вертикальной призмы, а треугольник $A'_0B'_0E'_0$ будет представлять собой контур пересечения трехгранной призмы с невидимой на фиг. 1 гранью 3 — 4.

На фиг. 2 найдена линия пересечения для тех же двух многогранников, что и на фиг. 1, однако трехгранная призма сдвинута вдоль оси Y на расстояние r .

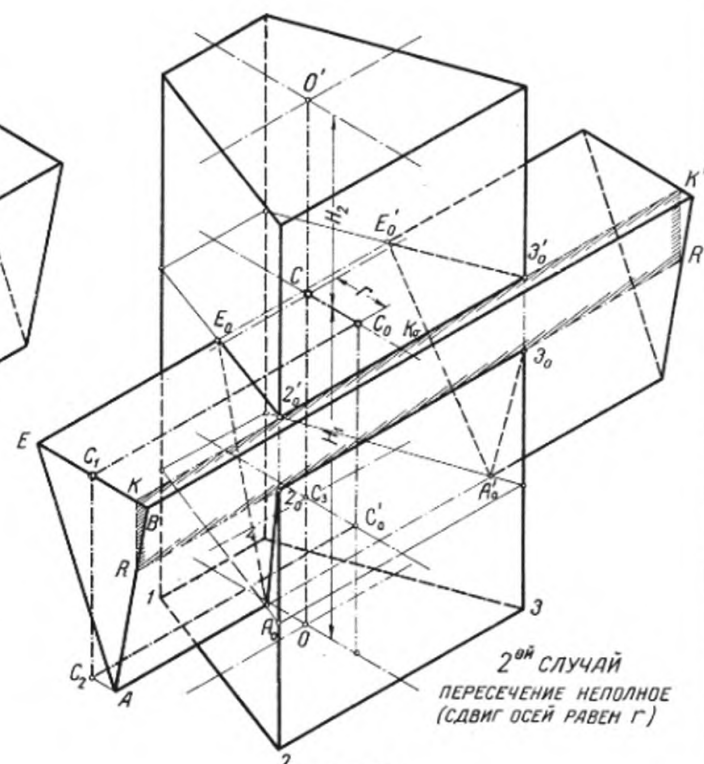
Пересечение призмы с призмой

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРИЗМЫ С ПРИЗМОЙ



1-й СЛУЧАЙ
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОЛНОЕ

ФИГ. 1



2-й СЛУЧАЙ
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ НЕПОЛНОЕ
(СДВИГ ОСЕЙ РАВЕН Γ)

ФИГ. 2

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ
МНОГОГРАННИКОВ

15. XII.37. *Л. С. Мамон*

20

В результате сделанного сдвига получается неполное пересечение, и контур этого неполного пересечения представляет собой замкнутую ломаную

$$2_0 - 3_0 - A'_0 - E'_0 - 3'_0 - 2'_0 - E_0 - A_0 - 2_0.$$

Для получения точек E_0 и E'_0 , A_0 и A'_0 встречи ребер E и A с вертикальной призмой в данном случае, как и на фиг. 1, необходимо провести две горизонтальные вспомогательные плоскости. Эти плоскости пересекут вертикальную призму по двум трапециям.

Для построения контура трапеций необходимо знать положение точек C и C_3 .

Положение точки C известно по условиям задачи, а для того, чтобы найти точку C_3 , пересекаем трехгранную призму вертикальной плоскостью $C_0C_1C_2C'_0$ и затем точку C'_0 проецируем параллельно оси Y на вертикальную ось четырехгранной призмы.

Имея положение точек C и C_3 , строим на них трапециевидные контуры горизонтальных сечений и на этих контурах намечаем точки E_0 , E'_0 , A_0 и A'_0 , принадлежащие линии пересечения.

Далее необходимо наметить точки входа для ребер 2 и 3, пронизывающих грани AB и EB трехгранной призмы, т. е. определить положение точек 2_0 , $2'_0$ и 3_0 , $3'_0$.

Чтобы найти положение этих четырех точек, нужно рассечь трехгранную призму вспомогательной вертикальной плоскостью и эту плоскость провести через грань 2 — 3 вертикальной призмы.

В результате этого сечения на трехгранной призме будет выделен прямоугольник $KK'R'R$. Прямоугольник этот легко построить, пользуясь точкой K_0 .

Пересечение ребер 2 и 3 вертикальной призмы с заштрихованным прямоугольником намечает четыре последние точки, принадлежащие линии пересечения.

Пересечение призмы с пирамидой (таблица 21)

На фиг. 1 табл. 21 показан случай пересечения четырехгранной призмы с пятигранной пирамидой. Поставленная задача может быть разрешена, если найти точки встречи ребер четырехгранной призмы с гранями пирамиды и, кроме того, точки встречи ребер пятигранной пирамиды с гранями призмы.

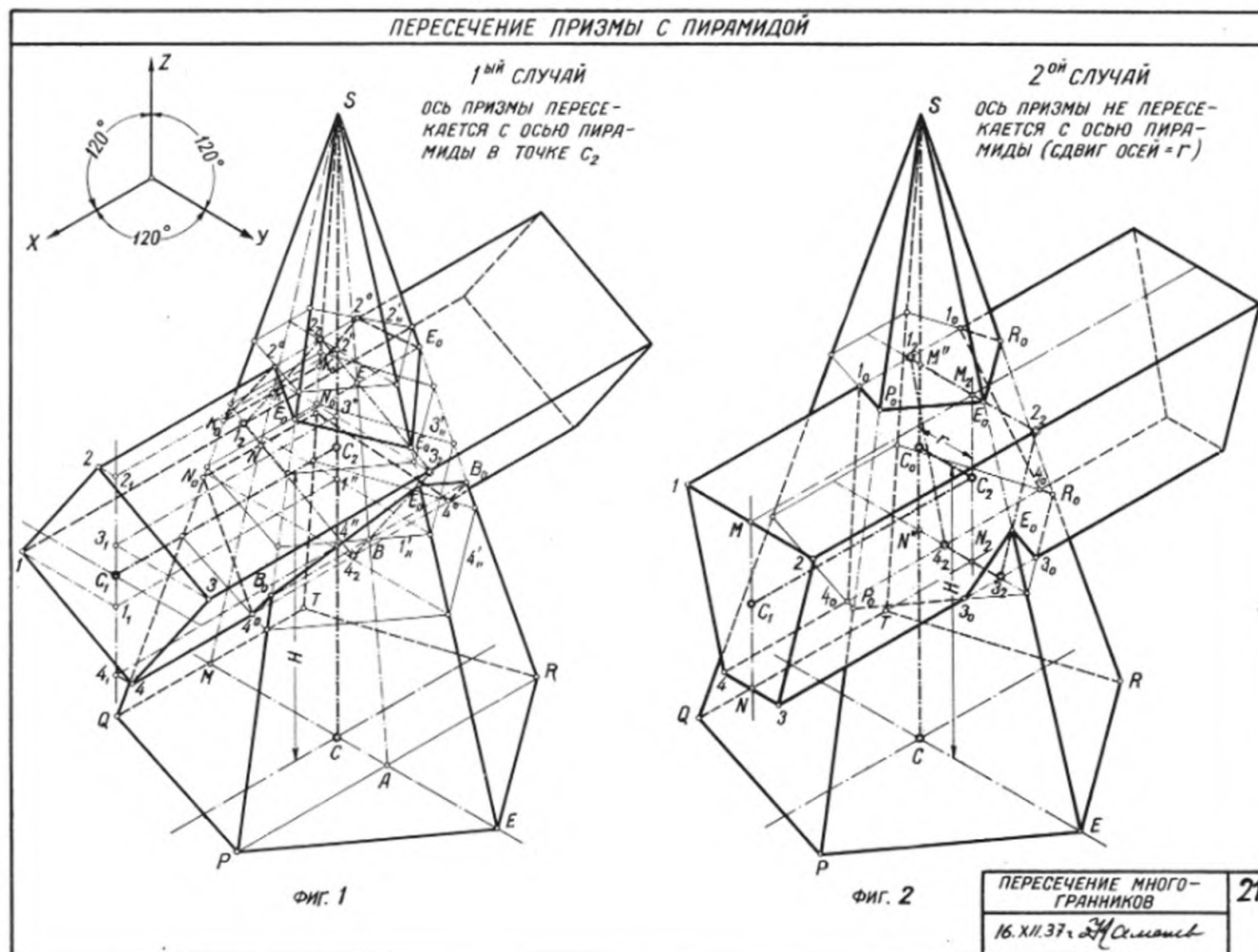
По условиям задачи оси призмы и пирамиды пересекаются в точке C_2 .

Чтобы найти точки встречи ребер призмы с гранями пирамиды, проводим вспомогательные горизонтальные плоскости через каждое ребро призмы.

Эти вспомогательные горизонтальные плоскости, пересекая пирамиду, наметят на ее поверхности контур пятиугольных сечений.

Пересечение призмы с пирамидой

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРИЗМЫ С ПИРАМИДОЙ



Горизонтальная плоскость, проведенная через ребро 2, дает возможность наметить точки $2''$, $2'''$, для чего предварительно должны быть намечены точки 2_1 и $2''$. Точка $2''$ будет являться центром, около которого построен пятиугольный контур горизонтального сечения, проходящего через ребро 2. Этот пятиугольник отмечен цифрой $2'_{11}$. Таким же способом находим точки 4_0 , 4_0 для ребра 4. Пятиугольный контур сечения, соответствующий горизонтальному сечению пирамиды, сделанному на уровне ребра 4, отмечен цифрой $4'_{11}$, а его центр лежит в точке $4''$.

Ребра 1 и 3 проходят вне пятиугольного контура сечения $1'_{11}$ и $3'_{11}$ пирамиды, из чего можно заключить, что точек встречи с пирамидой ребра 1 и 3 не имеют.

Перейдем теперь к определению точек встречи ребер пирамиды с призмой. Исследуем ребро E .

Для нахождения точек встречи ребра E с призмой проводим через E вспомогательную вертикальную плоскость. Эта вспомогательная плоскость, перерезая призму, наметит контур сечения $1_2 2_2 3_2 4_2$, вычерченный штрихпунктирной чертой.

Ребро E встречается контур сечения в точках E_0 и E_0 . Эти две точки и будут являться точками встречи ребра E с призмой.

Для нахождения точек B_0 , B_0 и E_0 , E_0 , в которых ребра P и R встречаются призму, проводим через эти ребра наклонную вспомогательную плоскость, горизонтальный след которой будет PR . На этом следе лежит точка A , пользуясь которой, можно наметить точки B и E пересечения оси AS с контуром поперечного сечения $1_2 2_2 3_2 4_2$. Проведя через точки B и E линии параллельно оси Z , получаем точки B_0 , B_0 и E_0 , E_0 .

Таким же способом определяются точки встречи ребер Q и T пирамиды с призмой. Для этого на линии MS намечены точки N и K . Пользуясь этими точками, находят точки встречи ребер Q и T с гранями призмы. Эти точки на фиг. 1 отмечены буквами N_0 , N_0 и K_0 , K_0 .

Закончив на этом нахождение точек, принадлежащих линии пересечения, нужно все найденные точки соединить между собой; при этом видимой линией должны быть соединены точки, лежащие на видимых гранях, и пунктиром — точки, лежащие на невидимых гранях.

На фиг. 2 табл. 21 также показан случай пересечения четырехгранной призмы с пятигранной пирамидой; однако на фиг. 2 призма сдвинута вправо по оси Y , поэтому пересечение получается неполное. В этом случае многоугольник сечения $E_0 3_0 R_0 4_0 1_0 R_0 E_0 P_0 1_0 4_0 P_0 3_0$ получается в виде одной замкнутой фигуры. На фиг. 1 был показан случай полного пересечения, и там в пересечении получились два замкнутых самостоятельных многоугольника. Грани 1 — 2 и 3 — 4 призмы расположены горизонтально, поэтому если задано положение

ние точек C_0 и C_2 , то можно вычертить контур поперечного сечения для призмы $1_2 2_2 3_2 4_2$.

Далее, пользуясь точками M_2 и N_2 , намечаем точки M'' и N'' на оси пирамиды CS . Эти точки M'' и N'' будут служить центрами, вокруг которых должны быть построены горизонтальные сечения, отвечающие уровню грани $1-2$ и $3-4$. Эти горизонтальные сечения для пятигранной пирамиды являются пятиугольниками, и, пользуясь ими, намечаем точки $1_0 P_0 E_0 R_0 1_0$ на верхнем сечении и точки $4_0 P_0 3_0 3_0 R_0 4_0$ на уровне нижнего сечения, т. е. на уровне грани $3-4$. Последние точки, принадлежащие линии пересечения, лежат на ребре E , и эти точки определим в месте пересечения ребра E с поперечным сечением призмы $1_2 2_2 3_2$ и 4_2 , т. е. в точках E_0 и E_0 .

Пересечение пирамиды с пирамидой (таблица 22)

На фиг. 1 табл. 22 показан случай пересечения двух пирамид, оси которых расположены взаимно перпендикулярно, а на фиг. 2 — параллельно между собой.

Чтобы решить поставленную задачу, следует по общему приему найти точки встречи ребер первой пирамиды с гранями второй, а затем, наоборот, определить точки встречи ребер второй пирамиды с гранями первой.

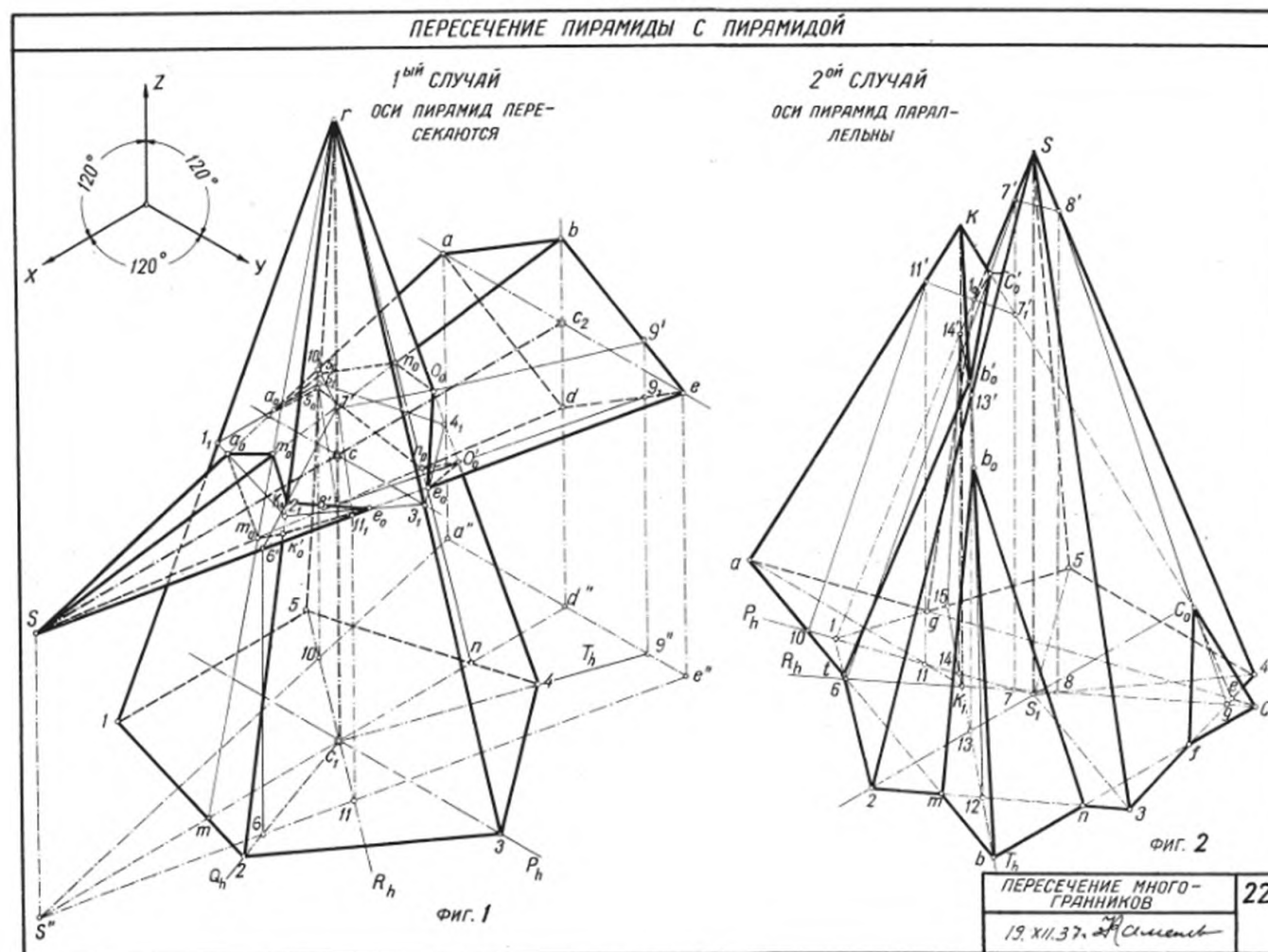
На фиг. 1 ребра Se и Sa пирамиды $Sabde$ расположены в горизонтальной плоскости XY . Поэтому, воспользовавшись точкой C , строим контур пятиугольного сечения $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1$ вертикальной пирамиды вспомогательной плоскостью, проходящей через ребра Sa и Se . Намеченное сечение определяет четыре точки — a_0, a_0, e_0 и e_0 , принадлежащие линии пересечения пирамид.

Для определения точек встречи остальных двух ребер пирамиды $Sabed$ с гранями вертикальной пирамиды проводим через изучаемые ребра Sb и Sd вспомогательную вертикальную плоскость. Эта плоскость рассекает вертикальную пирамиду по образующим rm и rn , и на этих-то образующих и наметятся точки n_0 и m_0 , в которых ребро Sb встречает вертикальную пирамиду, а также точки n_0 и m_0 , в которых ребро Sd встречает вертикальную пирамиду.

Переходим далее к определению точек встречи ребер вертикальной пирамиды с гранями пирамиды $Sabde$. Рассматривая сделанные построения (см. пятиугольник $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1$), можно установить, что ребра $r3$ и $r1$ с гранями пирамиды $Sabed$ не пересекаются. Таким образом, придется искать точки встречи только для трех ребер вертикальной пирамиды — для ребер $2r, 4r$ и $5r$.

Для этой цели рассекаем обе пирамиды вертикальными вспомогательными плоскостями Q, T и R , проходящими через исследуемые ребра и высоту $c_1 r$ вертикальной пирамиды. Чтобы провести плоскости Q, T и R , находим предварительно вторичную проекцию пирамиды $Sabed$.

Пересечение пирамиды с пирамидой



На фиг. 1 вторичная проекция пирамиды *Sabed* обозначена буквами $S''a''b''d''e''$. Горизонтальный след Qh вспомогательной вертикальной плоскости Q , проведенной через ребро $2r$ и высоту c_1r , расщелет вторичную проекцию в точках $6C_1$ и O'' , точка O'' лежит на линии $a''e''$ и для дальнейших построений не требуется.

Поднимаем точку 6 на ребро Se и намечаем здесь точку $6'$. Точка C_1 должна быть поднята на ребра Sb и Sd , где и наметятся точки $7'$ и $8'$.

Соединив точку $6'$ с точками $7'$ и $8'$, найдем контур сечения плоскостью Q граней bSe и dSe . Ребро $2r$, встречая линии $6'—7'$ и $6'—8'$, намечает две точки K_0 и K'_0 , принадлежащие линии пересечения заданных многогранников. Совершенно таким же приемом находим четыре последние точки, т. е. точки O_0 и O'_0 для ребра $4r$ и $5_0, 5'_0$ для ребра $5r$.

Для определения точек O'_0 и O_0 проведена вертикальная вспомогательная плоскость T через ребро $4r$ и высоту C_1r . Горизонтальный след T_h расщелет контур вторичной проекции пирамиды *Sabed* в точках $9''$ и C_1 . Поднимая точку $9''$ в пространство, на основании пирамиды *abed* намечаем точки 9_1 и $9'$, а поднимая точку C_1 в пространство, намечаем точки $7'$ и $8'$. Контур $7'9'9'8'$ представляет собой сечение граней bSe и dSe плоскостью T , и на этом контуре определяются точки O'_0 и O_0 , принадлежащие линии пересечения пирамид.

Вспомогательная плоскость R , проведенная через ребро $5r$, расщелет вторичную проекцию пирамиды *Sabed* по линии Rh . Точки $10, C_1$ и 11 , проецируясь вверх, выявляют контур сечения пирамиды *Sabed* плоскостью R . Этот контур на фиг. 1 обозначен цифрами $10_17'11_18'10_1$. Ребро $5r$ встречает контур $10_17'11_18'10_1$ в точках $5'_0$ и 5_0 , эти точки являются последними двумя искомыми точками. Соединив последовательно все найденные точки, выделяем контур пересечения пирамид. В данном случае получилось полное пересечение, поэтому контур пересечения разделится на два самостоятельных многоугольника — многоугольник входа $e_0O'_0n_05'_0a_05_0n_0O_0e_0$ и многоугольник выхода $e_0k_0m_0a_0m_0k'_0e_0$.

Соединяя видимой линией видимые точки, а пунктирной линией точки невидимые, заканчиваем построение линии пересечения пирамид на фиг. 1.

Аналогично этому решается задача на пересечение пирамид на фиг. 2. Здесь оси пирамид взаимно параллельны.

Построение линии перехода начинаем с точек пересечения контуров оснований пирамид, т. е. прежде всего намечаем точки m, n, f, e, g и t . Далее строим вторичные проекции заданных пирамид на горизонтальную плоскость. В результате этого вершина пирамиды K спроецируется в точку K_1 , а вершина S — в точку S_1 .

Соединив точки K_1 и S_1 с вершинами многоугольников оснований пирамид, получим вторичные проекции каждого ребра первой и второй пирамид. Далее определяем точки b'_0, b_0, c'_0, l_0 , а также точку c_0 .

Для нахождения точек c_0 и c'_0 проводим через ребро Kc и вершину K_1 вертикальную вспомогательную плоскость R .

Горизонтальный след R_h этой плоскости пересечет вторичную проекцию пятигранной пирамиды в точках 6, 7, 8, 9. Проецируем точки 7, 8 на соответствующие ребра $1S$ и $4S$ и намечаем точки $7'$, $8'$. Контур 6, $7'$, $8'$, 9 представляет собой сечение пятигранной пирамиды плоскостью R , проведенной через ребро cK . На этом-то контуре и должны быть отмечены точки c_0 и c'_0 встречи ребра cK с пятигранной пирамидой.

Для нахождения точек b_0 и b'_0 проводим вспомогательную вертикальную плоскость T через ребро bK и высоту K_1K .

Горизонтальный след T_h пересекает вторичную проекцию пятигранной призмы в точках 12, 13, 14 и 15. Поднимаем точки 13 и 14 на соответствующие ребра $2S$ и $1S$. На этих ребрах намечаются точки $13'$ и $14'$, соединив которые с точками 12 и 15, получаем контур 12, $13'$, $14'$, 15 сечения пятигранной призмы плоскостью T , проведенной через ребро bK . Ребро bK встречает контур сечения в точках b_0 и b'_0 , принадлежащих линии пересечения пирамид. Для нахождения последней точки, т. е. точки пересечения ребра $1S$ с гранью Kca , проводим через ребро $1S$ и высоту SS_1 вертикальную плоскость P . Пользуясь горизонтальным следом P_h плоскости P , намечаем точки 10, 11 и 7. Проецируя точки 11 и 7 на ребра aK и cK , намечаем контур 10, $11'$, $7'$. Ребро $1S$, встречая этот контур в точке 7_0 , намечает последнюю точку линии пересечения пирамид. Таким образом, линия пересечения пирамид на фиг. 2 распадается на три самостоятельных многоугольника: треугольник fC_0e , треугольник tb_0n и пятиугольник $tb'_0c'_0l'_0g$.

Пересечение призмы и пирамиды с цилиндром (таблица 23)

Так как грани призмы и пирамиды представляют собой плоскости, то вопрос о пересечении призмы и пирамиды с цилиндром можно свести к уже рассмотренному нами выше (см. табл. 14) случаю сечения цилиндра плоскостью.

Пересечение призмы с цилиндром

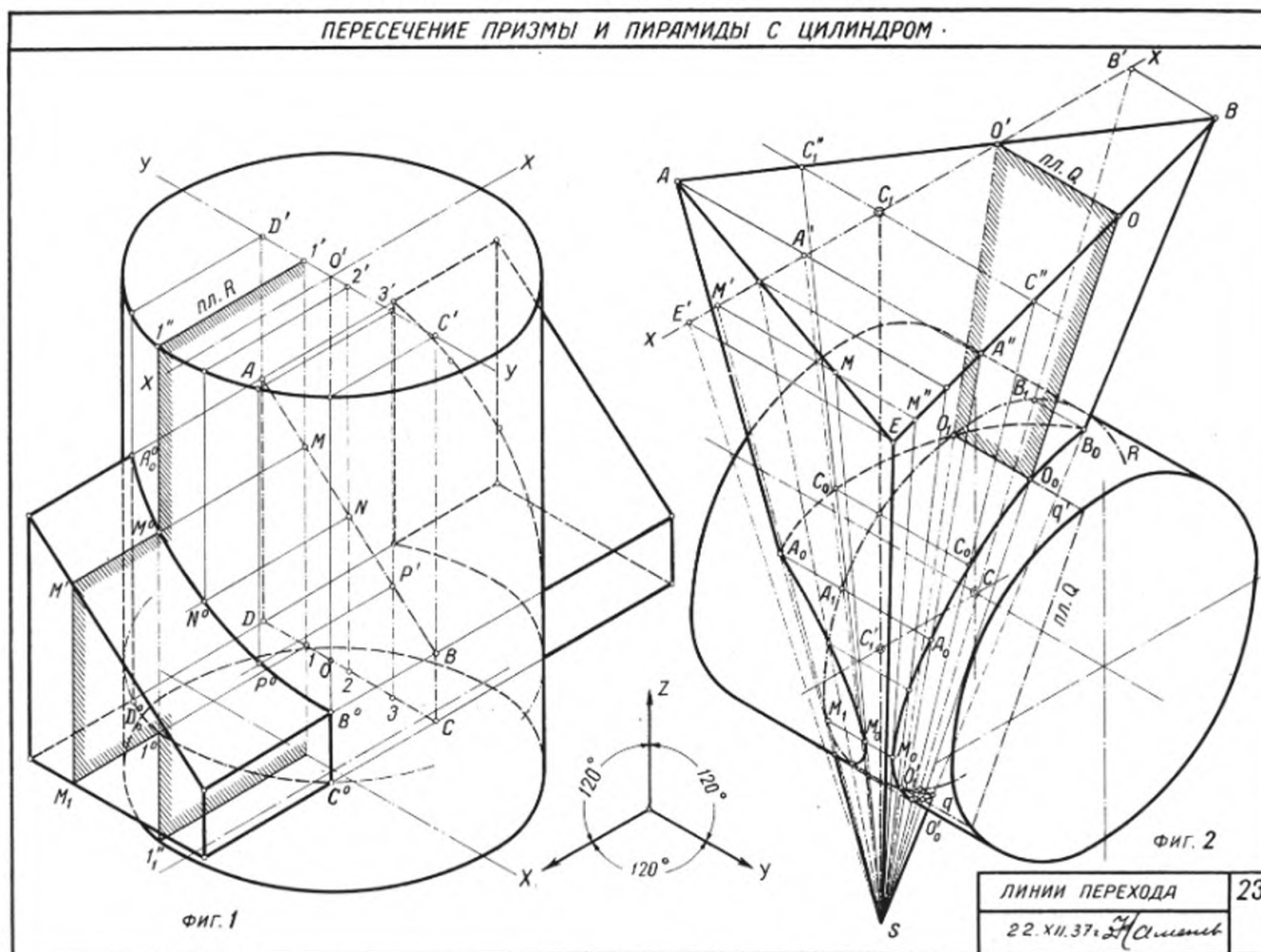
На фиг. 1 табл. 23 даны цилиндр, расположенный вертикально, и четырехгранная призма, ребра которой направлены вдоль оси X .

Для построения линии перехода строим предварительно перпендикулярное сечение $ABCD$ для призмы и рассматриваем отдельно каждую ее грань.

Допустим, что по условию положение точек D' и C' фиксировано на оси Y . Проводим через грань DC горизонтальную вспомогательную плоскость. Эта плоскость в сечении с цилиндром даст окружность, проецирующуюся на фиг. 1 в виде эллипса, на котором и намечаем точки, принадлежащие линии пересечения грани DC с цилиндром. Эти точки отмечены буквами D_0^0 и C_0 .

Пересечение призмы и пирамиды с цилиндром

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ С ЦИЛИНДРОМ.



После этого проводим две вертикальные вспомогательные плоскости: одну — через грань BC , вторую — через грань DA . Эти плоскости рассекают цилиндр по образующим и дают возможность наметить точки B_0 и A_0^0 .

Для определения линии пересечения наклонной грани AB с цилиндром проводим несколько вертикальных плоскостей параллельно ребрам призмы, например через точки $1', 2', 3'$, намеченные произвольно на верхнем основании цилиндра. Каждая вспомогательная плоскость на боковой поверхности цилиндра даст одну точку, принадлежащую линии пересечения грани AB с цилиндром, и одну точку, принадлежащую грани DC . На чертеже штриховкой выделена вертикально секущая плоскость R .

Плоскость R проведена через точку $1'$; с помощью этой плоскости намечены точки M^0 и 1^0 , принадлежащие линии пересечения. Точки M^0 и 1^0 найдены в пересечении образующей $1''1_1''$ цилиндра с контуром $MM'M_11$, по которому плоскость R рассекает призму $ABCD$. Точки N^0 и P^0 найдены таким же приемом, для чего через точки $2'$ и $3'$ проведены вертикальные вспомогательные плоскости. Соединив по лекалу точки A_0^0, M^0, N^0, P^0 и B^0 , получаем линию сечения грани AB с цилиндром. Эта линия представляет часть эллипса.

Линия перехода на передней части цилиндра отмечена буквами $A_0^0B^0C^0D_0^0$. Сделанные построения дают возможность наметить такую же линию перехода на невидимой части цилиндра. При построении эллипса $D_0^0C^0$ определение точки 1_0 необязательно, так как эллипс $D_0^0C^0$ может быть построен непосредственно вокруг точки O как вокруг центра.

Точка O при этом проецируется с верхнего основания O' на сторону DC перпендикулярного сечения.

Пересечение пирамиды с цилиндром

Чтобы найти линию перехода, получающуюся в результате пересечения пирамиды с цилиндром, рассекаем пирамиду и цилиндр вспомогательными плоскостями, проходящими через вершину пирамиды и проведенными параллельно оси цилиндра.

Такие плоскости рассекут цилиндр по образующим, а в сечении с пирамидой наметят ряд треугольников. Точки встречи очередного треугольного сечения с соответствующей образующей цилиндра будут принадлежать линии пересечения заданных фигур. Предполагается, что положение точек C_1 и C'_1 , а также размеры фигур заданы по условию.

На фиг. 2 табл. 23 вспомогательные плоскости проведены через точки B, O', C, A', M' и E' .

Для выяснения сделанных построений вспомогательная плоскость Q , проведенная через точку O' , отштрихована. Плоскость Q рассекает цилиндр по образующим q' и q и определяет точки O_1, O_0 ,

O'_1 и O'_0 , принадлежащие линии перехода. Для определения образующих цилиндра вокруг точки C построен контур перпендикулярного сечения. Этот контур на фиг. 2 представляет собой эллипс R , обозначенный утолщенной штрихпунктирной чертой.

Плоскость, проведенная через точку E и вершину пирамиды S , т. е. плоскость ESE' , не встречается цилиндра. Это видно из того, что линия $E'S$ проходит вне контура эллипса R . Отсюда можно сделать вывод, что ребро ES , через которое проведена эта вспомогательная плоскость, также не будет иметь точек встречи с цилиндром.

Для определения наиболее близких точек линии перехода, точек M_0, M_0 , проводим из вершины S линию SM' , касательную к эллипсу перпендикулярного сечения. Эта линия намечает в точке касания образующую цилиндра, на которой и находим интересующие нас точки M_0, M_0 . При этом, как нетрудно видеть, точки M_0, M_0 лежат на пересечении образующей $M_1M_0M_0$ с треугольным сечением пирамиды MSM'' .

На фиг. 2 линия перехода получилась в виде замкнутой фигуры, все ветви которой представляют собой части эллипсов. Верхняя и нижняя пунктирные ветви — это части одного и того же эллипса, получающегося в результате сечения цилиндра плоскостью, проходящей через грань ASB .

Пересечение конуса с призмой и пирамидой (таблица 24)

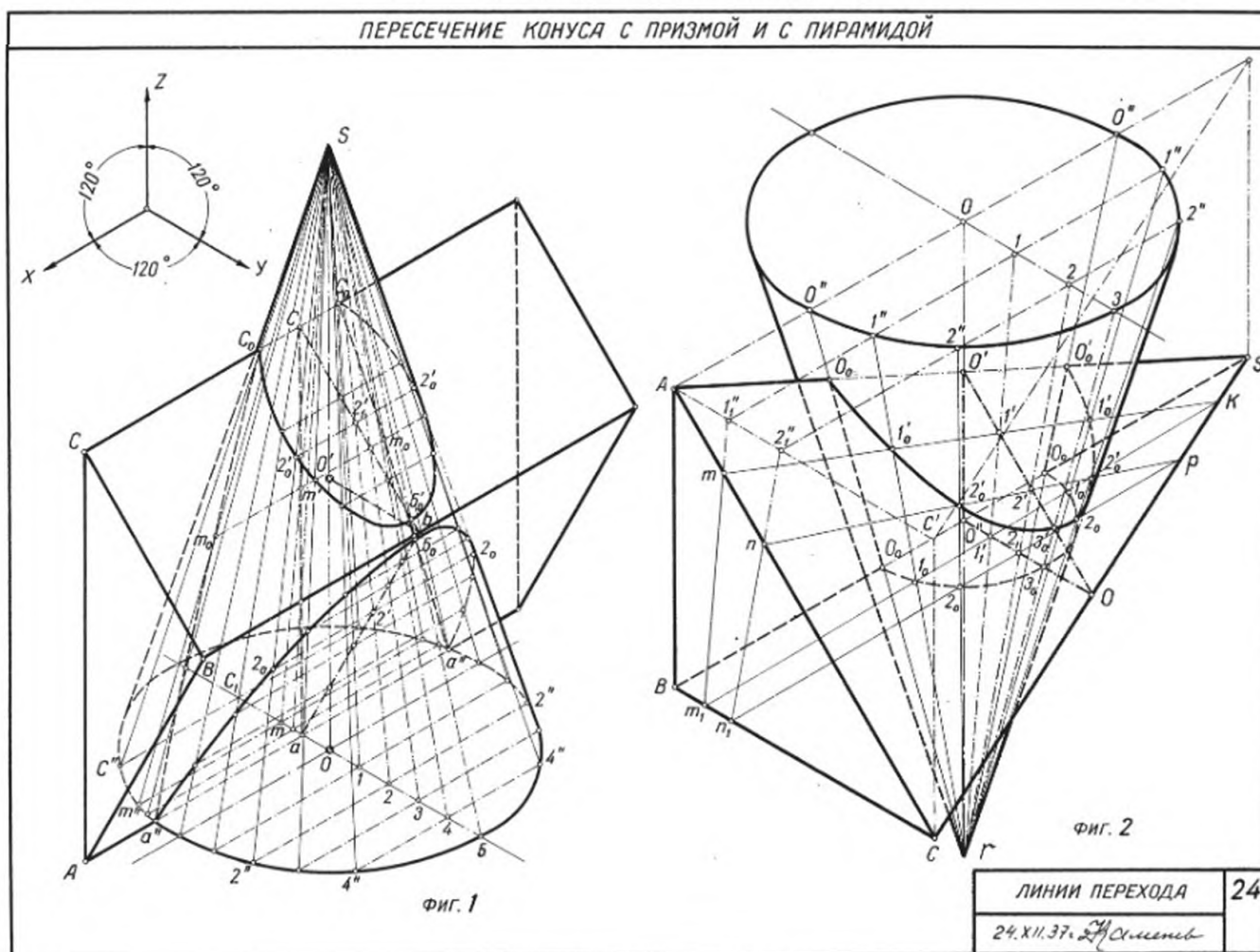
На фиг. 1 табл. 24 показан способ нахождения линии перехода для случая пересечения призмы с конусом, а на фиг. 2 дан прием определения линии перехода для случая пересечения пирамиды с конусом.

Построение линии перехода по фиг. 1 сделано при помощи проведения наклонных вспомогательных плоскостей, проходящих через вершину конуса и параллельных оси X . Эти вспомогательные плоскости рассекают конус по его образующим, а на боковой поверхности призмы намечают линии, параллельные ее ребрам. Для построения этих линий удобно воспользоваться перпендикулярным сечением abc призмы.

Точки 5_0 и $5'_0$ определяются на образующей $5S$ в том месте, где эта образующая, лежащая в плоскости ZY , встречается контур перпендикулярного сечения abc . Точки a'', a'' находим без дополнительных построений. Эти точки лежат на ребре A в местах пересечения его с контуром основания конуса. Для построения точек C_0, C_0 проводим осевую линию SC_1 конуса через вершину C контура перпендикулярного сечения. Вспомогательная наклонная плоскость, проходящая через линию SC_1 , рассекает конус по образующим SO'' , и на этих образующих и будут лежать точки C_0, C_0 , являющиеся точками пересечения ребра C с боковой поверхностью конуса.

Пересечение конуса с призмой и пирамидой

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КОНУСА С ПРИЗМОЙ И С ПИРАМИДОЙ



Остальные точки линии перехода находят тем же приемом. Рассмотрим, как найти, например, расположение точек $2_0, 2'_0, 2''_0$.

