

Лев Васильевич ТАРАСОВ
1934–2013

Окончил Московский инженерно-физический институт в 1958 г. по специальности «Теоретическая ядерная физика». Кандидат физико-математических наук (1968), доцент (1969), профессор (1983). В 1989–1992 гг. — заведующий кафедрой методики преподавания предметов естественно-математического цикла в Московском институте повышения квалификации работников образования; в 1992–1998 гг. — заведующий кафедрой физики в Московском государственном открытом педагогическом университете. В 1994 г. награжден значком «Отличник народного просвещения» за разработку новой модели общеобразовательной школы «Экология и диалектика» и научное руководство межгосударственным педагогическим экспериментом по практической отработке этой модели.

Рекомендуем!

ДРУГИЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КНИГИ НАШЕГО ИЗДАТЕЛЬСТВА:



Отзывы о настоящем издании, обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги.

117335, Москва, Нахимовский проспект, 56

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
URSS
Тел. (многоканальный)
+7 (499) 724 25 45
<https://URSS.ru>

36360 ID 316008



Л. В. Тарасов
АЗБУКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Л. В. Тарасов

АЗБУКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Беседы об основных понятиях

Бесконечная числовая последовательность
Предел последовательности • Сходящиеся последовательности
Функция • Предел функции • Скорость • Производная
Дифференцирование • Первообразная • Интеграл
Дифференциальные уравнения



Книга для школьников... И НЕ ТОЛЬКО!



Л. В. Тарасов

АЗБУКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

*Беседы
об основных понятиях*



URSS

МОСКВА

Тарасов Лев Васильевич

Азбука математического анализа: Беседы об основных понятиях.

Изд. стереотип. — М.: ЛЕНАНД, 2024. — 192 с.

(Книга для школьников... И НЕ ТОЛЬКО!)

В настоящей книге рассматриваются основные понятия и определения математического анализа, изучаемого в средней школе: бесконечная числовая последовательность, предел последовательности, функция и предел функции, дифференцирование и дифференциальные уравнения, интегралы, производные и первообразные. Изложение построено в форме диалога между автором и читателем, являясь одновременно обстоятельным и доступным.

Книга предназначена для всех, кто изучает математический анализ, в том числе самостоятельно.

Формат 60×90/16. Печ. л. 12. Доп. тираж. Зак. № АУ-4265.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

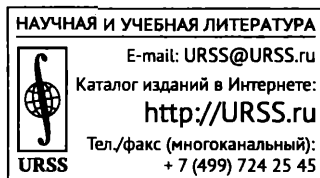
117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978–5–9710–8927–8

© ЛЕНАНД, 2016, 2024

978–5–9519–4518–1

36360 ID 316008



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Содержание

Вступление	5
Беседа 1	
Бесконечная числовая последовательность	7
Беседа 2	
Предел последовательности	20
Беседа 3	
Сходящиеся последовательности	30
Беседа 4	
Функция	43
Беседа 5	
Функция (продолжение)	56
Беседа 6	
Предел функции	76
Беседа 7	
Предел функции (продолжение)	89
Беседа 8	
Скорость	100

Беседа 9

Производная110

Беседа 10

Дифференцирование123

Беседа 11

Первообразная141

Беседа 12

Интеграл152

Беседа 13

Дифференциальные уравнения163

Беседа 14

Дифференциальные уравнения (продолжение)175

Упражнения184

Вступление

Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы; но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий.

Козьма Прутков

Откровения автора. Мое знакомство с математическим анализом состоялось довольно давно — примерно в середине прошлого века. Это произошло в МИФИ, на великолепных лекциях Дмитрия Алексеевича Василькова. До сих пор я помню то ощущение радости, почти восторженности, какое я тогда испытал. В беседах со своими сверстниками я, помню, довольно горячо сравнивал высшую математику с литературой — моим наиболее любимым в то время предметом. Конечно, сопоставления моим не хватало объективности и должной обоснованности. И тем не менее они были в определенной мере справедливы. Внутренняя логика, развитие, динамика, использование наиболее точных слов для выражения мысли — все эти характерные качества выдающихся произведений литературы, безусловно, обнаруживаются (разумеется, в иных формах) и в высшей математике. Помню, что у меня было ощущение, будто казавшаяся дотоле скучной, «безжизненной» элементарная математика вдруг ожила, обнаружив внутренние движения, подчиняющиеся некой безупречной логике.

Миновали годы. За это время столь эмоциональное восприятие математического анализа, конечно, прошло. Математический анализ давно уже превратился для меня в рабочий аппарат. Однако неизменно в памяти моей сохраняется то удивительно светлое чувство,

какое я испытал в свое время при знакомстве с этим необычайно красивым миром идей, называемым высшей математикой.

Откровения читателя. На одном из прошлых уроков учитель математики сказал, что мы начинаем изучать новый предмет — математический анализ. Он сказал, что этот предмет есть основа высшей математики и что он очень труден. Мы уже рассмотрели действительные числа, числовую прямую, бесконечные числовые последовательности, предел последовательности. Учитель был прав, когда говорил нам о трудности предмета. Я внимательно слушаю объяснения в классе и в тот же день разбираю соответствующие страницы учебника. Мне кажется, что я все понимаю, но при этом ощущаю какую-то внутреннюю неудовлетворенность. Мне трудно «составить» из частных сведений нечто целое, трудно запоминать формулировки и определения, например определение предела последовательности. Одним словом, что-то я никак не ухватываю.

Возможно, что все впереди, но пока математический анализ для меня еще «не раскрылся». Более того, я как-то не чувствую качественного отличия математического анализа от алгебры. Просто все стало немного труднее восприниматься и еще труднее запоминаться.

От автора. Эти два откровения дают возможность немного познакомиться с двумя действующими в данной книге лицами. Точнее говоря, не действующими, а беседующими, поскольку вся книга — это довольно свободный, непринужденный диалог между *Автором* и *Читателем*. **От беседы к беседе Автор будет обсуждать вместе с любознательным и восприимчивым Читателем различные понятия, идеи, теоремы математического анализа, подчеркивая особо сложные и тонкие моменты, выделяя внутреннюю логику доказательств, расставляя определенные акценты.** Автор надеется, что эти беседы помогут читателю книги в усвоении новых для него понятий (таких как *производная, первообразная, определенный интеграл, дифференциальное уравнение*) и заставят более глубоко продумать и осознать такие понятия, как *числовая последовательность, предел последовательности, функция*. **Коротко говоря, данные беседы предназначены для того, чтобы помочь школьнику вступить в новый для него мир математического анализа.** И если в итоге читатель книги хотя бы в какой-то мере почувствует внутреннюю красоту, целостность, увлекательность высшей математики, то автор будет считать свою задачу полностью выполненной.

Бесконечная числовая последовательность

Автор. Наши беседы о математическом анализе мы начнем с обсуждения понятия «бесконечная числовая последовательность», или, проще говоря, «последовательность».

Понятие последовательности

Обратимся к следующим примерам последовательностей:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots; \quad (1.1)$$

$$5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \dots; \quad (1.2)$$

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots; \quad (1.3)$$

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, 2\sqrt{2}, \dots; \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots; \quad (1.5)$$

$$2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, -12, \dots; \quad (1.6)$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots; \quad (1.7)$$

$$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \dots; \quad (1.8)$$

$$1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \dots; \quad (1.9)$$

$$1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \frac{8}{9}, \dots \quad (1.10)$$

Внимательно посмотрите на эти примеры. Что у них общего?

Читатель. В каждом примере предполагается бесконечное число членов последовательности... А вообще-то они различны...

Автор. В каждом примере выписано по восемь членов последовательности. Могли бы Вы написать, например, девятые члены?

Читатель. Конечно. В первом примере 256, во втором 21...

Автор. Хорошо. Значит, во всех приведенных примерах налицо *определенный закон*, который позволяет нам дописать девятые, десятые и прочие члены последовательностей. Правда, надо заметить, что задание некоторого *конечного* числа членов может и не выявить закона, по которому построена бесконечная последовательность.

Читатель. Но в данном случае эти законы хорошо просматриваются. В примере (1.1) перед нами члены бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем 2. В примере (1.2) имеем последовательно расположенные нечетные числа, начиная с 5. В примере (1.3) — последовательно расположенные квадраты натуральных чисел...

Автор. Будем рассуждать более строго. Пронумеруем все члены последовательности по порядку: $1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Существует некий закон (некое правило), по которому каждому из этих натуральных чисел *ставится в соответствие* определенное число (соответствующий член последовательности). В примере (1.1) это соответствие выглядит так:

1	2	4	8	16	32	2^n	(члены последовательности)
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
1	2	3	4	5	6	n	(номера мест).

Для задания последовательности достаточно указать, какой член последовательности соответствует числу n , т. е. стоит на n -м месте. Можно сформулировать следующее определение последовательности.

Определение. Говорят, что задана бесконечная числовая последовательность, если всякому натуральному числу (номеру места) по какому-либо закону однозначно поставлено в соответствие определенное число (член последовательности).

В общем виде указанное соответствие можно изобразить так:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	...	y_n	...
↑	↑	↑	↑	↑		↑	
1	2	3	4	5	...	n	...

Число y_n есть n -й член последовательности. Всю последовательность иногда кратко записывают как (y_n) .

Читатель. Нас познакомили с немного другим определением последовательности — как функции, заданной на множестве натуральных чисел.

Автор. По существу это одно и то же. Однако мне не хотелось бы раньше времени использовать слово «функция». Во-первых, разговор о функциях пойдет у нас позднее. Во-вторых, обычно Вам придется иметь дело с несколько иными функциями (функциями, определенными не на множестве натуральных чисел, а на числовой прямой или каком-либо промежутке). Независимо от всех этих соображений сформулированное выше определение последовательности является совершенно корректным.

Возвращаясь к нашим примерам последовательностей, рассмотрим в каждом случае *аналитическое выражение (формулу)* для n -го члена. Прошу Вас.

Способы задания
последовательностей

Читатель. Это нетрудно. В примере (1.1) имеем: $y_n = 2^n$. В примере (1.2): $y_n = 2n + 3$. В примере (1.3): $y_n = n^2$. В примере (1.4): $y = \sqrt{n}$. В примере (1.5): $y_n = 1 - 1/(n+1) = n/(n+1)$. В примере (1.6): $y_n = 4 - 2n$. В примере (1.7): $y_n = 1/n$. В остальных трех примерах я затрудняюсь...

Автор. Рассмотрим пример (1.8). Легко видеть, что если n — четное число, то $y_n = 1/n$, а если n — нечетное, то $y_n = n$. Следовательно,

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } n = 2k; \\ n, & \text{если } n = 2k - 1. \end{cases}$$

Читатель. А можно ли в данном случае записать y_n одним аналитическим выражением?

Автор. Можно, хотя я не вижу в этом особой необходимости. Представим y_n в виде

$$y_n = a_n n + b_n \frac{1}{n}$$

и потребуем, чтобы коэффициент a_n равнялся единице при нечетном n и нулю при четном, а b_n вел себя противоположным

образом, В частности, эти коэффициенты можно определить так:

$$a_n = \frac{1}{2} [1 - (-1)^n]; \quad b_n = \frac{1}{2} [1 + (-1)^n].$$

Следовательно,

$$y_n = \frac{n}{2} [1 - (-1)^n] + \frac{1}{2n} [1 + (-1)^n].$$

В таком же духе действуйте и в оставшихся двух примерах.

Читатель. Для последовательности (1.9) имеем:

$$y_n = \frac{1}{2n} [1 - (-1)^n] - \frac{1}{2(n-1)} [1 + (-1)^n],$$

а для последовательности (1.10)

$$y_n = \frac{1}{2n} [1 - (-1)^n] + \frac{n}{2(n+1)} [1 + (-1)^n].$$

Автор. Важно заметить, что способ задания последовательности при помощи формулы для ее n -го члена не является единственным. Последовательность может быть задана, например, *рекуррентным способом* (латинское слово *recurrrere* означает «возвращаться»). В этом случае для задания последовательности надо указать первый (или несколько первых) член последовательности и рекуррентное соотношение, выражающее n -й член последовательности через предыдущий (или несколько предыдущих).

Используя рекуррентный способ, представим последовательность (1.1) так:

$$y_1 = 1; \quad y_n = 2y_{n-1}.$$

Читатель. Понятно. Последовательность (1.2) можно, очевидно, представить так:

$$y_1 = 5; \quad y_n = y_{n-1} + 2.$$

Автор. Правильно. Пользуясь рекуррентным способом, определим одну любопытную последовательность:

$$y_1 = 1; \quad y_2 = 1; \quad y_n = y_{n-2} + y_{n-1}.$$

Вот ее первые члены:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \quad (1.11)$$

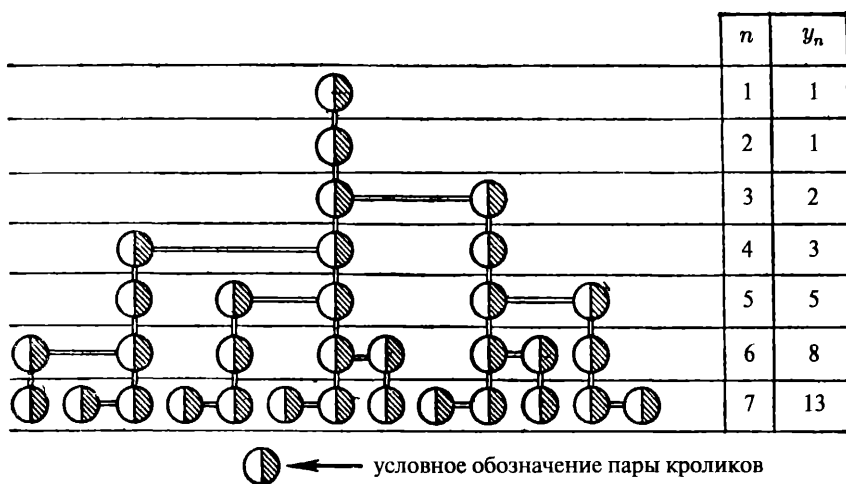


Рис. 1

Она известна как *последовательность чисел Фибоначчи*.

Читатель. Я где-то слышал о задаче с кроликами Фибоначчи.

Автор. От этой задачи, сформулированной итальянским математиком XIII в. *Фибоначчи*, и происходит название последовательности (1.11). Задача такова. Некто поместил пару новорожденных кроликов в огороженный загон и хочет знать, сколько кроликов у него будет через некоторое время. Условия задачи таковы: пара кроликов начинает давать потомство через два месяца после своего рождения и каждый месяц появляется одна пара кроликов. Вначале (в первом месяце) мы имеем в загоне одну, пару кроликов ($y_1 = 1$); во втором месяце имеем по-прежнему одну пару ($y_2 = 1$); в третьем месяце появляется приплод, поэтому число пар кроликов в загоне становится равным двум ($y_3 = 2$); в четвертом месяце появляется еще один приплод от первой пары кроликов ($y_4 = 3$); в пятом месяце появляется приплод как от первой, так и от второй пар кроликов ($y_5 = 5$) и т. д. Увеличение пар кроликов в загоне от месяца к месяцу хорошо иллюстрирует рис. 1. Можно видеть, что числа пар кроликов, подсчитываемые каждый месяц, образуют последовательность (1.11), т. е. последовательность чисел Фибоначчи.

Читатель. Но ведь в действительности кролики размножаются не по такой идеализированной схеме. Да и первые пары должны, очевидно, постепенно «выбывать из игры».

Автор. Последовательность чисел Фибоначчи любопытна вовсе не потому, что описывает упрощенную схему размножения кроликов. Оказывается, что эта последовательность загадочным образом возникает в самых неожиданных ситуациях. Например, в настоящее время числа Фибоначчи применяются при обработке информации с помощью ЭВМ, при поиске оптимальных методов программирования для ЭВМ. Впрочем, это уже отдельная тема для разговора.

Возвращаясь к способам задания последовательностей, хочу подчеркнуть, что *сам по себе способ задания последовательности непринципиален*. Одну последовательность удобнее задать формулой n -го члена, другую (как, например, последовательность чисел Фибоначчи) — рекуррентным способом. Важно лишь одно — тем или иным способом должен быть фиксирован *закон соответствия*, т. е. закон, по которому всякому натуральному числу ставится в соответствие определенный член последовательности. В ряде случаев этот закон удастся сформулировать лишь словесно. Примерами могут служить последовательности:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots; \quad (1.12)$$

$$3; 3, 1; 3, 14; 3, 141; 3, 1415; 3, 14159; \dots \quad (1.13)$$

В обоих случаях мы не можем указать ни формулы n -го члена, ни рекуррентного соотношения. Тем не менее Вы без особого труда можете усмотреть здесь определенные законы соответствия и сформулировать их словесно.

Читатель. Одну минуту... Последовательность (1.12) есть последовательность *простых чисел*, расположенных в порядке возрастания, а последовательность (1.13) есть, очевидно, последовательность, составленная из десятичных приближений по недостатку для числа π .

Автор. Совершенно верно.

Читатель. Казалось бы, что числовая последовательность отличается от случайного набора чисел наличием внутренней *упорядоченности*, которую как раз и должна отражать формула для n -го члена или рекуррентное соотношение. Однако последние два примера показывают, что такая упорядоченность может отсутствовать...

Автор. Действительно, упорядоченность, определяемая некой формулой (неким аналитическим выражением), не обязательна. Важно лишь наличие какого-либо закона (правила, признака) соответствия, позволяющего сопоставить всякому натуральному числу

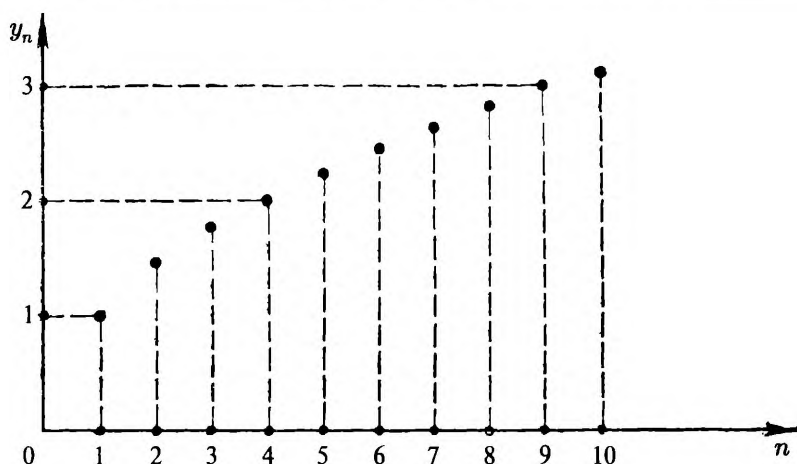


Рис. 2

определенный член последовательности. В примерах (1.12) и (1.13) законы соответствия налицо; поэтому последовательности (1.12) и (1.13) несколько не хуже (как, впрочем, и не лучше) последовательностей (1.1)–(1.11), допускающих аналитическое задание.

Далее остановимся на *геометрическом* (*графическом*) изображении числовой последовательности. Выберем две координатные оси — ось x и ось y . На первой отложим числа $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, а на второй — соответствующие члены последовательности, т. е. числа $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$. Тогда последовательность может быть изоб-

Графическое
изображение
последовательности

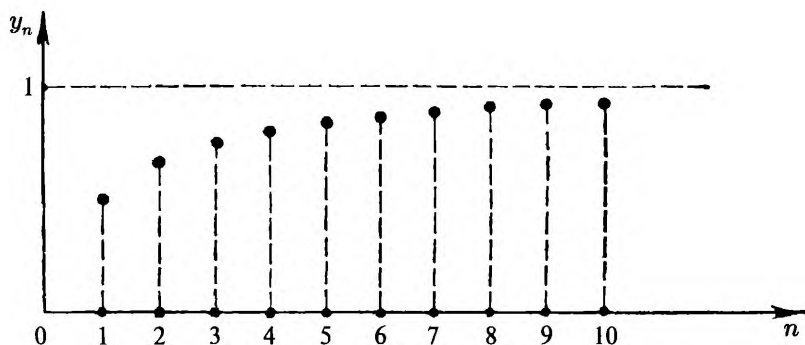


Рис. 3

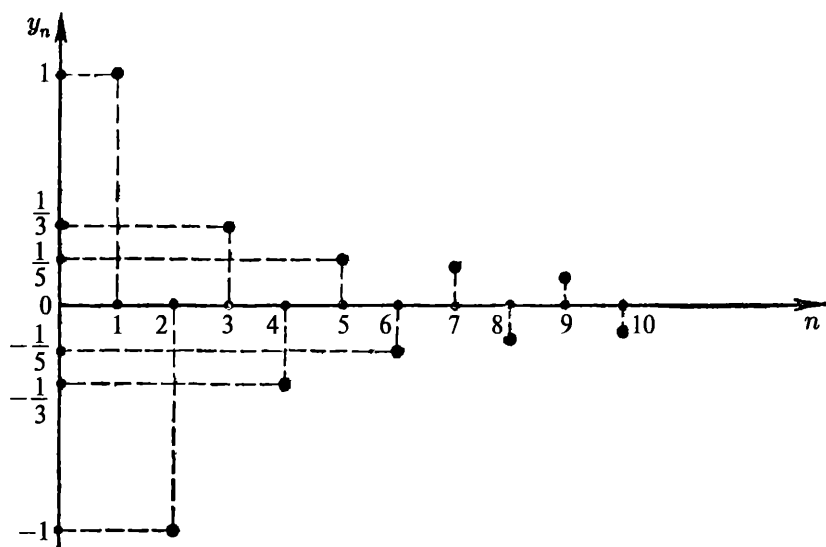


Рис. 4

ражена в виде множества точек $M(n, y_n)$ координатной плоскости. Так на рис. 2 изображена последовательность (1.4), на рис. 3 — последовательность (1.5), на рис. 4 — последовательность (1.9), на рис. 5 — последовательность (1.10).

Впрочем, возможно и иное геометрическое изображение числовой последовательности. Сохраним только одну координатную ось (ось y) и отметим на ней точками $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ члены рассматриваемой последовательности. На рис. 6 этот способ изоб-

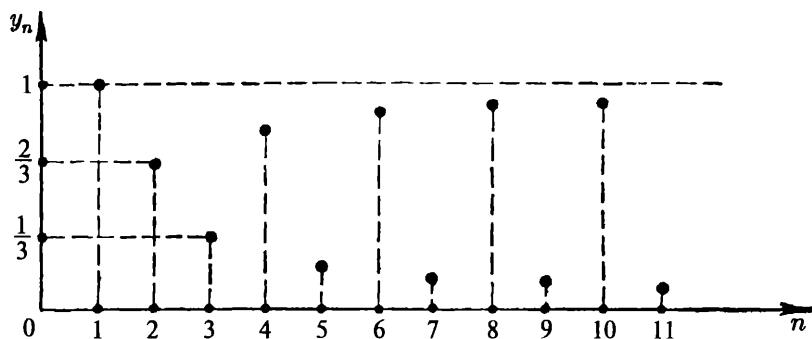
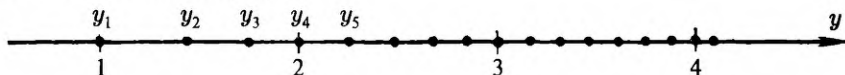
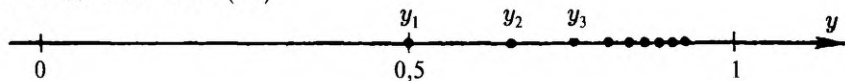


Рис. 5

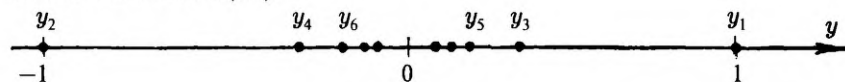
Последовательность (1.4):



Последовательность (1.5):



Последовательность (1.9):



Последовательность (1.10):



Рис. 6

ражения последовательности продемонстрирован для последовательностей, которые рассматривались на рис. 2–5. Надо признать, что указанный способ обладает меньшей наглядностью по сравнению с предыдущим способом.

Читатель. Однако в случае последовательностей (1.4) и (1.5) второй способ достаточно нагляден.

Монотонные
и ограниченные
последовательности

Автор. Это объясняется спецификой указанных последовательностей. Обратите на нее внимание.

Читатель. Члены последовательностей (1.4) и (1.5) обладают свойством: каждый член последовательности больше предыдущего члена

$$y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n < \dots$$

Поэтому они располагаются на оси y в порядке их номеров. Насколько мне известно, такие последовательности называют *возрастающими*.

Автор. В более общем случае говорят о *неубывающих* последовательностях (если наряду со знаком неравенства допускается также и знак равенства). Сформулируем определение.

Определение. Последовательность (y_n) называется *неубывающей*, если

$$y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_n \leq \dots$$

Последовательность (y_n) называется *невозрастающей*, если

$$y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \dots \geq y_n \geq \dots$$

Определение. Неубывающие и невозрастающие последовательности объединяют под названием *монотонных последовательностей*.

Укажите среди наших примеров (с (1.1) по (1.13)) монотонные последовательности.

Читатель. Последовательности (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.11), (1.12), (1.13) — неубывающие последовательности; последовательности (1.6) и (1.7) — невозрастающие. Последовательности (1.8), (1.9), (1.10) не являются монотонными.

Автор. Сформулируем еще одно определение.

Определение. Последовательность (y_n) называется *ограниченной*, если можно указать такие два числа A и B , между которыми лежат все члены последовательности:

$$A \leq y_n \leq B \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Если такие два числа указать нельзя (если, в частности, можно указать только одно из этих чисел; меньшее или большее), то последовательность называется *неограниченной*.

Есть ли среди наших примеров ограниченные последовательности?

Читатель. По-видимому, последовательность (1.5) является ограниченной.

Автор. Укажите для нее числа A и B .

Читатель. $A = 1/2$, $B = 1$.

Автор. Конечно, если есть хотя бы одна пара чисел A и B , то можно указать сколько угодно таких пар. С равным основанием Вы могли бы указать, например, $A = 0$, $B = 2$ или же $A = -100$, $B = 100$ и т. д.

Читатель. Я указал поточнее.

Автор. С точки зрения определения ограниченной последовательности мои числа A и B ничуть не хуже и не лучше Ваших. Однако меня заинтересовала Ваша последняя фраза. Что значит «поточнее»?

Читатель. Мое число A есть, очевидно, наибольшее из всех возможных, тогда как число B является наименьшим из всех возможных.

Автор. Первая часть Вашего утверждения сомнению не подлежит. А вот вторая часть (насчет числа B) отнюдь не очевидна. Она нуждается в доказательстве.

Читатель. Однако мне казалось, что это и так абсолютно ясно... Ведь члены последовательности (1.5) постепенно растут и явно приближаются к единице, оставаясь неизменно меньше ее.

Автор. Все это так. Но отсюда еще не видно, что $B = 1$ есть наименьшее из чисел, для которых $y_n \leq B$ при всех n . Подчеркиваю: это не очевидно, это требуется доказывать.

Замечу, что «очевидность» Вашего утверждения относительно числа $B = 1$ есть не что иное, как типичное «вкусовое ощущение», а отнюдь не математически обоснованное заключение.

Читатель. А можно ли доказать мое утверждение относительно того, что число $B = 1$ является в данном случае наименьшим из всех возможных?

Автор. Можно. Однако не будем забегать вперед и ограничимся пока предостережением относительно злоупотребления так называемыми «вкусовыми ощущениями». Тем более что ограниченность последовательности, повторяю, вовсе не требует, чтобы указывались наибольшее из всех возможных чисел A или наименьшее из всех возможных чисел B .

Вернемся к нашим последовательностям и поищем другие примеры ограниченных последовательностей.

Читатель. Последовательность (1.7) также является ограниченной (можно указать такие числа A и B : $A = 0$, $B = 1$). Наконец, ограниченными являются последовательности (1.9) (например, $A = -1$,

$B = 1$), (1.10) (например, $A = 0$, $B = 1$) и (1.13) (например, $A = 3$, $B = 4$). Остальные последовательности неограниченные.

Автор. Верно. Последовательности (1.5), (1.7), (1.9), (1.10) и (1.13) — ограниченные. Заметьте при этом, что последовательности (1.5), (1.7) и (1.13), будучи ограниченными, являются в то же время и монотонными. Не кажется ли Вам этот факт удивительным?

Читатель. Что же тут удивительного?

Автор. Возьмите, например, последовательность (1.5). Заметьте: каждый последующий член больше предыдущего. Я подчеркиваю: каждый! А ведь последовательность содержит *бесконечно много* членов. Значит, если мы будем мысленно двигаться сколь угодно долго вдоль последовательности, мы станем свидетелями сколь угодно большого количества актов возрастания величины членов последовательности. И несмотря на это упомянутая величина все равно не будет превышать некой «границы», в данном случае единицы! Разве это не удивительно?

Читатель. Вообще говоря, удивительно. Но ведь всякий раз к предыдущему члену последовательности добавляется все меньшая и меньшая величина.

Автор. Это так. Но этого, очевидно, недостаточно для того, чтобы последовательность оказалась ограниченной. Возьмите, например, последовательность (1.4). Тут тоже «добавки» к величине членов последовательности постепенно уменьшаются. Однако последовательность (1.4) отнюдь не является ограниченной.

Читатель. Значит, в примере (1.5) эти «добавки» уменьшаются быстрее, чем в примере (1.4).

Автор. Но согласитесь, что заранее совсем не ясно, что возможна такая скорость уменьшения этих самых «добавок», чтобы последовательность оказалась ограниченной.

Читатель. С этим я, конечно, согласен.

Автор. Возможность подобных ситуаций была неведома, в частности, древним грекам. Достаточно вспомнить известный парадокс об Ахиллесе, догоняющем черепаху.

Пусть между ними имеется начальное расстояние в 1 км и пусть Ахиллес, догоняя черепаху, движется в 10 раз быстрее, чем черепаха. Древние греки рассуждали так: пока Ахиллес пробежит 1 км,

черепаха преодолеет 100 м; пока Ахиллес пробежит эти 100 м, черепаха преодолеет 10 м; пока Ахиллес пробежит эти 10 м, черепаха преодолеет 1 м — и так бесконечно. Отсюда делался парадоксальный вывод: Ахиллес никогда не догонит черепаху.

В данном «парадоксе» отразилось в конечном счете непонимание того, что монотонная последовательность может быть ограниченной.

Читатель. Приходится согласиться, что наличие одновременно монотонности и ограниченности есть факт не совсем простой.