Чтобы определить эти точки, проводим через вершину конуса и через точку 2 наклонную вспомогательную плоскость параллельно ребрам призмы. Эта плоскость рассекает конус по образующим $S2'', S2'$. Ось симметрии $\Delta 2''S2'$, т. е. линия $2S$, встречает контур перпендикулярного сечения в точках $2'$ и $2''_1$. В этих точках намечаются две линии, по которым вспомогательная плоскость $2''S2'$ рассечет призму и на которых должны лежать искомые точки $2_0, 2'_0, 2''_0$ в местах пересечения линий $2_02'2_0$ и $2'_02''_12'_0$ с образующими $2''S, 2'S$.

Таким же приемом определяются и все остальные точки, принадлежащие линии пересечения заданных фигур.

Линии перехода $a''2_05_02_0a''$ и $C_02'_05'_02'_0C_0$ представляют собой контур сечения конуса наклонными гранями AB и CB пирамиды ABC и являются частями эллипса, а отмеченные пунктиром линии $a''m_0C_0$ и C_0m_0a'' представляют контур сечения конуса вертикальной гранью AC .

Кривые $a''m_0C_0$ и C_0m_0a'' — части гиперболы.

На фиг. 2 вертикальная грань ASB пирамиды лежит в осевой плоскости конуса. Это дает возможность наметить точки O_0, O'_0, O''_0, O'''_0 на образующих $O''r, O'''r$, по которым вертикальная грань ASB рассекает конус. Горизонтальная грань BSC пирамиды рассекает конус по окружности, которая на фиг. 2 изображается в виде части эллипса $O_01_02_03_02_01_0O_0$.

Наклонная грань ASC в пересечении с конусом намечает линию перехода в виде части эллипса $O'_01'_02'_01'_03'_02'_01'_0O'_0$.

Чтобы найти все перечисленные выше точки, пользуясь перпендикулярным сечением $OO'O''$, рассекаем конус и пирамиду вспомогательными наклонными плоскостями, проведя последние параллельно оси X , т. е. ребру BS . Эти плоскости рассекут конус по образующим, а в сечении с пирамидой наметят треугольные контуры сечений, например, mtm_1 или npr_1 . На пересечении этих треугольных сечений с образующими и будут лежать искомые точки, принадлежащие линии перехода.

Рассмотрим, как найти, например, точки $2_0, 2'_0, 2''_0, 2'''_0$ для фиг. 2. Секущую плоскость проводим через точку 2, намеченную на основании конуса. Эта плоскость рассекает конус по образующим $2''r, 2'''r$. Проведя ось $2r$ сделанного сечения $2''r2'''$, наметим на контуре перпендикулярного сечения $OO'O''$ точки $2_1, 2'_1$.

По условиям задания горизонтальное ребро BS лежит в осевой плоскости X , поэтому, проведя через точку 2_1 линию n_1r параллельно BS , пользуясь точкой $2'_1$, можем наметить треугольный контур n_1pr , по которому выбранная нами наклонная вспомогательная плоскость рассекает пирамиду. После сделанных построений наме-

чаем точки $2_0, 2'_0, 2''_0, 2_0$ в местах пересечения образующих конуса $2''r, 2''r$ с контуром n_1np .

Таким же способом намечаем точки $1_0, 1'_0, 1''_0, 1_0$. Точки 3_0 и $3'_0$ определяются в местах пересечения образующей конуса $3r$ с контуром перпендикулярного сечения $OO'O''$.

Так как вертикальная грань AB по условиям задания лежит в осевой плоскости XZ , то части линии перехода на участках $O_0O'_0O''_0O_0$ представляют собой части прямой, совпадающей с образующими конуса $O''r, O''r$.

Ветви $O'_03'_0O'_0$ и $O_03_0O_0$ — части эллипса.

Пересечение цилиндров (таблица 25)

Рассмотрим построение линии перехода, получающейся в результате пересечения двух цилиндров. При этом остановим внимание на двух случаях: первый случай — когда оси цилиндров пересекаются, второй случай — когда оси цилиндров не пересекаются.

Перейдем к рассмотрению первого случая.

Оси двух цилиндров пересекаются в точке C_1 . Чтобы найти точки, принадлежащие линии перехода, рассекаем оба цилиндра вертикальными вспомогательными плоскостями, проведенными параллельно оси X .

Эти вспомогательные плоскости разрезают оба цилиндра по образующим. Точки пересечения образующих, принадлежащие одной и той же вспомогательной плоскости, будут искомыми точками линии перехода. Чтобы наметить образующие на горизонтальном цилиндре, необходимо предварительно вокруг точки C_1 построить контур перпендикулярного сечения (штрихпунктирный, эллипс M_1).

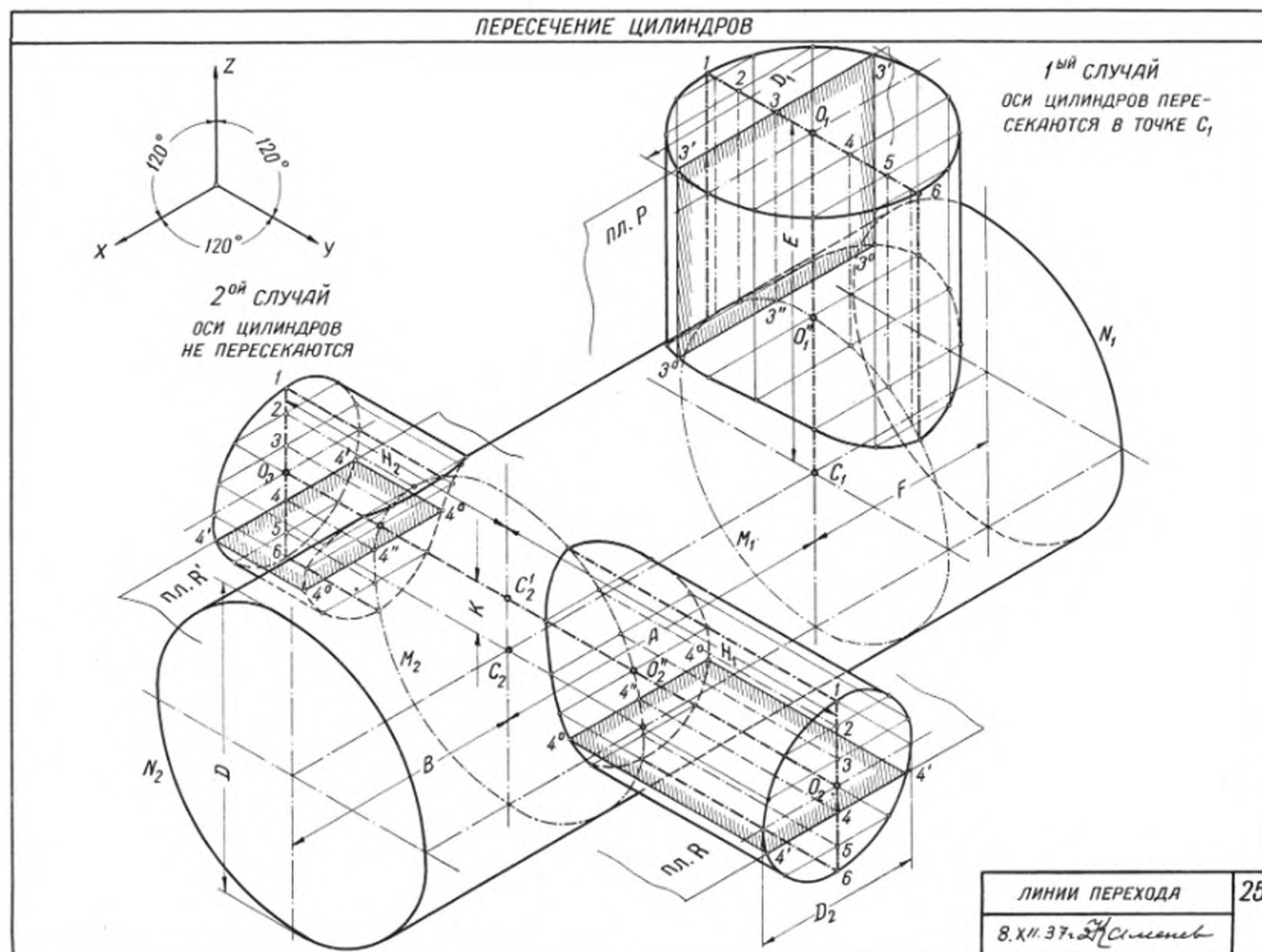
Вертикальный цилиндр рассечен плоскостями, следы которых на его верхнем основании проходят через точки 2, 3, 0_1 , 4 и 5. Образующие 1 и 6 дают возможность непосредственно наметить две нижние точки линии перехода. Эти точки лежат в местах пересечения образующих 1 и 6 с контуром перпендикулярного сечения и являются нижними точками линии перехода.

Остальные точки линии перехода определяем таким приемом, как это показано, например, для точек $3_0, 3'_0$, для определения положения которых была проведена вспомогательная секущая плоскость P . Эта плоскость рассекает вертикальный цилиндр по образующим $3'3_0, 3'3_0$, а на горизонтальном цилиндре намечают образующую $3_0 — 3_0$.

Положение образующей 3_03_0 определяется посредством проецирования точки 3 с верхнего основания цилиндра на контур перпендикулярного сечения, где и намечается точка $3''$, через которую проходит образующая 3_03_0 . Точки $3_0, 3_0$ принадлежат линии перехода. Точно таким же приемом определяют и все остальные точки линии перехода. Соединение найденных точек производят по лекалу.

Пересечение цилиндров

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЦИЛИНДРОВ



25

В том случае, когда оси цилиндров не пересекаются, характер действий, которые необходимо проделать для нахождения линии перехода, и их последовательность ничем не отличаются от только что рассмотренного случая.

Построение линии перехода удобно начать с проведения вокруг точки C_2 эллипса M_2 , представляющего собой контур перпендикулярного сечения. Крайние точки линии перехода находим в местах пересечения образующих 1 и 6 с эллипсом M_2 . Для определения остальных точек линии перехода проводим вспомогательные горизонтальные плоскости, аналогичные, например, плоскости R , при помощи которой найдены точки 4_0 . Эти точки намечены в местах пересечения образующих $4'4''$, по которым плоскость рассекает малый цилиндр с образующими 4_04_0 , 4_04_0 большого цилиндра. Образующие 4_04_0 , 4_04_0 , по которым плоскость R рассекает большой цилиндр, проведены через точку $4''$, в которой осевая линия $44''$ встречает контур перпендикулярного сечения, т. е. контур эллипса M_2 . Соединив по лекалу найденные точки, получим две самостоятельные ветви линии перехода.

Пересечение цилиндра с конусом (таблица 26)

В табл. 26 показан способ построения линии перехода, получающейся в местах пересечения конуса с цилиндром. Показаны два случая: первый случай — оси конуса и цилиндра пересекаются в точке C_1 , второй случай — оси конуса и цилиндра не пересекаются.

Порядок действий, которые необходимо проделать для определения точек, принадлежащих линии перехода, в обоих случаях остается тождественным.

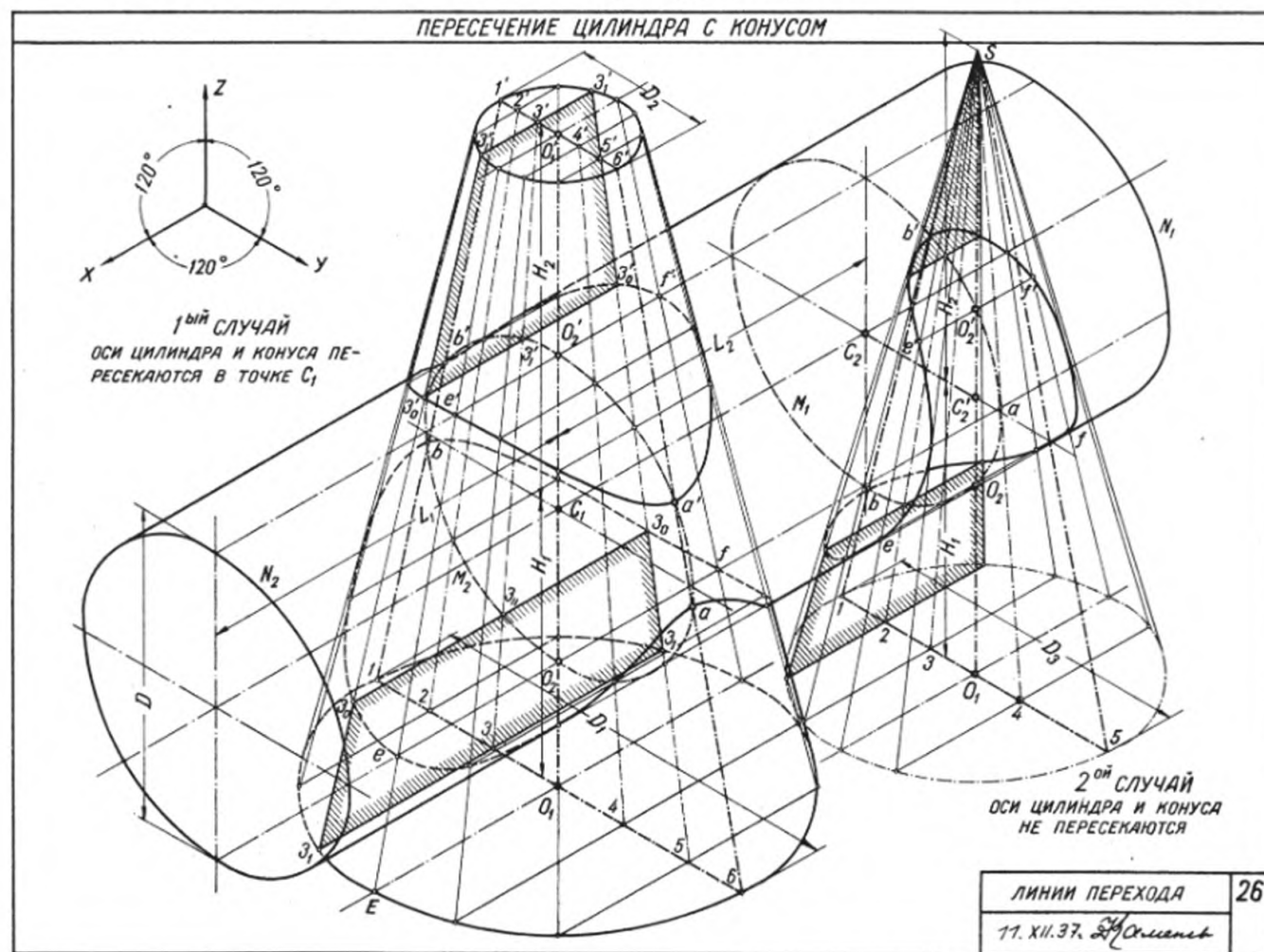
Для решения поставленной задачи проводим ряд вспомогательных плоскостей, выбрав такое направление последних, чтобы в сечении с заданными телами получить фигуры простейшего вида.

Таковыми плоскостями можно считать наклонные плоскости, проведенные параллельно продольной оси цилиндра и проходящие через вершины конусов. Эти вспомогательные плоскости рассекают конусы и цилиндр по образующим. В местах пересечения образующих конуса с соответствующими образующими цилиндра намечаются точки, принадлежащие линии перехода.

Для проведения образующих на цилиндре воспользуемся перпендикулярным сечением, построенным в осевой плоскости конусов вокруг точек C_1 и C_2 .

Если, как это имеет место в первом случае, конус усечен параллельно основанию, то для проведения вспомогательных плоскостей необходимо его верхнее и нижнее основания разделить на равные или пропорциональные части точками $1', 2', 3', 0', 4', 5'$ и $6'$ и затем через каждую точку деления провести наклонные плоскости. Для первого случая отштриховано сечение вспомогательной плоскостью, проведенной через точки $3'$ и 3 на верхнем и нижнем основаниях.

Пересечение цилиндра с конусом



Отштрихованная плоскость на усеченном конусе намечает образующие $3_13'_1$ и $3_13'_1$, и эта же плоскость рассекает цилиндр по образующим 3_03_0 и $3_03'_0$.

Для определения образующих 3_03_0 и $3'_03'_0$ проведена осевая линия $33'$ и намечены точки 3_{11} , $3'_1$, в которых эта осевая линия встречает контур перпендикулярного сечения M_2 .

Образующие цилиндра 3_03_0 и $3'_03'_0$, проведенные через точки 3_{11} , $3'_1$, дают в пересечении с образующими конуса $3_13'_1$ и $3_13'_1$ точки 3_0 , 3_0 и $3'_0$, $3'_0$, принадлежащие искомой линии перехода.

Крайние точки a и b , a' и b' находим в местах встречи образующих конуса $1'$ и $6'$ с контуром перпендикулярного сечения, т. е. с эллипсом M_2 . Точки e , f и e' , f' лежат на нижней и верхней образующих цилиндра в местах пересечения их с образующими конуса, получающимися от сечения конуса вертикальной плоскостью, проведенной через его высоту $O_1O'_1$ параллельно оси X . Вся линия перехода для соотношений, выбранных в первом случае, распадается на две самостоятельные ветви: ветвь входа $af3_0b3_0ea$ и ветвь выхода $a'f'3'_0b'3'_0e'a'$.

Уже было отмечено, что при построении линии перехода для второго случая, когда оси конуса и цилиндра не пересекаются, порядок действия остается тем же.

В табл. 26 справа показан способ построения линии перехода для цилиндра, пересеченного конусом (см. 2-й случай). Вертикальная ось конуса настолько сдвинута вдоль оси, что линия перехода получилась в виде одной замкнутой ветви $bee'b'f'fb$.

Конус предполагается вынутым, поэтому линия перехода почти на всем протяжении показана сплошной контурной чертой.

Крайние нижняя и верхняя точки найдены в местах пересечения образующей конуса $1S$ с контуром перпендикулярного сечения M_1 , а принцип нахождения остальных точек показан отштриховкой для сечения, сделанного наклонной плоскостью через осевую линию $2S$.

Каждая вспомогательная плоскость дает возможность наметить четыре точки, принадлежащие линии перехода. Для определения наиболее выпуклых точек линии перехода следует провести наклонную вспомогательную плоскость через осевую линию $S4$, касающуюся контура перпендикулярного сечения M_1 в точке a .

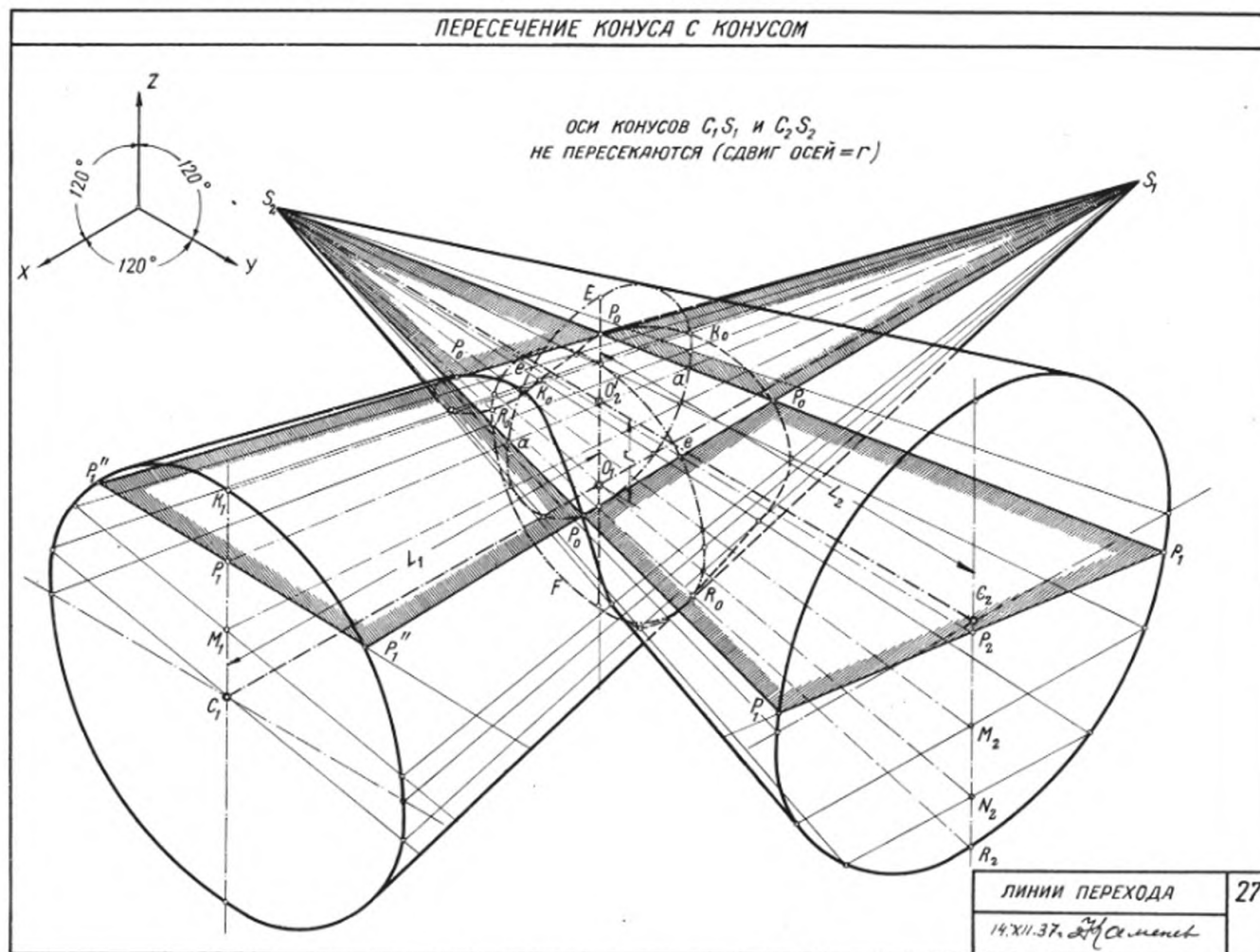
Точки e , f и e' , f' лежат в вертикальной вспомогательной плоскости, проведенной через высоту O_1S конуса. Образующие цилиндра ef и $e'f'$ проведены через точки O_2 и O'_2 , в которых ось конуса SO_1 встречает контур перпендикулярного сечения, т. е. эллипс M_1 .

Пересечение конуса с конусом (таблица 27)

Для нахождения линии перехода строим около точек O_1 и O'_2 перпендикулярные сечения E и F для обоих конусов и после этого рассекаем конусы вспомогательными плоскостями, проходящими через обе вершины S_1 и S_2 .

Пересечение конуса с конусом

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КОНУСА С КОНУСОМ



27

Секущие плоскости, проходящие через вершины конусов, выделяют на каждом из них по паре образующих, например S_1P_1'' , S_1P_1' , S_2P_1 и S_2P_1 . Точки пересечения указанных образующих P_0 , P_0 , P_0 и P_0 принадлежат линии перехода. Для определения секущих плоскостей используются точки a и a перпендикулярного сечения E и отвечающие им точки e и e на перпендикулярном сечении F . Точки a и a лежат на линии P_1S_1 , а точки e и e — на линии P_2S_2 .

Пересечение шара с цилиндром и конусом (таблица 28)

Чтобы построить линию перехода, получающуюся по месту пересечения цилиндра с шаром, проводим вспомогательные горизонтальные плоскости. Эти плоскости в данном случае рассекают цилиндр по его образующим, а в сечении с шаром дают окружности. В пересечении соответствующих образующих с отвечающей им окружностью находим точки линии перехода.

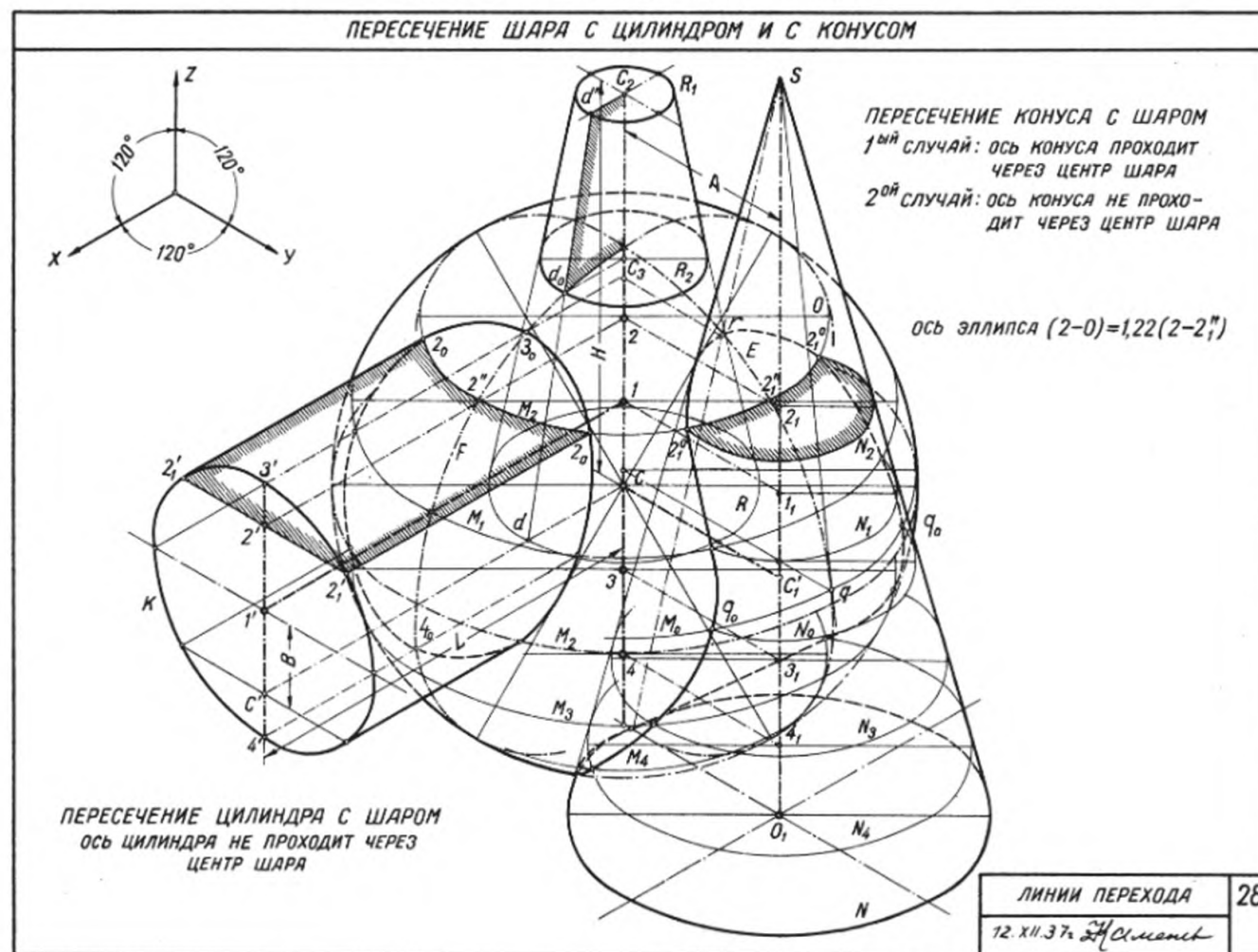
Для нахождения точек 2_0 , 2_0 проведена отштрихованная вспомогательная плоскость через точку $2'$. Эта плоскость рассекает цилиндр по образующим $2'_12_0$ и $2'_12_0$. Осевая линия сделанного сечения встречается ось шара в точке 2 . В этой точке строим эллипс M_2 , на котором и намечаем точки 2_0 , 2_0 , принадлежащие линии перехода. Рассекая цилиндр и шар горизонтальными плоскостями, каждый раз намечаем по две точки линии перехода. Для определения верхней и нижней точек рассекаем цилиндр и шар вертикальной плоскостью, проходящей через диаметр цилиндра $3'4'$. Эта плоскость на цилиндре выделяет две образующие $3'3_0$ и $4'4_0$, а на шаре намечает окружность F .

Верхняя точка линии перехода 3_0 должна лежать в месте встречи верхней образующей цилиндра $3'3_0$ с эллипсом F , а нижняя — в месте встречи с этим эллипсом F нижней образующей цилиндра $4'4_0$. По заданию ось цилиндра перпендикулярна к вертикальной оси шара, и, кроме того, в данном случае ось цилиндра направлена параллельно оси X .

1-й случай пересечения конуса с шаром. Линией пересечения усеченного конуса с шаром для случая, показанного в табл. 28, является окружность, проецирующаяся в виде эллипса R_2 . Чтобы построить эллипс R_2 , необходимо определить его центр C_3 и размер осей. Можно наметить следующий способ вычисления этих неизвестных нам элементов.

По заданным размерам в экваториальной плоскости шара, т. е. около точки C , строим эллипс R , являющийся нижним основанием усеченного конуса; отложив затем от точки C вверх высоту H , строим верхнее основание R_1 этого конуса. Сделав это построение, рассекаем конус и шар вертикальной плоскостью, проводя ее через ось конуса. Отштрихованная часть этой плоскости по образующей конуса dd' дает возможность наметить точку d_0 , принадлежащую линии перехода.

Пересечение шара с цилиндром и конусом



Проведя через точку d_0 линию параллельно оси X , на оси конуса намечаем точку C_3 , вокруг которой как вокруг центра строим эллипс R_2 . Размер большой оси этого эллипса лежит на горизонтальной линии, проведенной через точку C_3 .

2-й случай пересечения конуса с шаром. Ось конуса не проходит через центр шара.

В этом случае для нахождения точек, принадлежащих линии перехода, следует рассечь конус и шар горизонтальными плоскостями. Эти вспомогательные плоскости рассекут и шар, и конус по окружностям, проецирующимся в изометрической проекции в виде эллипсов. Точки пересечения элементов, принадлежащих шару и конусу и лежащие в одной горизонтальной вспомогательной плоскости, будут принадлежать искомой линии перехода.

Для выяснения осей эллипсов необходимо предварительно провести экваториальное сечение (эллипс M_2) и меридиональное в плоскости ZY (эллипс E).

Верхняя точка r линии перехода должна лежать на штрихпунктирной образующей конуса в месте встречи ее с эллипсом E . Для определения крайних точек q_0 и q_0 следует из вершины конуса S провести образующую Sq , касательную к эллипсу E в точке q . Далее, пользуясь точкой q , нужно наметить эллипс M_0 для шара и эллипс N_0 для конуса.

Точки q_0 , q_0 , принадлежащие линии перехода, будут лежать в местах пересечения эллипса M_0 с эллипсом N_0 . Остальные точки линии перехода находим таким же приемом. В табл. 28 отштриховкой показан способ нахождения точек 2_1^0 , 2_1^0 .

Эти точки получаются в местах пересечения эллипса M_2 , рассекающего шар, с эллипсом N_2 , рассекающим конус. Для нахождения центра эллипса M_2 из точки 2_1 , выбранной произвольно на оси, проведена линия $2_1 2$ параллельно оси Y . Точка $2_1''$ встречи этой линии с эллипсом E дает возможность построить очертание эллипса M_2 . Для этой цели следует учесть, что размер большой оси эллипса M_2 , т. е. размер $0 - 2 = 1,22(2 - 2_1'')$. Полученные точки соединяем плавной кривой по лекалу. Невидимая часть линии перехода на табл. 28 отмечена пунктирной чертой.

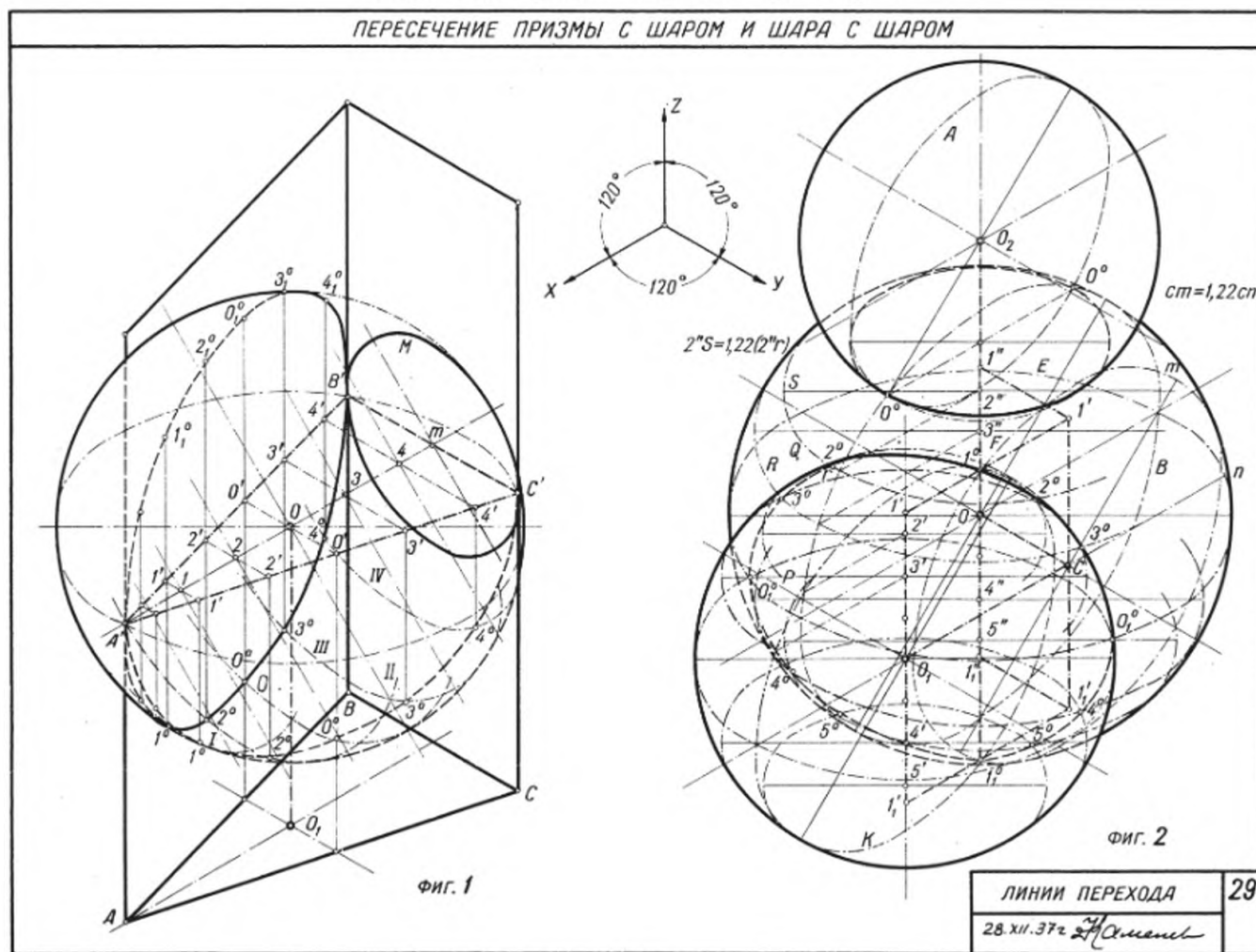
Пересечение призмы с шаром и шара с шаром (таблица 29)

На фиг. 1 табл. 29 показан способ построения линии перехода, получающейся при пересечении призм с шаром. Грани призмы представляют собой плоскости, поэтому задача в данном случае сводится к сечению шара плоскостью.

Для решения поставленной задачи строим в центре шара перпендикулярное сечение $A'B'C'$ для призмы и затем рассекаем шар вертикальными плоскостями, проведенными параллельно оси Y , т. е. в данном случае параллельно стороне $B'C'$ перпендикулярного сечения.

Пересечение призмы с шаром и шара с шаром

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРИЗМЫ С ШАРОМ И ШАРА С ШАРОМ



На фиг. 1 вспомогательные плоскости проведены через точки 1, 2, 0, 3, 4, намеченные на оси перпендикулярного сечения. Каждая вспомогательная плоскость рассекает призму по линиям $1^0 1'$, $2^0 2'$, $3^0 3'$, $4^0 4'$ параллельно ребрам, а в сечении с шаром дает окружность, проецирующуюся на фиг. 1 в виде эллипсов I, II, III, IV.

Точки пересечения линий $1^0 1'$, $2^0 2'$, $3^0 3'$, $4^0 4'$ с эллипсами I, II, III, IV принадлежат линиям перехода. От каждого сделанного вспомогательного сечения получаются четыре точки: две из них на грани AB и две на невидимой грани AC. На фиг. 1 контур перпендикулярного сечения $A'B'C'$ призмы ABC вписан в окружность (эллипс) экваториального сечения шара, поэтому на фиг. 1 ни одно ребро не пересекает поверхности шара, а лишь касается последней в точках A' , B' , C' .

Большие оси эллипсов I, II, III, IV наклонены к горизонту под углом 60° . Размер большой оси каждого из этих эллипсов выяснен при помощи меридионального сечения шара, построенного в осевой плоскости ZY. Этот размер равен измерению каждого эллипса по оси, умноженному на коэффициент 1,22. На фиг. 1 показан способ построения нижней половины линии пересечения для каждой грани призмы. Верхняя, симметричная половина может быть получена посредством отложения вверх от точек $1'$, $2'$, $0'$, $3'$, $4'$ или от аналогичных им точек на двух других гранях отрезков $1' 1_1^0 = 1' 1^0$; $2' 2_1^0 = 2' 2^0$ и т. д.

На невидимой грани AC нанесена пунктиром только нижняя половина линии пересечения 1^0 , 2^0 , 3^0 , 4^0 , C' . Чтобы не усложнять чертежа, верхняя половина этой линии вовсе не нанесена.

На фиг. 2 показан прием нахождения линии перехода, получающейся в результате пересечения шара с шаром. На фиг. 2 рассмотрено два случая. Случай первый — центры пересекающихся шаров O и O_2 лежат на изометрической оси (в данном случае на оси Z), второй случай — когда центры O_1 и O не лежат на изометрической оси. Для построения линии перехода верхнего шара рассекаем оба шара вспомогательной вертикальной плоскостью, проходящей через центры шаров O_2 и O и расположенной в плоскости ZX. Эта плоскость рассекает верхний шар по окружности A, а нижний шар — по окружности меридиана B. Точки пересечения окружностей A и B, т. е. точки O^0 и O^0 , принадлежат линии перехода, проецирующейся на фиг. 2 в виде эллипса, горизонтальная ось которого равна $1,22(O^0 O^0)$.

Для построения линии перехода $1^0 2^0 3^0 4^0 5^0$, получающейся в месте пересечения шара O_1 с шаром O, должно быть задано положение точки C. Вспомогательные горизонтальные плоскости рассекают оба шара по окружностям, и, как уже было отмечено выше, точки пересечения этих окружностей принадлежат искомой линии перехода. Для выяснения размера больших осей каждого эллип-

са на фиг. 2 построены контуры меридионального сечения обоих шаров. Для шара O_1 этим сечением является окружность K_1 , а для шара O — окружность B_1 . Обе эти окружности на фиг. 2 спроецированы в виде эллипсов K и B .

Сечение, сделанное на уровне $2'$, на шаре O_1 намечает эллипс P , а на шаре O — эллипс Q . Точки 2^0 , 2^0 линии перехода для этого сечения лежат в местах пересечения эллипса P с эллипсом Q .

Точки 1^0 и I_1^0 будут найдены, если рассечь оба шара вертикальной плоскостью, проходящей через линию $O_1 — C$. Эта плоскость на шаре O наметит эллипс F , а на шаре O_1 — эллипс K . В местах пересечения эллипса F с эллипсом K и лежат точки 1^0 и I_1^0 .

Эллипс F может быть построен, если учесть, что большая ось его Sm наклонена к горизонту под углом 60° и размер $Sm = 1,22Cn$. Точка n лежит на экваториальном эллипсе E .

При построении всех остальных эллипсов, в частности рассмотренного выше эллипса Q , большую ось его располагаем горизонтально и размер $2''S$ берем равным $1,22(2''r)$: $2''S = 1,22 \cdot (2''r)$.

Для получения центров эллипсов, например для нахождения точки $2''$, следует на оси OO_2 от точки O вверх отложить $O2'' = O_12'$. Положение точек $1'$, $2'$, $3'$, ... намечаем произвольно.

Линии перехода. Примеры из области машиностроительного черчения (таблица 30)

На фиг. 1—4 табл. 30 показан способ приложения изученных нами выше построений к нахождению линий перехода для некоторых случаев машиностроительной практики.

На фиг. 1 начерчена головка шатуна, представляющая комбинацию шаровых и цилиндрических поверхностей с плоскими срезами.

На фиг. 2 показан способ построения подболтовых приливов конической формы, отлитых за одно целое с плоской проушиной. В дальнейшем этот способ будет применен при построении проушин стойки (табл. 45).

На фиг. 3 вычерчен изометрический вид шаровой крышки подшипника с подболтовым приливом конусообразной формы.

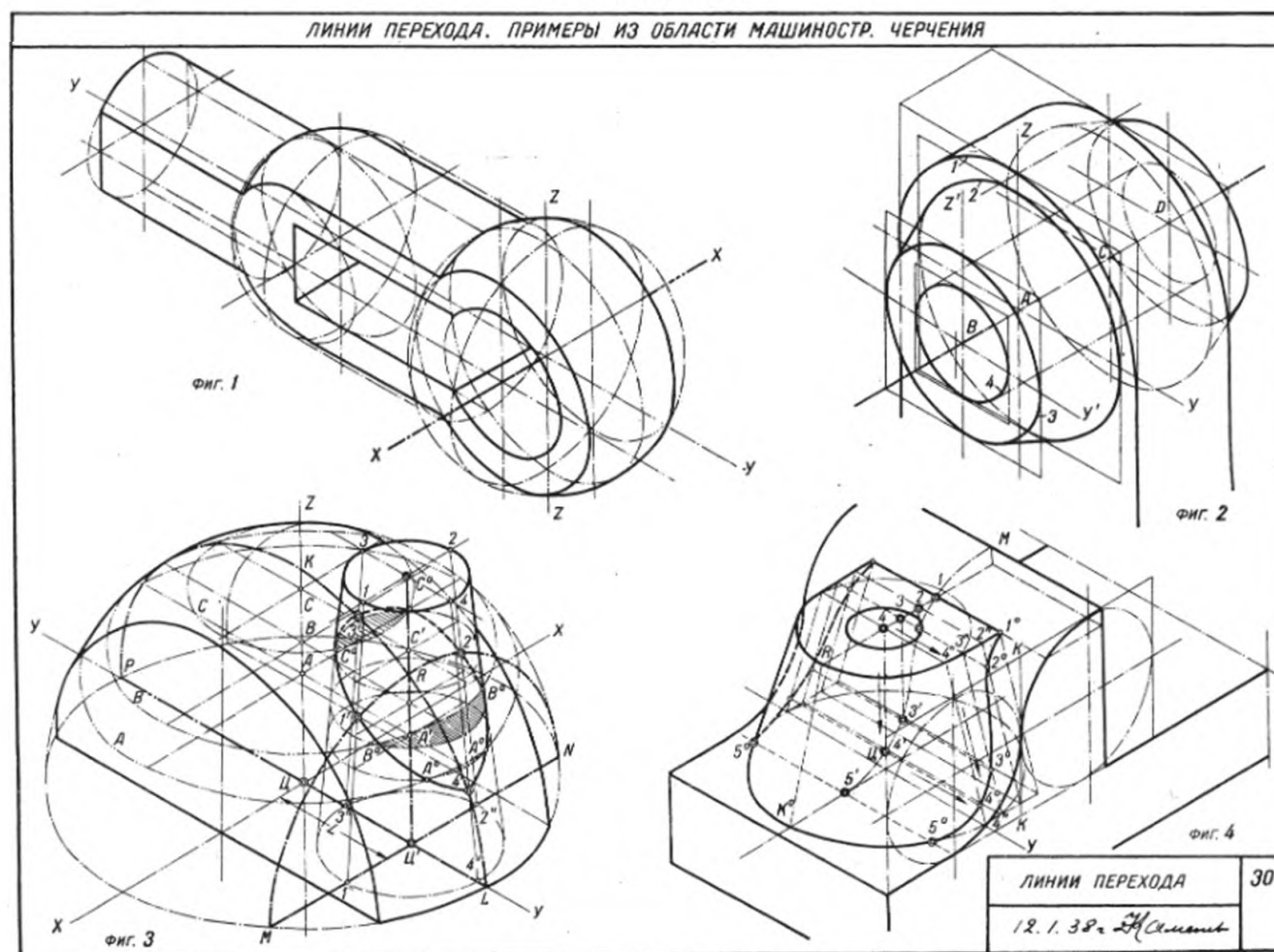
Наконец, на фиг. 4 начерчен конец фундаментной плиты под подшипник.

В данном случае фундаментная плита представляет интерес в отношении построения линии перехода, получающейся в месте примыкания подболтового прилива к криволинейному выступу плиты.

Рассмотрим построение, сделанное на фиг. 1, где начерчена головка шатуна. Правый конец головки описан по шару.

Средняя часть, соединяющаяся с шаровой головкой, имеет форму цилиндра и слева заканчивается полушарием, переходящим в цилиндр штанги шатуна.

Линии перехода



Построение удобнее всего начать с вычерчивания изометрического вида среднего продольного сечения шатуна, сделав его вдоль оси Y .

На фиг. 1 среднее сечение отмечено штрихпунктирной линией, состоящей из черточек с двумя точками в промежутках.

После вычерчивания среднего сечения строим эллипсы в местах примыкания геометрических форм частей шатунной головки.

Эллипсы проводим в плоскости, параллельной плоскости ZX .

Для вычерчивания бокового среза строим эллипсы в плоскости, параллельной плоскости проекции ZY .

На фиг. 2 показан способ вычерчивания подболтовых приливов конической формы, часто встречающихся на машиностроительных деталях. Построение ведем следующим образом.

1. Через выбранную точку A проводим изометрические оси Z , Y и на этих осях строим ромбы для округления верхней части доски (см. эллипс 1) и для построения эллипса большого основания подболтового прилива (см. эллипс 2).

2. От точки A вдоль оси X откладываем высоту прилива и намечаем точку B .

3. Через точку B проводим оси Z' , Y' и на этих осях строим эллипсы 3 и 4, вписывая их в предварительно начерченные ромбы.

4. Соединяем по касательной края эллипса 2 с краями эллипса 3.

Построение противоположного подболтового прилива проводим аналогично только что рассмотренному способу. Эллипсы строим соответственно на осях ZY , проведенных через точки C и D .

Расстояние от точки A до точки C равно толщине средней части, размер CD равен высоте подболтового прилива.

На фиг. 3 начерчена крышка подшипника шаровой формы, имеющая подболтовой прилив конусообразной формы. Линия перехода по месту пересечения прилива с шаровой частью построена по десяти точкам $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, A^0 , A^0 , B^0 , B^0 , C^0 , C^0 .

Для нахождения точек $1'$ и $2'$ рассекаем конус и шар по линии 1 — 2 (см. верхний эллипс); секущую плоскость проводим параллельно оси X .

Эта плоскость рассекает шар по эллипсу MRN , а конус — по образующим 1 — $1''$, 2 — $2''$.

Точки $1'$ и $2'$ лежат на пересечении этих образующих с эллипсом MRN . Для нахождения точек $3'$ и $4'$ рассекаем конус и шар по линии диаметра 3 — 4 (см. верхний эллипс). Секущую плоскость проводим параллельно оси Y . Эта плоскость рассекает шар по эллипсу LKP . Та же вертикальная плоскость перережет конус по образующим 3 — $3''$ и 4 — $4''$.

Точки линии перехода $3'$ и $4'$ лежат на пересечении этих образующих с эллипсом LKP .

Для нахождения точек A^0 , A^0 , B^0 , B^0 , C^0 , C^0 рассекаем шар и конус горизонтальными плоскостями, проведя их через точки A , B и C ,

взятые произвольно на вертикальной оси шара. Эти секущие плоскости рассекут шар по горизонтальным эллипсам A, B, C , отмеченным тонкой линией, состоящей из черточек с двумя точками.

Конус подболтового прилива этими плоскостями будет перерезан в точках A', B' и C' . Точки линий перехода лежат в местах пересечения эллипсов шара с эллипсами конуса.

Заштрихованные части A^0A^0 и B^0B^0 показывают части конуса, выступающие от шара кнаружи. Заштрихованная часть C^0C^0 показывает часть конуса, уходящую внутрь шара.

Найденные точки соединяем плавной линией по лекалу.

Переходим к описанию фиг. 4.

Зуб фундаментной плиты на фиг. 4 очерчен двумя дугами окружности, имеющими кривизны, направленные в разные стороны. Перелом кривизны происходит на середине высоты зуба. Для вычерчивания очертания зуба в изометрической проекции строим два эллипса, касающиеся один другого на вертикальной линии KK .

Эллипсы вписываем в заранее начерченные для них ромбы. Подболтовые приливы имеют форму однобокого конуса. Ось конуса находится на линии $4 - 4'$.

Нижнее основание конуса представляет собой эллипс, расчерченный на осях X и Y около точки C . Точка C лежит на уровне верхней поверхности плиты.

Построение линии перехода производим следующим образом.

1. Проводим вертикальную секущую плоскость вдоль оси X . Эта плоскость разрежет подболтовый прилив на две части по линии IR и RK^0 . Одновременно с этим та же секущая плоскость рассекает плиту по штрихпунктирной линии $M4'K^0$. Форма этой линии точно соответствует форме наружного края зуба.

2. В месте пересечения линии $R4$ с линией $M4'K^0$ намечаем точку 1.

3. Делим отрезок $1 - 4$ на несколько равных частей и намечаем точки 1, 2, 3 и 4.

4. Через точки 1, 2, 3 и 4 проводим вертикально секущие плоскости, параллельные оси Y .

5. На штрихпунктирной линии $M4'K^0$ намечаем точки $2', 3', 4'$ и проводим через них образующие цилиндрической спинки зуба (см. линии, проведенные пунктиром, т. е. линии $2' - 2^0, 3' - 3^0$ и $4' - 4^0$).

6. Через точки $2', 3', 4'$ проводим наклонные образующие откосной стенки подболтового прилива. Все эти образующие должны быть параллельными образующей конуса $4'', 4''$.

7. Намечаем точки $2^0, 3^0$ и 4^0 в местах пересечения этих наклонных образующих откосной стенки с пунктирными линиями, проведенными через точки $2', 3'$ и $4'$ среднего сечения.

8. Зная положение точки $5'$ и имея эллипс нижнего основания конуса, находим точки $5^0, 5^0$.

Таким образом, часть линии перехода $5^0K^05^0$ является попросту эллиптическим сегментом, а остальная часть линии перехода должна быть проведена через найденные точки 4^0 , 3^0 , 2^0 и 1^0 .

На фиг. 4 способ построения точки 4^0 показан стрелками.

Изображение винтовой нарезки и пружин в аксонометрии (таблица 31)

Винтовая линия получается в результате сложения вращательного и поступательного движения некоторой точки. Резец токарного станка, приведенный в поступательное движение и подведенный к круглому стержню, обрабатываемому на этом станке, снимая со стержня стружку, чертит на его поверхности винтовую линию.

Винтовая нарезка получается в результате движения по винтовой линии какого-нибудь профиля. Большей частью встречается нарезка треугольного, трапециевидного или прямоугольного профиля. Взятый в основу образования нарезки профиль при его движении по винтовой линии должен все время находиться в плоскости, проходящей через ось стержня.

Продвижение резца за один оборот или, что то же самое, подъем винтовой линии за один оборот вокруг центра носит название *хода винтовой линии*. Нарезки бывают одноходовые и многоходовые (двух-, трех-, а иногда и четырехходовые). В табл. 31 показана трехходовая нарезка трапециевидного профиля. Для получения трехходовой нарезки ее ход делят на три равные части и на цилиндре вместо одной трапециевидной ленты намечают три. *Шагом нарезки* считают расстояние между центрами двух соседних зубцов нарезки.

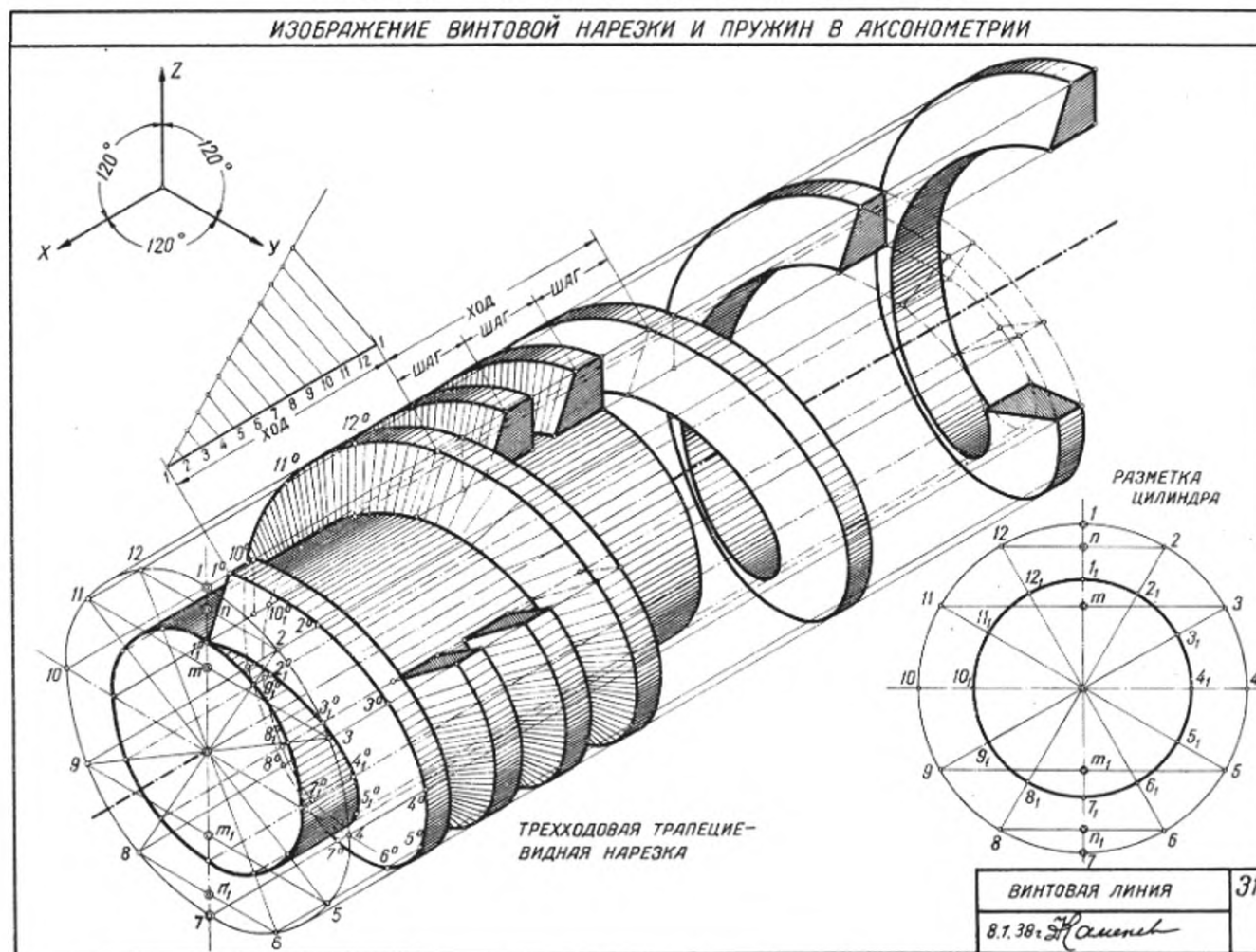
Чтобы начертить в изометрической проекции стержень с трапециевидной нарезкой, поступают так. Чертят ортогональную проекцию нарезаемого цилиндра (вид его с торца). Затем размечают образующие цилиндра. Для нашей цели достаточно наметить 12 образующих. Наметив точки 1, 2, 3, 4, ..., 12 на наружном цилиндре, проводим диаметры через центр торца и на внутреннем цилиндре намечаем точки 1_1 , 2_1 , 3_1 , ..., 12_1 . Чтобы перейти от ортогонального чертежа к аксонометрии, необходимо наметить точки n , m , m_1 и n_1 (см. справа внизу на табл. 31).

Размеченный таким образом торец цилиндра чертим в изометрической проекции, расположив его, например, в плоскости ZY . После этого на верхней образующей внутреннего цилиндра, проходящей через точку 1_1^0 , строим контур выбранного трапециевидного профиля 1_1^0 , 1^0 .

Затем вдоль образующей, проходящей через точку 1, от точки 1^0 откладываем несколько раз размер хода нарезки и в намеченных точках строим опять контуры выбранного трапециевидного профиля.

Изображение винтовой нарезки и пружин в аксонометрии

ИЗОБРАЖЕНИЕ ВИНТОВОЙ НАРЕЗКИ И ПРУЖИН В АКСОНОМЕТРИИ



Точки нижнего основания трапеции, одна из которых обозначена 1^0 , при поступательном движении последней по вращающемуся цилиндру будут описывать на поверхности внутреннего цилиндра две винтовые линии, а угловые точки верхнего основания этой же трапеции будут описывать две винтовые линии на поверхности наружного цилиндра. Винтовая линия для точки 1^0 в табл. 31 отмечена цифрами $1^0, 2^0, 3^0, 4^0, \dots, 10^0$. Винтовая линия для точки 1^0 отмечена соответственно цифрами $1^0, 2^0, 3^0, 4^0, \dots, 12^0$.

Чтобы наметить на поверхности цилиндра все перечисленные точки, необходимо учесть, что точка 1^0 лежит на образующей наружного цилиндра, исходящей из точки торца 1; точка 2^0 лежит на образующей, исходящей соответственно из точки наружного цилиндра 2, и т. д.

Точки же $2^0, 3^0, \dots$ располагаются на образующих внутреннего цилиндра, проведенных через точки деления его торца.

Так как на поверхности цилиндра мы разметили 12 образующих и так как за полный оборот точка 1^0 по винтовой линии должна продвинуться на размер хода винтовой линии, то за каждую $1/12$ часть оборота, зафиксированную точками 1, 2, 3, 4, ..., 12, точка 1^0 будет перемещаться вдоль оси цилиндра на $1/12$ часть хода.

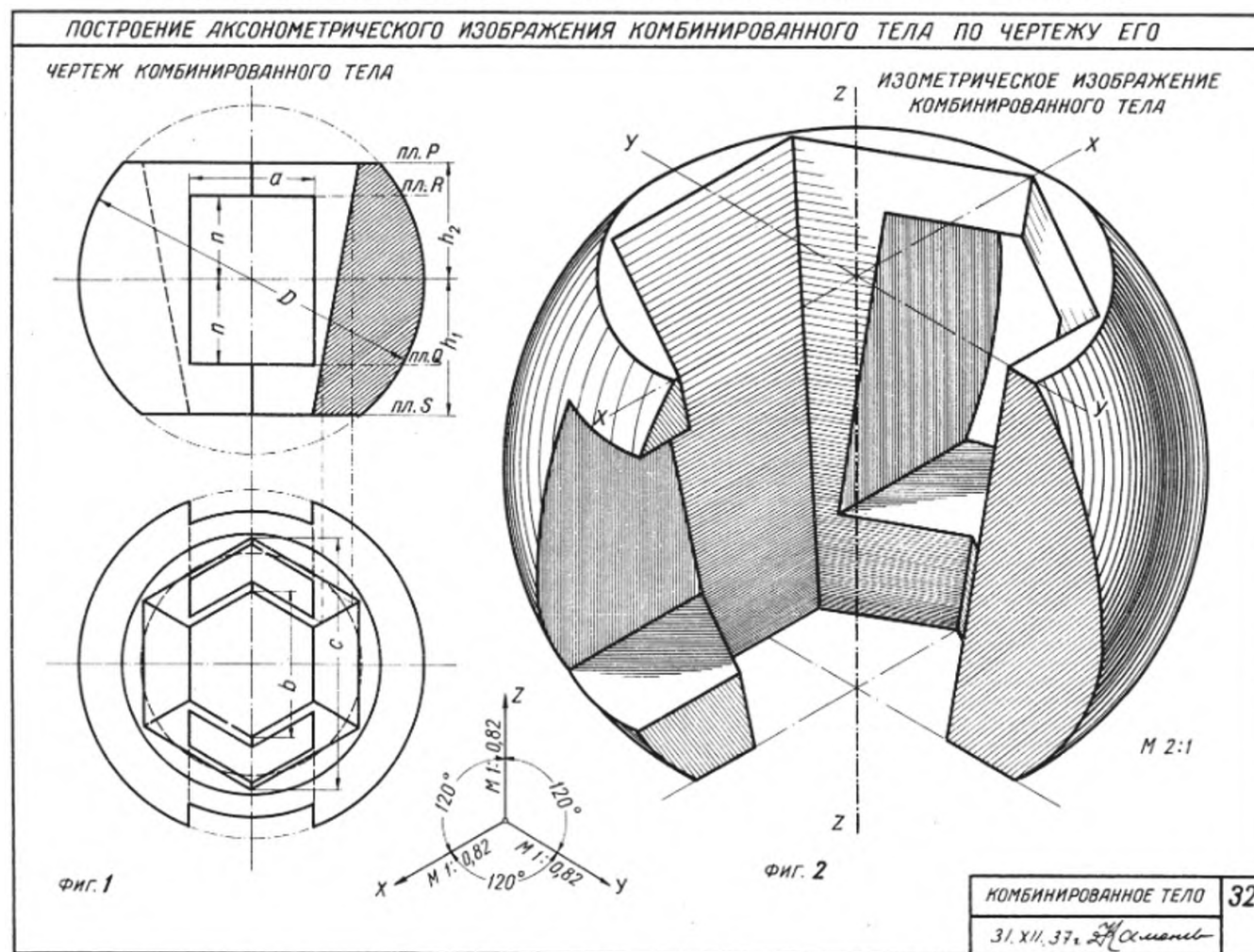
Таким образом, для построения винтовой линии необходимо предварительно, разделив ход на 12 частей, выяснить размер $1/12$ его части и затем на каждой очередной образующей 1, 2, 3, 4, ..., 12 намечать точки $2^0, 3^0, 4^0, \dots$, увеличивая каждый раз длину образующей на $1/12$ часть хода. В результате, отложив на каждой из 12 намеченных образующих цилиндра размер, равный предыдущему отложению плюс $1/12$ часть хода, наметим положение точек винтовой линии $1^0, 2^0, 3^0, \dots, 12^0$. Таким образом, для трапециевидного профиля будут построены четыре винтовые линии, из них две по наружному цилиндру и две по внутреннему. Соединив по лекалу намеченные точки и выяснив элементы видимости частей нарезки, получим изометрическое изображение винта.

Пружина вычерчивается совершенно аналогично только что рассмотренному. В табл. 31 показаны два витка пружины, причем часть второго витка вырезана с целью более наглядно изобразить внутреннюю часть витка.

Построение аксонометрического изображения комбинированного тела по его чертежу (таблица 32)

На фиг. 1 табл. 32 дан чертеж комбинированного тела, представляющего срезанный горизонтально шар с шестигранной выемкой внутри и прямоугольной щелью, прорезанной в его стенках. Чертеж составлен в двух проекциях — вид спереди и вид сверху. Проекция вида спереди дана в соединении с вертикальным разрезом.

Построение аксонометрического изображения комбинированного тела по его чертежу



На фиг. 2 тот же предмет изображен в изометрической проекции. Сравнивая фиг. 1 с фиг. 2, видим, что аксонометрическое изображение значительно нагляднее по сравнению с чертежом, составленным по способу ортогонального проецирования. Отштриховка тела на шаровой поверхности сделана циркулем из центра шара. Штрихи постепенно сближены и утолщены. Для придания изображению еще большей наглядности на горизонтальных площадках, в щелевых окнах и на стенках шестигранника показана падающая тень.

Разрезанные стенки заштрихованы под углом 45° .

Построение проведено в такой последовательности: сначала был начерчен шар, затем, пользуясь чертежом, этот шар срезали сверху на высоте h_2 от центра (см. чертеж) и снизу на высоте h_1 от его центра. После этого, пользуясь размерами, взятыми с чертежа (размеры c и b), построили шестигранную выемку внутри шара и щель в его стенках по размерам $2h$ и a . Построение закончили нанесением контура разрезанных стенок. После того как удалили линии построения и обвели линии видимого контура, была нанесена штриховка теней и разрезанных частей предмета.

2.4. Элементы диметрической прямоугольной проекции

Основные элементы диметрической проекции (таблица 33)

Вопрос о происхождении диметрической проекции был освещен выше (см. параграфы 1.3 и 1.14).

Здесь можно отметить только, что диметрическая проекция какого-нибудь предмета, например куба, может быть так же легко получена из ортогональной проекции этого куба. Для этого, подобно тому как мы делали для получения изометрической проекции (см. табл. 1), нам необходимо будет повернуть куб перед фасадной плоскостью V на угол α , равный около 20° , и наклонить его после этого в сторону зрителя также на угол 20° .

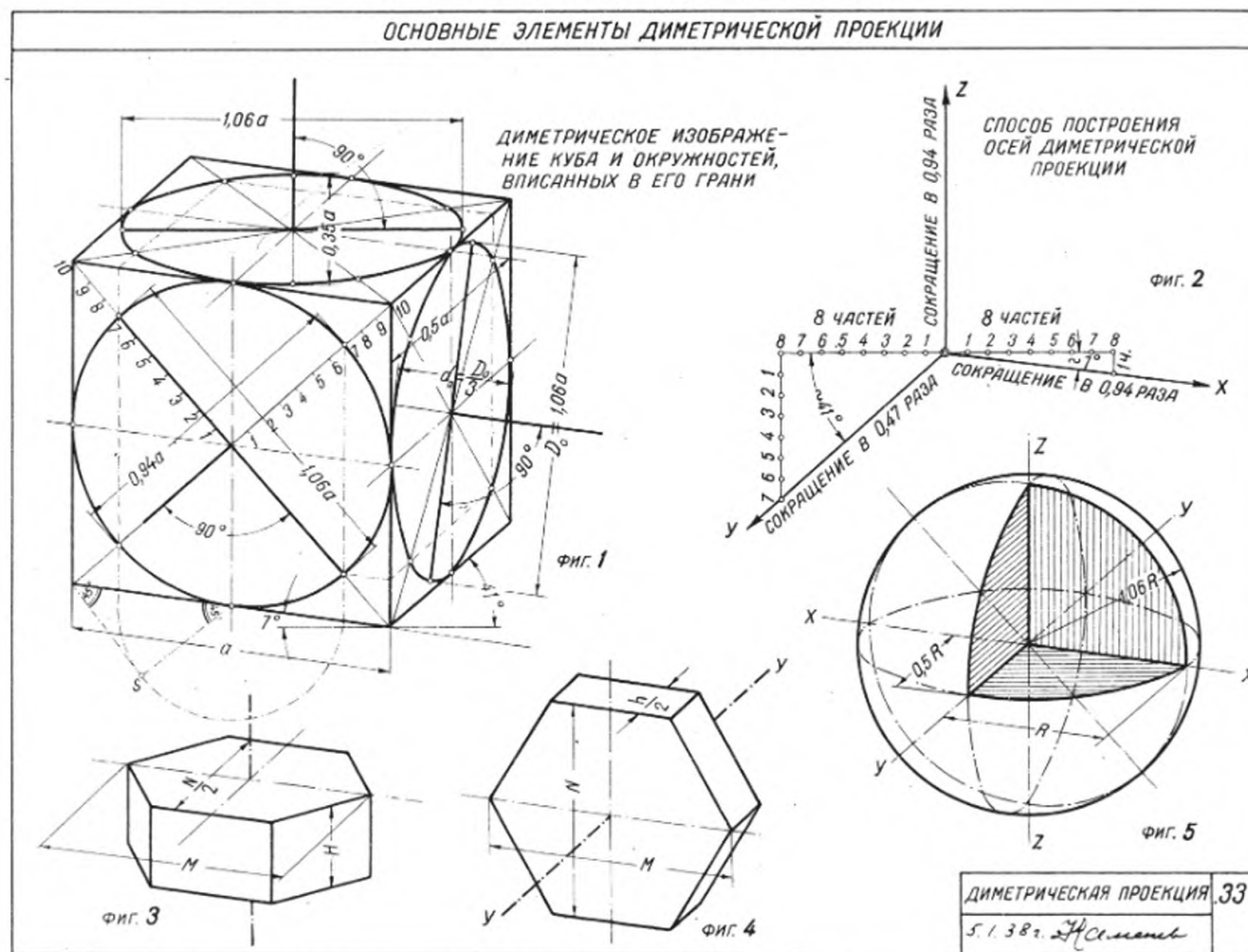
После двух сделанных поворотов куб спроецируется на фасадной плоскости в виде изображения, имеющего все свойства диметрической проекции, выведенные нами выше (см. параграф 1.14). Это изображение и дано на фиг. 1 табл. 33, на которой показан куб, начерченный по способу диметрической проекции.

Передняя грань этого куба проецируется в виде ромба, а верхняя и боковая грани — в виде параллелограммов. Окружности, вписанные в грани куба, проецируются в виде эллипсов. Один из эллипсов по форме близок к окружности, а два других имеют отношение малой оси к большой примерно 1 к 3.

Изучая эллипсы для изометрической проекции, мы видели, что главные оси симметрии этих эллипсов совпадают с диагоналями соответствующих граней куба.

Основные элементы диметрической проекции

Таблица 33



В диметрии только в передней грани главные оси эллипсов совпадают с диагоналями.

В боковой и верхней гранях большая ось эллипса не совпадает с диагональю параллелограмма, однако положение этой оси можно всегда точно определить, так как эта ось (см. параграф 1.14) остается во всех случаях перпендикулярной к соответствующей координатной оси X или Z .

На фиг. 1 это обстоятельство зафиксировано и показано, что угол, составленный осями координат и большой осью эллипсов, составляет 90° .

Надо запомнить, что так как ось координат Z вертикальна, то из сказанного ясно, что *большая ось верхнего эллипса должна быть всегда расположена горизонтально*.

На фиг. 1, кроме того, выписан ряд характерных величин для эллипсов. Отмечено, что большая ось каждого эллипса равна стороне передней грани куба a , увеличенной в 1,06 раза, а малые оси бокового и верхнего эллипсов составляют по величине 0,35 от стороны передней грани куба. Малая ось переднего эллипса составляет 0,95 стороны передней грани. Эллипсы для диметрической проекции, как и для изометрической, обычно строят по восьми (или по 12) характерным точкам.

Четыре из этих точек всегда лежат на серединах сторон параллелограмма или переднего ромба, а остальные четыре — на диагоналях, деля последние, как и в изометрии, в пропорциональном отношении 7 к 3 (см. описание табл. 11). Внизу на фиг. 1 табл. 33 показано тонкой штрихпунктирной линией построение точек эллипса, лежащих на диагоналях ромба, при помощи прямоугольного треугольника с углами в 45° и полуокружности, проведенной через точку S .

Часто вместо разметки четырех точек, лежащих на диагоналях, размечают четыре иные, в качестве которых берут точки, лежащие на главных осях симметрии эллипсов. Для нахождения этих точек известно, что длина большой оси каждого эллипса равна 1,06 от a (фиг. 1), а малые оси узких эллипсов равны 0,35 от a и 0,95 от a для переднего эллипса.

При изучении фиг. 1 необходимо обратить внимание на *перпендикулярность большой оси каждого эллипса к соответствующей координатной оси X , Y или Z* , что и зафиксировано на фиг. 1 постановкой в соответствующих местах градусной величины прямого угла, т. е. угла 90° . В диметрической проекции все размеры сторон куба, параллельные осям X и Z (фиг. 2), на основании соображений, изложенных в параграфе 1.14, уменьшаются в 0,94 раза, а размеры сторон, параллельных оси Y , сокращаются в 0,47 раза против исходных.

Выше (см. параграф 1.14) было установлено, что диметрические оси составляют между собой разные углы (см. рис. 43).

Угол между осью Z и осью X равен $97^{\circ}10'$, а углы между осями X , Y и Y , Z равны в диметрии $131^{\circ}25'$.

Способ построения диметрических осей показан на фиг. 2 табл. 33. Диметрические оси строим следующим образом.

1. Проводим вертикально ось Z и по низу ее горизонтальную линию. Вдоль по горизонтальной линии откладываем влево и вправо от оси Z по восемь каких-нибудь частей одинакового размера.

2. В точках 8 и 8' проводим вертикальные линии вниз. На этих вертикальных линиях от точки 8 откладываем вниз семь частей такого же размера, какие были отложены по горизонтальной линии, а от точки 8' вниз откладываем одну такую часть.

3. После соединения найденных точек с нижним концом оси Z получаем диметрические оси X и Y . При этом ось X оказывается наклоненной примерно на угол 7° к горизонту, а ось Y наклонена к горизонту на угол примерно 41° .

На фиг. 3 и 4 начерчена в диметрических осях шестигранная призма.

Способ вычерчивания шестиугольника в диметрии остается таким же, как и для изометрии. Разница заключается только в том, что размер N на фиг. 3 должен быть уменьшен в два раза против исходного, так как он направлен вдоль оси Y , по которой все размеры в диметрии укорачиваются на половину их величины. Наоборот, на фиг. 4 размеры M и N сохраняют настоящую величину (точнее — сокращаются в 0,94 раза), но в этом случае размер высоты призмы, считая по ребру, должен быть уменьшен в два раза, так как на фиг. 4 ребра призмы направлены вдоль оси Y .

На фиг. 5 табл. 33 начерчен в диметрии шар и из него удалена одна восьмая часть.

В прямоугольной диметрической проекции (как в изометрии) шар проецируется в виде окружности, однако при вырезах надо учесть, что при сечениях этого шара координатными плоскостями YX , XZ и ZY получаются эллипсы диметрического вида.

Главная ось экваториального эллипса при этом располагается горизонтально, главная ось узкого вертикального эллипса в данном случае оказывается перпендикулярной к оси X , а ось третьего широкого эллипса перпендикулярна к оси Y .

Эллипсы концами должны касаться наружной окружности контуров шара.

Все характерные размеры, нужные для построения, выписаны непосредственно на фиг. 5.

Обычно во всех случаях вычерчивания диметрических проекций сокращением по осям X и Z в 0,94 раза против исходного прене-

брегают, откладывая по этим осям фактические размеры детали, а по оси Y вместо сокращения в 0,47 раза откладывают половину фактического размера.

Наглядность и пропорциональность частей предмета при этом сохраняются, и вместе с тем отпадает необходимость умножать каждый размер на неудобную для подсчета величину 0,94 или 0,47.

Таким образом запомним, что: 1) диметрическая ось X упрощенно проводится под углом 7° к горизонту, 2) диметрическая ось Y составляет с горизонтом угол 41° , 3) диметрическая ось Z остается вертикальной, 4) по осям X и Z необходимо откладывать фактические размеры предмета и, наконец, 5) по оси Y размеры должны быть уменьшены точно в два раза против исходного.

Упрощенные способы вычерчивания окружностей в диметрической проекции (таблица 34)

Из фиг. 1 табл. 33 видно, что окружность, вписанная в грань куба, может находиться в трех взаимно перпендикулярных плоскостях XY , ZX и ZY .

Верхняя и правая грани куба — это параллелограммы, в точности равные один другому, поэтому окружности, вписанные в верхнюю и правую грани куба, на диметрической проекции спроецируются одинаково. Передняя грань куба на диметрической проекции представляет собой ромб, и окружность, вписанная в эту грань, спроецируется в диметрии в виде эллипса, отличного по очертаниям от эллипсов, вписанных в две другие грани.

В табл. 34 даны разработанные автором способы упрощенного вычерчивания эллипсов для всех трех граней. Обратимся к изучению этих способов.