Автор. Этот факт действительно не совсем простой. Он подводит нас вплотную к разговору о *пределе последовательности*. Дело в том, что если последовательность является одновременно и монотонной, и ограниченной, то она обязательно имеет предел.

И в известном смысле именно с этого момента как раз и «начинается» математический анализ.

Предел последовательности

Понятие предела
последовательности

Автор. Какие математические операции Вам известны?

Читатель. Сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, логарифмирование, взятие модуля.

Автор. Чтобы совершить переход от элементарной математики к высшей математике, следует дополнить этот «список» всего лишь одной математической операцией — операцией отыскания предела последовательности (ее иногда называют операцией предельного перехода). Кстати говоря, именно с этим и связана сказанная в конце прошлой беседы фраза о том, что математический анализ «начинается» с предела последовательности.

Читатель. Я слышал, что высшая математика использует операции *дифференцирования* и *интегрирования*.

Автор. Эти операции, как мы убедимся в свое время, являются по сути дела не чем иным, как вариантами операции предельного перехода.

Итак, обратимся к понятию *предел последовательности*. Что это такое?

Читатель. Я ознакомился с определением предела последовательности. Однако вряд ли смогу по памяти сформулировать его.

Автор. Но, по-видимому, Вы как-то «чувствуете» это понятие? Наверное, Вы сможете указать, какие последовательности, рассмотренные в прошлой беседе, имеют предел и чему он в каждом случае равен.

Читатель. Это я, наверное, смогу сделать. Последовательность (1.5) имеет пределом число 1, последовательности (1.7) и (1.9) — число 0, последовательность (1.13) — число π .

Автор. Правильно. Остальные последовательности предела не имеют.

Читатель. Между прочим, последовательность (1.9) не является монотонной...

Автор. Вы, очевидно, вспомнили конец нашей прошлой беседы, где было высказано утверждение, что монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

Читатель. Именно. Получается противоречие...

Автор. А где же тут противоречие? Разве из утверждения «Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел» обязано следовать обратное утверждение: «Если последовательность имеет предел, то она монотонна и ограничена»? Впоследствии мы убедимся, что необходимым условием существования предела является только ограниченность последовательности. Монотонность же отнюдь не обязательна, что и демонстрирует пример последовательности (1.9).

Вернемся, однако, к вопросу о понятии предела последовательности. Поскольку Вы правильно указали те последовательности, которые имеют предел, то, по-видимому, Вы как-то представляете себе понятие предела. Скажите своими словами.

Читатель. Предел — это такое число, к которому данная последовательность сходится (стремится).

Автор. Что значит «последовательность сходится к числу»?

Читатель. Это значит, что по мере возрастания номера места члены последовательности будут сколь угодно близко приближаться к данному числу.

Автор. А что такое «сколь угодно близко приближаться»?

Читатель. Ну, будут отличаться от данного числа сколь угодно мало. Впрочем, разве здесь нужны какие-то дополнительные пояснения?

Автор. Данное Вами «определение» предела последовательности находится всего лишь на уровне «вкусовых ощущений». Мы уже с Вами имели дело с похожей ситуацией в прошлой беседе.

**Определение предела
последовательности**

Давайте же посмотрим, что в действительно-сти скрывается за приведенной выше фразой. Для этого попросту обратимся к строгому определению понятия предела последовательности, которое затем подробно проанализируем.

Определение. Число A называется пределом последовательности (y_n) , если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство:

$$|y_n - a| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Читатель. Наверное, мне никогда не запомнить такое определение.

Автор. Не спешите запоминать. Попробуйте понять это определение, почувствовать его *структуру*, его *внутреннюю логику*. Вы убедитесь, что каждое слово в этой фразе несет определенное необходимое содержание и что более лаконично (я бы даже сказал: более изящно) дать определение пределу последовательности просто невозможно.

Прежде всего отметим логическую структуру приведенной фразы. Некое число есть предел при условии: если для любого $\varepsilon > 0$ *найдется* число N , такое что при всех $n > N$ *выполняется* неравенство (2.1). Короче говоря, необходимо, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало какое-то число N .

Далее отметим два «тонких» момента в разбираемой фразе. Во-первых, число N должно существовать для *любого* положительного числа ε . А ведь таких чисел ε , очевидно, бесконечно много. Во-вторых, неравенство (2.1) должно всякий раз (т. е. для каждого ε) выполняться при всех $n > N$. А ведь таких номеров n тоже бесконечно много!

Читатель. Теперь определение предела кажется мне еще непонятнее.

Автор. Это естественно. Ведь мы пока еще только разбираем его «по косточкам». Весьма важно с самого начала обратить внимание на «тонкие» моменты, на своего рода «изюминки». Когда Вы их поймете, тогда все и встанет на свои места.

На рис. 7 а графически изображена некая последовательность, а точнее, 40 ее первых членов. Условимся, что если какая-то закономерность подмечена на этих сорока членах, то можно считать, что эта закономерность имеет место и при $n > 40$.

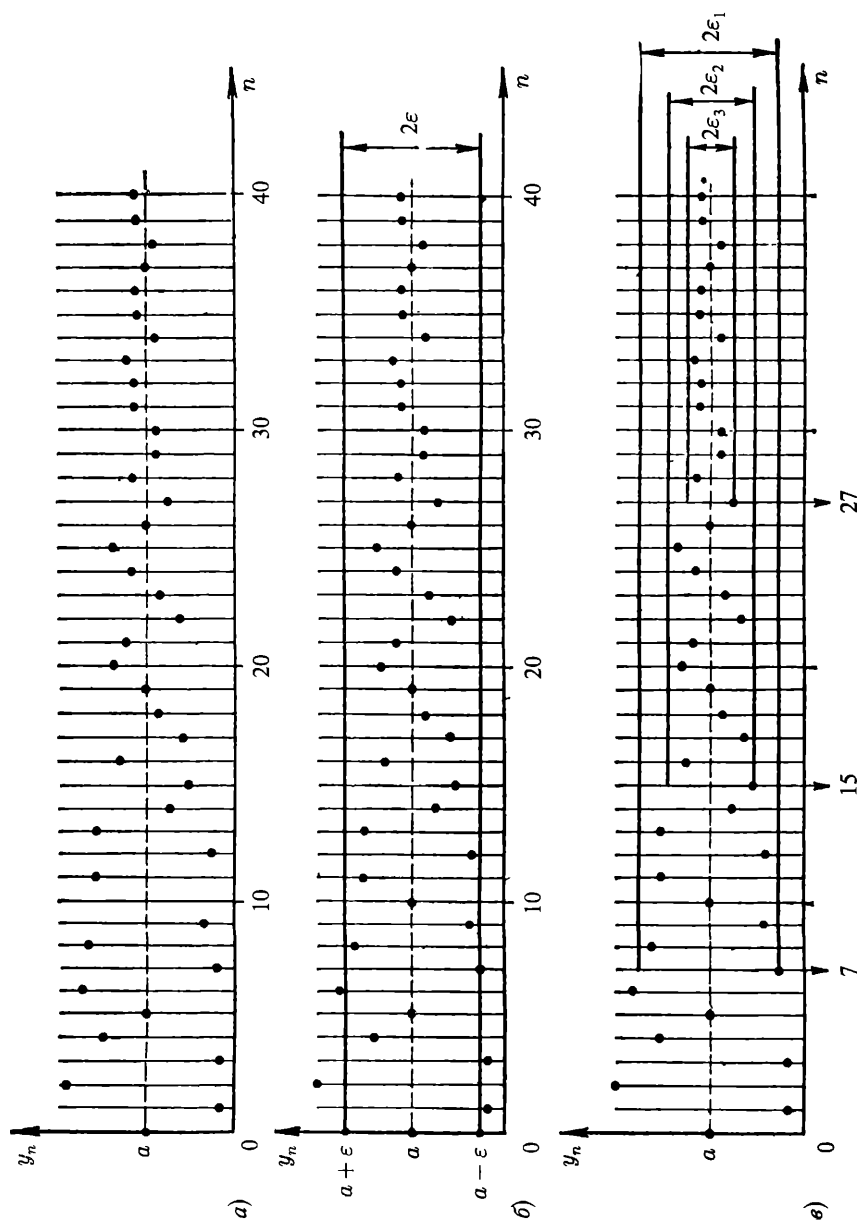


Рис. 7

Можно ли сказать, что данная последовательность сходится к числу a (иначе говоря, имеет пределом, число a)?

Читатель. Судя по всему, это так.

Автор. Давайте, однако, действовать не на основе кажущегося впечатления, а на основе определения предела последовательности. Итак, мы хотим проверить, является ли число a пределом данной последовательности. Какое действие нам предписывает определение предела?

Читатель. Надо взять положительное число ϵ ...

Автор. Какое?

Читатель. Наверное, достаточно малое...

Автор. Сама по себе фраза «достаточно малое» ни о чем нам не говорит. Число ϵ выбирается *произвольно*.

Итак, мы взяли произвольное положительное число ϵ . Обратимся к рисунку и отложим на оси y интервал длиной ϵ вверх от точки a и такой же интервал вниз от точки a . Проведем через точки $y = a + \epsilon$ и $y = a - \epsilon$ горизонтальные прямые, которые будут отграничивать такую «дозволенную полосу». Если для какого-то члена последовательности выполняется неравенство (2.1), то это означает, что соответствующая этому члену точка находится внутри упомянутой «полосы». Мы видим (рис. 7 б), что начиная с номера 8 все остальные члены нашей последовательности уже не выходят за пределы «дозволенной полосы» и, следовательно, для них выполняется неравенство (2.1). При этом мы, разумеется, полагаем, что такая ситуация имеет место также и для всех $n > 40$, не попавших на рисунок (для всего бесконечного «хвоста» последовательности).

Таким образом, для выбранного числа ϵ номер N существует. В данном случае он оказался равным 7.

Читатель. Значит, мы можем считать число a пределом последовательности.

Автор. Не торопитесь. Ведь в определении говорится: «для *любого* положительного числа ϵ ». А мы рассмотрели пока только одно число ϵ . Надо взять другое число ϵ , причем, очевидно, интересно брать не большее, а меньшее по сравнению с предыдущим число. Надо для этого второго ϵ повторить поиск номера N , и если все

окончится и в этот раз благополучно, то надо взять третье, еще более малое число ε , затем четвертое и т. д.

На рис. 7 в рассмотрены три ситуации — для $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (причем $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$). Соответственно изображены три «дозволенные полосы». Для наглядности на рисунке каждая из этих полос начинается со своего номера N — $N_1 = 7, N_2 = 15, N_3 = 27$.

Обратите внимание, что для каждого из выбранных трех чисел ε на рис. 7 в наблюдается одна и та же ситуация: сначала, до некоторого номера, последовательность может, образно говоря, «своевольничать» (ее члены могут выпадать за пределы соответствующей «дозволенной полосы»), однако после упомянутого номера действует жесткий закон — *все остальные члены последовательности (а их бесконечно много!) оказываются обязательно в пределах «полосы»*.

Читатель. Неужели мы должны перебирать бесконечно много чисел ε ?

Автор. Разумеется, нет. Да это и невозможно. Просто мы должны быть уверенными в том, что *какое бы* число $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, все равно *найдется* такой номер N , после которого весь остающийся бесконечный «хвост» последовательности окажется «запертым» в пределах соответствующей «дозволенной полосы».

Читатель. А если такой уверенности у нас нет?

Автор. Если такой уверенности нет, если, более того, можно указать такое число ε , для которого (как мы убеждаемся) невозможно «запереть» бесконечный «хвост» последовательности в пределах соответствующей «дозволенной полосы», то в таком случае рассматриваемое число a не является пределом данной последовательности.

Читатель. А когда можно считать, что такая уверенность существует?

Автор. Это мы обсудим позднее. Это уже не касается сути самого определения предела последовательности.

Итак, давайте попробуем теперь снова сформулировать упомянутое определение. Не пытайтесь ничего вспоминать, попробуйте все сказать, что называется, своими словами.

Читатель. Попробую. Число a есть предел данной последовательности, если для какого угодно положительного числа ε существует (найдется) такой номер места, что для всех последующих номеров

(для всего бесконечного «хвоста» последовательности) выполняется неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$.

Автор. Прекрасно. Вы почти слово в слово повторили то самое определение, которое, как Вам казалось, невозможно запомнить.

Читатель. Да, действительно, все оказалось вполне логичным и несложным.

Автор. Полезно заметить, что здесь проявилась диалектика мышления: некоторое понятие стало восприниматься как «несложное» после того (и именно потому), как были поняты заложенные в этом понятии «сложности». Сначала мы как бы расчлняем понятие, вскрываем «сложности», анализируем «тонкие» места, идем, одним словом, вглубь. Затем мы снова составляем понятие как некое целое — и в результате оно как целое воспринимается уже достаточно простым и несложным. И в дальнейшем мы будем всякий раз выявлять внутреннюю структуру, внутреннюю логику рассматриваемых понятий и теорем.

Итак, можно полагать, что понятие предела последовательности вполне проанализировано. Тем самым, замечу, оказался объясненным смысл фразы «последовательность сходится к числу a ». Напомню, что эта фраза представлялась Вам не требующей, как Вы выразились, каких-то дополнительных пояснений.

Читатель. Теперь она мне такой не представляется. Правда, теперь я вполне четко представляю смысл этой фразы.

Примеры
нахождения предела
по определению

Автор. А теперь вернемся к примерам (1.5), (1.7), (1.9) последовательностей, о которых шел разговор в начале беседы. Предварительно заметим, что факт сходимости последовательности (y_n) к некоторому числу a принято записывать так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$$

(читается: «предел y_n при n , стремящемся к бесконечности, равен a »; «предел» по-латыни пишется как *limes*).

Используя определение предела, убедимся в том, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2n} [1 - (-1)^n] - \frac{1}{2(n-1)} [1 + (-1)^n] \right\} = 0.$$

Начните с рассмотрения первого из указанных случаев.

Читатель. Надо доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Выбираю некоторое число ε , например $\varepsilon = 0,1$.

Автор. Я советую сначала выяснить, как в данном случае выражается модуль $|y_n - a|$.

Читатель. В данном случае этот модуль есть

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}.$$

Автор. Число ε можно, по-видимому, не конкретизировать. По крайней мере вначале.

Читатель. Понимаю. Итак, для произвольного положительного числа ε надо найти такой номер N , чтобы для всех $n > N$ выполнялось неравенство

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Автор. Совершенно верно. Продолжайте.

Читатель. Это неравенство можно переписать в виде

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Отсюда следует, что в качестве искомого номера N можно указать целую часть числа $\frac{1}{\varepsilon} - 1$. Очевидно, что при всех $n > N$ рассматриваемое неравенство будет выполняться.

Автор. Правильно. Пусть, например, $\varepsilon = 0,01$.

Читатель. Тогда $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1 = 100 - 1 = 99$.

Автор. Пусть $\varepsilon = 0,001$.

Читатель. Тогда $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1 = 999$.

Автор. Пусть $\varepsilon = 0,00015$.

Читатель. Тогда $\frac{1}{\varepsilon} - 1 = 6665, (6)$ и, следовательно, $N = 6665$.

Автор. Совершенно очевидно, что для любого ε (как бы мало оно ни было) можно указать соответствующий номер N .

Что касается доказательства равенства нулю пределов последовательностей (1.7) и (1.9), то оставим это для самостоятельной работы.