На фиг. 1 табл. 34 показан упрощенный способ вычерчивания эллипса для верхней или нижней граней куба.

Если диаметр окружности, вычерчиваемой в диметрической проекции, равен D и если получающимся в диметрии сокращением по осям в 0,94 раза пренебречь, то большую ось эллипса следует увеличить в пропорции

$$\eta = \frac{1}{0,94} = 1,06$$

и принять

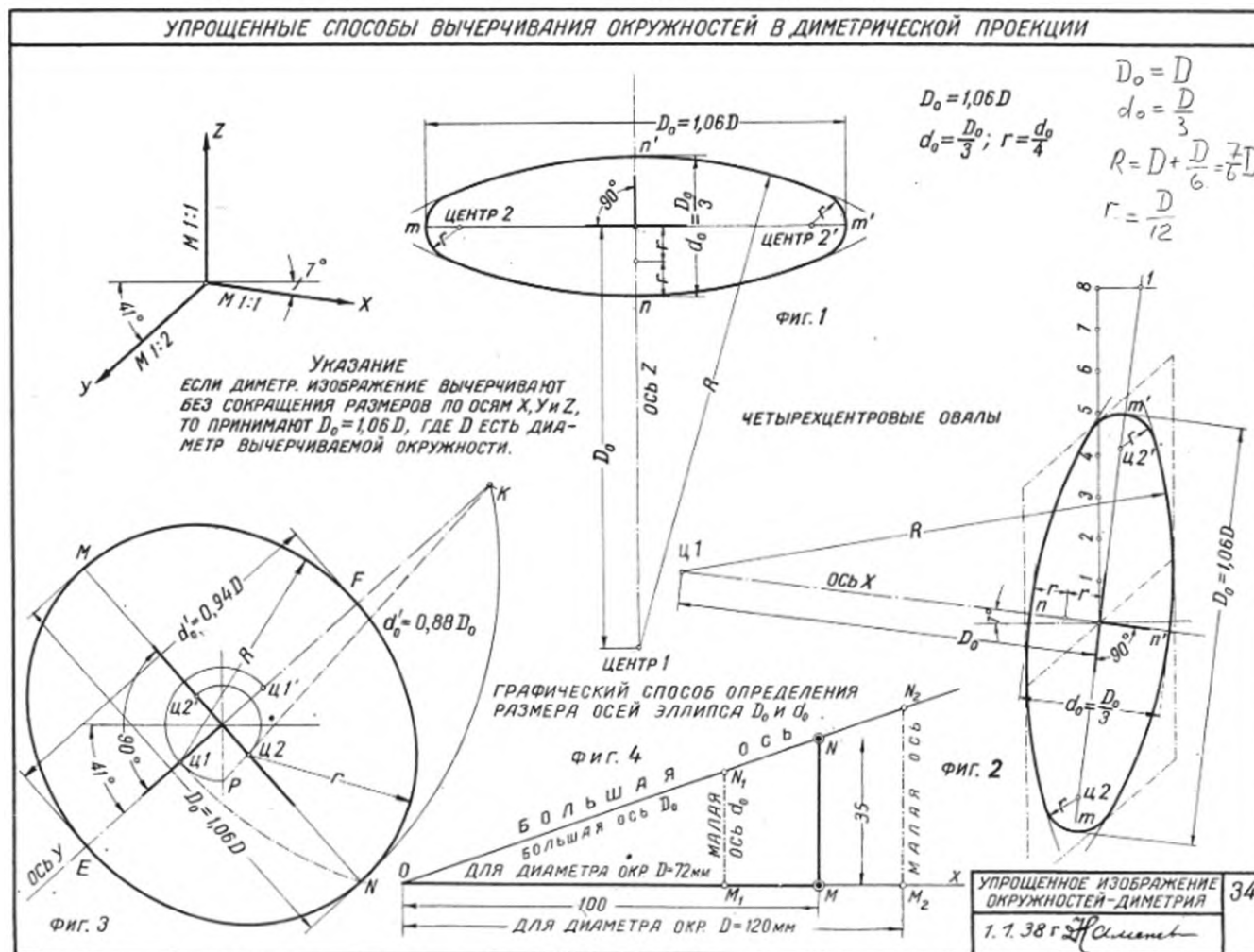
$$D_0 = mm' = 1,06D.$$

Вычерчивание начинаем с проведения вертикальной оси Z и горизонтальной линии

$$mm' = D_0 = 1,06D.$$

Упрощенные способы вычерчивания окружностей в диметрической проекции

УПРОЩЕННЫЕ СПОСОБЫ ВЫЧЕРЧИВАНИЯ ОКРУЖНОСТЕЙ В ДИМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ



Далее вычисляем размер малой оси эллипса

$$d_0 = \frac{D_0}{3}$$

и намечаем на оси Z точки n и n' .

Наметив точки m , m' , n и n' , ищем центры, из которых можно циркулем описать верхнюю и нижнюю дуги контура овала. Эти центры (см. *центр 1*) намечаем на расстоянии, равном D_0 от центра эллипса, считая по оси Z .

Наметив *центр 1* с одной стороны от линии mm' и *центр 1* — с другой, описываем большие дуги овала радиусом R , равным расстоянию от точки *центр 1* до точки n . Радиус r для скругления узких концов овала определяется делением малой полуоси овала пополам.

На фиг. 2 показан овал, вписанный в правую (или левую) грань куба. Этот овал по форме и размерам в точности равен овалу на фиг. 1. Большая ось mm' овала, вычерченного на фиг. 2, наклонена к оси Z на угол 7° . Для построения этой оси учитываем тангенс угла 7° , откладывая вверх по оси Z восемь частей и вправо одну часть.

На проведенной таким способом линии намечаем точки m и m' , отвечающие размеру $D_0 = 1,06D$.

Затем на оси X откладываем размер малой оси овала $d_0 = \frac{D_0}{3}$ и намечаем здесь точки n и n' . Определив положение точек m , m' , n и n' , откладываем от центра эллипса по оси X в ту и другую сторону размер D_0 и тем самым намечаем положение центров для больших дуг овала. Положение центров $\zeta 2$ и $\zeta 2'$ для скругления острых углов овала может быть определено, если отложить от точек m и m' по линии mm' к центру овала размер r , равный половине малой полуоси овала.

На фиг. 2 тонкой штрихпунктирной чертой показан контур грани, в которую вписан овал.

Мы видим, что на фиг. 2 большая ось овала не совпадает с диагональю штрихпунктирного параллелограмма, а расположена перпендикулярно к диметрической оси X , проведенной под углом 7° к горизонту.

Эллипс, вписанный в переднюю грань куба, может быть также построен упрощенно круговым циркулем в виде четырехцентрового овала.

Для этой цели необходимо наметить положение четырех центров $\zeta 1$, $\zeta 1'$, $\zeta 2$ и $\zeta 2'$. Построение начинаем с проведения осей овала; при этом учитываем, что малая ось овала располагается по диметрической оси Y , а большая ось овала должна быть перпендикулярна к его малой оси, т. е. к оси Y .

Раскладывая вдоль большой оси размер $D_0 = 1,06D$, намечаем точки M и N . По оси Y , перпендикулярной к MN , раскладываем размер $d_0 = 0,94D$ и этим намечаем точки E и F . После этого из точки M описываем дугу радиусом MN . Эта дуга на оси Y намечает точку K . Поставив циркуль в точку K и взяв раздвижение до точки N , описываем штрихпунктирную дугу и в пересечении этой дуги с осью Y намечаем точку $\zeta 1$, являющуюся центром для скругления спинок овала. Точка $\zeta 1'$ лежит на таком же расстоянии от центра овала, как и точка $\zeta 1$. Из точек $\zeta 1$ и $\zeta 1'$ описываем дуги радиусом R .

Положение центров $\zeta 2$ и $\zeta 2'$ определяется по линии MN , если соединить точку P с точкой K .

Для всех этих построений необходимо помнить, что большая ось всех трех эллипсов перпендикулярна к их малой оси. Малая ось узких эллипсов составляет $1/3$ от размера большой оси:

$$d_0 = \frac{D_0}{3}.$$

Малая ось переднего эллипса составляет примерно $0,88$ от большой оси. Также следует помнить, что при вычерчивании без учета сокращения по осям размер большой оси всех трех эллипсов должен быть увеличен в $1,06$ раза против исходного:

$$D_0 = 1,06D.$$

Размер большой и малой осей эллипса можно определить графически. Для этого (см. фиг. 4 табл. 34) по горизонтальной линии OX откладывают 100 мм и от точки M вверх 35 мм. Через точки O и N проводят наклонную линию. Так как по построению получается, что гипотенуза $ON = 1,06OM$, то любому размеру OM_1 на гипотенузе будет соответствовать отрезок $ON_1 = 1,06OM_1$; размеру OM_2 — отрезок $ON_2 = 1,06OM_2$. При этом получится, что $M_1N_1 = 0,35OM_1$; $M_2N_2 = 0,35OM_2$ и, следовательно, ON_1 , ON_2 будут равны соответственно большой оси эллипса M_1N_1 и его малой оси M_2N_2 .

Изображение окружности в диметрической прямоугольной проекции (таблица 35)

На фиг. 1 табл. 35 в диметрических осях вычерчены три цилиндра.

Левый цилиндр расположен вдоль оси Y , поэтому его длина сокращена в два раза; правый и верхний цилиндры вычерчены по фактической длине их образующих. Таким образом, все три цилиндра представляют одно и то же тело, но по-разному расположенное в пространстве.

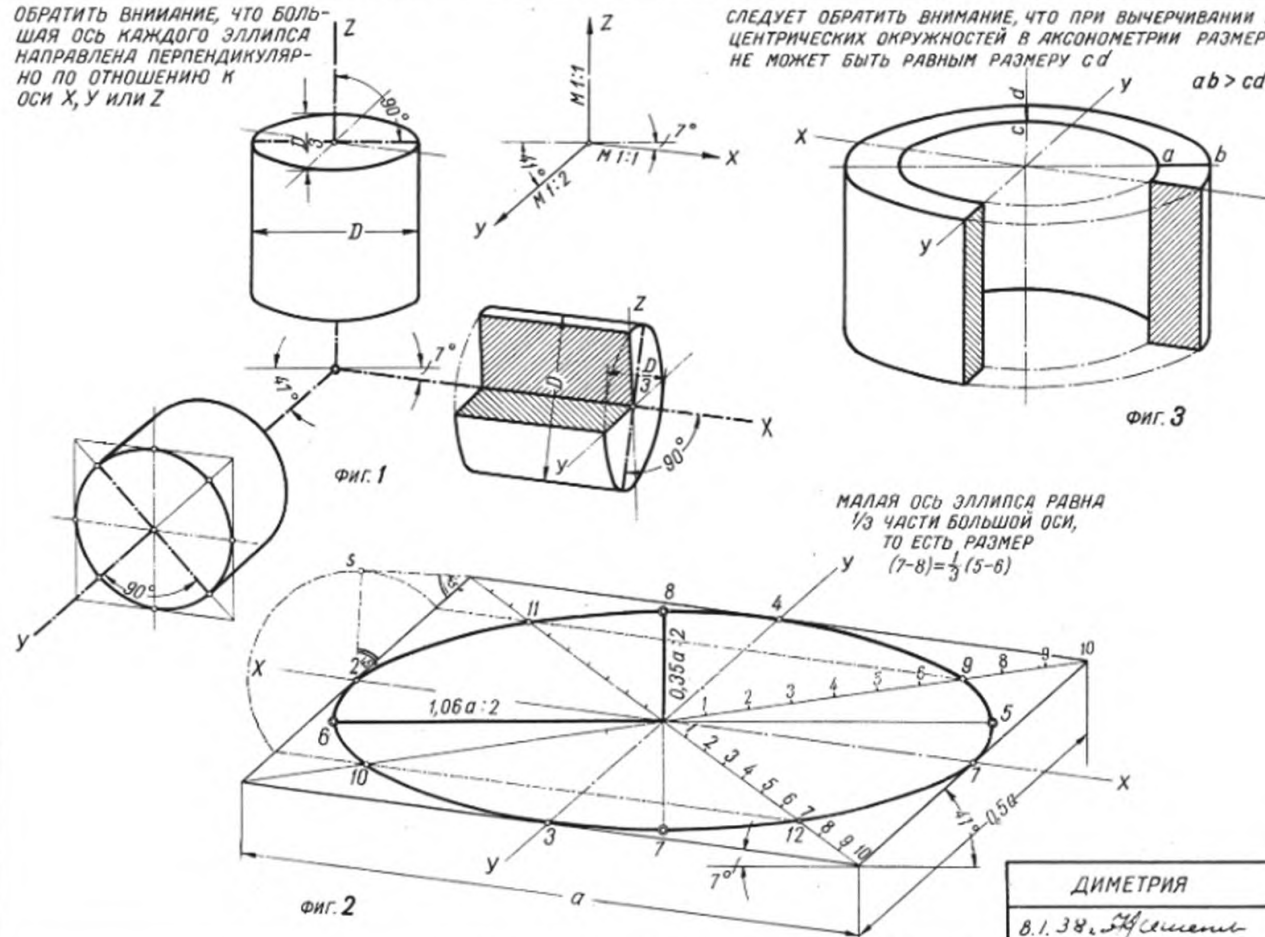
На правом цилиндре вырезана четвертая часть, заключенная между осями Z и Y .

Изображение окружности в диметрической прямоугольной проекции

ИЗОБРАЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ В ДИМЕТРИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

ОБРАТИТЬ ВНИМАНИЕ, ЧТО БОЛЬШАЯ ОСЬ КАЖДОГО ЭЛЛИПСА НАПРАВЛЕНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ПО ОТНОШЕНИЮ К ОСИ X, Y ИЛИ Z

СЛЕДУЕТ ОБРАТИТЬ ВНИМАНИЕ, ЧТО ПРИ ВЫЧЕРЧИВАНИИ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ОКРУЖНОСТЕЙ В АКСОНОМЕТРИИ РАЗМЕР ab НЕ МОЖЕТ БЫТЬ РАВНЫМ РАЗМЕРУ cd

 $ab > cd$


35

Для построения окружности в диметрической проекции можно наметить двенадцать характерных точек. Способ нахождения этих точек показан на фиг. 2 табл. 35. Рассматривая эту фигуру, можно заметить следующее.

1. Точки 1, 2, 3 и 4 лежат на диметрических координатных осях XX , YY .

2. Точки 5, 6, 7 и 8 лежат на главных осях симметрии эллипса, при этом расстояние между точками 5 и 6 равно $1,06a$, а расстояние между точками 7 и 8 равно $0,35a$.

3. Точки 9, 10, 11 и 12 лежат на диагоналях параллелограммов, деля их так же, как в изометрии, в пропорции 7 к 3.

На фиг. 2, слева, тонкой штрихпунктирной чертой показано построение этих точек рассмотренным выше графическим приемом, при помощи прямоугольного треугольника с углами в 45° и полуокружности, описанной через точку S .

После того как все характерные точки эллипсов будут намечены, их можно соединить от руки или по лекалу плавной линией.

Лицам, не имеющим достаточного навыка в черчении от руки и в работе по лекалу, можно рекомендовать предложенный автором способ вычерчивания диметрических эллипсов при помощи циркуля (см. табл. 34).

Фигура 3 табл. 35 дана для того, чтобы научить правильно изображать концентрические окружности в диметрической проекции. На фиг. 3 показан отрезок пустотелого цилиндра. При вычерчивании таких тел начинающие стремятся внутренний эллипс начертить параллельно наружному.

Необходимо обратить внимание на то обстоятельство, что в диметрии (так же и в изометрии) *контуры внутреннего эллипса не могут быть параллельными контурам наружного эллипса*.

Это обстоятельство в диметрии особенно заметно, так как по оси Y толщина стенки сокращается ровно в два раза против такой же толщины, считая по оси X (сравните заштрихованные стенки на разрезанной части, где правая заштрихованная стенка в два раза толще левой).

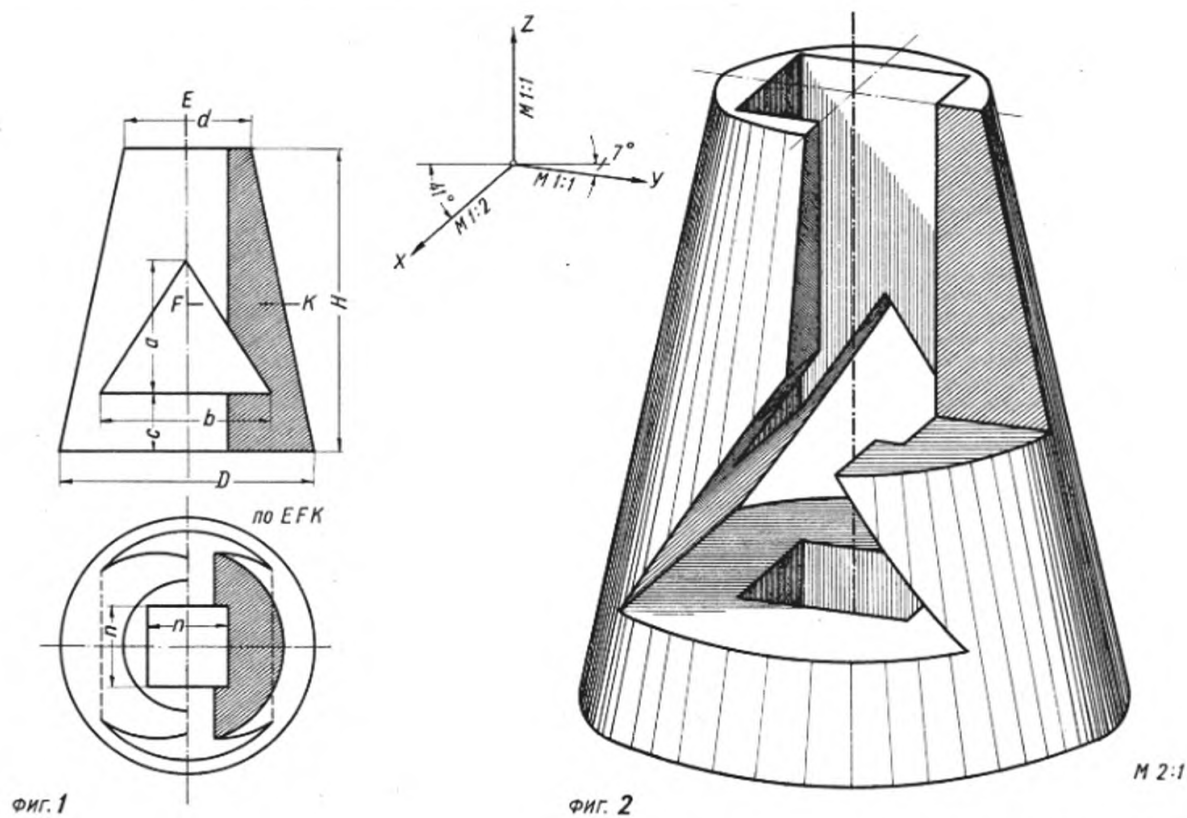
Составление диметрического изображения комбинированного тела по чертежу (таблица 36)

На фиг. 1 табл. 36 в двух проекциях дан чертеж комбинированного тела, а на фиг. 2 — его диметрическое изображение.

Тело представляет собой усеченный конус, прорезанный вдоль оси отверстием квадратной формы и в поперечном направлении имеющий сквозное окно треугольного сечения. На проекции вида сверху (см. фиг. 1) наклонные стенки треугольного окна проецируются в виде частей эллипса.

Составление диметрического изображения комбинированного тела по чертежу

СОСТАВЛЕНИЕ ДИМЕТРИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ КОМБИНИРОВАННОГО ТЕЛА ПО ЧЕРТЕЖУ



ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ	36
4.1.38. <i>И.А. Монах</i>	

На фиг. 2 эти же стенки также являются частями эллипса и строятся по точкам.

Построение диметрического изображения по фиг. 2 ведут в такой последовательности.

Вычерчивают сначала усеченный конус, пользуясь размерами D , d и H , заданными на чертеже (см. фиг. 1). Затем на осях верхнего основания конуса строят квадрат, имеющий сторону n , и намечают контур разрезанных стенок. После этого строят горизонтальный эллипс на расстоянии C от нижнего основания конуса в плоскости ZY . Строят контур перпендикулярного сечения для треугольного отверстия (по размерам a и b). Пользуясь контуром перпендикулярного сечения, наносят эллиптические очертания наклонных стенок треугольного отверстия. Чертеж заканчивают нанесением штриховки разрезанных стенок и теней, выделяющих рельеф тела.

2.5. Элементы косоугольной (фронтальной) диметрической проекции

Косоугольная (фронтальная) диметрическая проекция (таблица 37)

Нами уже было на примерах выяснено преимущество прямоугольной (ортогональной) диметрической проекции перед изометрической. Это преимущество заключается в большей наглядности диметрического изображения.

Основным недостатком прямоугольной диметрии является неудобное направление ее осей, затрудняющее работу по рейсшине и по треугольнику. В прямоугольной диметрии ось X отклоняется вниз от горизонтальной линии на угол в 7° , а ось Y — на угол в 41° .

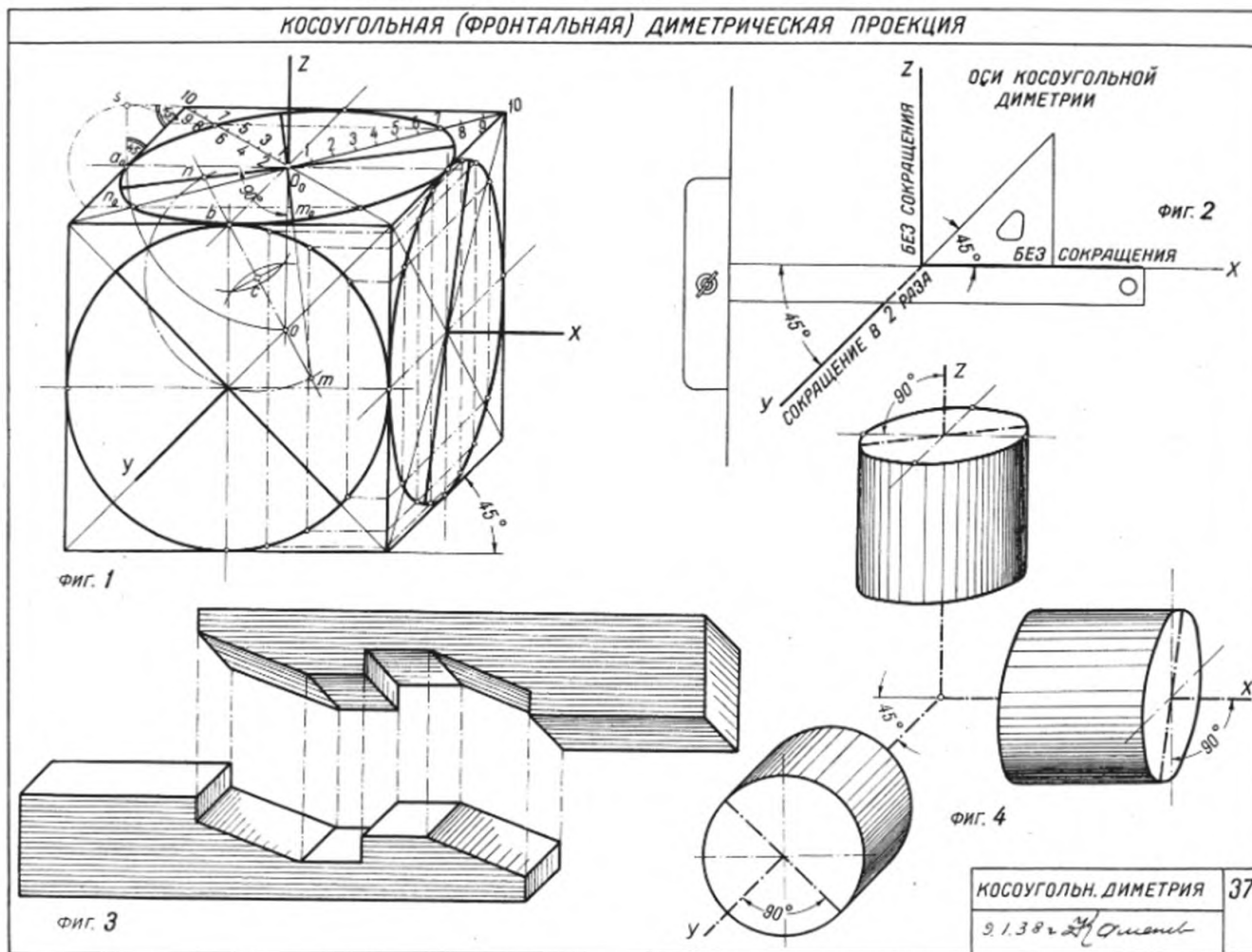
Почти не потеряв в наглядности изображения, можно диметрические оси значительно упростить и направить ось X горизонтально, а ось Y провести к ней под углом в 45° .

Такое положение легко получить, если систему взаимно перпендикулярных координатных осей X , Y и Z спроецировать на вертикальную (или горизонтальную) плоскость проекций не ортогонально (прямоугольно), а *косоугольно, параллельным пучком лучей*. Полученные в результате такого проецирования диметрические координатные оси показаны на фиг. 2 табл. 37, где попутно показан также и способ их построения. На фиг. 1 начерчен в этих осях основной диметрический куб с вписанными в его грани окружностями.

Окружность, вписанная в переднюю грань куба в косоугольных осях, не меняет формы и размеров. Это обстоятельство является одним из существенных преимуществ косоугольной проекции при вычерчивании сложных тел (например, см. табл. 39 и др.).

Косоугольная (фронтальная) диметрическая проекция

КОСОУГОЛЬНАЯ (ФРОНТАЛЬНАЯ) ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ



При вычерчивании аналогичных тел в ортогональной диметрии задача значительно усложняется необходимостью начертить большое количество эллипсов. Если в этом случае принять за основу ось косоугольной диметрии, то получим более простое решение, так как все окружности легко будет описать циркулем.

Косоугольная диметрия с большим успехом может быть применена во многих случаях практики при вычерчивании деталей со сложными контурами.

Например, на фиг. 4 табл. 38 начерчен корпус подшипника, имеющего сложное очертание формы передней стенки. В обычных ортогональных диметрических осях все криволинейные элементы этой стенки превращаются в эллипсы, чем значительно осложняется процесс вычерчивания этой детали.

На фиг. 4 табл. 38 этот подшипник начерчен в косоугольных диметрических осях, почему построение форм передней фронтальной стенки значительно упростилось. Таким образом, в косоугольной диметрии передняя фронтальная стенка изображается так же, как главный вид ортогонального чертежа. Поэтому часто в технике косоугольную диметрию называют фронтальной проекцией.

Все остальные особенности диметрии в косоугольных осях обычно сохраняются, т. е. по двум осям откладывают натуральные размеры, а по третьей оси размеры уменьшают вдвое (а иногда и в три раза).

На фиг. 4 табл. 37 начерчены цилиндры, расположенные вдоль косоугольных диметрических осей X , Y , Z .

Большим недостатком верхнего и правого цилиндров является неперпендикулярность их главных осей к координатным осям X и Z .

Такое положение осей создает непривычную для нашего глаза картину, и нам кажется, что в этих случаях начерчен не цилиндр, а косое сплющенное тело.

Однако если тот же цилиндр расположить вдоль оси Y , то картина значительно меняется, и цилиндр в этом случае кажется более естественным.

Происходит это за счет сохранения перпендикулярности оси Y к главной оси переднего эллипса, превратившегося в данном случае в окружность.

Так как выбор положения для главной оси при вычерчивании цилиндрических тел по большей части зависит от нашего усмотрения, то всегда целесообразно в косоугольной диметрии эти тела располагать вдоль оси Y .

Преимущества косоугольной диметрии очень часто используются и для тел, имеющих прямоугольные очертания.

Например, на фиг. 3 в косоугольных диметрических осях очень эффектно могут быть представлены разного рода сложные врубки, предназначенные для соединения, положим, двух брусков в одно целое.

В этом случае чертим на некотором расстоянии фронтальный вид боковых стенок двух сопрягаемых брусков и затем из всех точек излома контура проводим линии, параллельные оси Y , для левого бруска отклонив их в сторону, а для правого бруска — в другую.

Отметив по этим осям размер толщины брусков, сокращенный вдвое, очень легко вычерчиваем контуры врубки; при этом форма ее выявляется с большей степенью наглядности.

На фиг. 1 показан способ определения направления главных осей для верхнего эллипса. Сделанные построения аналогичны рассмотренным выше на рис. 24 (см. параграф 1.8).

Теоретическая сторона вопроса о получении косоугольной проекции рассмотрена в части 1 настоящего пособия.

Слева вверху на фиг. 1 тонкой штрихпунктирной чертой показано построение точек эллипса, лежащих на диагоналях верхнего ромба. Для этой цели известным приемом построен прямоугольный треугольник с углами в 45° и из точки a_0 через S проведена полуокружность.

Упрощенный способ изображения окружностей в косоугольной диметрии (таблица 38)

Окружность, вписанная в грани куба, при косоугольном способе проецирования изображается эллипсами для верхней (нижней) и правой (левой) граней куба. Окружность, вписанная в переднюю грань куба, не изменяет своей формы и размеров (фиг. 1).

Вычерчивание эллипсов по точкам неудобно и отнимает много времени, поэтому и для косоугольного способа проецирования удобнее эллипсы заменить четырехцентровыми овалами, легко вычерчиваемыми при помощи кругового циркуля. Можно предложить следующий приближенный способ построения окружности в косоугольной диметрической проекции (фиг. 2).

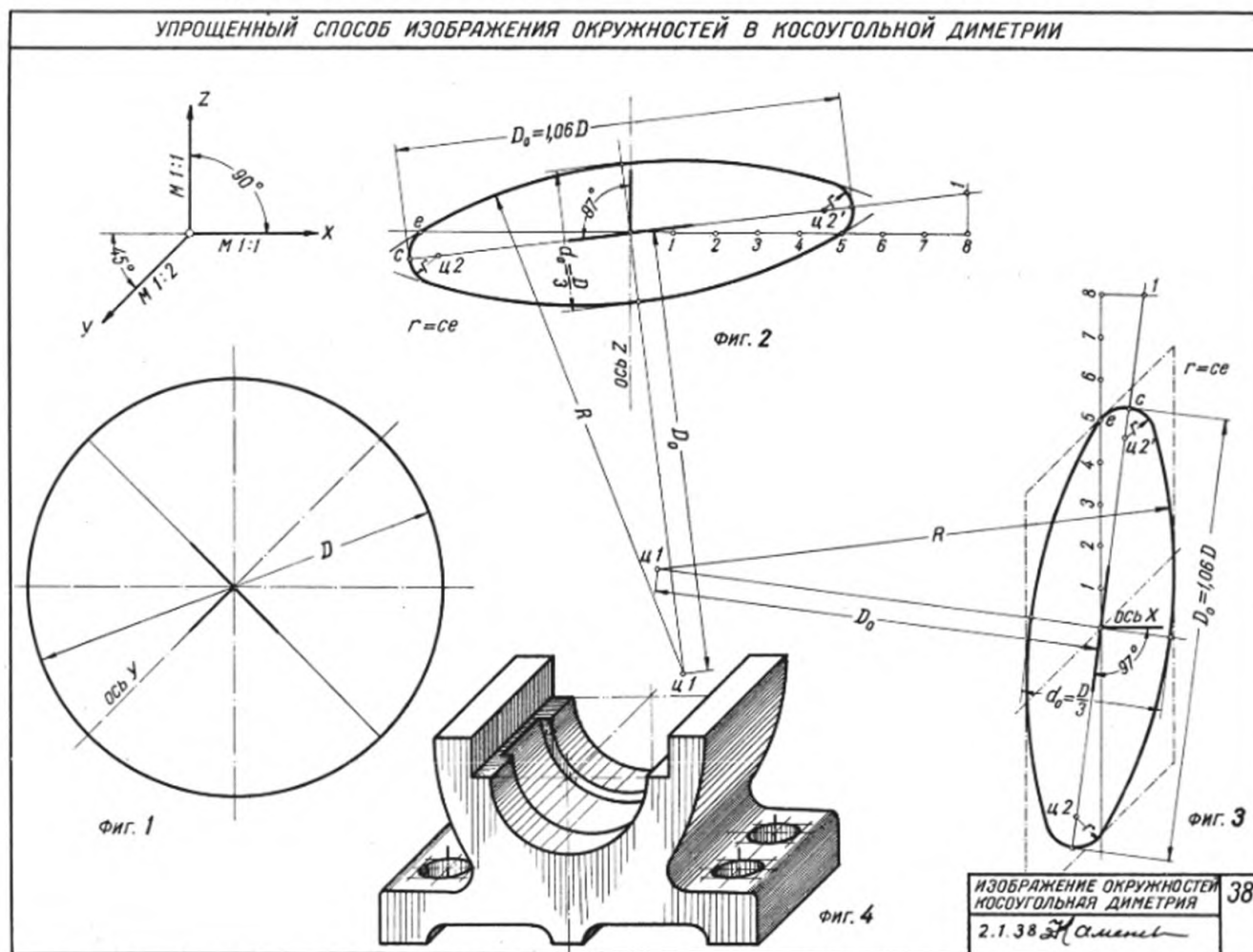
Намечаем сначала ось эллипса. Эта ось не горизонтальна, а наклонена несколько к горизонту (см. фиг. 1 табл. 37). Можно принять наклон примерно в 7° и строить его по тангенсу, для чего, как уже знаем, можно отложить по горизонтальному направлению восемь каких-либо единиц, а по вертикальному — одну такую же единицу. Далее по намеченной оси от центра эллипса раскладываем размер диаметра окружности:

$$D_0 = 1,06D$$

и этим намечаем большую ось эллипса. Малая ось может быть намечена перпендикулярно к большой оси, и размер малой оси составляет $1/3$ от D , где D — фактический размер диаметра вычерчиваемой окружности. Здесь, как и обычно, предполагается, что сокращениями по осям X , Y и Z пренебрегаем.

Упрощенный способ изображения окружностей в косоугольной диметрии

УПРОЩЕННЫЙ СПОСОБ ИЗОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТЕЙ В КОСУГОЛЬНОЙ ДИМЕТРИИ



Разметив большую и малую оси, приступаем к проведению очертания больших дуг овала. Для этой цели необходимо наметить положение центра $\zeta 1$ и симметричного ему сверху $\zeta 1$. Центр $\zeta 1$ на фиг. 2 не показан. Положение центра $\zeta 1$ будет определено, если вдоль малой оси эллипса от его центра отложить размер D_0 .

Поставив острие циркуля в точку $\zeta 1$, описываем радиусом R большую дугу овала. Радиус для малых дуг овала определяется без вычисления; этот радиус $r = se$. Взяв в циркуль размер хорды se , получаем величину радиуса, которым и скругляем острые концы из точек $\zeta 2$ и $\zeta 2$. На фиг. 3 показан способ построения четырехцентрового овала, вписанного в боковые грани куба.

Этот овал совершенно тождествен овалу, показанному на фиг. 2.

Последовательность действий при вычерчивании овала по фиг. 3 такова.

Намечаем направление большой оси овала. С этой целью по вертикальному направлению откладываем восемь и по горизонтальному направлению одну такую же единицу. На проведенной оси эллипса раскладываем диаметр вычерчиваемой окружности, увеличенный в 1,06 раза, т. е. откладываем $D_0 = 1,06D$, где D — фактический диаметр вычерчиваемой окружности. Перпендикулярно к большой оси намечаем направление малой оси овала и по этому направлению раскладываем размер малой оси овала:

$$d_0 = \frac{D}{3}.$$

Наметив размер большой оси овала и перпендикулярно к нему размер малой оси овала, приступаем к вычерчиванию самого овала. С этой целью определяем положение $\zeta 1$ и $\zeta 2$. Для нахождения $\zeta 1$ откладываем от центра овала вдоль его малой оси размер D_0 и из намеченной точки $\zeta 1$ радиусом R описываем большую дугу стенки эллипса.

Радиусом r для скругления острых концов овала является размер хорды es , которую замеряем циркулем непосредственно по чертежу.

Необходимо запомнить, что при фронтальном способе проецирования большая ось горизонтального эллипса (см. фиг. 2) наклонена к горизонту примерно на угол 7° , а большая ось вертикального эллипса (см. фиг. 3) наклонена на такой же угол 7° к вертикальной линии. Кроме того, полезно помнить, что размер большой оси эллипса $D_0 \approx 1,06D$, а размер малой оси $d_0 = \frac{D}{3}$, где D — диаметр вычерчиваемой окружности.

На фиг. 4 показан способ изображения корпуса подшипника, вычерченного в осях косоугольной диметрии. Здесь следует обратить внимание на то, что сложные очертания фронтальной стенки

и средней выемки этого корпуса могут быть легко вычерчены при помощи кругового циркуля и лишь отверстия в опорной плите проектируются в виде эллипсов, для построения которых рекомендуется сначала начертить контуры параллелограмов, в которые эти эллипсы могут быть затем вписаны либо от руки, либо при помощи циркуля, как это было показано на фиг. 2.

Составление косоугольного диметрического изображения по чертежу (таблица 39)

На фиг. 1 табл. 39 дан чертеж крышки вентиля. Крышка начерчена в двух проекциях: вид спереди (главный вид) и вид сверху для выявления внутреннего устройства детали. На главном виде сделан вырез правой четверти.

Крышка имеет круглую форму, и на проекции вида сверху (см. фиг. 1) на ней видно большое количество окружностей (отверстия, фланец и т. д.). Учитывая это обстоятельство, целесообразно крышку начертить в осях косоугольной, фронтальной, диметрии. Это и сделано на фиг. 2, где крышка поставлена в такое положение, что все ее криволинейные очертания проектируются без искажения в виде окружностей.

Для построения использованы размеры, нанесенные на фиг. 1. Последовательность построения такова: в первую очередь вычерчен большой фланец крышки и на его поверхности размечено четыре отверстия для болтов, затем начерчены верхний овальный фланец и конусовидные приливы, в последнюю очередь сделан разрез и нанесена штриховка.

2.6. Сравнение аксонометрических проекций между собой

Сравнение аксонометрических изображений куба (таблица 40)

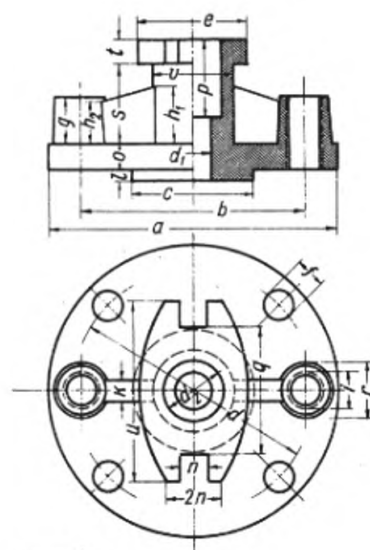
В табл. 40 для сравнения начерчены три изображения куба, представленные: 1) в прямоугольной изометрической проекции (фиг. 2), 2) в прямоугольной диметрической проекции (фиг. 4) и 3) в косоугольной (фронтальной) диметрической проекции (фиг. 6).

При изображении фиг. 2, 4 и 6 учтены сокращения размеров по осям X , Y и Z , зафиксированные на фиг. 1, 3 и 5 для каждого вида проекции.

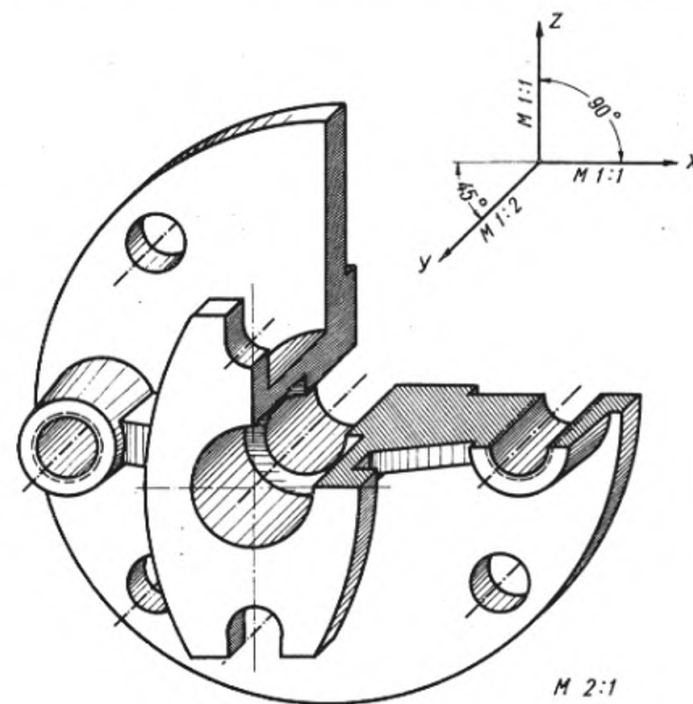
Наибольшей наглядностью отличается диметрическое изображение по фиг. 4. Наибольшей простотой вычерчивания отличается фронтальное диметрическое изображение (фиг. 6). Это же изображение по наглядности мало уступает прямоугольному диметрическому (фиг. 4).

Составление косоугольного диметрического изображения по чертежу

СОСТАВЛЕНИЕ КОСУГОЛЬНОГО (ФРОНТАЛЬНОГО) ДИМЕТРИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ЧЕРТЕЖУ



Фиг. 1



Фиг. 2

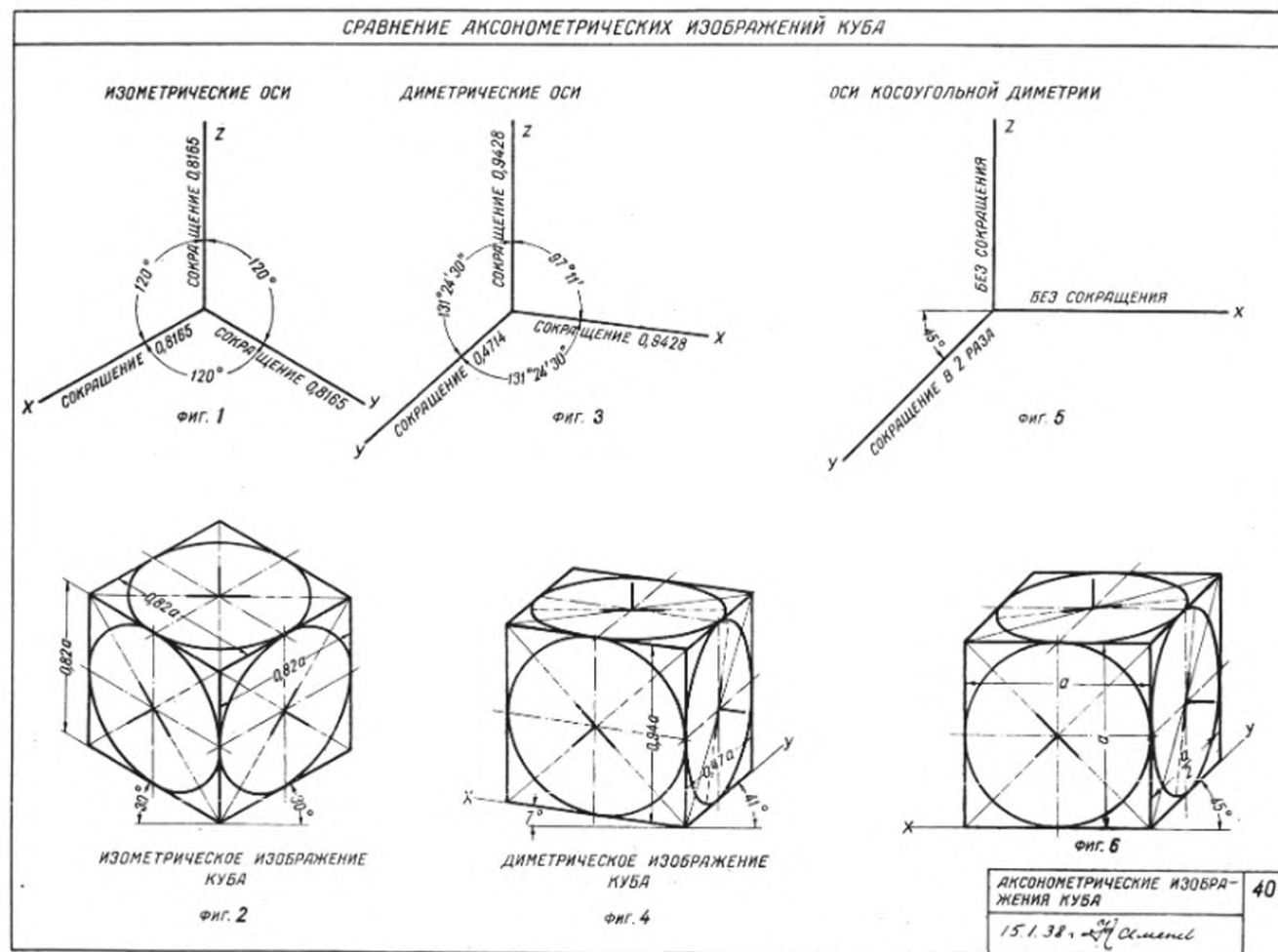
КОСУГОЛЬНАЯ ДИМЕТРИЯ

39

3.1.38.2. *А.М.М.М.*

Сравнение аксонометрических изображений куба

Таблица 40



Сравнение прямоугольной и косоугольной аксонометрических проекций (таблицы 41, 42)

На фиг. 1—4 табл. 41 начерчен один и тот же объект — кузнечная наковальня. Однако эта наковальня для сравнения показана в разных аксонометрических осях. На фиг. 1 наковальня вычерчена в изометрических осях с одинаковым сокращением размеров по всем трем направлениям X , Y и Z .

На фиг. 2 та же наковальня дана в диметрических осях с двойным сокращением размеров, направленных вдоль оси Y .

На фиг. 3 наковальня вычерчена в косоугольных диметрических осях. Построение проведено, исходя от неизменного вида сверху. Размеры, направленные вдоль оси Y , характеризующей высоту наковальни, сокращены в два раза.

На фиг. 4 тоже показано косоугольное диметрическое изображение наковальни, однако изображение построено исходя из неизменности форм фронтальной стенки.

Если критически сравнить все четыре изображения в отношении наглядности передачи формы, то на первое место придется поставить диметрический вид (фиг. 3).

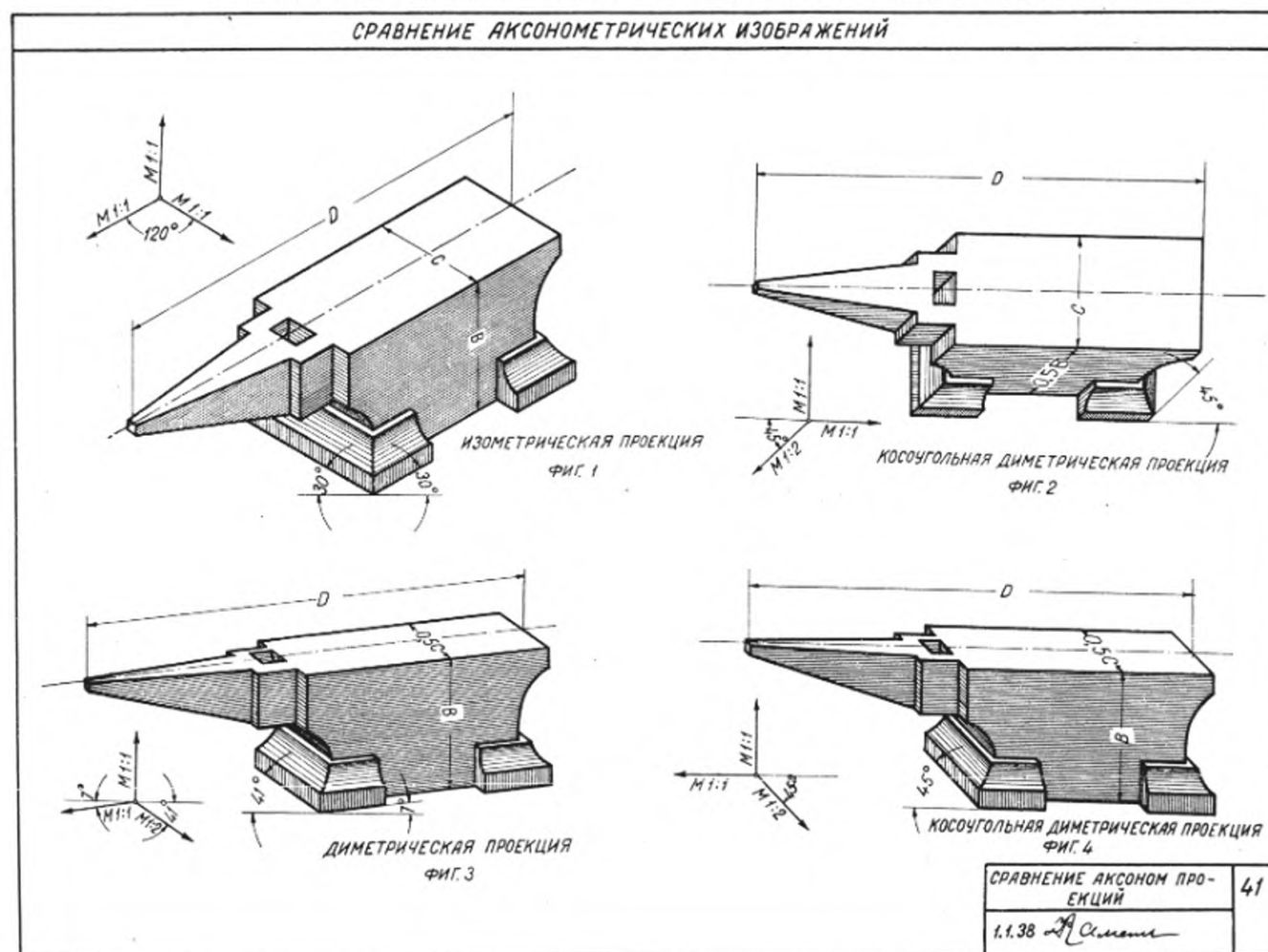
Изометрическое изображение по фиг. 1 кажется ненормально наклоненным вперед.

Вторым по наглядности идет изображение, вычерченное на фиг. 4. При этом по наглядности изображения фиг. 3 и 4 почти равноценны.

В табл. 42 одна и та же деталь для сравнения начерчена в изометрической (фиг. 1), диметрической (фиг. 2), фронтальной косоугольной (фиг. 3) проекциях.

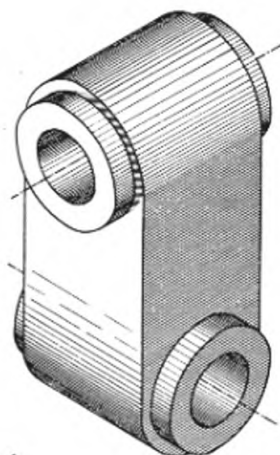
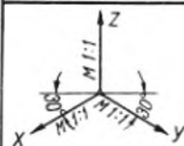
Рассматривая сделанное построение, можно прийти к выводу, что для данной детали более наглядным является изометрическое изображение (фиг. 1). Диметрическое и фронтальное изображения (фиг. 2 и 3) совершенно равноценны в смысле наглядности, однако для вычерчивания изображение на фиг. 3 более удобно, так как все окружности во фронтальных плоскостях вычерчиваются круговым циркулем, в то время как эти же окружности на фиг. 2 проецируются в виде эллипсов, поэтому вычерчивание их значительно осложняется.

Сравнение прямоугольной и косоугольной аксонометрических проекций (1)



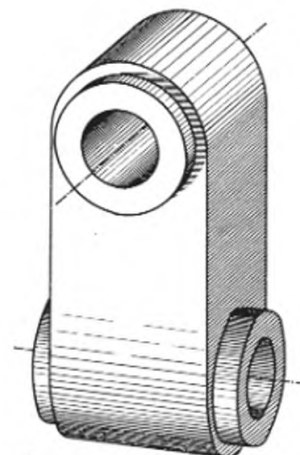
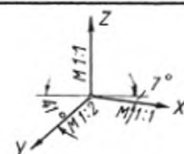
Сравнение прямоугольной и косоугольной аксонометрических проекций (2)

СРАВНЕНИЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И КОСУГОЛЬНОЙ



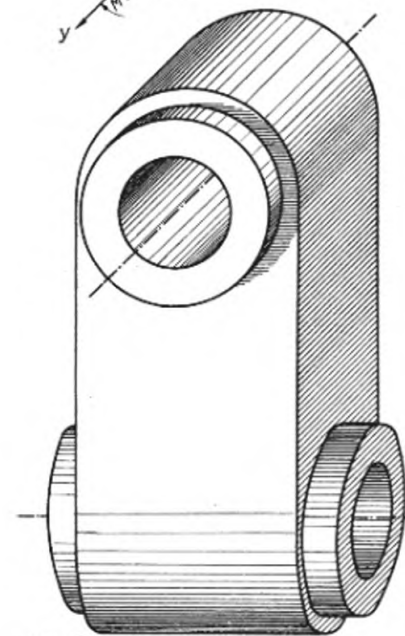
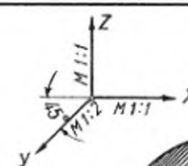
Фиг. 1

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ
ПРОЕКЦИЯ



Фиг. 2

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ДИМЕТРИЧЕСКАЯ
ПРОЕКЦИЯ



Фиг. 3

КОСУГОЛЬНАЯ (ФРОНТАЛЬНАЯ)
ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

СРАВНЕНИЕ АКСОНОМЕТРИ-
ЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ
6.1.38.2

Глава 3

ОБРАЗЦЫ ЧЕРТЕЖЕЙ

МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ ДЕТАЛЕЙ

И СБОРОК

В табл. 43—64 даны чертежи деталей машин и сборок различного назначения. Материал для составления этих чертежей взят из альбома автора под названием «Рабочие машиностроительные чертежи». Таблицы 43—64 разработаны как пособие для студентов вузов при выполнении ими работы на тему об аксонометрических проекциях.

Таблицы 61 и 64 затрагивают весьма важную тему об аксонометрическом скицировании. Здесь еще раз необходимо подчеркнуть, что, прорабатывая теоретическую часть курса аксонометрических проекций, следует попутно всемерно стремиться развить у учащихся навыки в умении составить аксонометрические эскизы от руки, без чертежных инструментов.

Штриховка разрезанных частей и шрафировка

Штриховка разрезанных частей детали выполняется, как и в ортогональном способе, под углом 45° , т. е. по чертежному равнобедренному треугольнику, наложенному на рейсшину гипотенузой. Наклон штриховки должен быть сделан в разные стороны, и линии штриховки должны проводиться вдоль наименьшего измерения штрихуемого контура, чтобы линии штриховки получались возможно более короткими.

Рельеф контуров детали при изображении ее в аксонометрии принято оттенять особой штриховкой.

Штриховка, нанесенная для придания изображению большей рельефности, носит название *шрафировки*.

В аксонометрии применяется шрафирование по линейке и от руки.

Шрафировка, сделанная от руки, может более полно выявить рельеф детали, меньше затемняет ее формы и выполняется значительно быстрее, чем шрафировка по линейке (ср. табл. 49 и 43).

Кроме шрафировки рельефа сеткой (табл. 49—54), применяется отделка рельефа штриховкой (табл. 43—48, 57). Штриховку рельефа наносят или по линейке (табл. 43) или от руки (табл. 49).

Делая шрафировку, нужно помнить, что в данном случае дело заключается не в количестве нанесенных штрихов, а в умелом их расположении (см. табл. 53).

Рельеф фигуры выявляется главным образом не густотой шрафировки, а правильным ее наклоном, умело подчеркивающим фактический наклон шрафируемой поверхности. Сгущение шрафировки следует делать в тех местах, где фактически должна быть тень от смежных частей контура. При этом считают, что деталь освещена слева сверху.

Следует учесть, что сразу добиться хороших результатов по шрафировке трудно. Необходимы частые повторные упражнения; при этом следует копировать хорошо исполненные образцы. В типе шрафировки в большой степени сказываются художественное чутье и вкус лица, выполняющего аксонометрический чертеж.

Вначале наиболее сложной может показаться шрафировка цилиндрических и шаровых плоскостей, конических приливов и отверстий. Начинаящим рекомендуется скопировать на кальку тушью эскизы с табл. 64, на которой приведена шрафировка простейшего типа, дающая вместе с тем достаточно полное представление о рельефе шрафируемых криволинейных поверхностей.

Чертеж анкерной плиты (таблицы 43, 44 и 49)

В табл. 43, 44 и 49 начерчена анкерная плита. Аксонометрический вид этой плиты составлен по ортогональному чертежу, взятому из альбома автора «Рабочие машиностроительные чертежи». Плита дана в трех аксонометрических видах: в табл. 43 и 49 дана изометрическая проекция, в табл. 44 — диметрическая и косоугольная диметрическая.

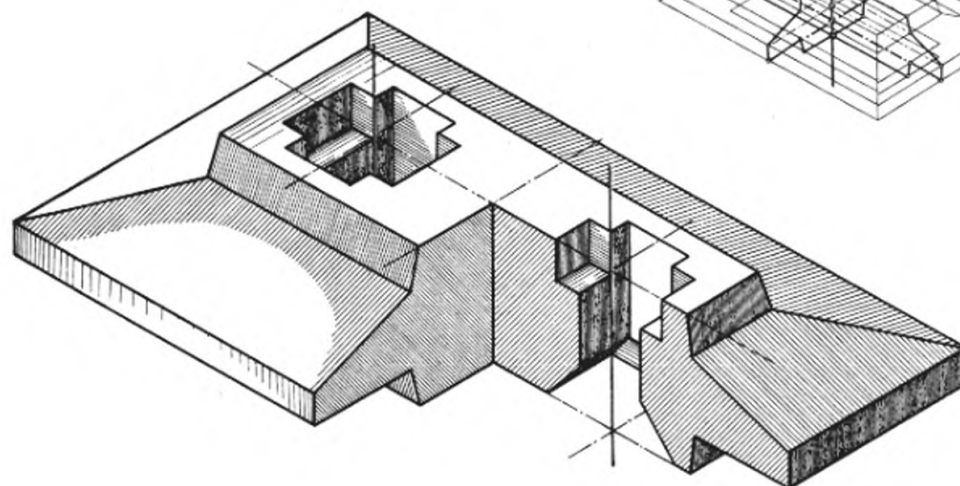
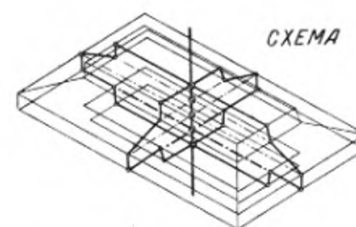
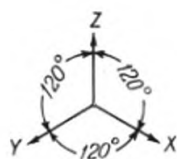
Три изображения одной и той же детали сделаны с целью показать, что не всегда диметрия нагляднее изометрии и в некоторых случаях изометрическое изображение более ясно передает формы детали.

В данном случае из начерченных изображений изометрическое является наиболее наглядным. Изображения в табл. 44 равноценны по наглядности, но косоугольное диметрическое изображение вычерчивается проще. Поэтому из диметрических изображений целесообразно было бы оставить нижнее, т. е. косоугольное.

Способ вычерчивания анкерной плиты в аксонометрии представлен схематически в правом верхнем углу листа. Как видим, плиту можно расчленить на три отдельные доски, наложенные одна на другую, при этом средняя доска имеет скошенный верх.

Чертеж анкерной плиты (1)

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН



ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

ШРАФИРОВКА ПО ЛИНЕЙКЕ

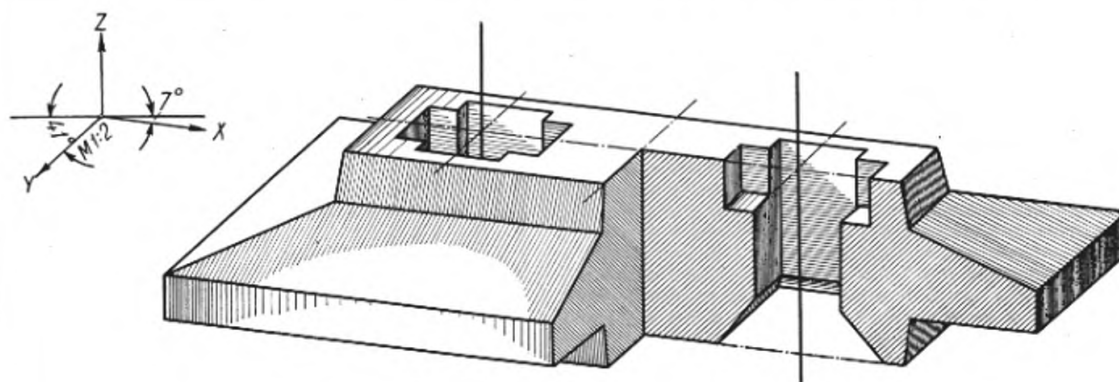
АНКЕРНАЯ ПЛИТА

43

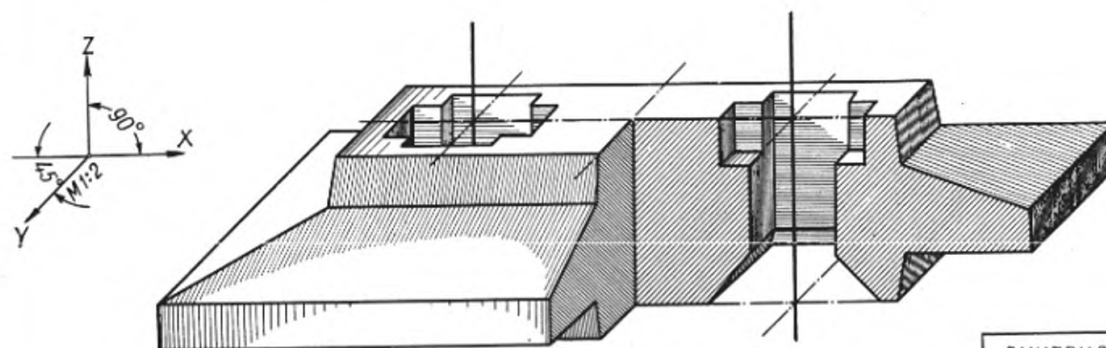
17. VI. 1944 г. *И. А. Мещеряков*

Чертеж анкерной плиты (2)

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН



ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ



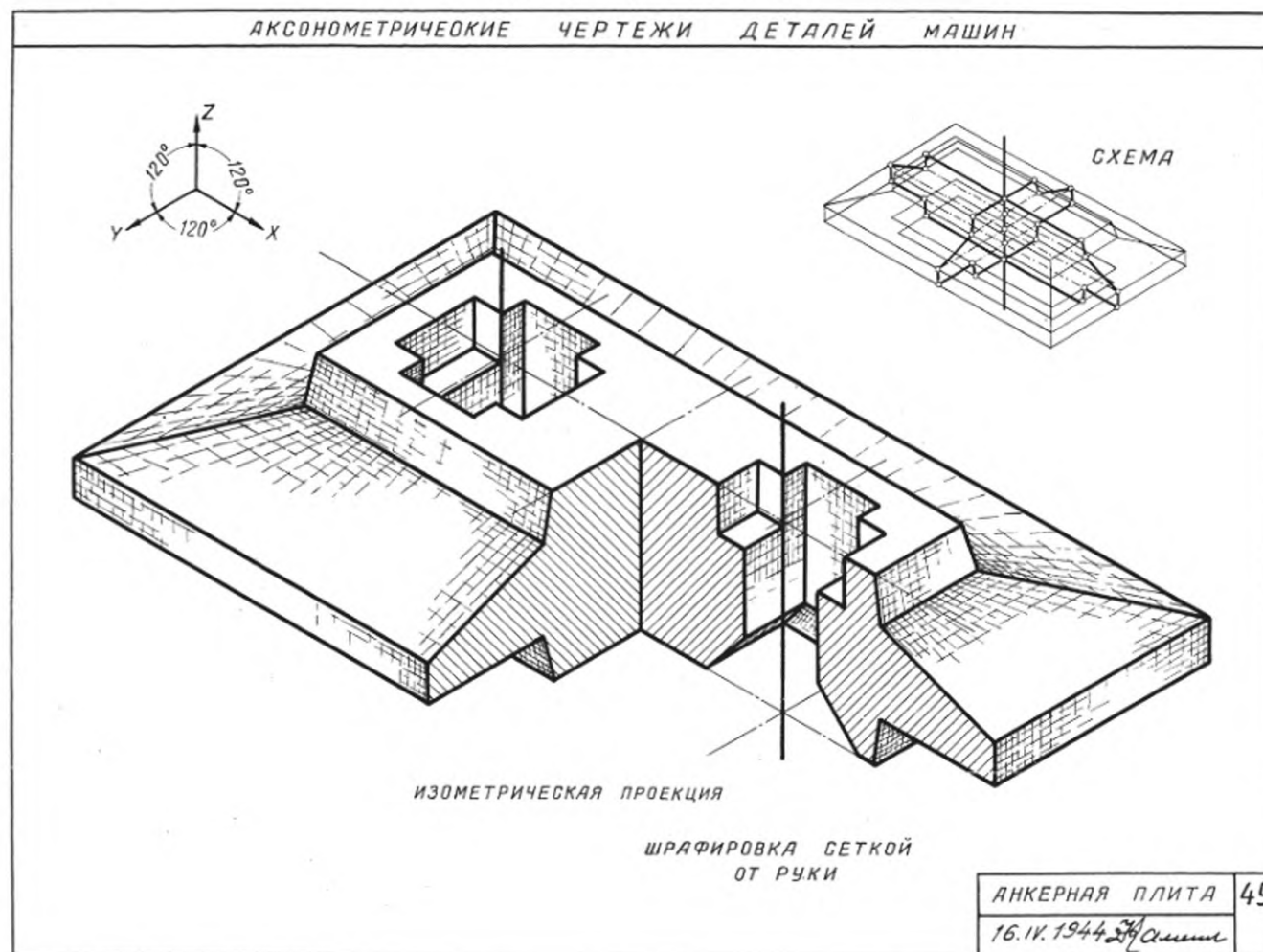
КОСОУГОЛЬНАЯ ДИМЕТРИЯ

АНКЕРНАЯ ПЛИТА

44

18.IV.1944, *А.А.Александров*

Чертеж анкерной плиты (3)



Способ построения аксонометрического вида плиты одинаков для всех трех изображений.

Прежде всего проводим вертикально ось Z . На этой оси откладываем высоту отдельных элементов плиты. В результате намечается пять точек, обведенных на схеме (см. вверху) двумя кружками.

После этого проводим оси X и Y и строим форму среднего сечения плиты в продольном и поперечном направлениях.

На схеме очертания средних сечений плиты начерчены толстой линией.

Дальнейшее построение заключается в проведении через все углы этих средних сечений линий, параллельных координатным осям X и Y .

Вырез четвертой части делается без затруднения, так как границы его уже фактически нанесены при вычерчивании средних сечений.

Форма подболтовых отверстий расчерчивается сначала на верхней поверхности плиты в виде крестообразного профиля и затем вертикально вниз, вдоль оси Z проводят видимые части стенок этих отверстий.

В аксонометрии принято обозначать основные оси разного рода цилиндрических частей и отверстий, вычерчивая их толстой штрихпунктирной линией. Остальные оси симметрии на изометрических видах обычно показывать не принято.

Однако в табл. 43, 44 и 49 сохранены еще и иные осевые линии, чтобы показать последовательный ход построения.

Необходимо также запомнить, что *в аксонометрии не принято изображать части невидимого контура, вычерчиваемые в ортогональных проекциях пунктиром.*

После обводки аксонометрического чертежа все вспомогательные оси и линии построения должны быть удалены.

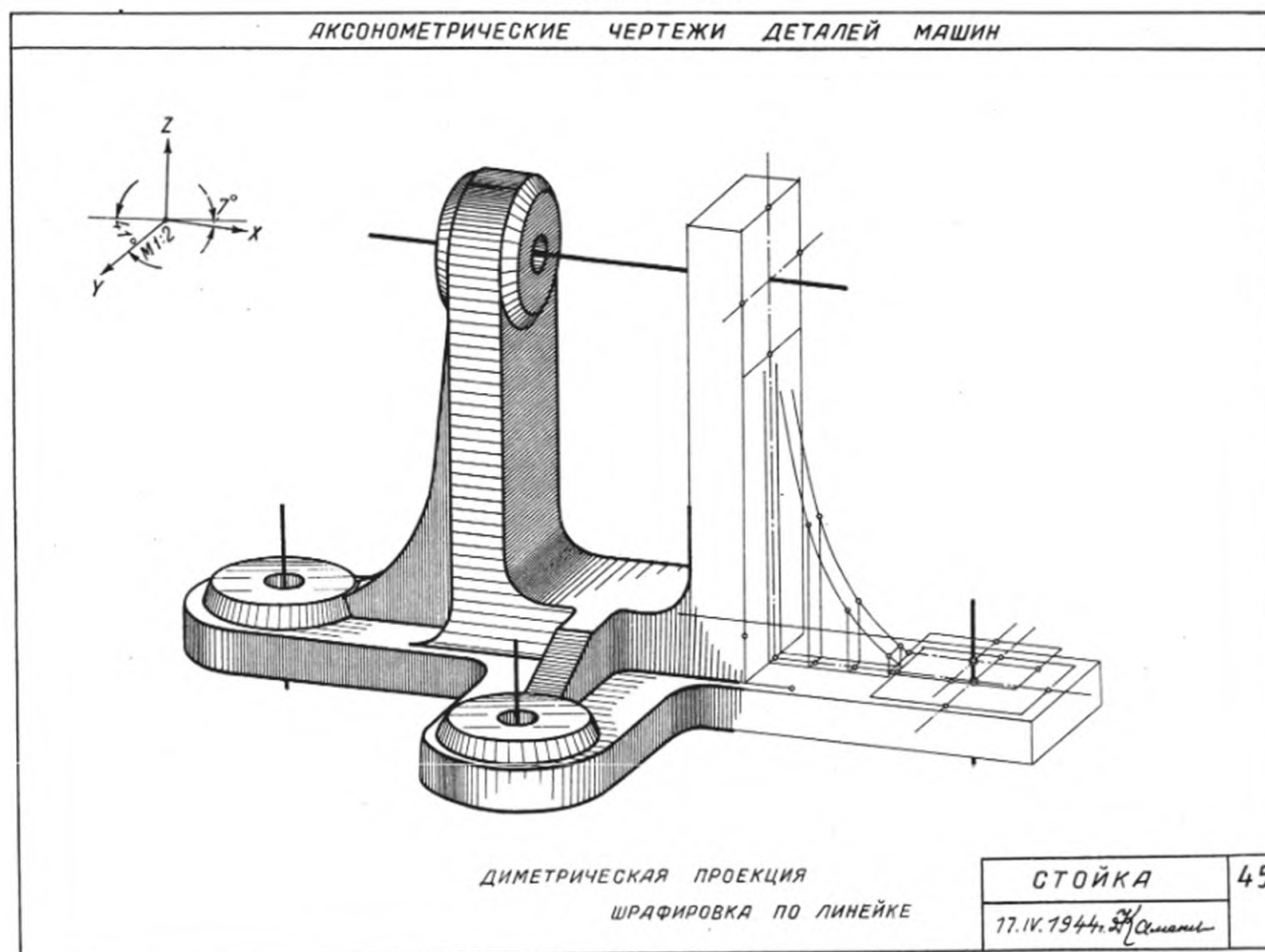
Чертеж стойки (таблицы 45 и 46)

В табл. 45 и 46 начерчена в диметрии стойка, представленная ортогональным чертежом в альбоме «Рабочие машиностроительные чертежи».

В табл. 45 стойка начерчена в диметрической проекции с двойным сокращением по оси Y , а в табл. 46 та же стойка вычерчена в косоугольных диметрических осях. При этом ось высоты Z взята наклоненной под углом 45° к горизонту и по этой оси размеры сокращены в два раза. Таким образом, табл. 46 начерчена, исходя из неизменного плана.

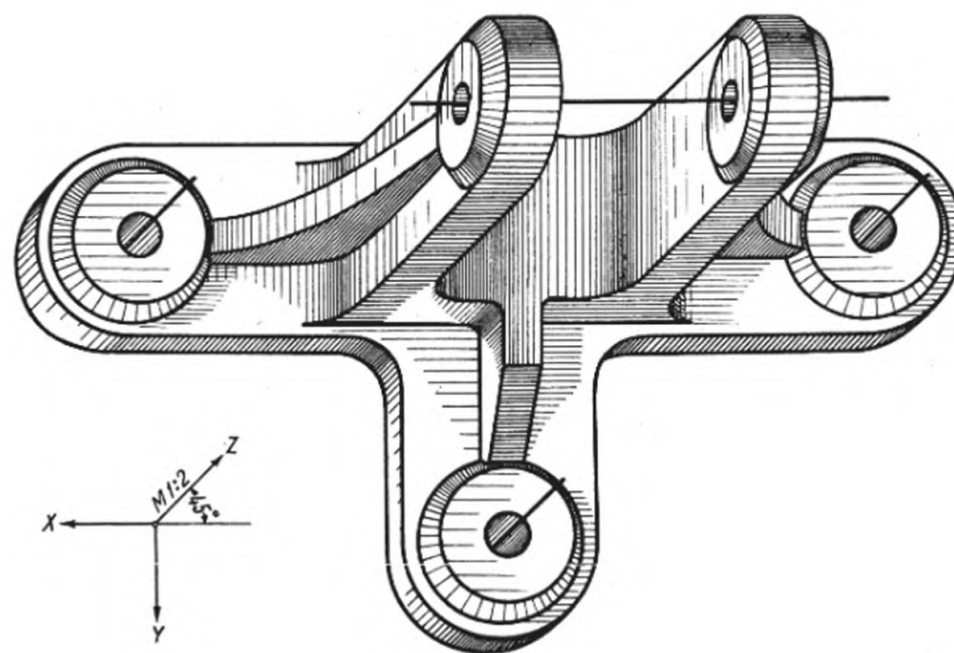
Последнее обстоятельство в данном случае вполне целесообразно применить, так как плита основания содержит много окружностей и закруглений, построение которых в прямоугольной диметрической проекции усложнено их эллипсовидной формой.

Чертеж стойки (1)



Чертеж стойки (2)

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН



КОСОУГОЛЬНАЯ ДИМЕТРИЯ
ШРАФИРОВКА ПО ЛИНЕЙКЕ

СТОЙКА

46

17. IV. 1944. *З. А. А. А.*

В табл. 46 все криволинейные очертания нижней плиты и конических подболтовых приливов очерчены круговым циркулем, что значительно ускоряет и упрощает процесс составления аксонометрического чертежа.

Сравнивая табл. 45 и 46, можно заключить, что диметрическая проекция в табл. 45 яснее передает формы детали, чем косоугольное изображение в табл. 46. Однако и изображение в табл. 46 достаточно наглядно, только деталь кажется изображенной как бы при взгляде на нее сверху.

Способ построения частей стойки показан в табл. 45 справа тонкими линиями. Как видим, предварительно должны быть построены упрощенные прямоугольные очертания частей стойки, и в местах, где должны быть очерчены эллипсы, необходимо построить вспомогательные параллелограммы.

Все построение при этом ведется на осях, расчерченных посередине каждого элемента.

Криволинейная форма подкосного ребра строится по методу координат путем нанесения ряда характерных точек.

Вся разметка производится около осевой линии, проведенной на поверхности, по которой ребро примыкает к опорной плите и к вертикальной проушине.