Читатель. А разве нельзя было равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ доказать проще?

Автор. Как именно?

Читатель. Сначала я перепишу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Затем учту, что при возрастании номера n дробь $\frac{1}{n}$ будет стремиться к нулю и, следовательно, ею можно пренебречь по сравнению с единицей. Вычеркнем $\frac{1}{n}$, тогда останется: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$.

Автор. На практике именно так обычно и рассуждают. Однако надо иметь в виду, что фактически в данном случае были использованы:

во-первых, тот факт, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$,

во-вторых, следующие правила:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}; \quad (2.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} z_n, \quad (2.3)$$

где $x_n = 1$, $y_n = 1 + \frac{1}{n}$, $z_n = \frac{1}{n}$. Позднее мы рассмотрим эти правила, а пока я предлагаю просто воспользоваться ими для вычисления некоторых пределов.

Рассмотрим два примера. **Первый пример:** требуется вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n - 1)/(5n - 6)$.

Читатель. Запись вычисления предела такова:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 1}{5n - 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{5 - \frac{6}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{6}{n}\right)} = \frac{3}{5}.$$

Автор. Хорошо. Пожалуйста, **второй пример**: вычислить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 1}{5n^2 + 2n - 1}.$$

Читатель. Записываем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 1}{5n^2 + 2n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n - \frac{1}{n}}{5n + 2 - \frac{1}{n}}.$$

Автор. Стоп! А Вы не задумывались, почему в предыдущем примере мы предварительно делили числитель и знаменатель дроби на n ? Ведь последовательности $(3n - 1)$ и $(5n - 6)$, очевидно, не имеют предела, поэтому правило (2.2) к ним неприменимо.

Последовательности же $\left(3 - \frac{1}{n}\right)$ и $\left(5 - \frac{1}{n}\right)$ имеют предел.

Читатель. Я Вас понял. Значит, в последнем примере надо было поделить числитель и знаменатель на n^2 — для того чтобы и в числителе, и в знаменателе оказались последовательности, имеющие предел. Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 1}{5n^2 + 2n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{6}{5}.$$

Автор. Ну вот, мы с Вами не только разобрались в понятии предела последовательности, но и немного научились вычислять пределы. А теперь пора обсудить некоторые свойства последовательностей, имеющих предел. Такие последовательности называют *сходящимися*.

Сходящиеся последовательности

Автор. Докажем теорему:

Ограниченность
сходящейся
последовательности

Теорема. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Доказательство. Пусть число a есть предел некоторой последовательности (y_n) . Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно определению предела, для выбранного ε найдется номер N , такой что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$. Значит, начиная с номера $n = N + 1$ все последующие члены последовательности удовлетворяют неравенствам

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon.$$

Что же касается членов последовательности с номерами от 1 до N , то, поскольку число таких членов *конечное*, всегда можно выбрать среди них как наибольший (обозначим его через B_1), так и наименьший (обозначим через A_1).

Остается лишь выбрать меньшее из чисел $a - \varepsilon$ и A_1 (обозначим его A) и большее из чисел $a + \varepsilon$ и B_1 (обозначим его B). Ясно, что для всех членов рассматриваемой последовательности будут выполняться неравенства: $A \leq y_n \leq B$. А это и означает, что последовательность (y_n) является ограниченной. \square

Читатель. Понятно...

Автор. Но, как видно, не очень. Давайте рассмотрим логическую структуру доказательства. Нам надо убедиться, что коль скоро последовательность имеет предел, то существуют два таких числа A и B , для которых выполняются неравенства $A \leq y_n \leq B$ для всех без исключения членов последовательности. Если бы последовательность содержала *конечное* число членов, то факт существования таких чисел был бы очевиден. Однако последовательность содержит не конечное, а *бесконечное* число членов. Вот это-то обстоятельство и усложняет положение.

Читатель. Теперь я понял! Дело в том, что наличие предела a у последовательности позволяет заключить, что в промежуток от $a - \epsilon$ до $a + \epsilon$ попадает все бесконечное количество членов последовательности, начиная с некоторого номера $n = N + 1$, так что *вне этого промежутка* может оказаться так или иначе лишь *конечное* количество членов (не больше чем N).

Автор. Совершенно верно. Как видите, затруднения с поведением бесконечного «хвоста» последовательности «берет на себя» предел. Ведь для *всех* $n > N$ выполняется неравенство $|y_n - a| < \epsilon$ — в этом главная «тонкость» данной теоремы. Что же касается первых N членов последовательности, то здесь важна конечность их числа.

Читатель. Да, теперь все понятно. Вот только насчет числа ϵ . Ведь оно не задано, мы его выбираем...

Автор. Выбор того или иного числа ϵ повлияет только на номер N . Если вы возьмете поменьше ϵ , то получите, вообще говоря, побольше N . Однако при этом количество членов последовательности, не удовлетворяющих неравенству $|y_n - a| < \epsilon$, все равно будет конечным.

А теперь попробуйте ответить на вопрос: верна ли обратная теорема? Следует ли сходимость последовательности из ее ограниченности?

Читатель. Обратная теорема неверна. Например, последовательность (1.10), приводившаяся в первой беседе, является ограниченной. Однако у нее нет предела.

Автор. Вы правы. Таким образом, мы можем сделать вывод:

Ограниченность последовательности есть необходимое условие ее сходимости, однако оно не является достаточным условием.

Если последовательность сходится, то она ограничена. Если последовательность не ограничена, то она заведомо не сходится.

Достаточное
условие сходимости

Читатель. А есть ли достаточное условие сходимости последовательности?

Автор. Мы уже отмечали это условие в предыдущей беседе. Это есть условие одновременной ограниченности и монотонности последовательности. Существует теорема, известная как *теорема Вейерштрасса*, утверждающая:

Теорема Вейерштрасса. Если последовательность является одновременно ограниченной и монотонной, то она имеет предел.

К сожалению, доказательство этой теоремы достаточно сложно; мы не будем его приводить. Просто я прошу еще раз посмотреть на последовательности (1.5), (1.7), (1.13) (см. первую беседу), удовлетворяющие условиям теоремы Вейерштрасса.

Читатель. Насколько я представляю, обратная теорема и в этом случае неверна? Ведь последовательность (1.9) (из первой беседы) имеет предел, но не является монотонной.

Автор. Правильно. Итак, заключаем:

Одновременная ограниченность и монотонность последовательности есть достаточное (но не необходимое!) условие ее сходимости.

Читатель. Нетрудно и запутаться...

Автор. Чтобы не запутаться, рассмотрим следующий условный рисунок (рис. 8). Представим себе, что все ограниченные последовательности «собраны» (как если бы это была рассыпанная по полу картошка) на участке, заштрихованном горизонтальными линиями; все монотонные последовательности — на участке, заштрихованном наклонными линиями; наконец, все сходящиеся последовательности — на участке, заштрихованном вертикальными линиями. На рисунке показано, как в соответствии с рассмотренными теоремами пересекаются друг с другом все эти участки (при этом сама по себе форма того или иного участка не скрывает какого-либо смысла). Как видно из рисунка, участок, заштрихованный

вертикально, целиком находится внутри участка, заштрихованного горизонтально. Это означает, что *любая сходящаяся последовательность должна быть также и ограниченной*. Пересечение участков, заштрихованных горизонтально и наклонно, попадает внутрь участка, заштрихованного вертикально. Это означает, что *любая последовательность, являющаяся одновременно ограниченной и монотонной, должна быть также и сходящейся*. Легко видеть, что возможны лишь пять типов последовательностей; на рисунке точками *А, В, Г, Д* отмечены пять последовательностей, относящихся к разным типам. Попробуйте назвать эти последовательности и заодно укажите соответствующий пример из числа приведенных в первой беседе последовательностей.

Читатель. Точка *А* попала на пересечение всех трех участков. Это есть ограниченная, монотонная, сходящаяся последовательность. Примеры — последовательности (1.5), (1.7), (1.13).

Автор. Пожалуйста, дальше.

Читатель. Точка *В* — ограниченная, сходящаяся, но не монотонная последовательность. Пример — последовательность (1.9).

Точка *В* — ограниченная, но не сходящаяся и не монотонная последовательность. Пример — последовательность (1.10).

Точка *Г* — монотонная, но не сходящаяся и не ограниченная последовательность. Примеры — последовательности (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.6), (1.11), (1.12).

Точка *Д* (не попавшая ни в один из наших участков) — не монотонная, не сходящаяся и не ограниченная последовательность. Пример — последовательность (1.8).

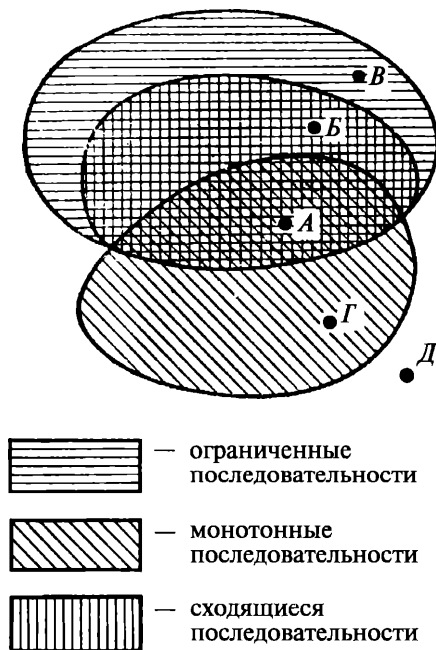


Рис. 8

Автор. Какие же варианты оказались невозможными?

Читатель. Не существует ограниченной, монотонной, не сходящейся последовательности. Кроме того, невозможно сочетание неограниченности и сходимости.

Автор. Как видите, условный рисунок (см. рис. 8) хорошо помогает уяснить связь между такими свойствами последовательности, как *ограниченность, монотонность, сходимость*.

Единственность
предела

Далее будем рассматривать только сходящиеся последовательности. Докажем теорему:

Теорема. Если последовательность сходится, то она имеет только один предел.

Это есть теорема *единственности предела*: сходящаяся последовательность не может иметь два или более пределов.

Доказательство. Допустим противное тому, что требуется доказать. Пусть данная сходящаяся последовательность имеет два предела: a_1 и a_2 .

Выберем число $\varepsilon < \frac{|a_1 - a_2|}{2}$. Пусть, например, $\varepsilon = \frac{|a_1 - a_2|}{3}$.

Поскольку a_1 — предел, то существует (для выбранного ε) номер N_1 , такой что при всех $n > N_1$ члены последовательности (весь ее бесконечный «хвост») должны оказаться внутри промежутка 1 (рис. 9), т. е. должно выполняться неравенство $|y_n - a_1| < \varepsilon$. С другой стороны, поскольку a_2 — предел, то существует номер N_2 , такой что при всех $n > N_2$ члены последовательности (опять-таки бесконечный «хвост»!)

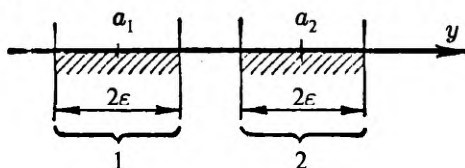


Рис. 9

должны оказаться внутри промежутка 2, т. е. должно выполняться неравенство $|y_n - a_2| < \varepsilon$. И получается, что для всех номеров, которые больше большего из номеров N_1 и N_2 , должно иметь место явно невозможное: одновременное попадание членов последовательности и в промежуток 1 и в промежуток 2. Это противоречие и доказывает теорему. □

Приведенное доказательство содержит по крайней мере два достаточно «тонких» места. Сможете ли Вы указать их?

Читатель. Одно я во всяком случае вижу. Если a_1 и a_2 — пределы, то как бы ни вела себя последовательность *вначале*, ее члены рано или поздно обязаны *концентрироваться* одновременно и около a_1 , и около a_2 , что, конечно, невозможно.

Автор. Правильно. Но есть еще одно «тонкое» место: как бы ни были близки числа a_1 и a_2 , между ними должен существовать промежуток с хотя бы и очень малой, но отличной от нуля длиной.

Читатель. Но это очевидно.

Автор. Согласен. Однако эта «очевидность» связана с одним весьма тонким обстоятельством, без которого мы бы попросту не имели математического анализа. Как Вы, наверное, давно подметили, нельзя указать на числовой прямой две *соседние* точки. Если указана одна точка, то уже принципиально нельзя говорить о «соседней» точке. Иначе говоря, как бы Вы ни выбирали пару точек на числовой прямой, всегда можно указать между ними сколь угодно много точек.

Возьмите, например, отрезок $[0; 1]$. Выкиньте точку 1. Вы получите полуоткрытый промежуток (полуинтервал) $[0; 1[$. Можете ли Вы указать наибольшее число из этого промежутка?

Читатель. Нет, это невозможно.

Автор. Верно. Однако если бы существовала точка, соседняя с точкой 1, то после удаления последней эта «соседка» и была бы наибольшим числом. Замечу, что многие «тонкости», многие «секреты» теорем математического анализа связаны так или иначе с невозможностью указать на числовой прямой две соседние точки, с невозможностью указать наибольшее и наименьшее число на любом открытом промежутке.

Но вернемся к свойствам сходящихся последовательностей и докажем следующую теорему:

Арифметика
пределов

Теорема. Если последовательности (y_n) и (z_n) сходятся (обозначим их пределы соответственно через a и b), то последовательность $(y_n + z_n)$ тоже сходится, причем ее предел равен $a + b$.

Читатель. Эта теорема есть не что иное, как правило (2.3), отмечавшееся в прошлой беседе.

Автор. Оно самое. Итак, попробуйте доказать сформулированную теорему.

Доказательство.

Читатель. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Для него найдется номер N_1 , такой что для всех членов первой последовательности с номерами $n > N_1$ будет выполняться неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$. Кроме того, для того же самого ε найдется номер N_2 , такой что для всех членов второй последовательности с номерами $n > N_2$ будет выполнено неравенство $|z_n - b| < \varepsilon$. Если далее выбрать наибольший из номеров N_1 и N_2 (обозначим его как N), то при всех $n > N$ будут одновременно выполняться оба неравенства: $|y_n - a| < \varepsilon$ и $|z_n - b| < \varepsilon$. Дальше я затрудняюсь...

Автор. Итак, Вы установили, что для произвольного числа ε найдется номер N , такой что при всех $n > N$ имеем одновременно и $|y_n - a| < \varepsilon$, и $|z_n - b| < \varepsilon$. А что можно сказать (для этих n) о модуле $|(y_n + z_n) - (a + b)|$? Напомню, что $|A + B| \leq |A| + |B|$.

Читатель. Рассмотрим:

$$\begin{aligned} |(y_n + z_n) - (a + b)| &= |(y_n - a) + (z_n - b)| \leq \\ &\leq |y_n - a| + |z_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Автор. Вот теорема и доказана.

Читатель. Но мы установили здесь, что существует номер N , такой, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|(y_n + z_n) - (a + b)| < 2\varepsilon.$$

А надо, чтобы выполнялось неравенство

$$|(y_n + z_n) - (a + b)| < \varepsilon.$$

Автор. Это, можно считать, пустяки. Если, рассматривая последовательность $(y_n + z_n)$, Вы выбрали число ε , то при рассмотрении последовательностей (y_n) и (z_n) Вы должны выбрать число $\frac{\varepsilon}{2}$ и именно для $\frac{\varepsilon}{2}$ искать номера N_1 и N_2 .