Чертеж шкива и конической шестерни (таблицы 47 и 53)

В табл. 47 дан шкив, а в табл. 53 — коническая шестерня. Аксонометрия этих деталей составлена по чертежам из альбома «Рабочие машиностроительные чертежи».

При этом шкив начерчен в косоугольных диметрических осях, а для шестерни дано диметрическое изображение в прямоугольных диметрических осях X , Y и Z .

Сравнивая два эти изображения, следует отметить, что по степени наглядности они почти равноценны.

Изображение в косоугольных осях по степени наглядности передачи форм не уступает ортогональному диметрическому изображению.

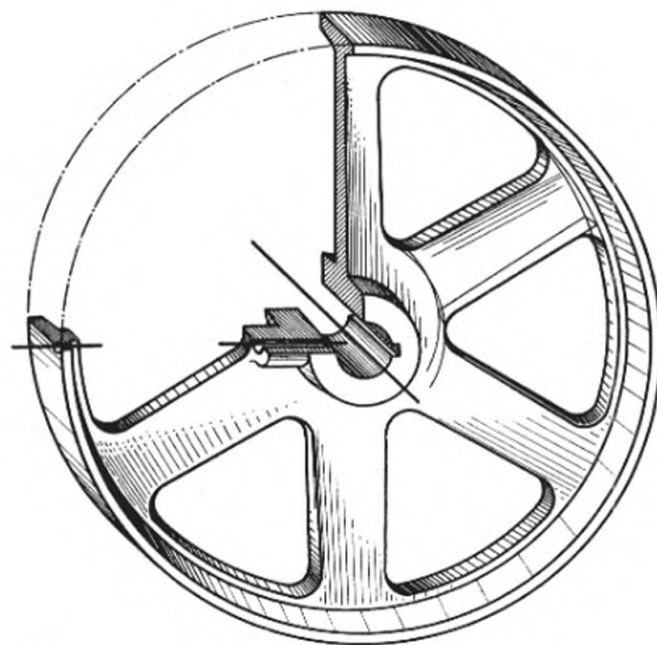
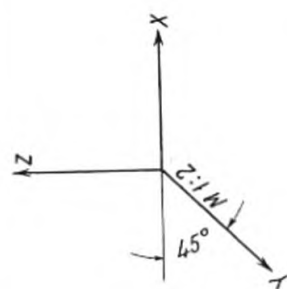
Вместе с тем большим преимуществом левого изображения шкива в косоугольных осях является простота его построения, получающаяся в результате того, что все формы шкива могут быть легко и быстро начерчены круговым циркулем.

На чертеже шестерни в табл. 53 все окружности спроецировались в виде эллипсов.

Для построения эллипсов приходится предварительно строить исходные ромбы (см. тонкие линии), находить характерные точки и соединять их по лекалу. Все эти операции вносят значительные осложнения при вычерчивании прямоугольной диметрии и совершенно отпадают при вычерчивании той же детали в косоугольных диметрических осях.

Чертеж шкива

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН



КОСОУГОЛЬНАЯ ДИМЕТРИЯ
ШРАФИРОВКА ПО ЛИНЕЙКЕ С УТОЛЩЕНИЕМ

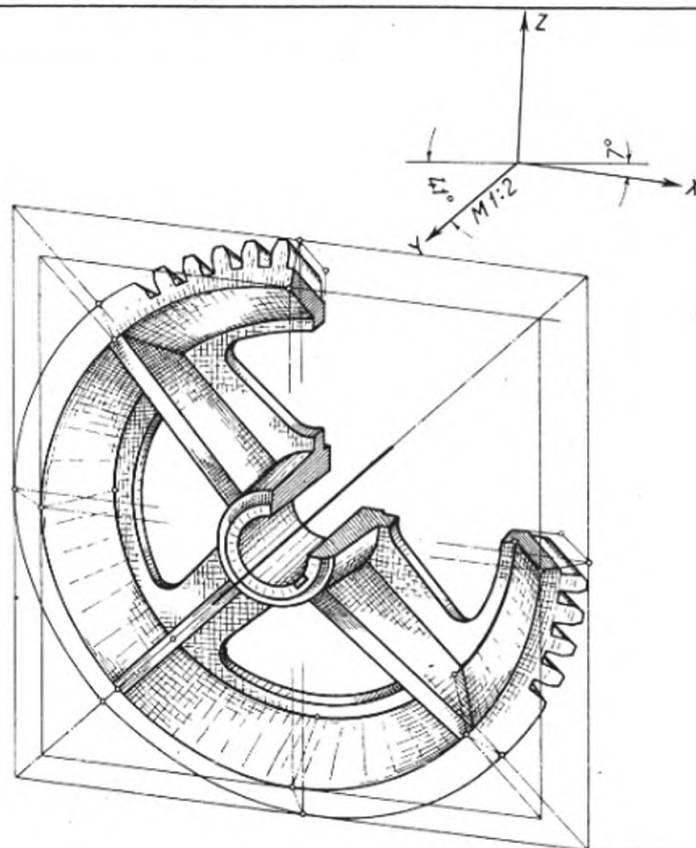
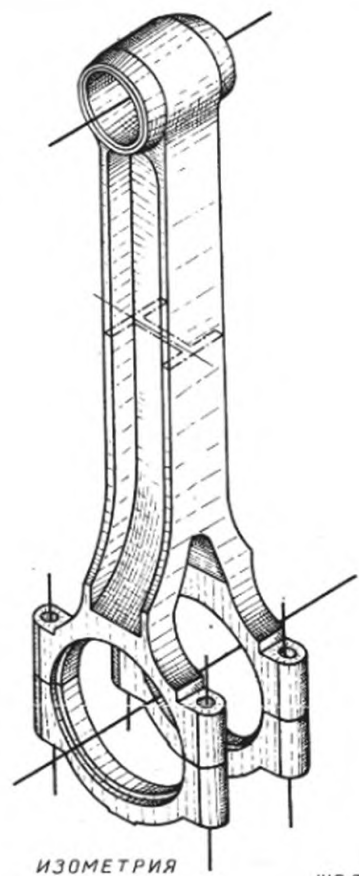
47

ШКИВ

77 НК 1944. 20/01/2014

Чертеж конической шестерни и шатуна

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН



ШРАФИРОВКА СЕТКОЙ ОТ РУКИ

1 ШАТУН
2 ШЕСТЕРНЯ КОНИЧ.
20.IV.1944 *А.С.Майн*

53

Тени на шкиве нанесены штриховкой, а на шестерне — шрафировкой «в сетку».

В табл. 53 справа начерчен изометрический вид шатуна авиационного мотора. Изображение составлено по ортогональному чертежу, взятому из альбома «Рабочие машиностроительные чертежи».

Деталь для изображения в аксонометрических осях является наиболее сложной из всех начерченных раньше.

Однако при правильно сделанной шрафировке контуры этой детали могут быть выявлены чрезвычайно наглядно. Последнее обстоятельство в значительной степени окупает трудности процесса вычерчивания.

Чертеж корпуса и крышки подшипника (таблицы 48 и 50)

На табл. 48 внизу в диметрических осях вычерчен корпус подшипника из альбома «Рабочие машиностроительные чертежи».

Фигура начерчена по общему приему аксонометрических проекций, рассмотренному выше, на табл. 10.

Вычерчивание среднего сечения, рассекающего деталь вдоль по оси X , произведено по способу координат путем нанесения на чертеж ряда характерных точек для криволинейного контура (см. точки $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$).

При обводке найденные точки соединены по лекалу.

Для построения контуров боковых очертаний выступов корпуса подшипника следует учесть их кривизну, выраженную отрезками K и C . Тени на детали нанесены штриховкой.

В табл. 50, сверху, показан диметрический вид крышки подшипника из альбома «Рабочие машиностроительные чертежи».

Чертеж удобнее всего начать с вычерчивания контуров двух средних сечений крышки. Одно из этих сечений делается вдоль оси X , а второе вдоль оси Y .

Криволинейные очертания вписывают в расчерченные предварительно ромбы и параллелограммы.

Эллипсы строят по ряду заранее намеченных характерных точек, которые соединяют затем по лекалу.

Все размеры, идущие вдоль оси Y , сокращают в два раза против исходных.

Начертив наружные очертания, удаляют ненужные линии построения, штрихуют разрезы и шрафируют поверхности, с тем чтобы более наглядно выявить рельеф детали.

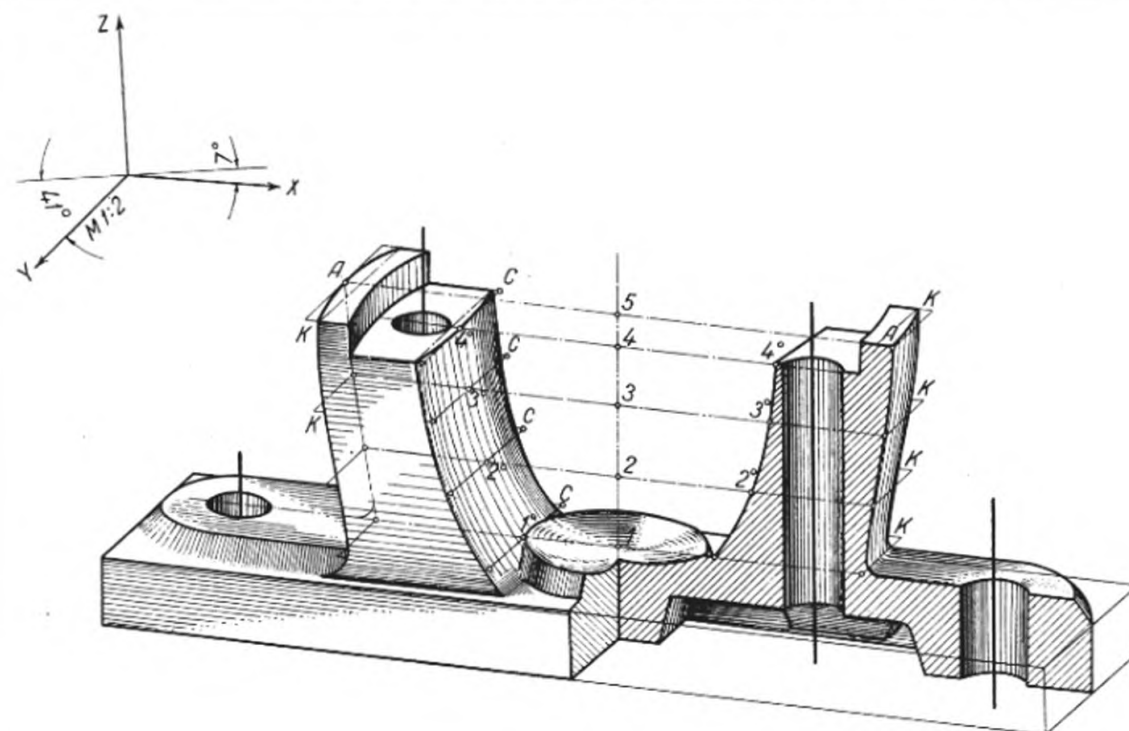
Шрафировка должна быть нанесена в ограниченном количестве.

Шрафировка этой детали также довольно сложна и должна быть исполнена весьма продуманно, иначе может получиться затемнение, а не пояснение форм.

Таблица 48

Чертеж корпуса подшипника

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН



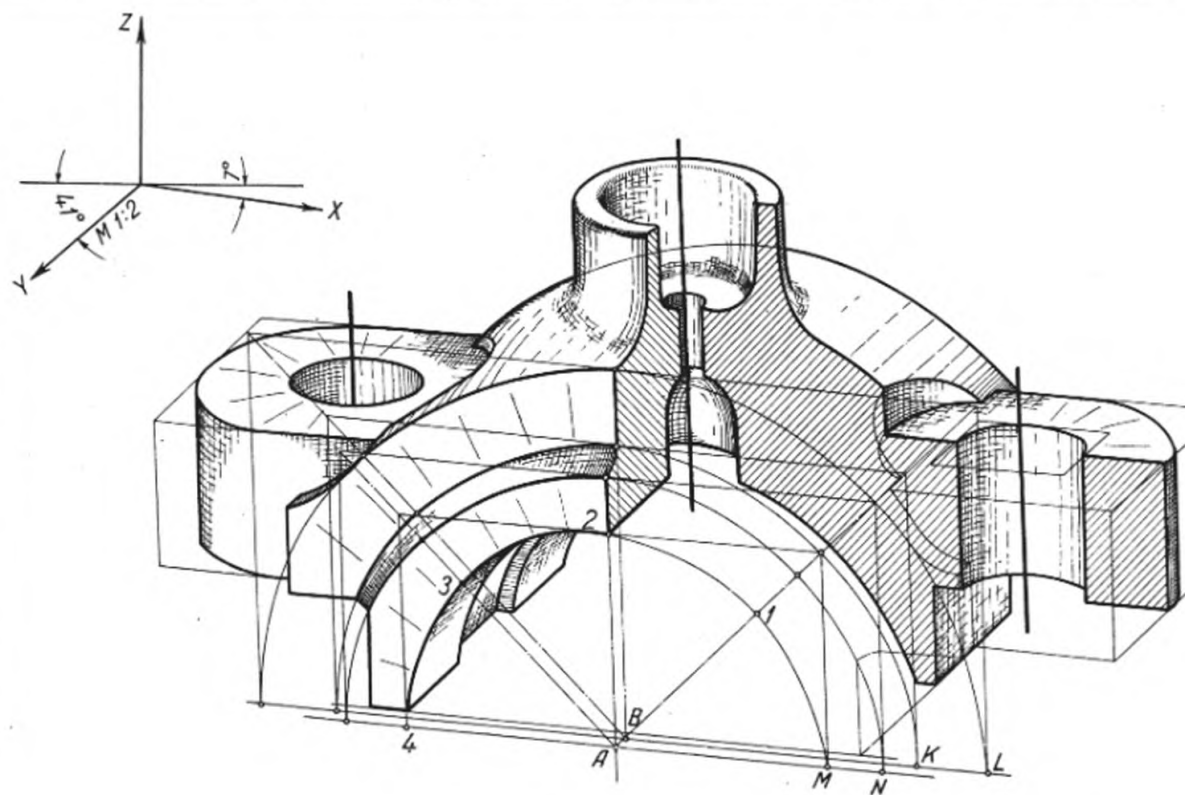
ДИМЕТРИЯ

ШРАФИРОВКА ПО ЛИНЕЙКЕ
С УТОЛЩЕНИЕМ

КОРПУС ПОДШИПНИКА	48
17 IV 1944. <i>А.А.А.</i>	

Чертеж крышки подшипника

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН



ДИМЕТРИЯ

ШРАФИРОВКА СЕТКОЙ ОТ РУКИ

КРЫШКА ПОДШИПНИКА	50
17.10.19.44.24	

Чертеж корпуса задвижки и корпуса проходного вентиля (таблицы 51 и 52)

В табл. 51 и 52 вычерчены аксонометрические изображения корпуса задвижки Лудло и корпуса вентиля. Аксонометрия составлена с ортогональных чертежей, помещенных в альбоме «Рабочие машиностроительные чертежи». Обе детали отличаются значительной сложностью при вычерчивании их в прямоугольных аксонометрических осях. Однако особенности их формы легко, быстро и вполне наглядно могут быть переданы при помощи косоугольной диметрии.

При этом необходимо обдуманно выбрать положение главных осей детали по отношению к аксонометрическим осям. При выборе этого положения решающим моментом является стремление спроецировать большинство круглых форм детали в виде неискаженных окружностей, чтобы эти формы начертить циркулем.

Поэтому целесообразнее всего корпус задвижки и вентиля поставить именно так, как это сделано в табл. 51 и 52, т. е. расположить главную продольную ось детали по оси Y . В этом случае фланцы, болтовые отверстия и внутренние цилиндрические полости могут быть начерчены циркулем, так как они проецируются в виде окружностей. В виде эллипсов спроецируются только болтовые отверстия на верхнем фланце.

Чертеж корпуса инжектора и шатуна авиационного мотора (таблица 54)

В табл. 54 начерчена в диметрии сложная машиностроительная деталь — корпус инжектора. Аксонометрия исполнена по ортогональному чертежу, помещенному в альбоме «Рабочие машиностроительные чертежи».

Деталь состоит из комбинации ряда цилиндрических частей и среднего шарового расширения. Построение осложнено наличием большого количества эллипсов. Вычерчивание форм корпуса инжектора производится по общей схеме.

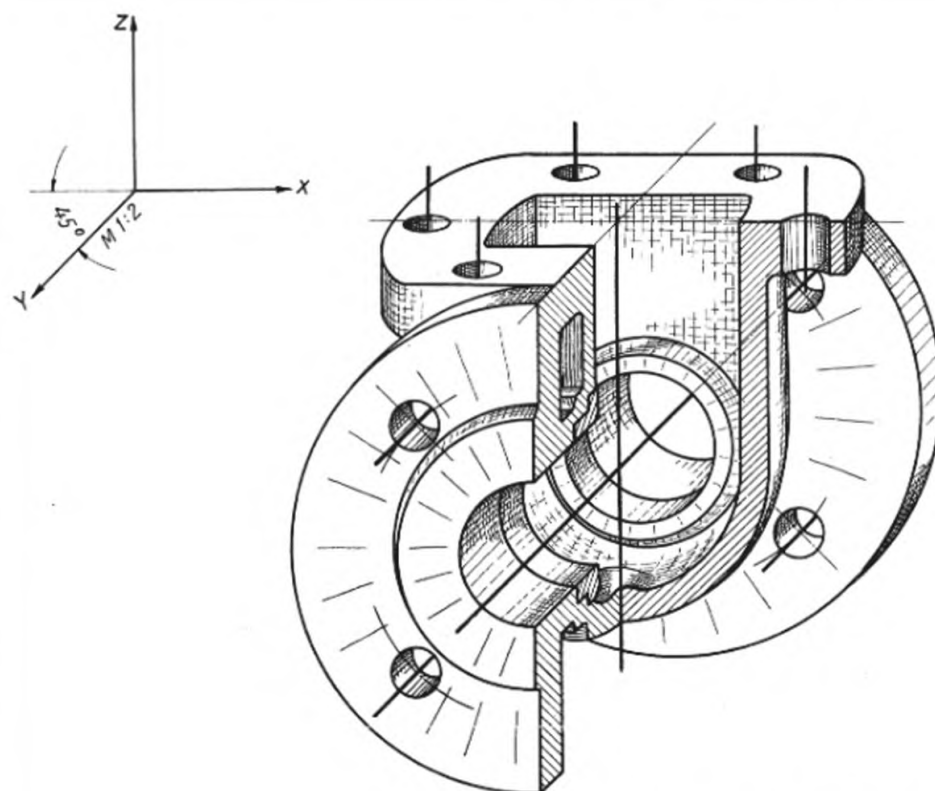
Весь чертеж строится на главных осях симметрии и составляется путем расчленения форм детали на простейшие элементы: цилиндр — шар — призма.

Для построения каждого эллипса предварительно расчерчивают вспомогательные параллелограммы.

Разрез делается по обычным правилам. Необходимо только особо подчеркнуть то обстоятельство, что в аксонометрии разного рода тонкие ребра и перегородки также заштриховываются даже в тех случаях, если секущая плоскость перерезает эти ребра вдоль. Например, слева вверху на разрезе дана рассеченной проушина, которую в ортогональном чертеже мы оставили без заштриховки (см. альбом «Рабочие машиностроительные чертежи»).

Чертеж корпуса задвижки

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

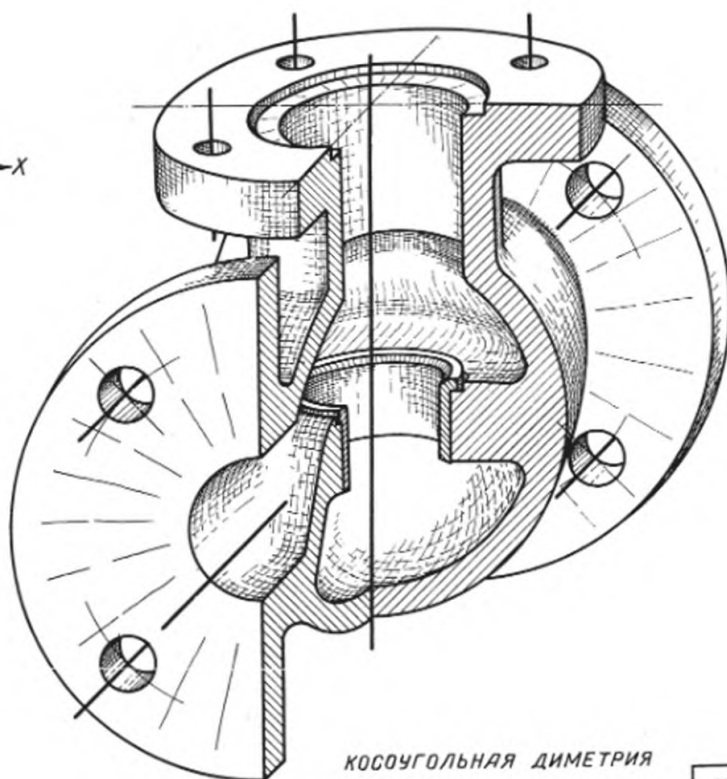
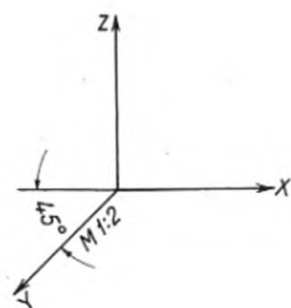


КОСОУГОЛЬНАЯ ДИМЕТРИЯ
ШРАФИРОВКА СЕТКОЙ ОТ РУКИ

КОРПУС ЗАДВИЖКИ	51
18.11.1944 <i>Росин</i>	

Чертеж корпуса вентиля

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

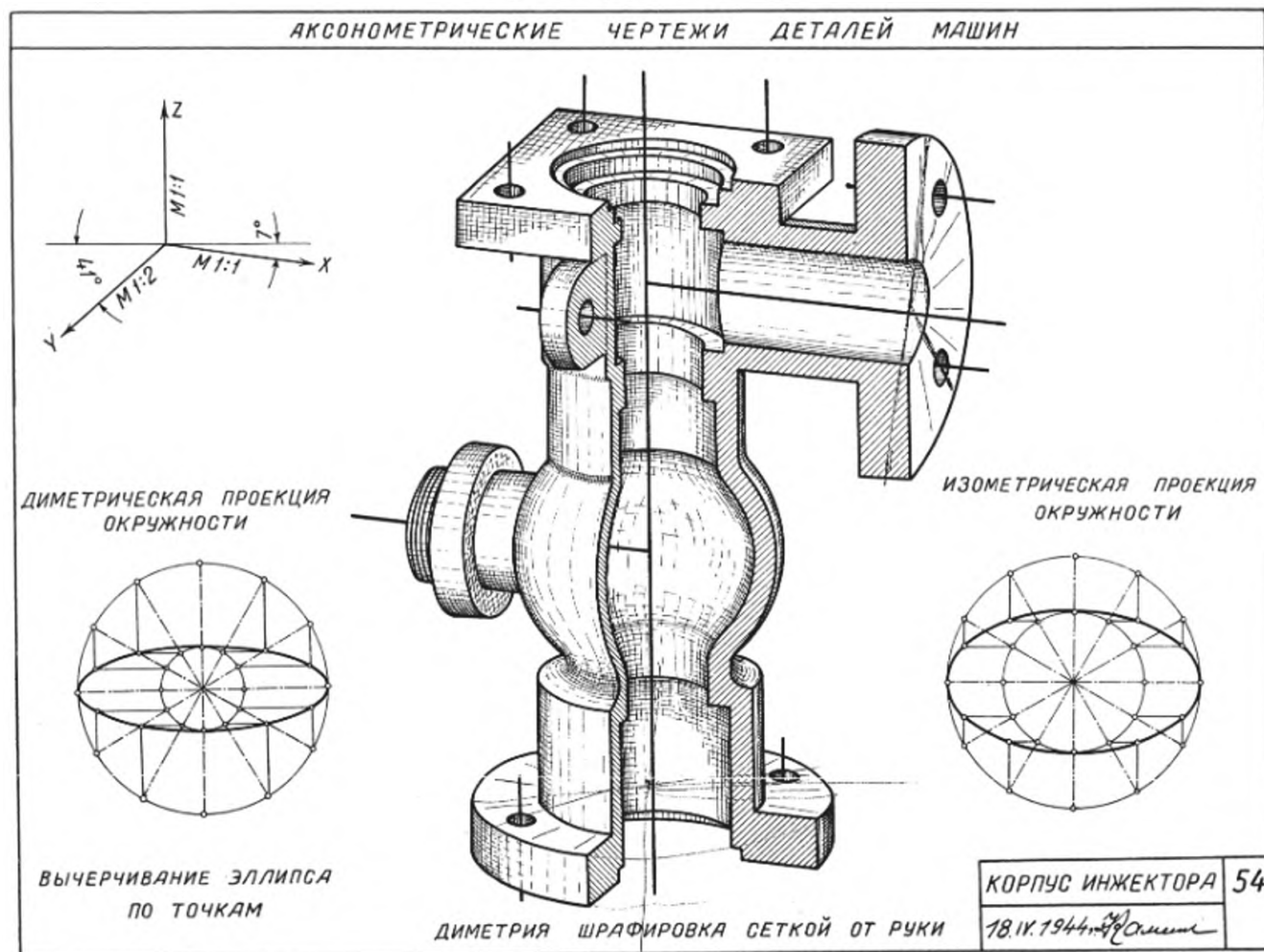


КОСОУГОЛЬНАЯ ДИМЕТРИЯ

ШРАФИРОВКА СЕТКОЙ ОТ РУКИ

КОРПУС ВЕНТИЛЯ	52
18.IX.1944	Ж.С.Менделеев

Чертеж корпуса инжектора



Сборочные чертежи, исполненные в аксонометрической проекции (таблицы 55—58)

В табл. 55 дано диметрическое изображение слесарных тисков в собранном виде. Чертеж выполнен по эскизам табл. 63.

В табл. 56 дан аксонометрический вид ролика, предназначенного для натяжения приводного ремня. Изображение исполнено в косоугольной диметрической проекции. Все размеры частей ролика взяты из альбома «Рабочие машиностроительные чертежи», ч. II.

В табл. 57 дано изометрическое изображение поршневого дышла товарного паровоза. Аксонометрия составлена с проектного (ортогонального) чертежа этого дышла.

Аксонометрия трубопроводных сетей (таблица 59)

Трубопроводные сети водопроводно-канализационных и паровых установок отличаются значительной сложностью своего устройства. Сложность заключается в наличии большого количества разветвлений сети.

Ортогональный чертеж трубопроводной сети совершенно не нагляден, поэтому неудобен для практического использования.

Разводку труб обычно производят, следуя контурам стен здания, в котором осуществляется трубопроводная сеть. Вследствие этого при ортогональном способе составления чертежа значительная часть труб проецируется заслоненной впереди идущими трубами.

Наиболее удобным способом изображения трубопроводной сети является способ аксонометрического проецирования. Этот способ дает наглядную картину устройства трубопроводной сети. При составлении труб проводных схем используются все виды аксонометрического проецирования. Однако наиболее удобными осями для данного случая следует считать косоугольные диметрические, а также изометрические оси.

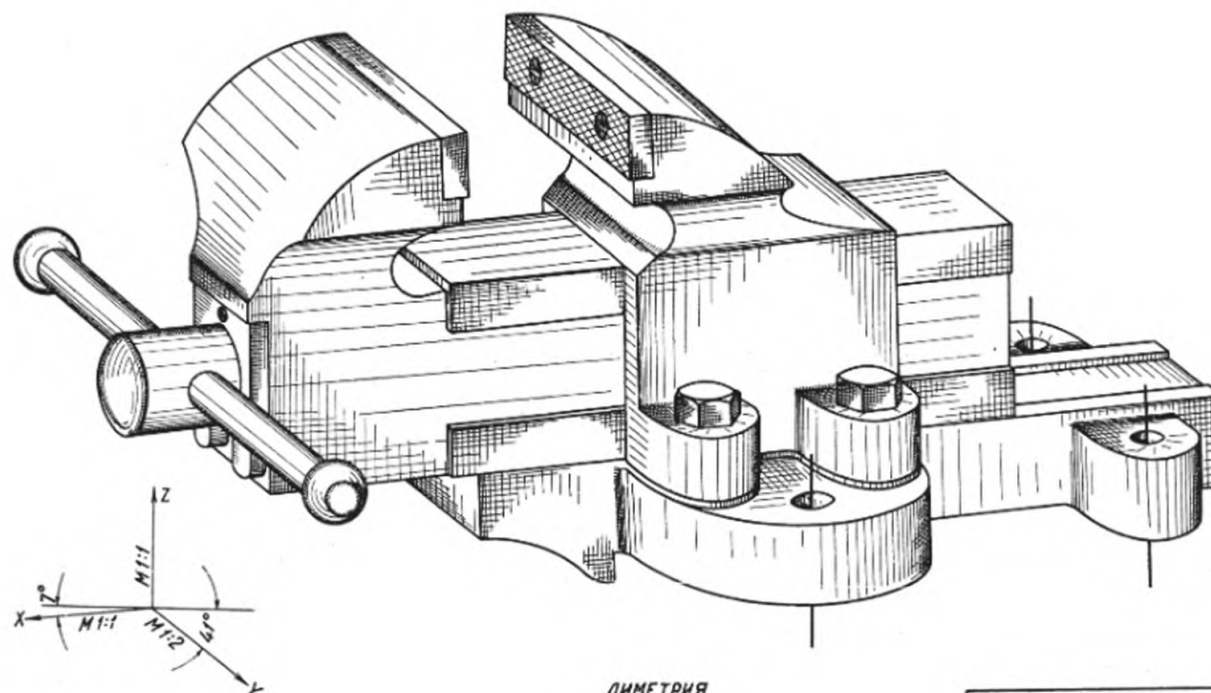
Применять прямоугольные диметрические оси не следует, так как никакого преимущества от их применения не получим, а проведение линий параллельно этим осям затруднено и не может быть сделано по треугольнику, наложенному на рейсшину.

Составляя аксонометрическую схему трубопроводной сети, нужно так расположить все линии труб, чтобы добиться максимальной наглядности изображения. Чтобы иметь возможность правильно выполнить монтаж сети, необходимо на схеме проставить все размеры отдельных звеньев этой сети. Кроме того, на схеме должны быть показаны все обслуживающие регулировочные и запорные устройства (вентили, краны, задвижки) и обязательно должен быть отмечен диаметр труб.

На фиг. 1 табл. 59 дана схема ответвления от водопроводной магистрали. Схема составлена в осях косоугольной диметрии, почти все трубы собраны на раструбных соединениях, что отмечено полукругами.

Чертеж слесарных тисков

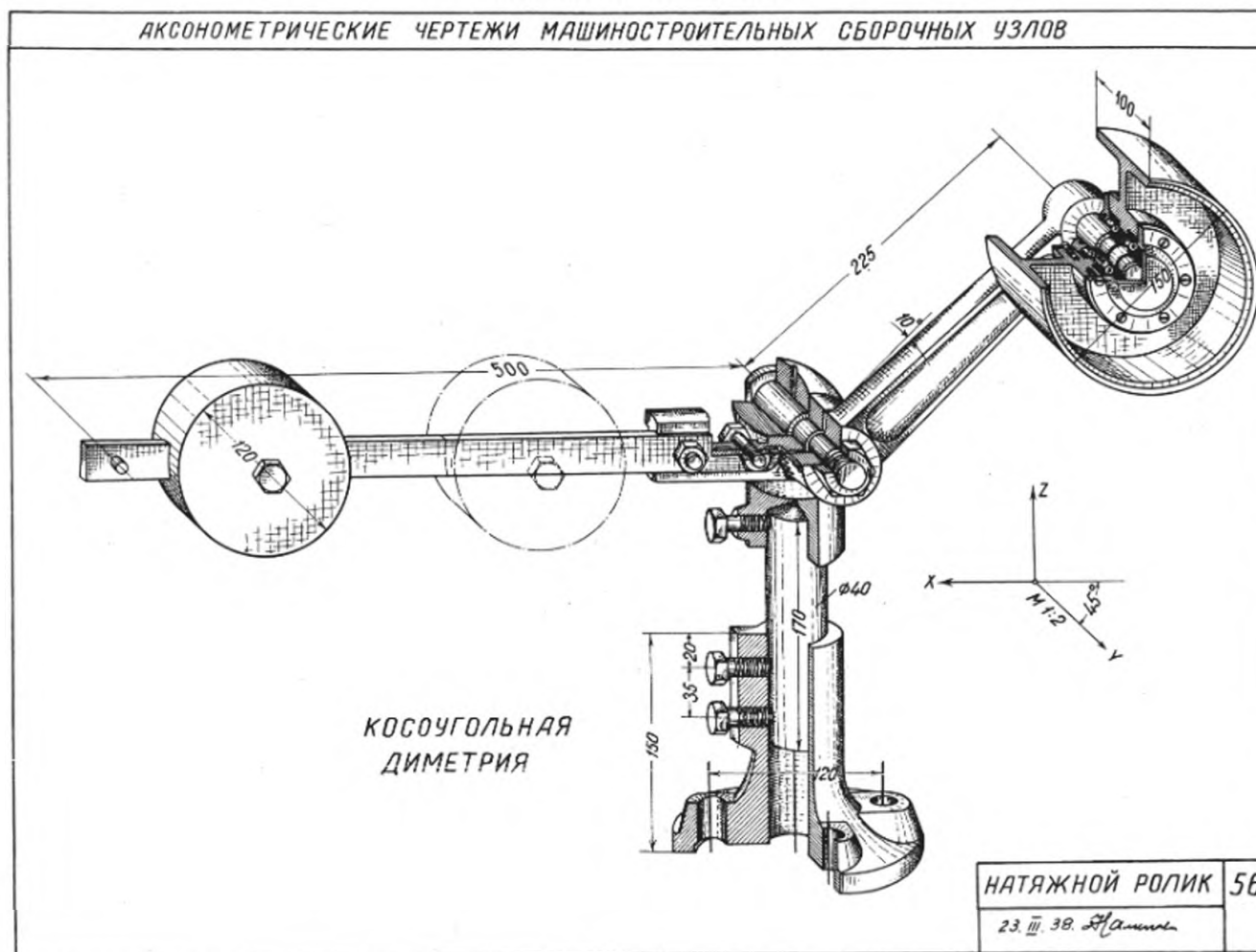
АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ СБОРОЧНЫХ УЗЛОВ



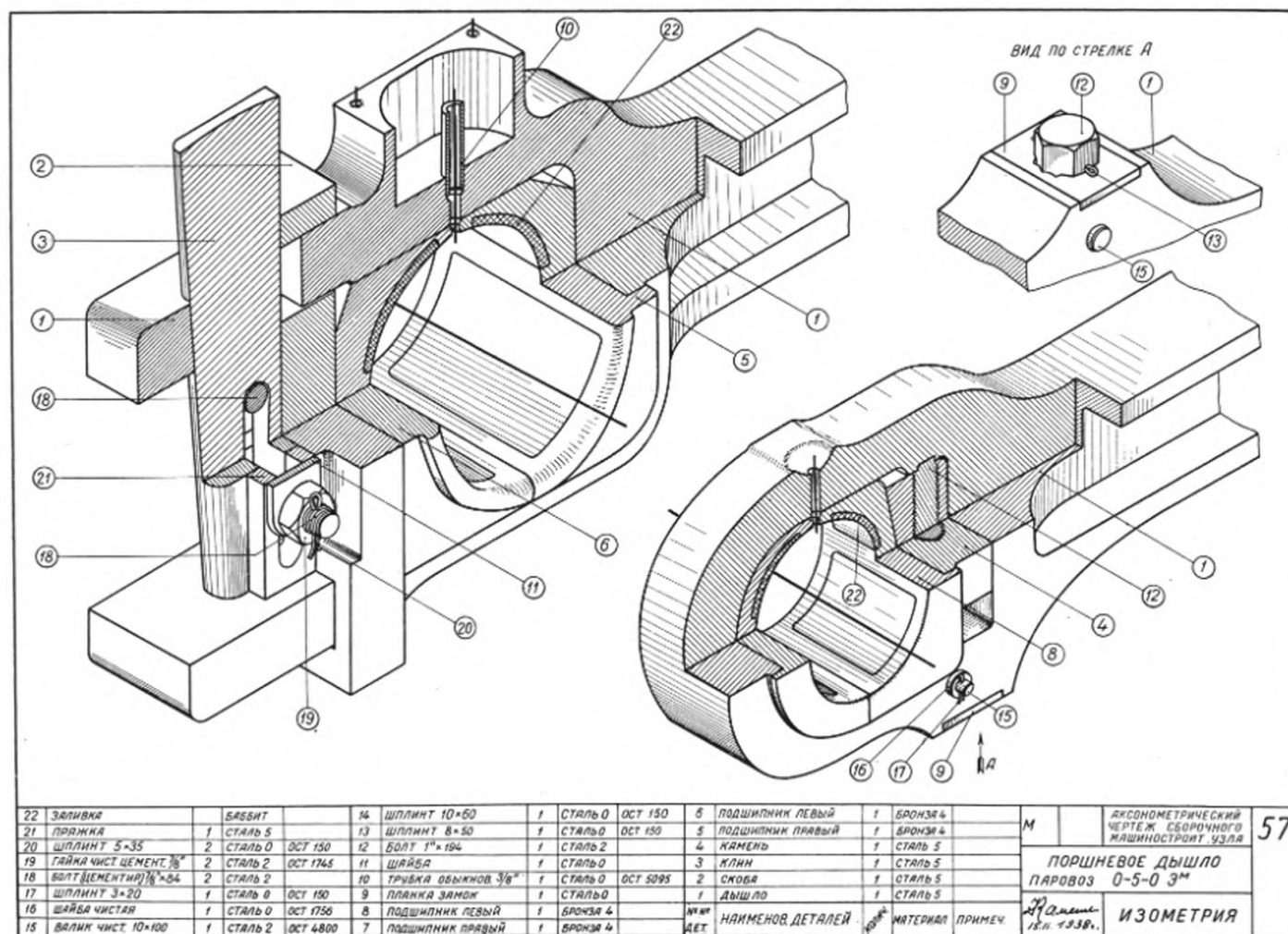
ТИСКИ СЛЕСАРНЫЕ	55
22.11.38. <i>Г.А.Александров</i>	

Таблица 56

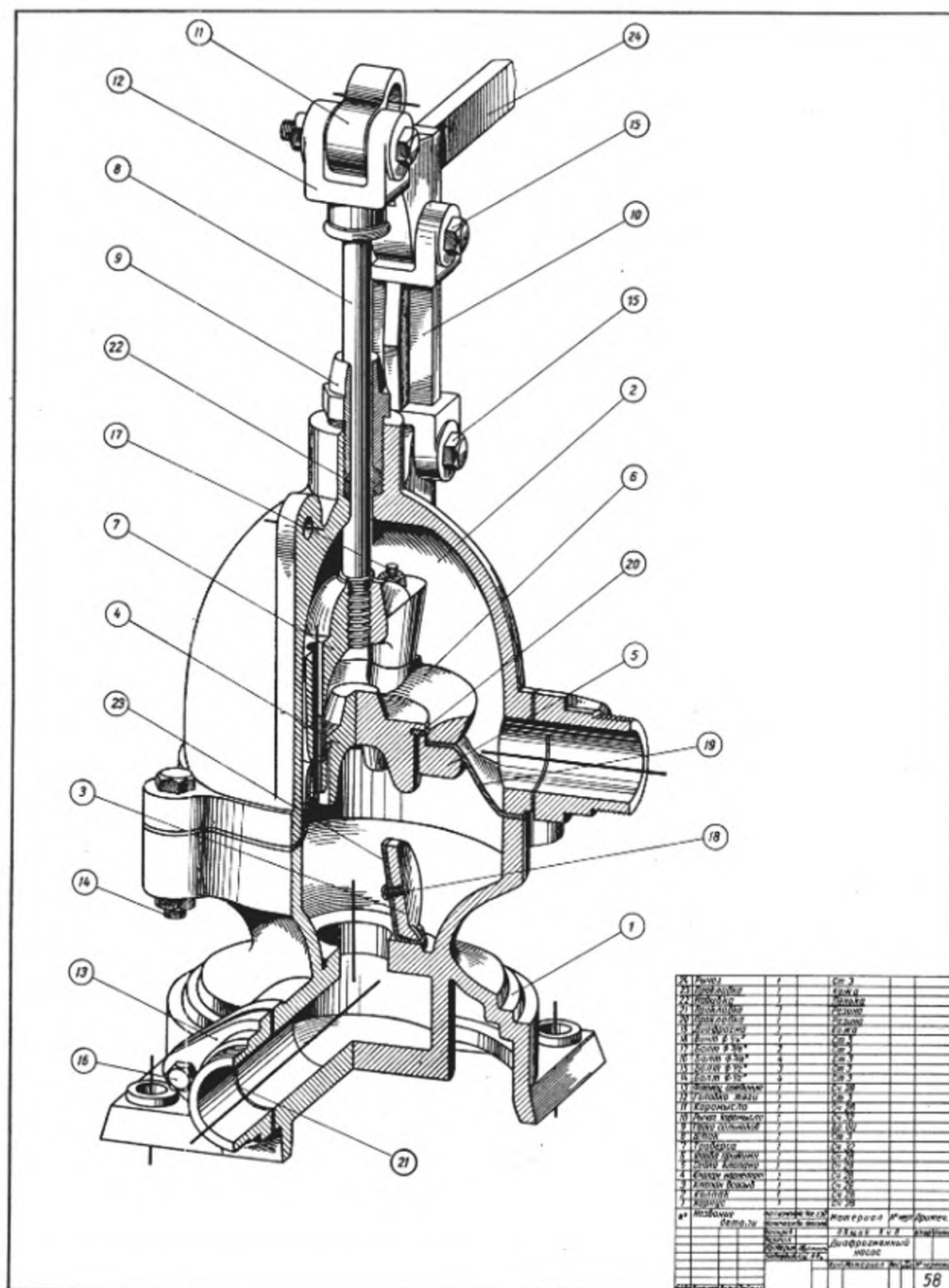
Чертеж натяжного ролика



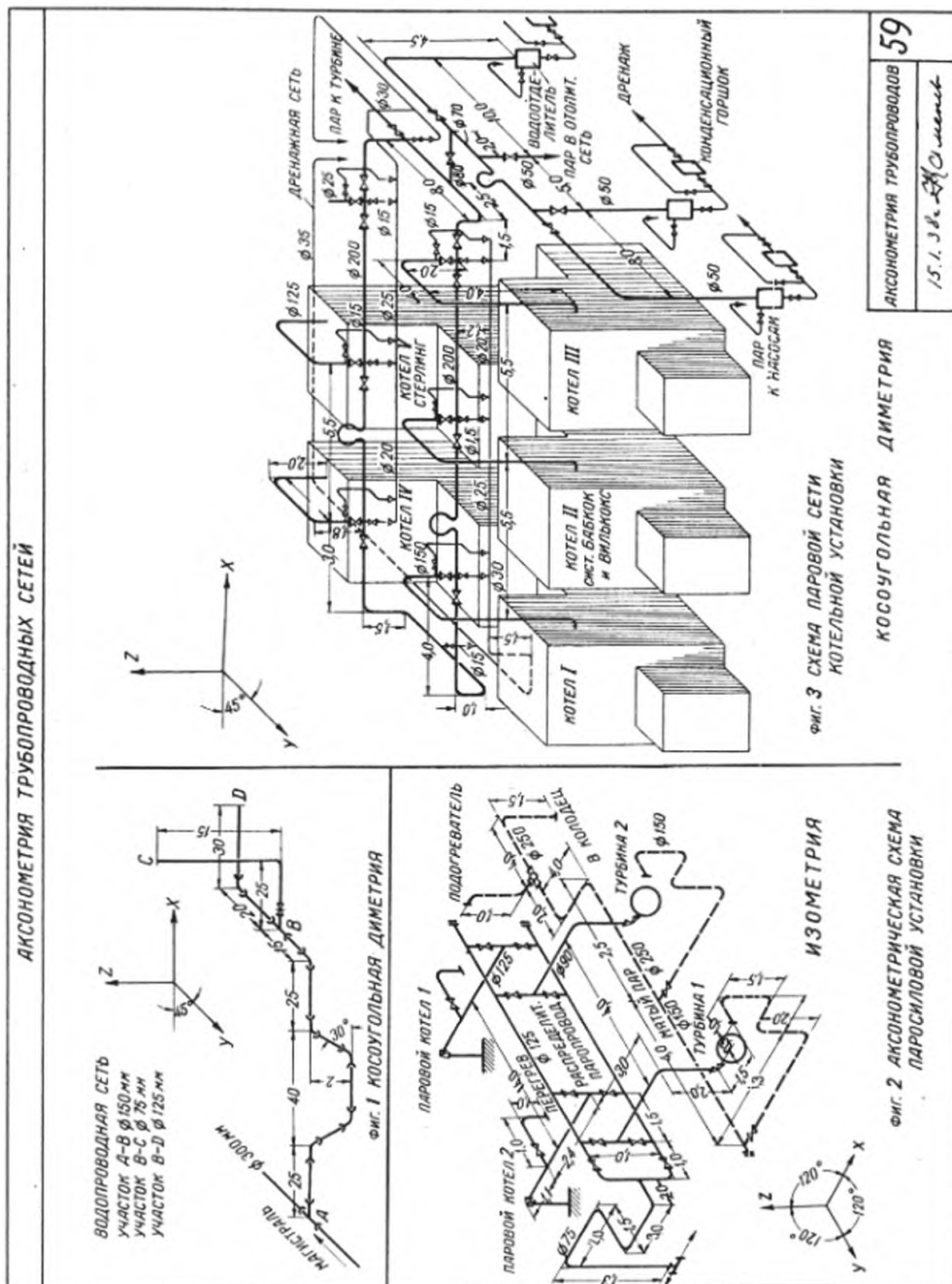
Чертеж поршневого дышла товарного паровоза



Чертеж диафрагменного насоса



Аксонометрия трубопроводных сетей



Перед ответвлением к пункту потребления *O* поставлена задвижка. Все необходимые размеры элементов сети по длине отмечены на схеме цифровыми размерами. Диаметры труб на отдельных участках сети выписаны сверху. Размеры даны в метрах.

По осям *X* и *Y* размеры частей сети отложены в масштабе 1 к 100, а по оси *Z* выбран произвольный масштаб исключительно из-за необходимости придать чертежу наибольшую наглядность. Если бы по оси *Z* выбрать тот же масштаб сокращений, равный 1 к 100, как и по осям *X* и *Y*, то изгиб труб вниз на величину 2 м выразился бы величиной, равной всего 2 мм, что не дало бы нужной наглядности схеме.

На фиг. 2 дана аксонометрическая схема паропроводной сети силовой установки. Схема составлена в изометрических осях. Искажение размеров по осям сделано совершенно произвольным (триметрически), исключительно учитывая интересы наглядности схемы (см., например, внизу схемы два размера трубы, идущей вдоль оси *X*, размеры 1,3 и 1,2 м).

Размер 1,3 м на схеме дан в три раза большим, чем размер 1,2 м. То же самое следует сказать и об искажениях по другим осям, т. е. по осям *Y* и *Z*.

Схема по фиг. 2 состоит из двух совершенно независимых частей: 1) схемы для рабочего пара и 2) схемы для отработавшего, так называемого мятого пара.

Пар вырабатывается двумя котлами (см. вверху надпись «паровой котел 1» и «паровой котел 2») и поступает в распределительное кольцо, имеющее большое количество регулировочных приспособлений — вентилей. От распределительного кольца пар подводится к трем точкам потребления — слева к насосам и спереди к двум паровым турбинам. Пар, отработавший в турбинах, отводится по особой сети, отмеченной пунктиром, и через трехходовой вентиль поступает к подогревателю или направляется в колодец.

На фиг. 3 дана схема мощной котельной установки порядка районной станции. Установка состоит из пяти паровых котлов. При этом на случай расширения оставлено место для установки шестого котла.

Трубопроводная схема состоит из двух самостоятельных сетей — паровой и дренажной. Дренажная сеть предназначена для выпуска конденсационной воды из паровой сети.

Все пять рабочих котлов присоединены к замкнутому трубопроводному кольцу.

Присоединение и отсоединение того или иного котла производится при помощи вентилей, поставленных с таким расчетом, чтобы можно было делать отсоединение котла без нарушения правильности работы остальных.

На распределительном кольце поставлены изогнутые трубы, по форме напоминающие лиру. Эти трубы называются компенсаторами. Компенсаторы всегда ставятся на паропроводных сетях с целью локализовать действие температурных удлинений труб.

Выработанный котлами пар отводится к трем точкам потребления: 1) к рабочим турбинам, 2) в отопительную сеть и 3) к насосам, обслуживающим котельную установку.

Вода, конденсирующаяся на стенках трубопровода, а также содержащаяся в паре во взвешенном состоянии, отводится из сети двумя путями: или через специально устроенную дренажную сеть, или через специальные водоулавливающие приборы — водоотделители или конденсационные горшки.

Дренажная сеть состоит из газовых трубок малого диаметра (15—30 мм) и расположена непосредственно под магистральным кольцом паровых труб. Конденсирующаяся вода выпускается в дренажную сеть с помощью особых вентилей, поставленных на дренажных отводах. Водоотделители и конденсационные горшки поставлены в наиболее низких точках сети, что способствует правильности их работы.

Сеть вычерчена в осях косоугольной диметрии. Размеры элементов сети сокращены по всем трем осям пропорционально (изометрически).

Область применения аксонометрии в строительном деле (таблица 60)

Преимущества аксонометрических проекций получили особо широкое применение в инженерно-строительном и архитектурном искусстве. При посредстве аксонометрических проекций иллюстрируются обычно общие виды (фасады) проектируемых сооружений.

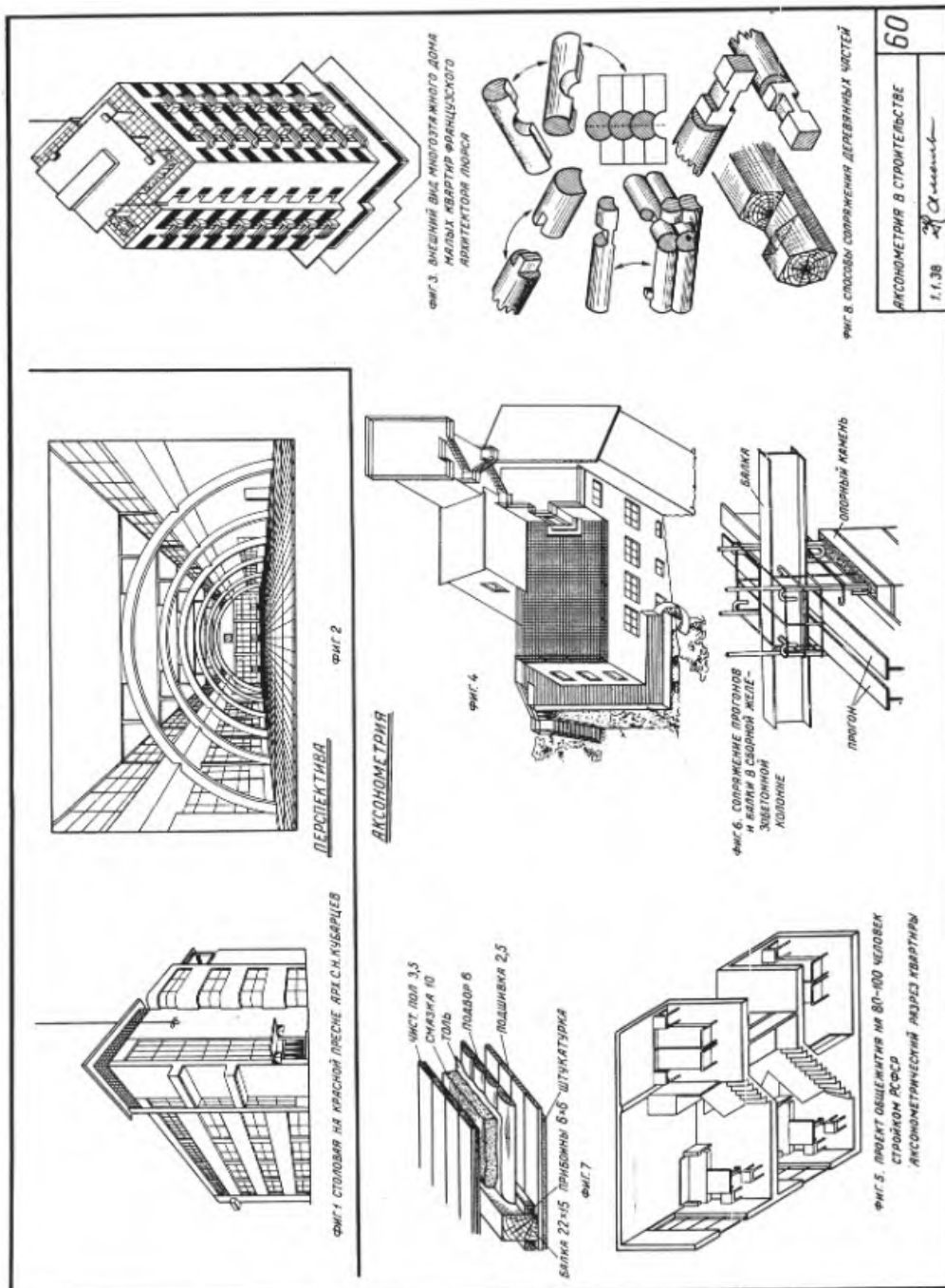
Однако область применения аксонометрии в строительстве не ограничивается только показом наружных форм сооружений. При посредстве эскизных аксонометрических зарисовок разрабатывается также и внутреннее устройство возводимых зданий и сооружений.

В строительстве аксонометрические эскизы широко применяют для показа конструкций разного рода перекрытий, сложных узлов, врубок, частей железобетонных конструкций и т. п.

Наряду с аксонометрией в строительстве используют и другой способ наглядных изображений, родственной аксонометрии, который, однако, не следует смешивать с чистой аксонометрией. Этот способ изображений носит название изображений перспективных. Различие перспективных изображений от изображений аксонометрических может быть легко показано на ряде примеров (табл. 60).

Слева вверху дан перспективный вид здания с его наружных, фасадных, сторон (см. слева) и перспектива внутреннего устройства большого зала производственного здания.

Аксенометрия в строительстве



АКСЕНОМЕТРИЯ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ	60
1.1.38	28.01.1988

Основным отличием перспективы от аксонометрии является постепенное уменьшение размеров частей стройки, удаляющихся от зрителя.

Таким образом, в перспективе все удаляющиеся от зрителя линии представляются сходящимися в одну точку (точка схода).

Однако кажущееся уменьшение удаляющихся предметов и схождение параллельных линий в одну отдаленную точку не только не создает неправильного представления о виде сооружения, но, наоборот, является очень наглядным и привычным для нашего глаза, так как соответствует истинной картине вещей.

Вглядимся внимательно в удаляющиеся рельсы, и мы заметим, что эти рельсы представляются нашему глазу сходящимися в одну отдаленную точку; посмотрим на линию телеграфных столбов, и мы увидим, что удаляющиеся столбы уменьшаются постепенно по своей высоте; вспомним вид зданий, расположенных вдоль улицы. Во всех этих случаях мы уловим перспективу.

Из предыдущей части курса известно, что в аксонометрии, наоборот, все линии, даже и удаляющиеся, проецируются всегда параллельно своим осям координат. Поэтому наряду с перспективой в строительстве в той же мере полно используют и аксонометрические изображения.

Из аксонометрических проекций (осевых) в строительстве наибольшее распространение имеют проекции изометрические и косоугольные. Прямоугольная диметрия в строительстве почти не применяется, вместо нее применяют перспективу.

Однако известно, что построение аксонометрического вида значительно сложнее процесса вычерчивания ортогонального чертежа. Способы построения перспективных изображений отличаются еще большей степенью сложности.

Из косоугольных аксонометрических координатных осей большей частью используют оси, в которых построение производится от неизменного плана сооружения.

В табл. 60, в левом нижнем углу (см. фиг. 5), начерчен аксонометрический вид жилой квартиры в разрезе. Все построение сделано, исходя от начерченного ранее плана. Ось X направлена горизонтально, ось Y — вертикально, а ось Z отклонена влево под углом 45° .

В середине листа (см. фиг. 4) начерчен наружный вид здания, также представленного в косоугольных осях, где за основу был принят неизменный план. Здесь оси X и Y такие же, но ось Z отклонена не влево, как в предыдущем случае, а вправо. Таким образом, оба изображения даны в тех же осях, что и в табл. 46. Отличие заключается только в том, что здесь размеры по всем трем осям X , Y и Z отложены с одинаковыми уменьшениями, а на фиг. табл. 46 уменьшение по оси Z взято двойное.

В правом верхнем углу листа (см. фиг. 3) табл. 60 начерчен наружный вид многоэтажного дома. Проекция также начерчена с сохранением форм всех поверхностей, параллельных плану, однако здание повернуто углом вперед, и ось Z поставлена вертикально.

На фиг. 6 и 7 табл. 60, кроме того, в косоугольных, фронтальных осях начерчен вид междуэтажного перекрытия и узла железобетонной конструкции.

В правом нижнем углу на фиг. 8 начерчены в изометрических и в диметрических осях врубki деревянных стен здания.

АксонOMETрическое скицирование (таблицы 61—64)

Выше было подчеркнуто, что изучение способов построения аксонометрических видов необходимо для того, чтобы научиться делать беглые зарисовки деталей машин и сооружений от руки. Каждый изучающий теорию курса аксонометрических проекций должен ставить перед собой конечной целью научиться делать свободные зарисовки от руки деталей и сборок по типу чертежей, приведенных на табл. 61—64.

Также было подчеркнуто, что эти зарисовки широко используются в проектировочно-конструкторской практике, в строительном и монтажном деле.

АксонOMETрический эскиз, подобно ортогональному, отличается от обычного аксонометрического чертежа только тем, что построение такого эскиза ведется без применения чертежных инструментов, т. е. исключительно от руки карандашом или пером.

Все пропорции детали при аксонометрическом скицировании выдерживаются исключительно на глаз, без всякого обмера.

Машиностроительные эскизы по преимуществу вычерчиваются в диметрической проекции, потому что в большинстве случаев диметрическая проекция дает наиболее наглядное и естественное изображение вычерчиваемого предмета.

Так как работа производится исключительно от руки, т. е. без линейки и циркуля, то при составлении аксонометрических эскизов преимущества косоугольной диметрии совершенно отпадают.

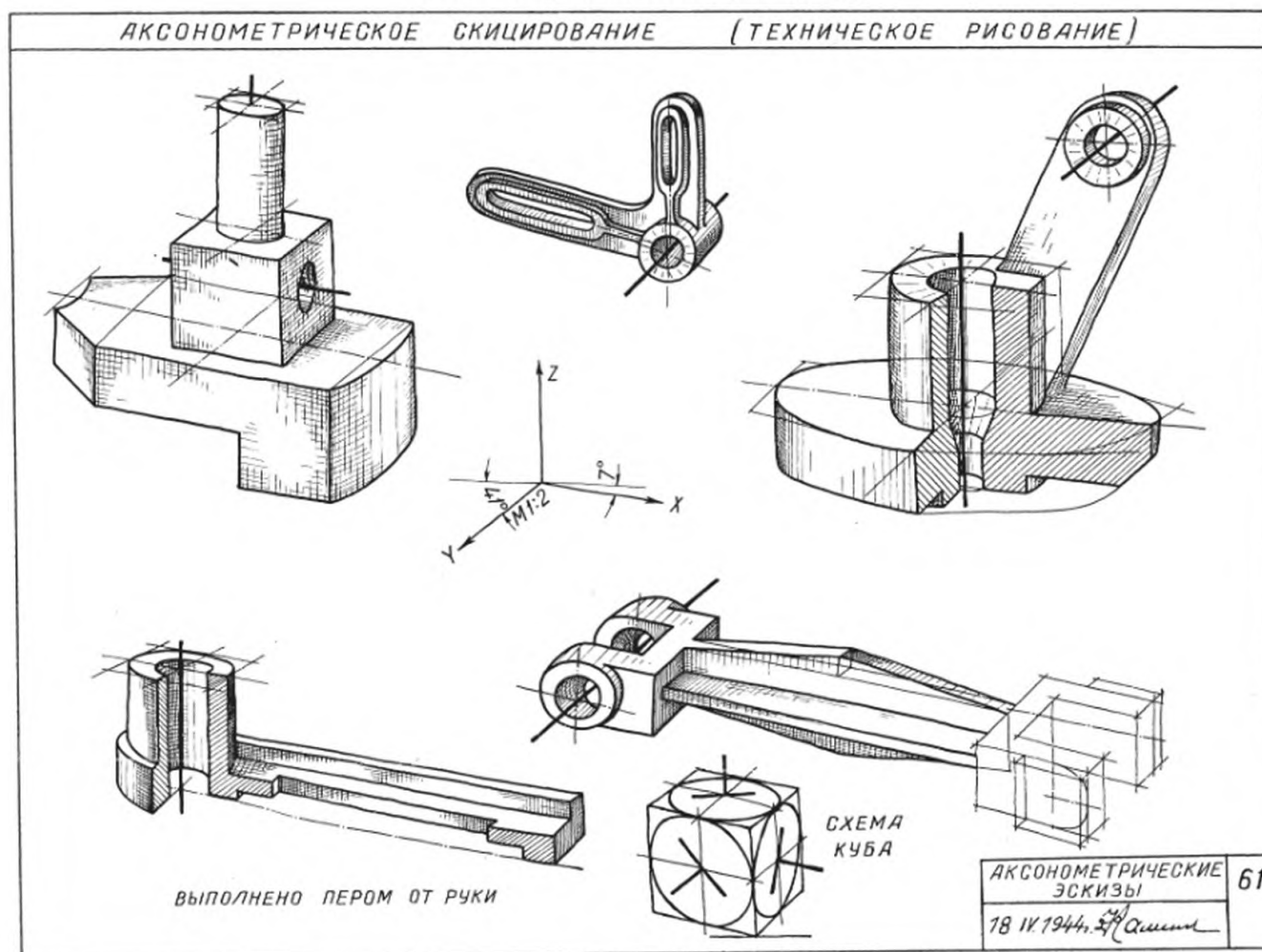
Преимущества изометрических эскизов также незначительны.

Все перечисленные соображения вполне оправдывают предпочтение, отдаваемое диметрии при скицировании.

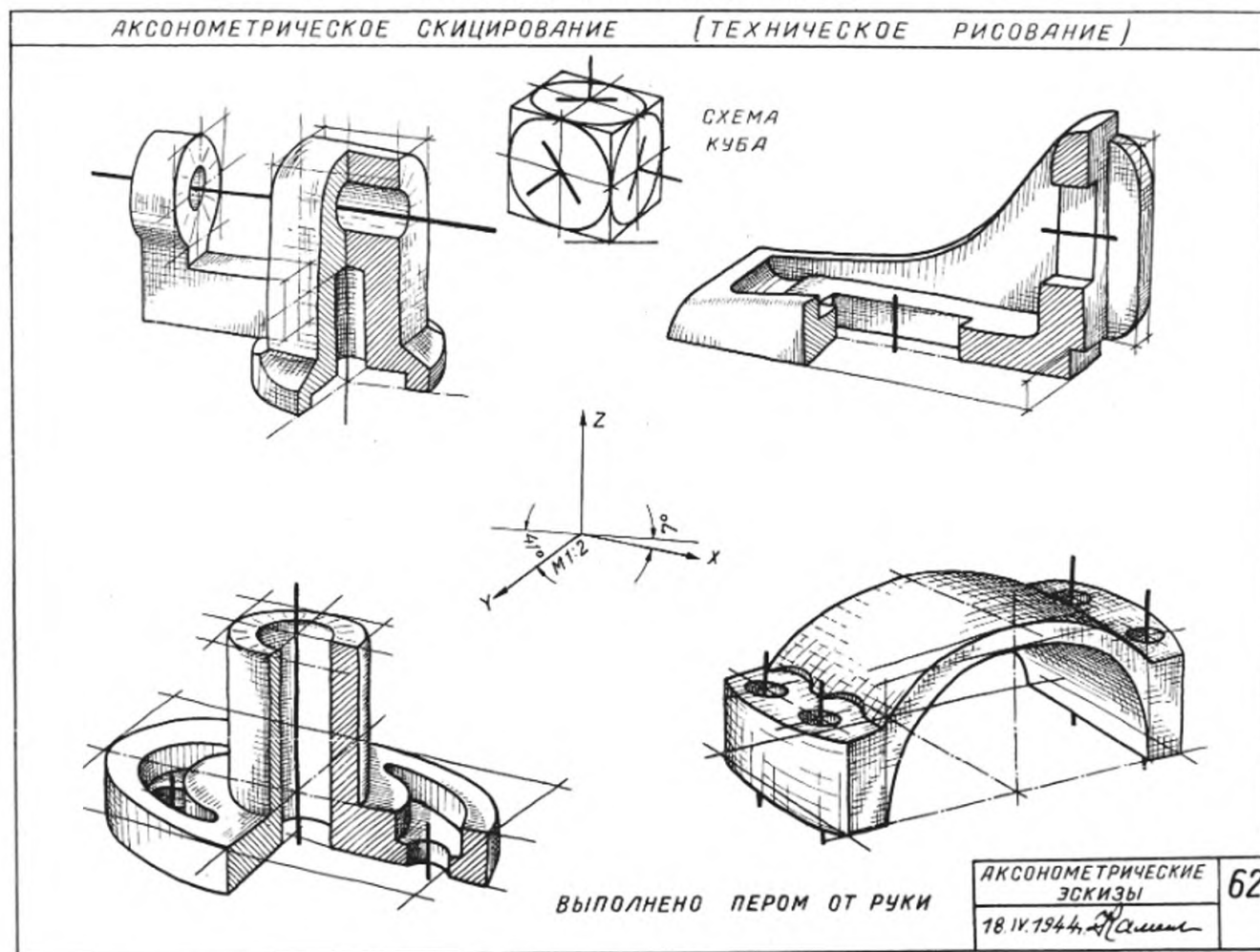
Перед составлением эскиза следует прежде всего начертить диметрические оси. Способ построения этих осей показан в табл. 33. Начинаящим рекомендуется основные оси построить по линейке. Лица, имеющие уже достаточный опыт и выработавшие в себе глазомер и чувство пропорций, построение диметрических осей производят бегло, на глаз.

Во всем остальном порядок и способ составления аксонометрического эскиза ни в чем не отличается от составления аксонометрического чертежа.

АксонOMETрическое скицирование (1)

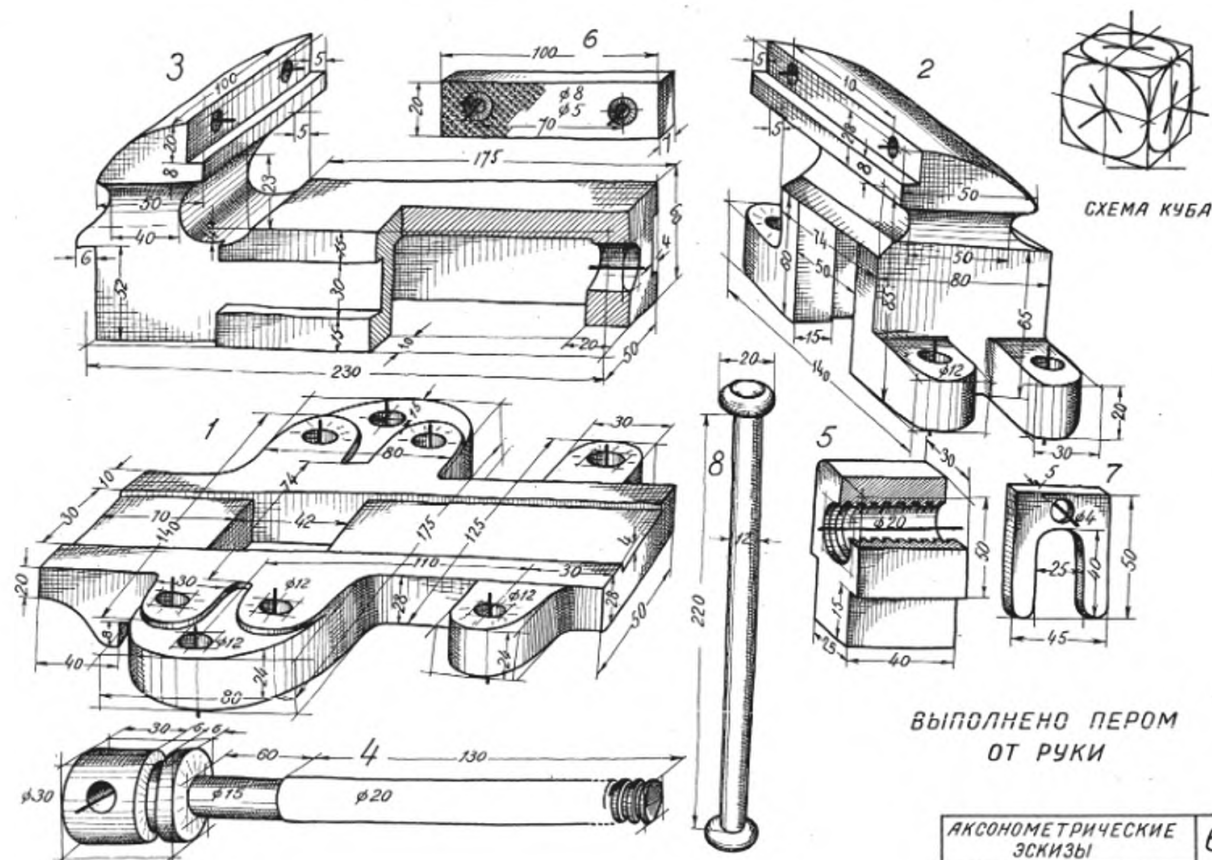


АксонOMETрическое скицирование (2)



АксонOMETрическое скицирование (3)

АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЕ СКИЦИРОВАНИЕ (ТЕХНИЧЕСКОЕ РИСОВАНИЕ)

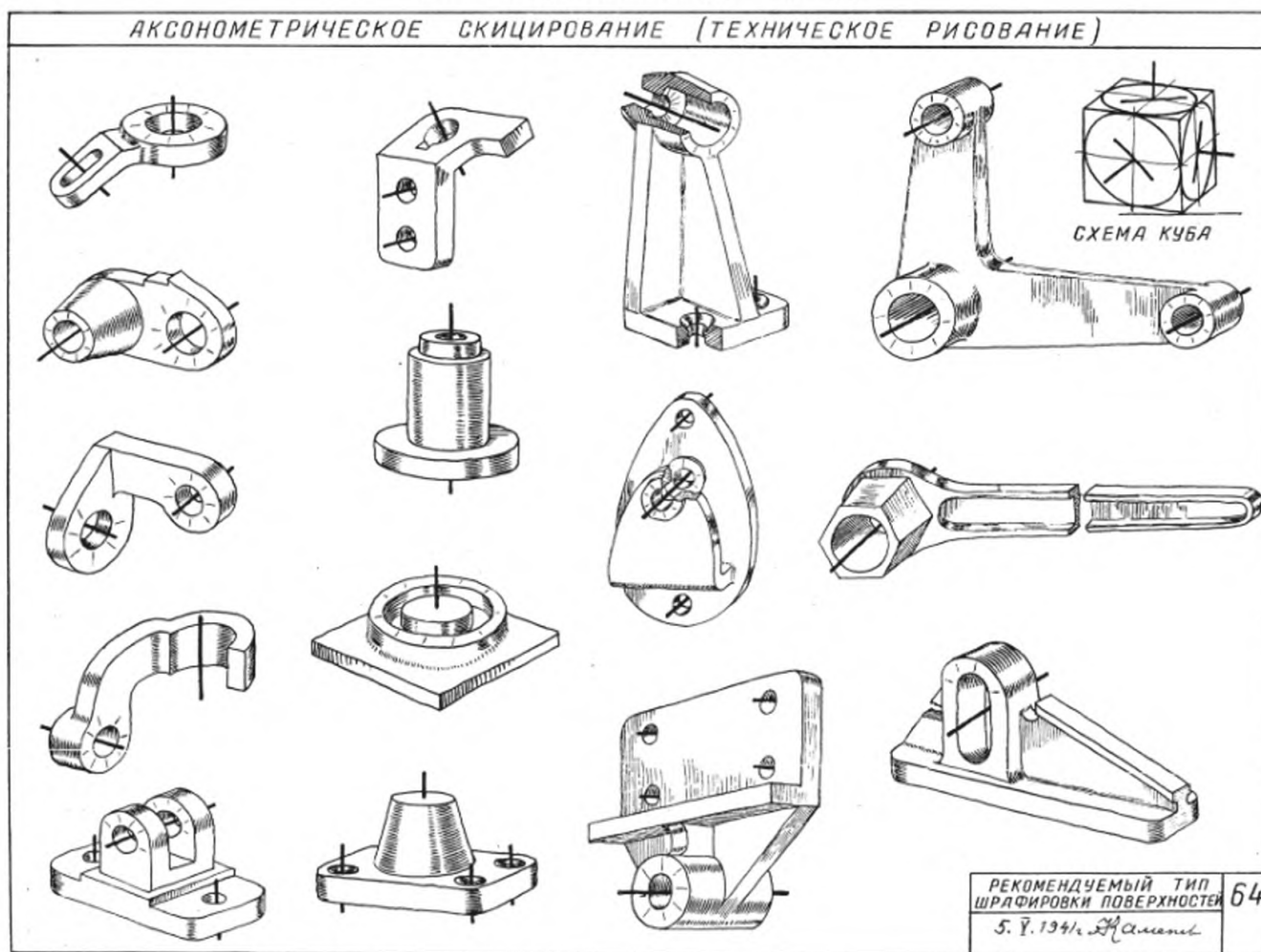


АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ
ЗСКИЗЫ
23. 11. 38 *А.А.А.*

63

АксонOMETРИЧЕСКОЕ СКИЦИРОВАНИЕ (4)

АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЕ СКИЦИРОВАНИЕ (ТЕХНИЧЕСКОЕ РИСОВАНИЕ)



Составляя эскиз какой-нибудь сложной детали, необходимо ее расчленить на простейшие составляющие формы: цилиндр, шар, призму, пирамиду. Умение ориентироваться в расчленении детали на простейшие формы очень ценно, так как в большой степени облегчает задачу составления аксонометрических видов. Все конструктивные скругления в местах примыкания отдельных элементов детали друг к другу делаются в последнюю очередь, большей частью при обводке.

Аксонометрический набросок по началу делается тонкими линиями и исполняется легким нажимом карандаша HB, B или N° 1. После проверки правильности построения видимые линии утолщаются карандашом или пером, а все ненужные построения при карандашных зарисовках удаляются резинкой.

Штриховка разрезов и шрафировка рельефа детали совершаются по тем же правилам, как и при составлении аксонометрического чертежа. Штриховка разрезов всегда, как известно, делается под углом 45° к горизонту, и направление штриховки должно проводиться по наименьшему измерению штрихуемой поверхности.

Шрафировка производится в предположении освещения детали слева сверху. Некоторое сгущение линий шрафировки делается в затененных местах. Слишком насыщать эскиз шрафировкой не следует. Необходимо помнить, что слишком густо нанесенная шрафировка затемняет контуры деталей, в особенности это сказывается на деталях с разрезами. Густая шрафировка может забить заштрихованные поверхности.