□

Итак, мы убедились, что если последовательности (y_n) и (z_n) сходятся, то последовательность $(y_n + z_n)$ тоже сходится (при этом мы выяснили даже, чему равен ее предел). А как Вы думаете, верно ли обратное утверждение?

Читатель. Мне кажется, верно.

Автор. Ошибаетесь. Вот Вам простой пример:

$$(y_n) = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \dots;$$

$$(z_n) = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{7}{8}, \dots;$$

$$(y_n + z_n) = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

Как видите, последовательности (y_n) и (z_n) не являются сходящимися, а последовательность $(y_n + z_n)$ — сходящаяся (ее предел равен, очевидно, единице).

Таким образом, если последовательность $(y_n + z_n)$ сходится, то возможны оба варианта:

- последовательности (y_n) и (z_n) тоже сходятся;
- последовательности (y_n) и (z_n) расходятся.

Читатель. А может ли быть так, чтобы последовательность (y_n) сходилась, а последовательность (z_n) расходилась?

Автор. Нетрудно убедиться, что такой вариант невозможен. Предварительно заметим, что если последовательность (y_n) имеет предел a , то последовательность $(-y_n)$ тоже сходится и имеет предел $-a$. Это следует из легко доказываемого равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cy_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

где c — постоянное число.

Итак, предположим, что последовательность $(y_n + z_n)$ сходится и имеет пределом число A и что последовательность (y_n) тоже сходится и имеет предел a . Применим доказанную ранее теорему о сумме сходящихся последовательностей к последовательностям $(y_n + z_n)$ и $(-y_n)$. Мы немедленно получаем, что последовательность $(y_n + z_n - y_n)$, иначе говоря последовательность (z_n) , тоже сходится, причем ее предел равен $A - a$.

Читатель. Действительно, последовательность (z_n) не может быть в данном случае расходящейся.

Автор. Остановимся на важном частном случае сходящихся последовательностей — так называемой *бесконечно малой последовательности*, или, иначе говоря, *бесконечно малой*. Так называют сходящуюся последовательность, предел которой равен нулю. Примерами бесконечно малой являются последовательности (1.7) и (1.9) из первой беседы.

Отметим, что любой сходящейся последовательности (y_n) (имеющей предел a) соответствует своя бесконечно малая последовательность (α_n) , где $\alpha_n = y_n - a$. Недаром математический анализ называют иногда исчислением бесконечно малых.

Предлагаю Вам доказать теорему:

Теорема. Если (y_n) — ограниченная последовательность, а (α_n) — бесконечно малая, то последовательность $(y_n \alpha_n)$ является бесконечно малой.

Доказательство.

Читатель. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Надо убедиться, что существует номер N , такой, что при всех $n > N$ члены последовательности $(y_n \alpha_n)$ удовлетворяют неравенству $|y_n \alpha_n| < \varepsilon$.

Автор. В порядке подсказки: поскольку последовательность (y_n) ограниченная, то можно указать число M , такое что для всех номеров выполняется неравенство $|y_n| \leq M$.

Читатель. Тогда все просто. Мы знаем, что последовательность (α_n) — бесконечно малая. Значит, для любого $\varepsilon' > 0$ можно найти номер N , такой, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon'$. В качестве ε' я выберу $\frac{\varepsilon}{M}$. Тогда при $n > N$ будем иметь:

$$|y_n \alpha_n| = |y_n| |\alpha_n| \leq M |\alpha_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Теорема доказана. □

Автор. Отлично. Пользуясь только что доказанной теоремой, можно совсем просто доказать следующую теорему:

Теорема. Если последовательности (y_n) и (z_n) сходятся (обозначим их пределы соответственно через a и b), то последовательность $(y_n z_n)$ тоже сходится, причем ее предел равен ab .

Доказательство. Представим: $y_n = a + \alpha_n$ и $z_n = b + \beta_n$. Последовательности (α_n) и (β_n) являются бесконечно малыми. Используя такое представление, запишем:

$$y_n z_n = ab + \gamma_n, \quad \text{где} \quad \gamma_n = b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n \beta_n.$$

Применяя доказанную выше теорему, заключаем, что последовательности $(b\alpha_n)$, $(a\beta_n)$ и $(\alpha_n \beta_n)$ являются бесконечно малыми...

Читатель. Но почему Вы делаете такое заключение также и о последовательности $(\alpha_n \beta_n)$?

Автор. Потому что любая сходящаяся последовательность (и в частности, бесконечно малая) является ограниченной.

Используя далее теорему о сумме сходящихся последовательностей, заключаем, что последовательность (γ_n) есть бесконечно малая, откуда немедленно следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n z_n) = ab.$$

Теорема доказана. □

Читатель. Наверное, следует рассмотреть также и обратные варианты, предполагающие сходимость последовательности $(y_n z_n)$. Что можно сказать в этом случае о последовательностях (y_n) и (z_n) ?

Автор. В общем случае ничего определенного сказать нельзя. Очевидно, возможна ситуация, когда последовательности (y_n) и (z_n) сходятся. Однако возможна и ситуация, когда, например, последовательность (y_n) сходится, а последовательность (z_n) расходится. Вот простой пример:

$$\begin{aligned} (y_n) &= 1, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{25}, \dots, \quad \frac{1}{n^2}, \dots; \\ (z_n) &= 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \dots, \quad n, \dots; \\ (y_n z_n) &= 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \dots, \quad \frac{1}{n}, \dots \end{aligned}$$

Кстати, обратите внимание на тот факт, что в данном случае мы получаем бесконечно малую последовательность, умножая бесконечно малую на последовательность, не являющуюся ограниченной. В общем же случае такое перемножение не приводит к бесконечно малой.

Наконец, возможна ситуация, когда последовательность $(y_n z_n)$ сходится, а последовательности (y_n) и (z_n) расходятся. Вот пример подобной ситуации:

$$\begin{aligned}(y_n) &= 1, \quad \frac{1}{4}, \quad 3, \quad \frac{1}{16}, \quad 5, \quad \frac{1}{36}, \quad 7, \dots; \\(z_n) &= 1, \quad 2, \quad \frac{1}{9}, \quad 4, \quad \frac{1}{25}, \quad 6, \quad \frac{1}{49}, \dots; \\(y_n z_n) &= 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \dots.\end{aligned}$$

Далее сформулируем еще одну теорему:

Теорема. Если (y_n) и (z_n) — сходящиеся последовательности (их пределы равны соответственно a и b , причем $b \neq 0$), то последовательность $\left(\frac{y_n}{z_n}\right)$ тоже сходится и ее предел равен $\frac{a}{b}$.

Доказательство этой теоремы мы опустим.

Читатель. А не может ли случиться так, что последовательность (z_n) содержит члены, равные нулю?

Автор. Такие члены возможны. Однако в любом случае число членов последовательности, равных нулю, может быть только конечным. Кстати, подумайте сами почему.

Читатель. Догадываюсь. Ведь последовательность (z_n) имеет предел b , не равный нулю.

Автор. Пусть, для определенности, $b > 0$.

Читатель. Выберем, например, $\varepsilon = \frac{b}{2}$. Найдется номер N , такой что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|z_n - b| < \frac{b}{2}$.

Очевидно, что все эти z_n (весь бесконечный «хвост» последовательности) будут положительны. Следовательно, нули среди членов последовательности (z_n) могут встретиться разве лишь среди конечного числа первых N членов.

Автор. Прекрасно. Итак, возможное число нулей среди членов последовательности (z_n) может быть только конечным. Но в таком случае можно безболезненно выкинуть эти члены. Ведь *изъятие любого конечного числа членов последовательности не влияет на ее свойства*. Так, сходящаяся последовательность остается сходящейся, причем предел ее не изменяется. Изъятие конечного числа членов может повлиять лишь на величину номера N (при данном ε), что, конечно, несущественно.

Читатель. Вполне очевидно, что *изъятие* конечного числа членов последовательности не влияет на ее сходимость. А влияет ли *добавление* конечного числа членов?

Автор. Добавление конечного числа новых членов также не влияет на сходимость последовательности. Ведь сколько бы новых членов и в какое бы место последовательности Вы ни добавили, все равно можно указать наибольший номер N , после которого весь остальной бесконечный «хвост» последовательности остается неизменным. Как бы ни было велико число новых членов и как бы далеко от начала последовательности Вы их ни помещали, все равно Вы не в силах изменить бесконечный «хвост». А ведь именно он и определяет сходимость (расходимость) последовательности.

Итак, мы пришли к выводу, что

изъятие, добавление и вообще изменение любого конечного числа членов последовательности не влияет на ее сходимость и не изменяет предела (в случае, если последовательность сходящаяся).

Читатель. Мне кажется, что изъятие бесконечного числа членов (например, через одного) также не влияет на сходимость последовательности.

Автор. Здесь будьте осторожнее. Если исходная последовательность сходится, то изъятие бесконечного числа ее членов (при условии, разумеется, что число остающихся членов бесконечно) действительно не отражается ни на самом факте сходимости, ни на величине предела. Если же исходная последовательность расходится, то изъятие бесконечного числа ее членов может в некоторых случа-

ях превратить рассматриваемую последовательность в сходящуюся. Вычеркните, например, из расходящейся последовательности (10) (см. первую беседу) все члены, стоящие на четных местах. У Вас получится сходящаяся последовательность:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots$$

А теперь предположим, что из заданной сходящейся последовательности Вы образуете две новые сходящиеся последовательности. Пусть первая из новых последовательностей состоит из членов исходной последовательности, стоящих на *нечетных* местах, а вторая — на *четных* местах. Что можно сказать о пределах этих новых последовательностей?

Читатель. Легко доказать, что обе новые последовательности будут иметь одинаковый предел, равный пределу исходной последовательности.

Автор. Вы правы.

Далее заметим, что из заданной сходящейся последовательности можно образовать не только две, но *любое конечное число* m новых сходящихся (и притом к одному и тому же пределу) последовательностей. Это можно сделать, например, следующим образом. В первую из новых последовательностей отбираем 1-й, $(m+1)$ -й, $(2m+1)$ -й, $(3m+1)$ -й... члены исходной последовательности. Во вторую последовательность Вы отбираете 2-й, $(m+2)$ -й, $(2m+2)$ -й, $(3m+2)$ -й... члены исходной последовательности. Аналогично строите третью, четвертую и прочие последовательности.

В заключение посмотрим, как можно «испортить» сходящуюся последовательность, превратив ее в расходящуюся. Разумеется, возможны разные способы. Укажите какой-нибудь попроще.

Читатель. Можно, например, заменить все члены, стоящие на четных местах, на некоторое постоянное число, которое не равно пределу исходной последовательности. Так, сходящаяся последовательность (1.5) (см. первую беседу) может быть «испорчена» следующим образом:

$$\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{4}, 2, \frac{5}{6}, 2, \frac{7}{8}, 2, \dots$$

Автор. Я полагаю, что Вы достаточно хорошо уловили сущность сходящихся последовательностей. Теперь мы можем сделать существенный шаг вперед и перейти к рассмотрению одного из важнейших понятий в математическом анализе — к понятию функции.

Функция

Читатель. Но функции широко используются уже в элементарной математике.

Неформальное
определение функции

Автор. Разумеется, Вы давно знакомы с *числовыми функциями*. Более того, Вам приходилось немало работать с различными числовыми функциями. И все же будет совсем не лишним задуматься над тем, что такое есть функция. Начнем с того, что попробуем выяснить, какой образ соответствует в Вашем сознании этому понятию. Иначе говоря, как Вы представляете себе функцию.

Читатель. Функцию я представляю себе как некую зависимость между двумя *переменными величинами* — между x и y . Точнее говоря, это есть зависимость переменной величины y от переменной величины x .

Автор. Что такое «переменная величина»?

Читатель. Это такая величина, которая может принимать различные значения.

Автор. Можете ли Вы объяснить, какой смысл вкладывается в выражение «величина принимает значение»? Собственно говоря, что это такое? Что, в частности, побуждает величину «принимать то или иное значение»? Разве Вы не чувствуете, что само понятие переменной величины (если Вы желаете им пользоваться) нуждается в определении?

Читатель. А нельзя ли сказать так: функция $y = f(x)$ есть зависимость между x и y , где x и y — числа?

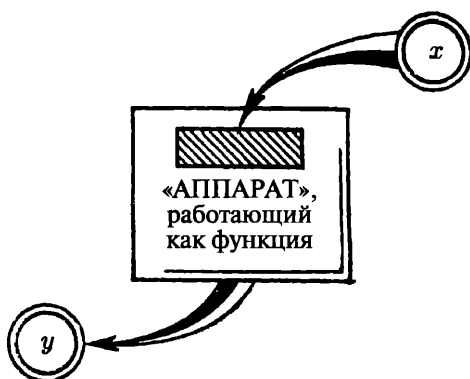


Рис. 10

Автор. Я вижу, Вы решили избежать употребления понятия *переменная величина*. Допустим, что x — некое число и y — некое число. Но объясните, пожалуйста, что такое «зависимость между двумя числами»?

Читатель. Впрочем, фразы «независимая переменная» и «зависимая переменная» встречаются в учебнике по математике...

Автор. Понятие переменной вводится в учебнике уже после того, как дано определение понятия функции.

Читатель. Похоже, что я запутался...

Автор. А между тем «сконструировать» образ числовой функции совсем нетрудно. Причем я имею в виду именно *образ*, а не *математическое определение*, о котором речь пойдет позднее.

Дело в том, что числовую функцию можно представлять себе как некий «аппарат», который *по числу дает число*. Вы закладываете в этот «аппарат» некоторое число (число x на условном рис. 10); «аппарат» срабатывает и выдает новое число (число y на указанном рисунке).

Возьмем, например, функцию

$$y = 4x^2 - 1.$$

Если заложить в этот «аппарат» число $x = 2$, то на «выходе» получится число $y = 15$; если заложить число $x = 3$, то получится $y = 35$; если заложить $x = 10$, то получится $y = 399$ и т. д.

Читатель. А как может выглядеть такой «аппарат»? Ведь рис. 10, как Вы сами говорите, условный рисунок.

Автор. В данном случае это неважно. Это не влияет на сущность функции. Впрочем, можно «изобразить» функцию так:

$$4\square^2 - 1.$$

Здесь квадратик есть «окошко», куда надо закладывать числа. Запомним, что таких «окошек» может быть и несколько. Например,

$$\frac{4\square^2 - 1}{|\square| + 1}.$$

Читатель. Это есть, очевидно, функция

$$y = \frac{4x^2 - 1}{|x| + 1}.$$

Автор. Конечно. В данном случае каждое конкретное число надо закладывать в оба «окошка» одновременно.

Между прочим, весьма важно всегда мысленно видеть в формуле, задающей функцию, такое «окошко» (или «окошки»). Предположим, например, что требуется перейти от некоторой функции $y = f(x)$ к функции $y = f(x - 1)$ (такой переход соответствует смещению графика функции вдоль оси x на единицу в положительном направлении). Если Вы четко представляете себе упомянутое «окошко» («окошки»), то достаточно попросту заменить в нем (в них) x на $x - 1$. Сказанное иллюстрирует рис. 11, на котором используется функция

$$y = \frac{4x^2 - 1}{|x| + 1}.$$

Разумеется, в результате замены x на $x - 1$ мы приходим к новой функции (к новому «аппарату»):

$$\frac{4(\square - 1)^2 - 1}{|\square - 1| + 1}; \quad y = \frac{4(x - 1)^2 - 1}{|x - 1| + 1}.$$

Читатель. Понимаю. Если бы, например, требовалось перейти от функции $y = f(x)$ к функции $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$, то в этом случае используемая на рис. 11 функция превратилась бы в функцию

$$y = \frac{\frac{4}{x^2} - 1}{\left|\frac{1}{x}\right| + 1}.$$

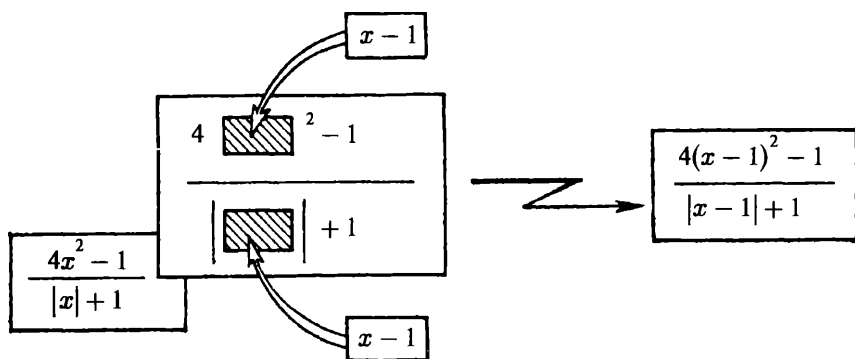


Рис. 11

Автор. Правильно. Кстати, попробуйте найти функцию $y = f(x)$, если известно, что

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = 3x.$$

Читатель. Я затрудняюсь...

Автор. В предложенном уравнении замените x на $\frac{1}{x}$.

Читатель. Тогда мы получим уравнение:

$$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}.$$

Теперь понятно. Вместе с исходным уравнением полученное уравнение образует систему двух уравнений относительно $f(x)$ и $f\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\begin{cases} 2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = 3x; \\ 2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}. \end{cases}$$

Умножим все члены второго уравнения на 2 и затем сложим с первым уравнением. В результате находим:

$$f(x) = x + \frac{2}{x}.$$

Автор. Совершенно верно.

Читатель. В связи с Вашим замечанием о том, что числовая функция может рассматриваться как аппарат, который по числу дает число, у меня возник вопрос: существуют ли в математике иные «аппараты»?

Автор. Существуют. Наряду с числовой функцией рассмотрим также понятия «оператор» и «функционал».

Читатель. Признаться, я никогда не встречался с такими понятиями.

Автор. Я это знаю. Однако рис. 12 позволит Вам без особого труда составить себе общее представление об указанных понятиях и, кроме того, позволит лучше уяснить место и роль числовой функции в аппарате математики. Из рисунка Вы видите:

- *числовая функция* есть «аппарат», который *по числу дает число* (в этот «аппарат» закладываются числа; на «выходе» получаются числа);
- *оператор* есть «аппарат», который *по числовой функции дает числовую функцию* (в этот «аппарат» закладываются функции; на «выходе» получаются функции; как принято говорить, оператор действует на функцию, в результате чего возникает новая функция);
- *функционал* есть «аппарат», который *по числовой функции дает число* (в этот «аппарат» закладываются функции; на «выходе» получаются числа — конкретное число «в ответ» на конкретную функцию).

Читатель. Нельзя ли дать пример оператора и функционала?



Рис. 12

Автор. Потерпите немного. В последующих беседах мы встретимся как с понятием оператора, так и с понятием функционала. А пока ограничимся общим взглядом на указанные понятия и вернемся к основному предмету разговора — к числовой функции.

Функция как закон.
Область определения
функции

Поставим вопрос: что надо задать для того, чтобы возник «аппарат», называемый числовой функцией?

Читатель. Надо, очевидно, задать какой-то закон или какое-то правило, согласно которому мы могли бы всякий раз предвидеть, какое именно число появится на «выходе» в ответ на то или иное число, поданное на «вход».

Автор. Вы неплохо выразились. Заметим, что такой закон естественно назвать *законом числового соответствия*. Однако одного только закона числового соответствия недостаточно для того, чтобы задать числовую функцию.

Читатель. А что же еще требуется?

Автор. Как Вы полагаете, всякое ли число можно закладывать в тот или иной конкретный аппарат — функцию?

Читатель. Я понял. Надо также задать то числовое множество, из которого можно брать числа, подаваемые на «вход» данной функции.

Автор. Правильно. Это числовое множество принято называть *областью определения функции*.

Таким образом, чтобы задать числовую функцию, надо задать две «вещи»:

- 1) область определения (некоторое числовое множество);
- 2) закон числового соответствия.

Согласно этому закону *каждому числу из области определения функции ставится в соответствие некоторое число, называемое значением функции*.

Читатель. Получается, что фактически мы имеем здесь дело с двумя числовыми множествами. С одной стороны — множество, называемое областью определения функции; с другой стороны — множество значений функции.

Автор. Вот тут-то мы и подошли вплотную к математическому определению понятия *функции*, которое позволит нам обходиться впредь без немного таинственного понятия — *аппарат*.

Обратимся к рис. 13. Он относится к конкретной функции:

$y = \sqrt{1 - x^2}$. На рисунке показаны два числовых множества: множество D (в данном случае это есть отрезок $[-1; 1]$) и множество E (отрезок $[0; 1]$). Для удобства эти множества показаны на отдельных числовых прямых.

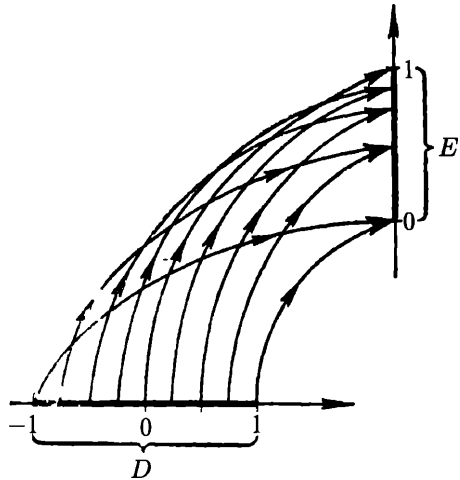


Рис. 13

Множество D есть область определения функции. Множество E есть множество значений функции. Каждому числу из множества D ставится в соответствие *одно* число из множества E (каждому числу на «входе» функции ставится в соответствие *одно* число на «выходе» функции). Это обстоятельство изображается на рисунке при помощи соответствующих стрелок от точек множества D к точкам множества E .

Читатель. На рисунке показано, что двум *разным* числам из множества D ставится в соответствие одно число из множества E .

Автор. Это не противоречит фразе «каждому числу из D ставится в соответствие одно число из E ». Ведь я же не говорил, что *разным* числам из D должны соответствовать обязательно *разные* числа из E . Так что подмеченное Вами обстоятельство (связанное, кстати говоря, со спецификой рассматриваемой здесь конкретной функции) принципиального значения не имеет. Нескольким числам из D может соответствовать одно число из E . Запрещена лишь обратная ситуация. Нельзя, чтобы одному числу из D соответствовало несколько разных чисел из E . Подчеркнем: каждому числу из множества D должно соответствовать *только одно* (и не более!) число из множества E .

Теперь мы можем сформулировать математическое определение числовой функции.

Определения
понятия числовой
функции

Определение. Пусть даны два числовых множества D и E и пусть каждому элементу x из множества D (сокращенно записывают: каждому $x \in D$) однозначно поставлен в со-

ответствии некоторый элемент y из множества E . Тогда говорят, что задана функция $y = f(x)$ на множестве D со значениями в множестве E . Говорят, что аргумент x функции пробегает множество D , а ее значения принадлежат множеству E .

При этом иногда отмечают (а чаще — молчаливо подразумевают), что как множество D , так и множество E являются подмножествами множества R всех действительных чисел (последнее как раз и называют *числовой прямой*).

Впрочем, определение функции можно переформулировать немного иначе, используя термин «отображение». Вернемся к рис. 13. Вообразим, что число стрелок от точек множества D к точкам множества E бесконечно велико (мысленно представим, что такие стрелки проведены от каждой точки множества D). Не правда ли, такая мысленная картина порождает в сознании представление о том, что числовое множество D отображается на числовое множество E ?

Читатель. Действительно так.

Автор. Вот это отображение и можно использовать для определения понятия функция.

Определение. Можно сказать, что числовая функция есть отображение некоторого числового множества D (являющегося областью определения функции) на другое числовое множество E (множество значений функции).

Итак, числовая функция — это *отображение одного числового множества на другое*. При этом термин «отображение» следует, очевидно, понимать, исходя из обсуждавшегося выше представления о числовом соответствии. В записи $y = f(x)$ буква f обозначает собственно функцию (т. е. отображение), при этом $x \in D$, а $y \in E$.

Читатель. Если *числовая функция* — это отображение одного числового множества на другое числовое множество, то в таком случае *оператор* может рассматриваться как отображение некоторого множества числовых функций на другое множество функций,

а *функционал* — как отображение некоторого множества функций на некоторое числовое множество.

Автор. Вы совершенно правы.

Читатель. Я заметил, что Вы настойчиво употребляете (и я следую Вам) термин «числовая функция». А ведь обычно говорят более коротко — «функция». Насколько необходимо здесь прилагательное «числовая»?

Примеры
функций

Автор. Вы затронули весьма важный вопрос. Дело в том, что в современной математике понятие функции является существенно более широким, чем понятие числовой функции. В широком смысле понятие функции включает в себя, в частности, и числовую функцию, и оператор, и функционал, так как это понятие отождествляют с отображением одного множества на другое независимо от природы самих множеств. Вы сами только что обратили внимание на то, что и оператор, и функционал являются отображениями некоторых множеств на некоторые множества. В частном случае, когда отображается числовое множество на числовое множество, приходим к *числовой* функции. В общем же случае природа отображаемых друг на друга множеств может быть *любой*. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть множество D — множество рабочих дней в учебном году, а множество E — множество учащихся в классе. Используя эти множества, можно задать функцию, называемую расписанием дежурств в классе. При составлении расписания каждому элементу из множества D (каждому рабочему дню в году) однозначно ставится в соответствие некоторый элемент из множества E (некоторый учащийся). Данная функция есть *отображение множества рабочих дней на множество учащихся*. Можно сказать также, что это есть функция, заданная на множестве рабочих дней и принимающая значения в множестве учащихся.

Читатель. Это немного неожиданно. К тому же эти множества имеют конечное число элементов...

Автор. Последнее непринципиально.

Читатель. Фраза «значения в множестве учащихся» звучит как-то непривычно...

Автор. Потому что под термином «значение» Вы привыкли подразумевать «числовое значение».

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 2. Пусть D — множество всех треугольников, а E — множество положительных чисел. Используя эти множества, укажем две функции — площадь треугольника и периметр треугольника. Обе эти функции являются отображениями (разумеется, разными) *множества треугольников на множество положительных чисел*. Можно сказать, что указанные функции заданы на множестве всех треугольников и принимают значения в множестве положительных чисел.

Пример 3. Пусть D — множество всех треугольников, а E — множество всех кругов. Отображением множества D на множество E может быть функция, представляющая собой круг, вписанный в треугольник, либо функция, представляющая собой круг, описанный около треугольника. Обе эти функции заданы на множестве всех треугольников и принимают значения в множестве всех кругов.

Кстати говоря, можно ли аналогичным образом «сконструировать» *обратную* функцию — функцию, заданную на множестве всех кругов и принимающую значения в множестве всех треугольников?

Читатель. Наверное, можно.

Автор. Нет нельзя. Ведь в данный круг можно вписать (а также и описать около него) сколь угодно много различных треугольников. Иначе говоря, каждому элементу из множества E (каждому кругу) придется поставить в соответствие сколь угодно много различных элементов из множества D (сколь угодно много треугольников). В этом случае функция, очевидно, не существует (отображение не реализуется).

Однако положение можно поправить, если сузить множество треугольников...

Читатель. Я, кажется, догадался. В качестве множества D надо выбрать множество всех *равносторонних* треугольников. Тогда можно реализовать как отображение множества D на множество E (на множество всех кругов), так и обратное отображение — отображение множества E на множество D . Ведь в данный круг можно вписать (или описать около него) только один равносторонний треугольник.

Автор. Очень хорошо. Вижу, что Вы поняли сущность идеи функциональной зависимости. Подчеркнем, что с самой широкой точки

зрения эта идея есть идея отображения одного множества каких-то объектов на другое множество каких-то объектов. Поэтому в качестве функции могут выступать как числовая функция, так и оператор или функционал. Как мы видели, функцией является площадь или периметр геометрической фигуры, круг, вписанный в треугольник или описанный около него, расписание дежурств в классе и т. д. Очевидно, что список разнообразных примеров функций может быть сколько угодно большим.

Читатель. Должен признаться, что такое широкое толкование понятия функции для меня является новым.

Автор. Впрочем, в дальнейшем мы с Вами будем использовать из богатого арсенала функций (отображений) только *числовые функции, операторы и функционалы*. В связи с этим мы будем, как это обычно принято, применять к числовой функции термин «функция», выделяя *оператор и функционал* как самостоятельные понятия.

А теперь давайте обратимся к уже знакомому нам понятию числовой последовательности с точки зрения идеи отображения.

Читатель. Числовая последовательность есть, очевидно, отображение множества натуральных чисел на некоторое другое числовое множество. Элементы этого второго множества — члены последовательности. Числовая последовательность есть, следовательно, частный случай числовой функции. Область определения этой функции — множество натуральных чисел.

Автор. Правильно. Однако имейте в виду, что ниже мы будем иметь дело с числовыми функциями, область определения которых есть *числовая прямая*, либо ее *промежуток* (промежутки). Именно такие числовые функции мы будем подразумевать всякий раз, когда будем использовать понятие функции.

Виды числовых промежутков

В связи с этим уместно напомнить классификацию промежутков. В предыдущем разговоре мы уже пользовались, по крайней мере частично, этой классификацией.

Прежде всего различают промежутки конечной длины:

- *замкнутый* промежуток (иначе говоря, *отрезок*) с началом a и концом b (его обозначают так: $[a; b]$; числа x из этого промежутка удовлетворяют неравенствам $a \leq x \leq b$);

- *открытый* промежуток (*интервал*) с началом a и концом b (его обозначают так: $]a; b[$; числа x из этого промежутка удовлетворяют неравенствам $a < x < b$);
- *полуоткрытый* промежуток (*полуинтервал*) с началом a и концом b (его обозначают либо так: $]a; b]$, либо так: $[a; b[$; в первом случае числа x из полуинтервала удовлетворяют неравенствам $a < x \leq b$, а во втором случае — неравенствам $a \leq x < b$).

Различают также *бесконечные* промежутки:

$] - \infty; \infty[$ ($-\infty < x < \infty$) — числовая прямая;

$]a; \infty[$ ($a < x < \infty$); $[a; \infty[$ ($a \leq x < \infty$);

$] - \infty; b[$ ($-\infty < x < b$); $] - \infty; b]$ ($-\infty < x \leq b$).

Примеры областей
определения
функций

Рассмотрим некоторые конкретные примеры числовых функций. Исходя из вида написанных формул, укажите, на каких промежутках определены следующие функции:

$$y = \sqrt{1 - x^2}; \quad (4.1)$$

$$y = \sqrt{x - 1}; \quad (4.2)$$

$$y = \sqrt{2 - x}; \quad (4.3)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}; \quad (4.4)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2 - x}}; \quad (4.5)$$

$$y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - x}; \quad (4.6)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x - 1}} + \frac{1}{\sqrt{2 - x}}; \quad (4.7)$$

$$y = \sqrt{2 - x} + \frac{1}{\sqrt{x - 1}}; \quad (4.8)$$

$$y = \sqrt{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{2 - x}}. \quad (4.9)$$

Читатель. Это нетрудно. В случае (4.1) область определения есть промежуток $[-1; 1]$; в случае (4.2) — промежуток $[1; \infty[$; в случае (4.3) — промежуток $] - \infty; 2]$; в случае (4.4) — промежуток $]1; \infty[$;

в случае (4.5) — промежуток $] - \infty; 2[$; в случае (4.6) — промежуток $[1; 2]$...

Автор. Все верно. Но я прерву Вас, чтобы подчеркнуть следующее: если данная функция есть сумма (разность, произведение) двух других функций, то ее область определения есть *пересечение* множеств, являющихся областями определения исходных функций. Это хорошо видно на примере функции (4.6). Впрочем, этим же правилом надо руководствоваться и в последующих примерах. Продолжайте, пожалуйста.

Читатель. Области определения остальных функций: (4.7) — $]1; 2[$; (4.8) — $]1; 2]$; (4.9) — $[1; 2[$.

Автор. А что можно сказать об области определения, например, функции $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x}$?

Читатель. Функция $y = \sqrt{x-2}$ имеет область определения $[2; \infty[$, а функция $y = \sqrt{1-x}$ — область определения $] - \infty; 1]$. Указанные промежутки не пересекаются.

Автор. Значит, формула $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x}$ не определяет никакой функции.

Функция (продолжение)

Аналитическое задание функций и связанные с этим трудности

Автор. Обсудим вопрос о способах задания функции. Один из способов мы уже широко использовали. Я имею в виду *аналитическое задание* функции, т. е. задание ее при помощи некоторой *формулы*, некоторого *аналитического выражения* (напомним, в частности, выражения (4.1)–(4.9), которые были рассмотрены в конце предыдущей беседы).

Читатель. Собственно говоря, мое представление о функции фактически и сводилось к представлению ее в виде формулы. Именно формулу я и имел в виду, когда говорил о зависимости переменной y от переменной x .

Автор. Представление о функции как о некой формуле, связывающей x и y , к сожалению, довольно сильно укоренилось. Однако это представление неправильно. Функция и ее формула — это разные «вещи». Одно дело — функция как отображение одного множества (в данном случае — числового множества) на другое, как «аппарат», который по числу дает число. Другое дело — формула, представляющая собой лишь один из способов задания функции. Было бы ошибкой *отождествлять* (как это, к сожалению, еще иногда делают) функцию с формулой, которая описывает функцию.

Читатель. По-видимому, после прозеденного в предыдущей беседе обсуждения понятия функции такое отождествление в общем случае делается автоматически невозможным. Однако если ограничиваться только числовыми функциями и вспомнить, что, работая с той или иной функцией, мы всякий раз пользуемся какой-то формулой, то возникает вопрос: а чем, собственно говоря, опасно

упомянутое отождествление? Зачем надо подчеркивать различие между функцией и ее формулой?

Автор. Во-первых, не всякая формула задает функцию. В конце прошлой беседы мы встретились с подобным примером. Приведем еще несколько таких примеров:

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{-x}}; & y &= \lg x + \lg(-x); \\y &= \sqrt{\sin x - 2}; & y &= \lg(\sin x - 2) \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Во всех этих случаях за формулой не стоит никакой функции.

Во-вторых (и это важнее), не всякую функцию можно задать в виде формулы. Существует, например, так называемая *функция Дирихле*, определенная на числовой прямой:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Читатель. Да какая же это функция?

Автор. Конечно, не совсем обычная. Однако самая настоящая функция. Это есть отображение множества рациональных чисел в единицу и множества иррациональных чисел в нуль. Другое дело, что Вы не можете предложить для такой функции какого-либо аналитического выражения (разве лишь специально придумаете какой-нибудь значок и будете рассматривать его как формулу).

Однако есть еще одна, третья (и пожалуй, наиболее важная) причина, почему не следует отождествлять функцию с ее формулой. Обратимся к следующей записи:

$$y = \begin{cases} \cos x, & x < 0; \\ 1 + x^2, & 0 \leq x \leq 2; \\ \lg(x - 1), & x > 2. \end{cases}$$

Сколько функций я задал?

Читатель. Три функции — косинус, квадратичную функцию и логарифмическую функцию.

Автор. Вы неправы. Три формулы ($y = \cos x$; $y = 1 + x^2$; $y = \lg(x - 1)$) задают в данном случае одну-единственную функцию.

Она определена на всей числовой прямой, причем на промежутке $]-\infty; 0[$ используется закон числового соответствия, описываемый формулой $y = \cos x$, на промежутке $[0; 2]$ — формулой $y = 1 + x^2$ и на промежутке $]2; \infty[$ — формулой $y = \lg(x - 1)$.

Читатель. Я ошибся потому, что не вдумался в вопрос.

Автор. Нет, Вы ошиблись потому, что где-то в подсознании отождествляете функцию с ее аналитическим выражением, с ее формулой. В дальнейшем, работая с функциями, мы, конечно, будем широко пользоваться формулами. Однако никогда не следует забывать, что формула — это не сама функция, а всего лишь один из способов ее задания.

Приведенный пример показывает, между прочим, что не следует отождествлять такие понятия, как *область определения функции* и *область тех значений x* , для которых имеет смысл данное аналитическое выражение (область определения аналитического выражения). Так, выражение $1 + x^2$ определено на всей числовой прямой; однако в рассмотренном выше примере это выражение используют для задания функции лишь на отрезке $[0; 2]$.

Надо подчеркнуть, что вопрос об области определения функции — это принципиально важный вопрос. Разумеется, область определения функции не может быть шире области определения выражения, используемого для задания этой функции. Но она может быть меньше.

Читатель. Значит ли это, что косинус, определенный, например, на отрезке $[0; \pi]$, — одна функция, а косинус, определенный на отрезке $[\pi; 3\pi]$, — другая функция?

Автор. Строго говоря, именно так. А косинус, определенный, например, на всей числовой прямой, — это уже третья функция. Одним словом, используя косинус, Вы можете при желании задать сколько угодно разных функций за счет варьирования области определения.

В том наиболее часто встречающемся случае, когда область определения функции есть область определения используемого аналитического выражения, говорят об *естественной* области определения функции. Заметим, что во всех примерах в прошлой беседе подразумевалась именно естественная область определения. Ее приходится подразумевать всегда, если область определения функции специ-

ально не оговорена (строго говоря, область определения функции должна указываться во всех случаях).

Читатель. Получается, что одна и та же функция может быть описана несколькими различными формулами и, напротив, одна и та же формула может быть использована для «конструирования» нескольких различных функций.

Автор. В истории математики осознание этого факта ознаменовалось окончательным разрывом между понятиями функции и ее аналитического выражения. Это произошло в начале XIX в., когда французский математик *Фурье* убедительно показал, что совершенно несущественно, одним или многими аналитическими выражениями задана функция. Тем самым был положен конец длительному спору между математиками о том, можно или нельзя отождествлять функцию с формулой.

Надо заметить, что, как и большинство математических понятий, понятие функции прошло долгий путь развития. Впервые термин «функция» появился в конце XVII в. в работах немецкого математика *Лейбница*; этот термин имел тогда довольно узкий смысл и выражал зависимость между некоторыми геометрическими образами. Определение функциональной зависимости, освобожденное от геометрических образов, было впервые дано в начале XVIII в. в работах *Бернулли*. В развитии понятия функции можно с известной долей условности выделить три основных этапа. На первом этапе (XVIII в.) функция по сути дела отождествлялась с ее аналитическим выражением. На втором этапе (относящемся к XIX в.) стало формироваться современное представление о функции как отображении одного числового множества на другое. С созданием общей теории множеств можно выделить третий этап (XX в.), когда понятие функции, определенное ранее только для числовых множеств, обобщается на множества произвольной природы.

Читатель. Выходит, что, преувеличивая роль формулы, мы как бы возвращаемся всякий раз к представлениям XVIII в.

Автор. А теперь рассмотрим еще один способ задания функции — *графический*. График функции $y = f(x)$ есть множество точек на плоскости (x, y) , абсциссы которых суть значения независимой переменной (x) , а ординаты — соответствующие значения зависимой переменной (y) . По своей сути графический способ

Графический способ
задания функций

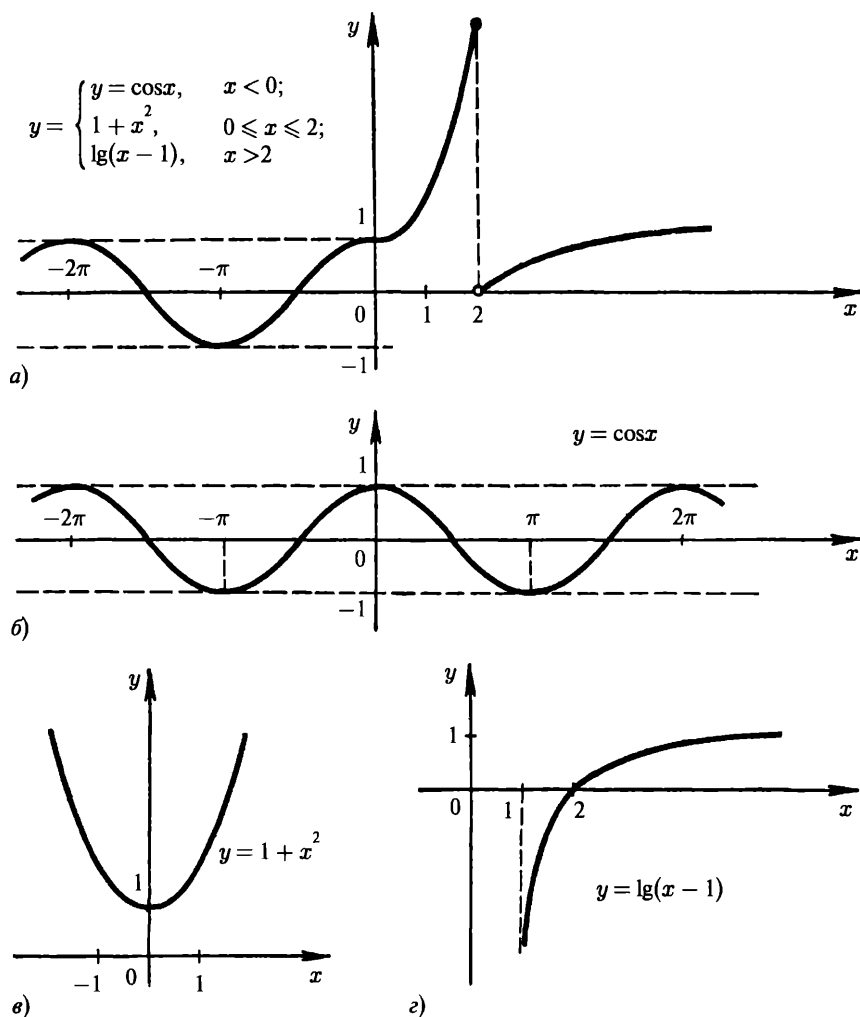


Рис. 14

задания функции отличается наглядностью. На рис. 14 а приведен график упоминавшейся ранее функции:

$$y = \begin{cases} \cos x, & x < 0; \\ 1 + x^2, & 0 \leq x \leq 2; \\ \lg(x - 1), & x > 2. \end{cases}$$

Рядом (рис. 14 б, в, г) для сравнения показаны графики функций $y = \cos x$, $y = 1 + x^2$, $y = \lg(x - 1)$, для каждой из которых выбрана естественная область определения.

Читатель. Что означает пустой кружок на графике функции на рис. 14 а?

Автор. Он изображает изъятую из графика точку. В данном случае точка $(2, 0)$ не принадлежит графику функции.

На рис. 15 а–и приведены графики функций, которые упоминались в конце предыдущей беседы. Рассмотрим их повнимательнее.

Читатель. Очевидно, что во всех случаях на рис. 15 область определения функции предполагается совпадающей с областью определения соответствующего аналитического выражения.

Автор. Вы правы. В случаях б, в, г, д этими областями являются бесконечные промежутки; поэтому, естественно, на рисунке можно показать только часть графика.

Читатель. В случаях ж, з, и область определения — промежутки конечной длины. Однако и в этих случаях на рисунке уместилась только часть графика функции.

Автор. Верно. Полностью график изображен лишь в случаях а и е. Тем не менее во всех без исключения случаях на рис. 15 характер поведения графика функции просматривается неплохо.

Отмеченные Вами случаи ж, з, и весьма интересны. В этих случаях мы имеем дело с неограниченной функцией, заданной на промежутке конечной длины. Понятие ограниченности (неограниченности) мы уже рассматривали в применении к числовым последовательностям (см. первую беседу). Теперь надо распространить это понятие на функции, заданные на промежутках.

Ограниченные
и неограничен-
ные функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на промежутке D , если можно указать такие два числа A и B , что для всех $x \in D$ выполняются неравенства

$$A \leq f(x) \leq B.$$

В противном случае функцию называют *неограниченной* (на рассматриваемом промежутке).

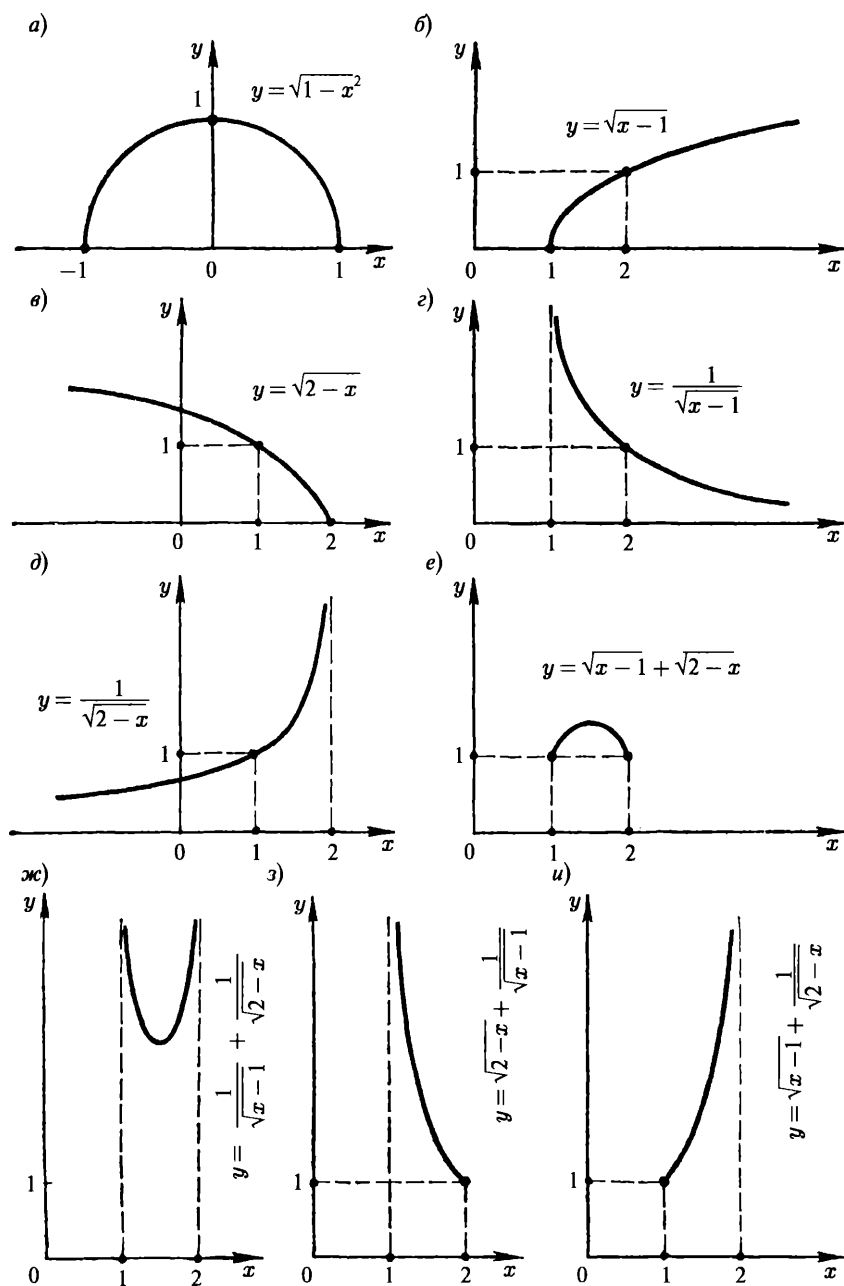


Рис. 15

Заметим, что на бесконечных промежутках могут быть определены как ограниченные, так и неограниченные функции. Хорошо известные примеры ограниченных функций: $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Примерами неограниченных функций могут быть, в частности, функции, изображенные графически на рис. 15 б, в, г, д.

Читатель. На промежутках конечной длины также могут быть определены как ограниченные, так и неограниченные функции. Такие примеры также имеются на рис. 15: ограниченные функции в случаях а и е, неограниченные — в случаях ж, з, и.

Автор. Совершенно верно.

Читатель. Надо заметить, что в указанных мной случаях ограниченные функции определены на замкнутых промежутках (для а имеем $[-1; 1]$, для е имеем $[1; 2]$), тогда как неограниченные функции определены на открытых или полуоткрытых промежутках (для ж имеем $]1; 2[$, для з имеем $]1; 2]$, для и имеем $[1; 2[$).

Автор. Вы хорошо подметили. Однако имейте в виду, что можно придумать такие функции, которые будут, напротив, ограниченными на открытых (полуоткрытых) промежутках и неограниченными на замкнутых промежутках. Вот простые примеры:

первый —

$$y = x^2, \quad 0 \leq x < 2;$$

второй —

$$y = \begin{cases} 1/x, & 0 < x \leq 2; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

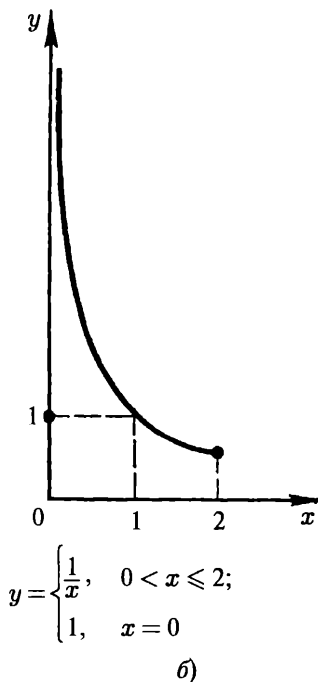
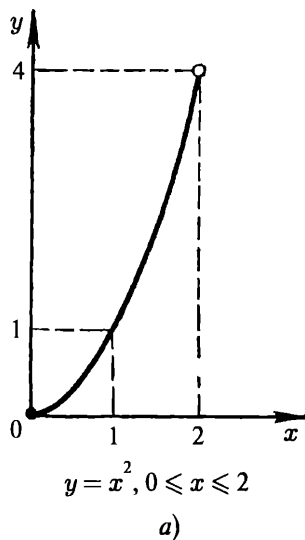


Рис. 16

Графики этих функций показаны на рис. 16.

**Монотонность
функции**

Читатель. Как видно, вопросы ограниченности (неограниченности) функции и конечности промежутка, на котором она определена, взаимно не связаны?

Автор. Не совсем так. Справедлива, например, теорема:

Теорема. Если функция определена на замкнутом промежутке и если она при этом монотонна, то она будет ограниченной.

Читатель. По-видимому, монотонность функции определяется аналогично монотонности числовой последовательности?

Автор. Да, аналогично. Монотонные функции делят, как и последовательности, на *неубывающие* и *невозрастающие*.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется неубывающей на промежутке D , если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$. Если же вместо последнего неравенства имеет место неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$, то говорят о невозрастающей функции.

Попробуйте теперь доказать сформулированную выше теорему.

Доказательство.

Читатель. Пусть функция $y = f(x)$ определена на замкнутом промежутке $[a; b]$. Обозначим $f(a) = y_a$ и $f(b) = y_b$. Предположим для конкретности, что рассматривается неубывающая функция. В этом случае имеем: $y_a \leq y_b$. Далее затрудняюсь.

Автор. Выберем произвольно точку x из отрезка $[a; b]$.

Читатель. Поскольку $a \leq x$, то согласно условию теоремы $y \leq f(x)$. Поскольку $x \leq b$, то $f(x) \leq y_b$. Таким образом, для всех x из области определения функции выполняются неравенства $y_a \leq f(x) \leq y_b$. Теорема доказана. \square

Автор. Правильно. Итак, если *монотонная* функция определена на замкнутом промежутке (отрезке), то она обязательно будет ограниченной. Что же касается *немонотонной* функции, определенной

на замкнутом промежутке, то она может быть в отдельных случаях ограниченной (рис. 15 а, е), а в отдельных случаях неограниченной (рис. 16 б).

А теперь ответьте на следующий вопрос: является ли функция $y = \sin x$ монотонной функцией?

Читатель. Конечно, не является.

Автор. Ваш ответ неточен в той же мере, в какой неточен мой вопрос. Ведь надо оговорить область определения. Если рассматривать функцию $y = \sin x$, заданную на естественной области определения (на всей числовой прямой), то в этом случае Вы правы. Если же в качестве области определения выбрать, например, отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то в этом случае рассматриваемая функция будет монотонной (неубывающей).

Читатель. Я убеждаюсь, что вопрос об ограниченности или монотонности той или иной функции надо рассматривать, учитывая всякий раз не только вид аналитического выражения, но и тот промежуток, на котором определена данная функция.

Четность
и нечетность

Автор. Это относится не только к ограниченности или монотонности, но и к другим свойствам функций. Является ли, например, функция $y = 1 - x^2$ четной функцией?

Читатель. По-видимому, это зависит от выбора области определения?

Автор. Конечно. Если указанная функция определена на промежутке, симметричном относительно начала координат (например, на всей числовой прямой или, скажем, отрезке $[-1; 1]$), то ее график будет симметричен относительно прямой $x = 0$. В этом (этих) случае функция $y = 1 - x^2$ является четной функцией. Если же, предположим, область опре-

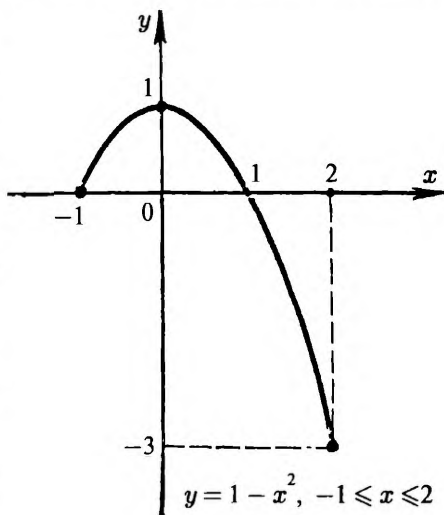


Рис. 17

деления есть отрезок $[-1; 2]$, то упомянутая выше симметрия уже не имеет места (рис. 17) и, следовательно, функция $y = 1 - x^2$ не является четной функцией.

Читатель. Очевидно, такие же замечания можно сделать и относительно *нечетных* функций?

Автор. Именно так. Вот Вам строгое определение четной функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется четной, если она определена на симметричном относительно начала координат множестве D и при этом для всех $x \in D$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Заменяв последнее равенство равенством $f(-x) = -f(x)$, получим определение для *нечетной* функции.

Понятие
обратной
функции

Но вернемся к разговору о монотонных функциях.

Если в определении монотонной функции (см. выше) в неравенстве $f(x_1) \leq f(x_2)$ (или $f(x_1) \geq f(x_2)$) убрать знак равенства, то получим так называемую *строго монотонную* функцию. В этом случае неубывающая функция «превращается» в *возрастающую* функцию (для нее $f(x_1) < f(x_2)$), а невозрастающая функция — в *убывающую* ($f(x_1) > f(x_2)$). Во всех предыдущих примерах монотонных функций мы имели дело фактически именно со строго монотонными функциями (возрастающими либо убывающими).

Строго монотонная функция обладает интересным свойством: *для нее существует обратная функция*.

Читатель. Понятие *обратной функции* мы уже использовали в предыдущей беседе, рассматривая наряду с отображением множества всех равнобедренных треугольников на множество всех кругов, также и *обратное отображение* — отображение множества всех кругов на множество всех равнобедренных треугольников.

Автор. Совершенно верно. Теперь мы остановимся на понятии обратной функции более подробно (имея в виду числовые функции). Обратимся к рис. 18, на котором «изображены» (в том духе, как это делалось на рис. 13) три функции:

$$a) y = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

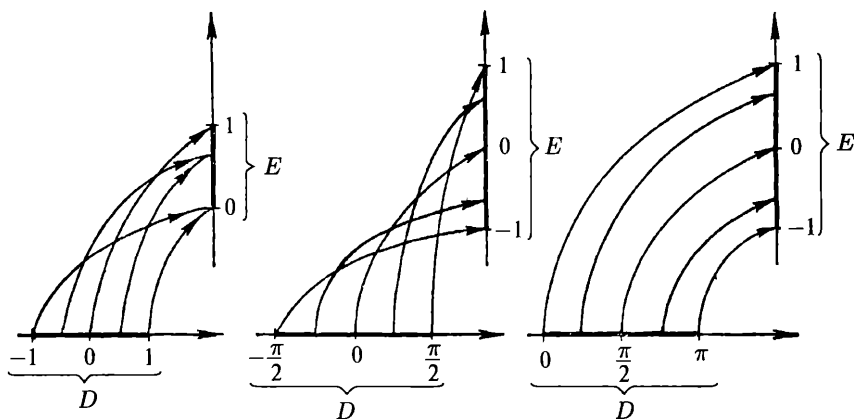


Рис. 18

б) $y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2};$

в) $y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

Перед нами три отображения одного числового множества на другое. Иначе говоря, три отображения одного отрезка на другой: в случае а) отрезок $[-1; 1]$ отображается на отрезок $[0; 1]$, в случае б) отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ отображается на отрезок $[-1; 1]$, в случае в) отрезок $[0; \pi]$ отображается на отрезок $[-1; 1]$.

Скажите, в чем состоит отличие отображений б) и в) от отображения а)?

Читатель. В случаях б) и в) имеет место *взаимно однозначное* соответствие: каждой точке множества D соответствует только одна точка множества E и наоборот: каждой точке множества E соответствует только одна точка множества D . В случае же а) взаимно однозначного соответствия нет.

Автор. Верно. А теперь предположим, что направления всех стрелок на рисунке изменились на противоположные. Во всех ли трех случаях возникнет отображение, определяющее некоторую функцию?

Читатель. Очевидно, что в случае а) мы не получим функции, поскольку при изменении направления стрелок возникает запрещенная ситуация: одному числу соответствуют два числа.

В случаях же б) и в) подобная запрещенная ситуация, очевидно, не возникает; так что в этих случаях мы получаем какие-то новые функции.

Автор. Правильно. В случае б) мы приходим к функции $y = \arcsin x$, которая является обратной функцией по отношению к функции $y = \sin x$, определенной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. В случае в) приходим к функции $y = \arccos x$, которая является обратной по отношению к функции $y = \cos x$, определенной на отрезке $[0; \pi]$.

Обратите внимание: чтобы получить из исходной функции обратную функцию, необходимо иметь взаимно однозначное соответствие между элементами множеств D и E . Именно поэтому функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ были выбраны не на естественной области определения, а на таких отрезках, на которых они либо только возрастают, либо только убывают. Иначе говоря, исходные функции в случаях б) и в) на рис. 18 выбирались строго монотонными. Строгая монотонность есть *достаточное условие* упоминавшегося выше взаимно однозначного соответствия между элементами множеств D и E . Без особого труда Вы можете самостоятельно доказать теорему:

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонная, то разные x отображаются в разные y .

Читатель. Таким образом, достаточным условием существования обратной функции является строгая монотонность исходной функции?

Автор. Именно так.

Читатель. Но разве строгая монотонность исходной функции не является также и *необходимым условием* существования обратной функции?

Автор. Нет, не является. Взаимно однозначное соответствие может иметь место и в случае немонотонной функции. Вот пример:

$$y = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1; \\ x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Обратите внимание на график этой функции, показанный на рис. 19.

Если функция строго монотонная, то для нее существует обратная функция. Обратное же утверждение неверно.

Читатель. Насколько я понимаю, для получения обратной функции (в том случае, когда она существует) надо попросту поменять ролями x и y в уравнении $y = f(x)$, определяющем исходную функцию. Тогда значения x обратной функции будут определяться из уравнения $x = F(y)$. При этом областью определения обратной функции становится множество значений исходной функции.

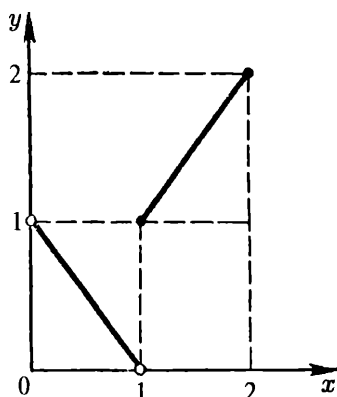


Рис. 19

Автор. Правильно. На практике переход от исходной функции к обратной очень просто выполняется графически: график обратной функции *симметричен* по отношению к графику исходной функции, причем осью симметрии служит прямая $y = x$. Это хорошо видно на рис. 20, где приведены несколько пар графиков для исходных и обратных функций. Ниже дано перечисление этих пар функций с указанием их областей определения:

- а) исходная — $y = x^3$, $-\infty < x < \infty$,
обратная — $y = \sqrt[3]{x}$, $-\infty < x < \infty$;
- б) исходная — $y = x^2$, $0 \leq x < \infty$,
обратная — $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x < \infty$;
- в) исходная — $y = 10^x$, $-\infty < x < \infty$,
обратная — $y = \lg x$, $0 < x < \infty$;
- г) исходная — $y = \sin x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$,
обратная — $y = \arcsin x$, $-1 \leq x \leq 1$;
- д) исходная — $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$,
обратная — $y = \arccos x$, $-1 \leq x \leq 1$;
- е) исходная — $y = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$,
обратная — $y = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < \infty$;
- ж) исходная — $y = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$,
обратная — $y = \operatorname{arccctg} x$, $-\infty < x < \infty$.