Пример исключительно простой и рациональной шрафировки рельефа показан в табл. 64, на которой представлены эскизы 15 машиностроительных деталей.

В табл. 61 и 62 показаны эскизы девяти машиностроительных деталей. Эскизы составлены исключительно на глаз и от руки, без чертежных инструментов. Оси проведены также на глаз.

Левая верхняя фигура в табл. 61 представляет кулачок планшайбы токарного станка. При составлении эскиза этой детали нужно расчленить ее на четыре составляющие части: 1) горизонтальную доску со скошенным левым концом, 2) среднюю часть, имеющую форму куба, 3) верхнюю часть цилиндрической формы и 4) нижний правый выступ.

Построение следует вести следующим образом.

1. Провести диметрические оси.
2. На этих осях построить верхнюю поверхность доски. Уменьшение размера по оси Y берется на глаз, без предварительного обмера.
3. Из всех вершин контура начерченной поверхности проводят вертикально вниз линии, параллельные оси Z . На этих линиях вы-

рисовываются изломы нижней поверхности опорной доски и выступающего вниз зуба.

4. Закончив вычерчивание двух нижних частей, переходят к вычерчиванию на главных осях средней части кулачка, т. е. к вычерчиванию куба.

5. На главных осях верхней стороны куба строят цилиндр.

6. На правой грани куба расчерчивают диметрический параллелограмм и вписывают в него эллипс.

7. Делают шрафировку рельефа.

Построение всех остальных восьми эскизов следует сделать таким же способом. При этом особенно необходимо следить за соблюдением параллельности всех линий, идущих вдоль той или иной аксонометрической оси. Вычерчивая какие-нибудь сложные криволинейные очертания, следует всегда сделать для них подготовку в виде прямолинейных контуров.

Внизу листа на эскизе шатуна правая головка показана именно в первой, подготовительной, стадии ее вычерчивания. Наоборот, левая головка уже обведена и все линии построения за исключением главной оси удалены.

Со временем, когда у лица, изучившего аксонометрию, выработается полная уверенность в умении правильно передать формы детали при помощи зарисовки, количество вспомогательных построений может быть в значительной мере сокращено. Однако отказаться совсем от нанесения вспомогательных построений было бы неправильно, так как эти построения при умелом их применении облегчают процесс эскизной зарисовки.

Выполняя зарисовку какой-нибудь сложной детали, рекомендуется предварительно сделать ее беглый набросок в мелком масштабе и без подробностей, а затем, пользуясь этим наброском, выполнить рисунок детали со всеми необходимыми подробностями.

Эскизные аксонометрические зарисовки рекомендуется выполнять особым мягким карандашом № 1 марки «Негро». Шрафировку следует наносить очень умеренно.

Глава 4

ТЕХНИЧЕСКОЕ РИСОВАНИЕ

Технические рисунки деталей машин и машиностроительных сборок (таблицы 65—72)

Из всех известных видов графических изображений объемных форм на бумаге наибольшей наглядностью отличаются перспективные изображения. Особенно рельефно наглядность перспективных изображений выявляется при изображении объектов, имеющих значительные линейные размеры, — архитектурно-строительные сооружения, мосты и т. п.

Для объектов сравнительно небольших габаритных размеров, к которым принадлежат детали машин и сборочные узлы, преимущества перспективных изображений перед аксонометрическими почти неуловимы. Однако процесс выполнения аксонометрических чертежей несравненно более прост, чем для перспективы. Поэтому при составлении наглядных изображений типа аксонометрических рисунков деталей машин и сборочных узлов рекомендуется всегда применять аксонометрические построения, а не перспективные.

Выше было установлено, что из разновидностей аксонометрии наиболее близка к перспективе по степени наглядности диметрическая проекция, учитывающая двойное сокращение вдоль одной из осей. Свойства этой диметрической проекции следует использовать при составлении аксонометрических зарисовок от руки.

При этом, выполняя зарисовку какой-нибудь сложной детали, необходимо прежде всего тщательно изучить ее формы и постараться мысленно расчленить эту деталь на составные части (плита, цилиндр, конус, шар) так, как это было разъяснено при изучении табл. 9, 17 и 18. Рекомендуется вести компоновку и оформление эскизной зарисовки, придерживаясь указаний, изложенных при изучении табл. 10 и 19, т. е. необходимо придерживаться порядка построения рисунка, начиная от фундамента и нанесения главных частей с постепенным внесением второстепенных деталей и мелких подробностей (переход от главного к второстепенному).

Настоятельно рекомендуется, приступая к зарисовке какой-нибудь сложной детали в крупном масштабе, предварительно сделать на полях листа бумаги в мелком масштабе аксонометрическое изображение куба с вписанными в его грани эллипсами (см. табл. 65—

72). Имея перед глазами такой куб, следует сделать еще вспомогательный набросок изображаемой детали в мелком масштабе, без конструктивных подробностей (см. табл. 65—71).

Только выполнив оба эти наброска, можно приступить к составлению самой зарисовки данного объекта в крупном масштабе. Такой прием значительно облегчает процесс выполнения технического рисунка сложных деталей, и этого именно приема следует *неуклонно придерживаться*, составляя эскизные зарисовки при проработке тем технического рисования. Выполнять работы по техническому рисованию рекомендуется на ватманской бумаге формата А3 (288 мм × 407 мм).

На пустотелых деталях с целью выявить их внутреннее устройство необходимо нанести контуры разрезов. При этом секущие плоскости должны быть проведены с расчетом наиболее наглядного выявления особенностей конструкции данной детали или сборки (см. табл. 65—71).

Зарисовки нужно выполнять слабым нажимом мягкого карандаша, действуя кистью руки свободно, без напряжения. Проводить длинные линии следует не сразу одним движением, как это делают начинающие, а постепенно, составляя длинную линию из сравнительно коротких (30—40 мм) штрихов. При этом необходимо все время пользоваться мягкой резинкой для удаления неудачно проведенных линий и вспомогательных построений, которых при составлении карандашных зарисовок приходится делать очень много (см., например, табл. 70).

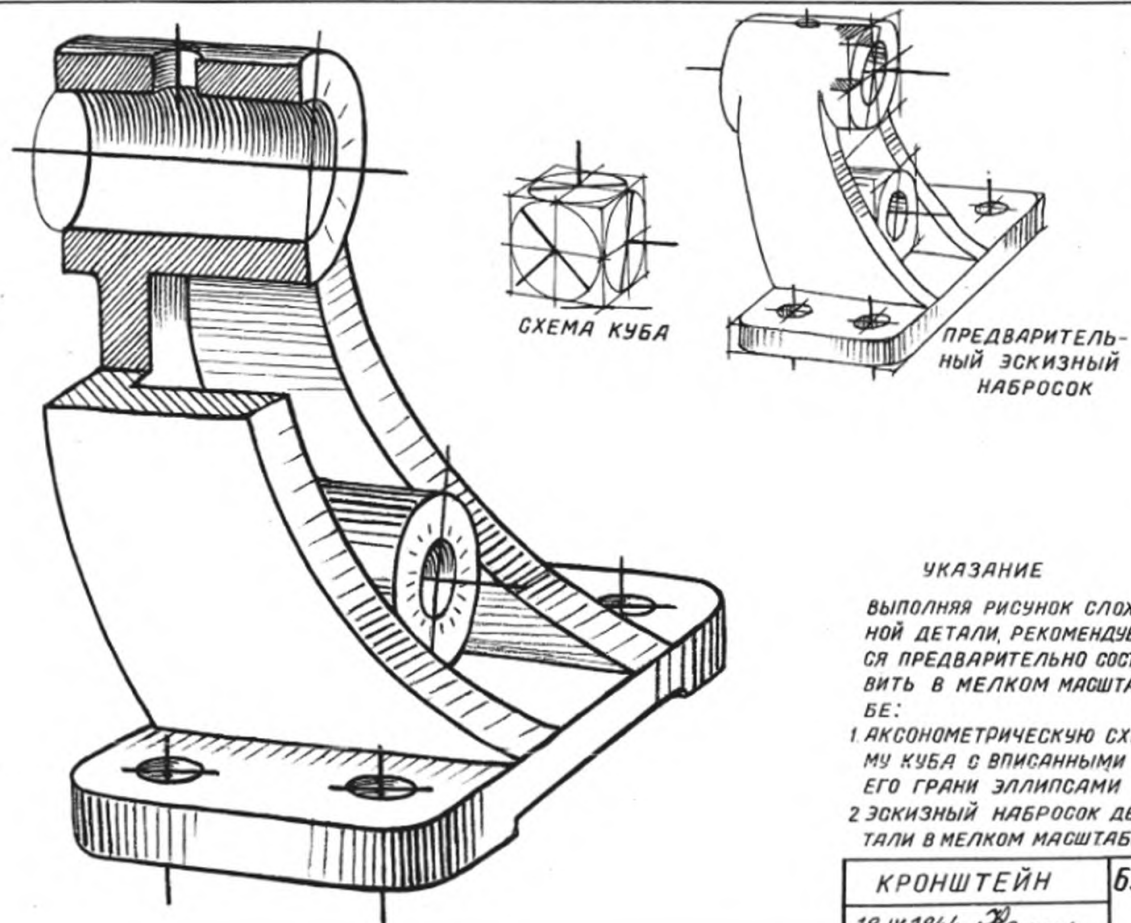
Законченный рисунок после удаления с него резинкой всех ненужных построений обводят утолщенными линиями (толщиной до 1 мм) мягким карандашом № 1 «Негро». Затем производят заштриховку разрезанных стенок детали и наносят шрафировку поверхностей для лучшего выявления объемных форм изображаемого объекта.

На крупных зарисовках рекомендуется применять по преимуществу шрафировку «утолщенным штрихом» (см. табл. 65—71), а на сравнительно мелких эскизных зарисовках, оформляемых чернилами или тушью, всегда целесообразно выполнять шрафировку рельефа «сеткой» (см. табл. 61—63) или штрихом по типу шрафировки, выполненной на эскизах табл. 64. Начинаящим рекомендуется пользоваться этим простейшим типом шрафировки. Указания к выполнению штриховки и шрафировки были даны в гл. 3. В табл. 72 дан выполненный пером рисунок сборки — тиски слесарные.

Изучение курса аксонометрии во втузах должно быть ориентировано в конечном счете на привитие студентам навыков, обеспечивающих выполнение каждым из них от руки, без инструментов, такого типа конструктивных рисунков сборочных монтажных узлов.

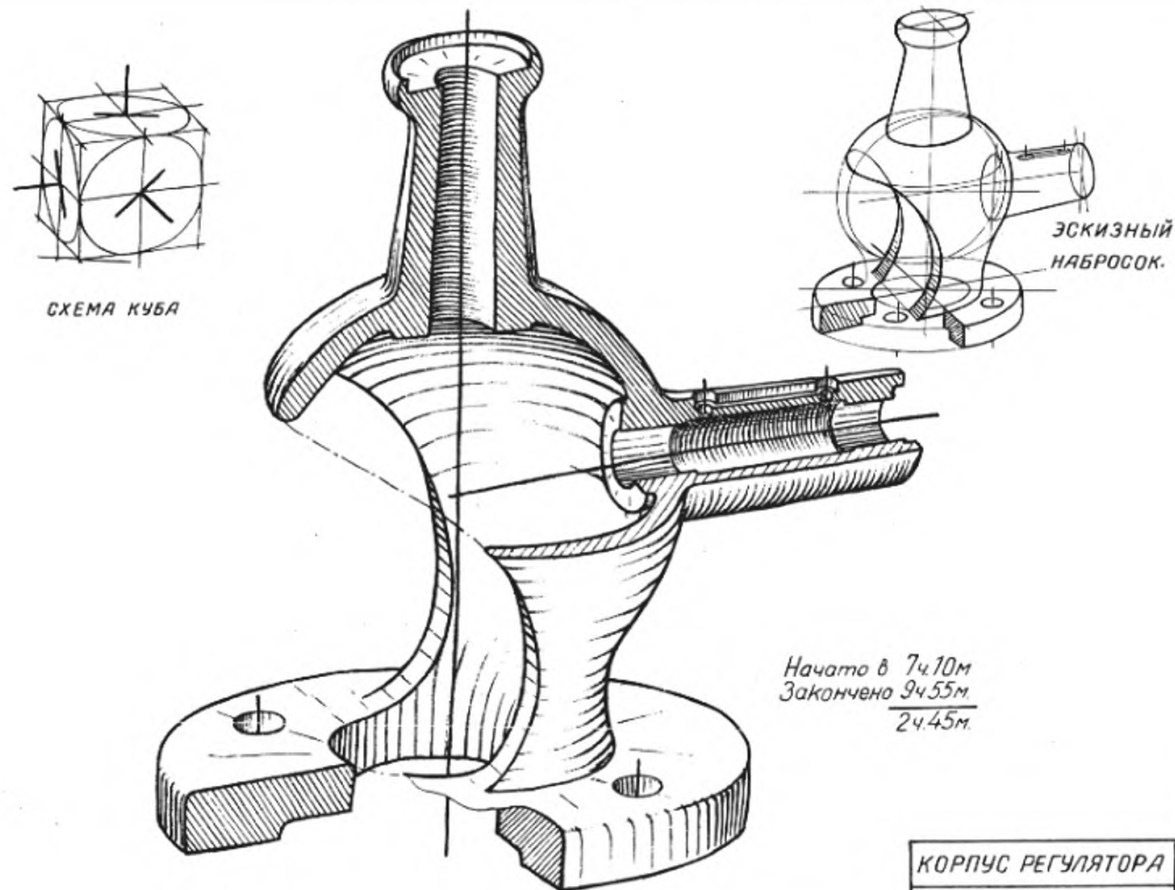
Техническое рисование. Кронштейн

ТЕХНИЧЕСКОЕ РИСОВАНИЕ



Техническое рисование. Корпус регулятора

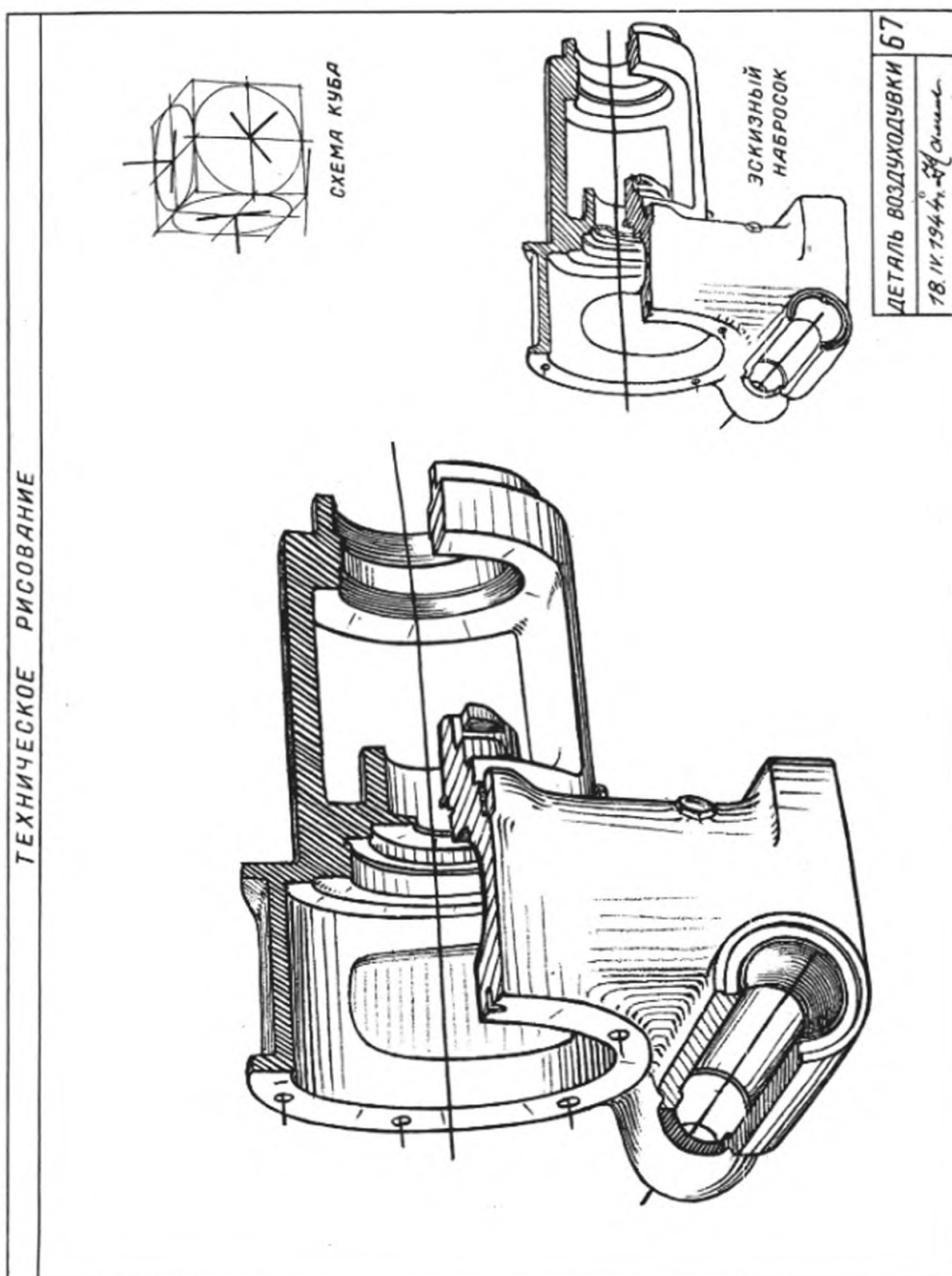
ТЕХНИЧЕСКОЕ РИСОВАНИЕ



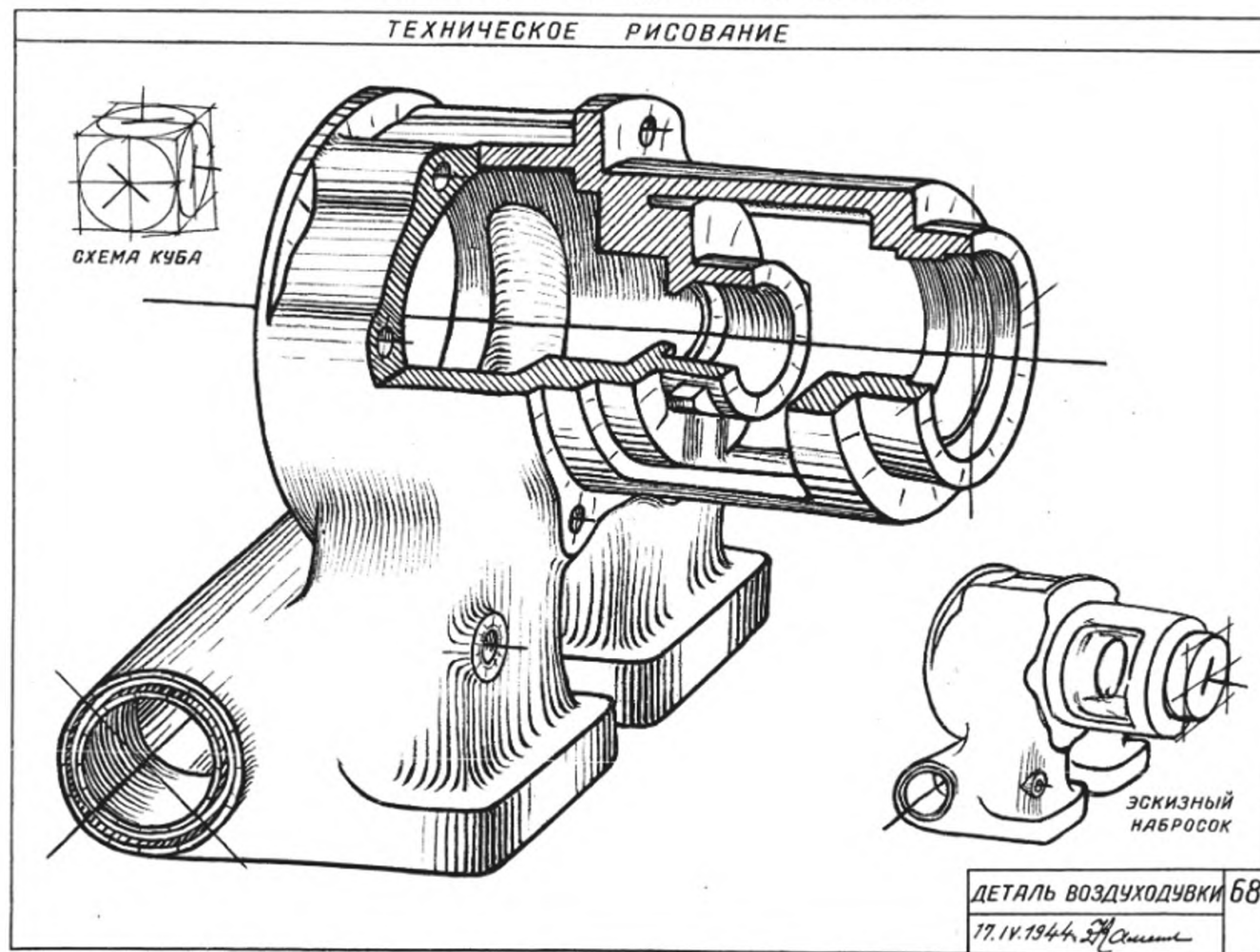
КОРПУС РЕГУЛЯТОРА 66

17. IV. 1944г. 27. А. С. Сидоров

Техническое рисование. Деталь воздухоподувки (1)

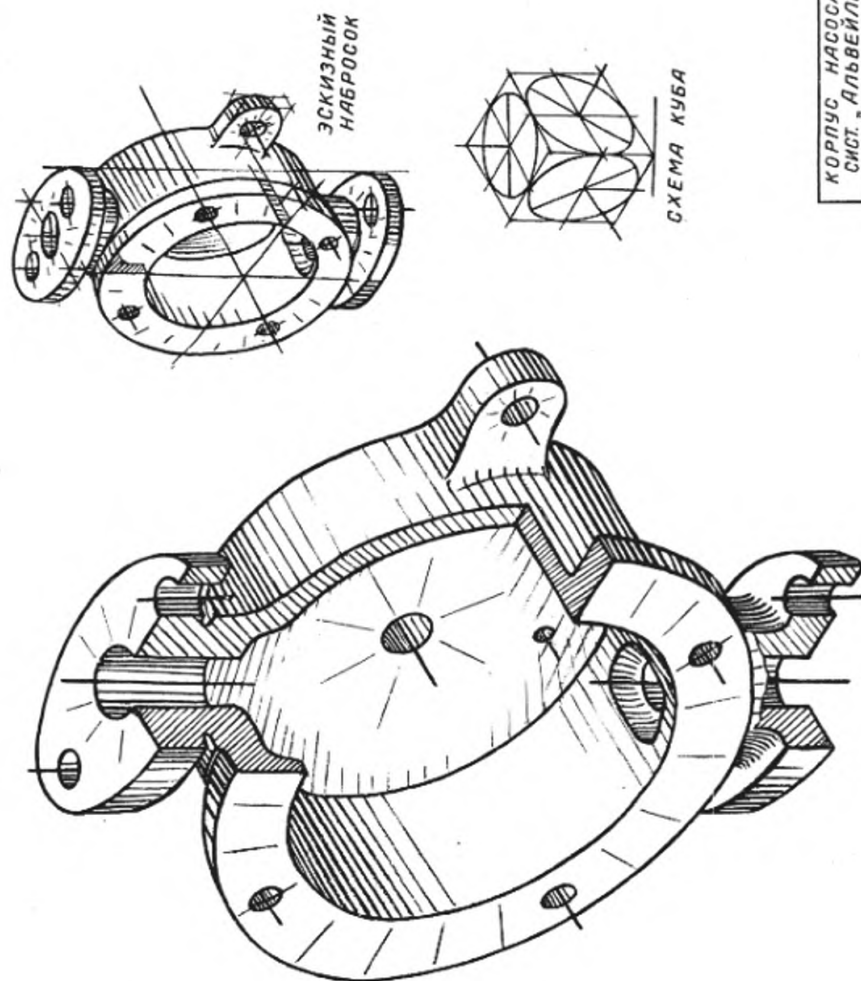


Техническое рисование. Деталь воздуховодки (2)



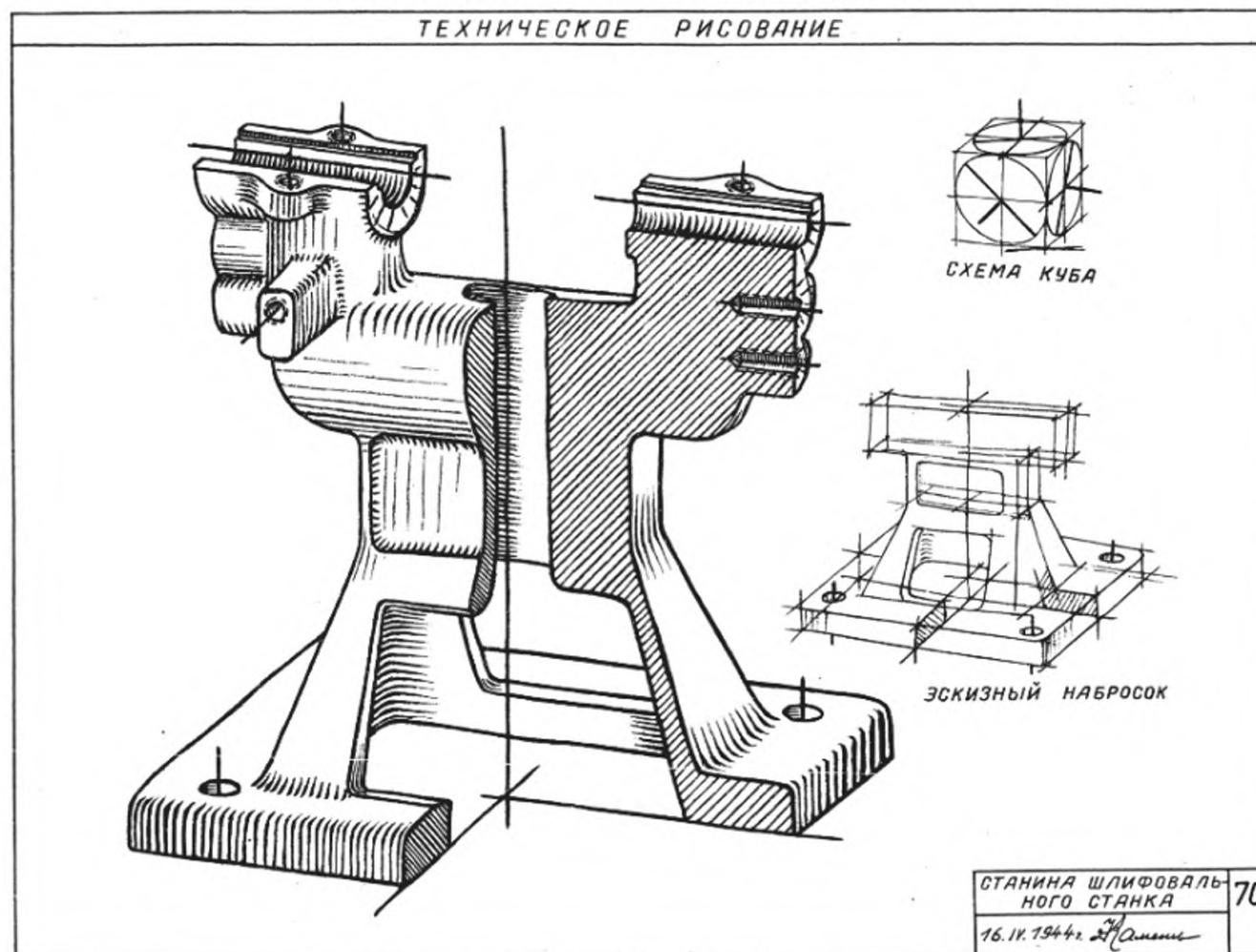
Техническое рисование. Корпус насоса

ТЕХНИЧЕСКОЕ РИСОВАНИЕ



КОРПУС НАСОСА СИСТ. "АЛПВЕЙЛЕР"	69
16/IV 1944. <i>В.А. Савин</i>	

Техническое рисование. Станина шлифовального станка

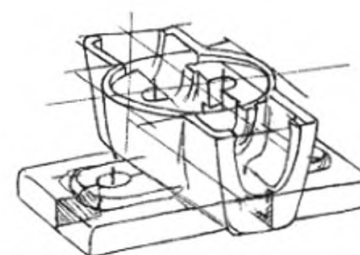


Техническое рисование. Корпус подшипника

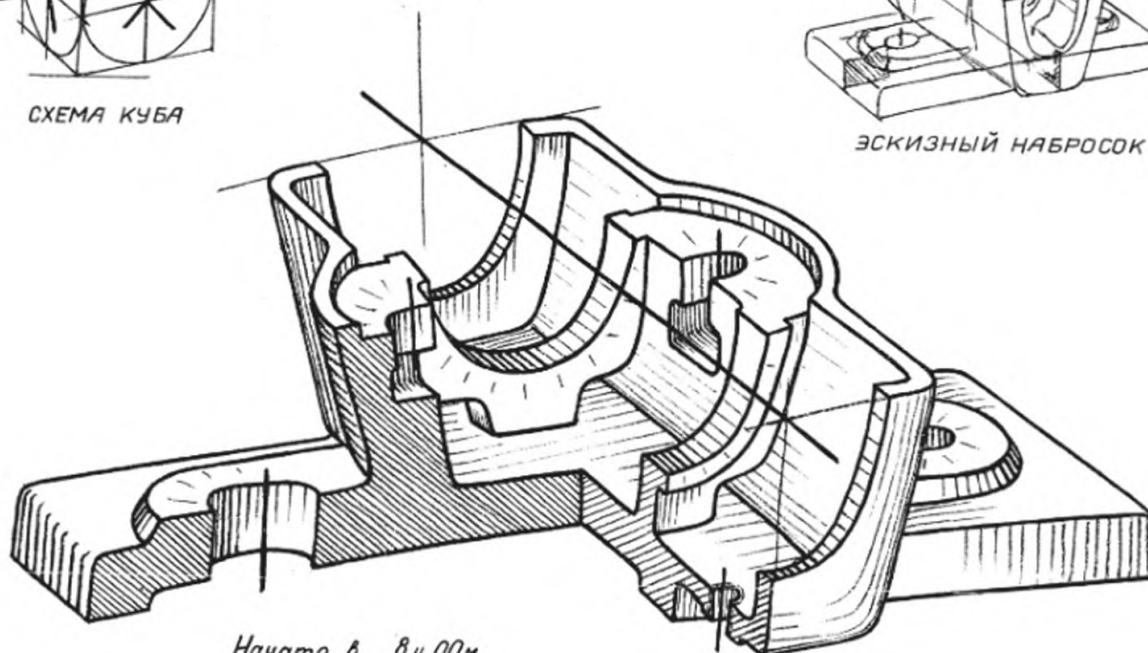
ТЕХНИЧЕСКОЕ РИСОВАНИЕ



СХЕМА КУБА



ЭСКИЗНЫЙ НАБРОСОК

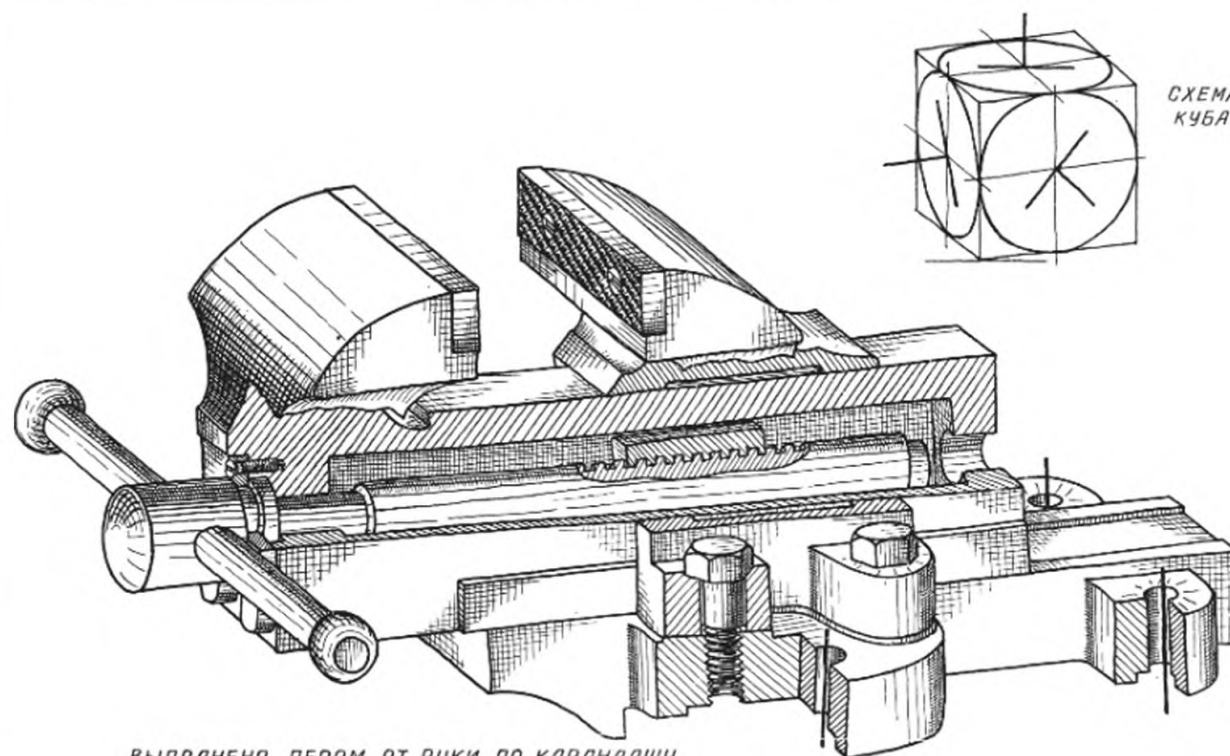


Начато в 8 ч. 00 м.
Закончено 10 ч. 05 м.
2 ч. 05 м.

КОРПУС ПОДШИПНИКА 71
22.IV.1944. 2. Р. Аманд

Техническое рисование. Тиски слесарные

ТЕХНИЧЕСКОЕ РИСОВАНИЕ



ВЫПОЛНЕНО ПЕРОМ ОТ РУКИ ПО КАРАНДАШУ

НАЧАТ 20-IV-44г 7ч. УТРА

ОКОНЧЕН " 9ч⁰⁵ "

ИТОГО 2ч⁰⁵м

ТИСКИ СЛЕСАРНЫЕ 72

20. IV. 1944г. *А. А. А.*

Новые издания по дисциплине «Инженерная графика» и смежным дисциплинам

1. *Большаков, В. П.* Инженерная и компьютерная графика. Издания с резьбовыми соединениями : учебное пособие для вузов / В. П. Большаков, А. В. Чагина. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 156 с. — (Высшее образование).

2. *Вышнепольский, И. С.* Техническое черчение : учебник для прикладного бакалавриата / И. С. Вышнепольский. — 10-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 319 с. — (Бакалавр. Прикладной курс).

3. Инженерная 3D-компьютерная графика. В 2 т. Т. 1 : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. Л. Хейфец, А. Н. Логиновский, И. В. Буторина, В. Н. Васильева ; под редакцией А. Л. Хейфеца. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 328 с. — (Бакалавр. Академический курс).

4. Инженерная 3D-компьютерная графика. В 2 т. Т. 2 : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. Л. Хейфец, А. Н. Логиновский, И. В. Буторина, В. Н. Васильева ; под редакцией А. Л. Хейфеца. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 279 с. — (Бакалавр. Академический курс).

5. Инженерная и компьютерная графика : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / Р. Р. Анамова [и др.] ; под общей редакцией Р. Р. Анамовой, С. А. Леоновой, Н. В. Пшеничной. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 246 с. — (Бакалавр. Прикладной курс).

6. *Колошкина, И. Е.* Инженерная графика. САД : учебник и практикум для академического бакалавриата / И. Е. Колошкина, В. А. Селезнев. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 220 с. — (Бакалавр. Академический курс).

7. *Левицкий, В. С.* Машиностроительное черчение : учебник для прикладного бакалавриата / В. С. Левицкий. — 9-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 395 с. — (Бакалавр. Прикладной курс).

8. Хейфец, А. Л. Компьютерная графика для строителей : учебник для академического бакалавриата / А. Л. Хейфец, В. Н. Васильева, И. В. Буторина ; под редакцией А. Л. Хейфеца. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 258 с. — (Высшее образование).

9. Чекмарев, А. А. Инженерная графика : учебник для прикладного бакалавриата / А. А. Чекмарев. — 13-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 389 с. — (Бакалавр. Прикладной курс).

10. Чекмарев, А. А. Начертательная геометрия : учебник для прикладного бакалавриата / А. А. Чекмарев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 147 с. — (Бакалавр. Прикладной курс).

11. Чекмарев, А. А. Начертательная геометрия и черчение : учебник для прикладного бакалавриата / А. А. Чекмарев. — 7-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 423 с. — (Бакалавр. Прикладной курс).

12. Чекмарев, А. А. Черчение. Справочник : учебное пособие для прикладного бакалавриата / А. А. Чекмарев, В. К. Осипов. — 9-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 359 с. — (Бакалавр. Прикладной курс).

Наши книги можно приобрести:

Учебным заведениям и библиотекам:
в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

Частным лицам:
список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

Магазинам и корпоративным клиентам:
в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

Отзывы об издании присылайте в редакцию
e-mail: gred@urait.ru

**Новые издания и дополнительные материалы доступны
на образовательной платформе «Юрайт» urait.ru,
а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»**

Учебное издание

Каменев Владимир Иванович

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Учебное пособие для СПО

Формат 70×100¹/₁₆.
Гарнитура «Charter». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 18,39.

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru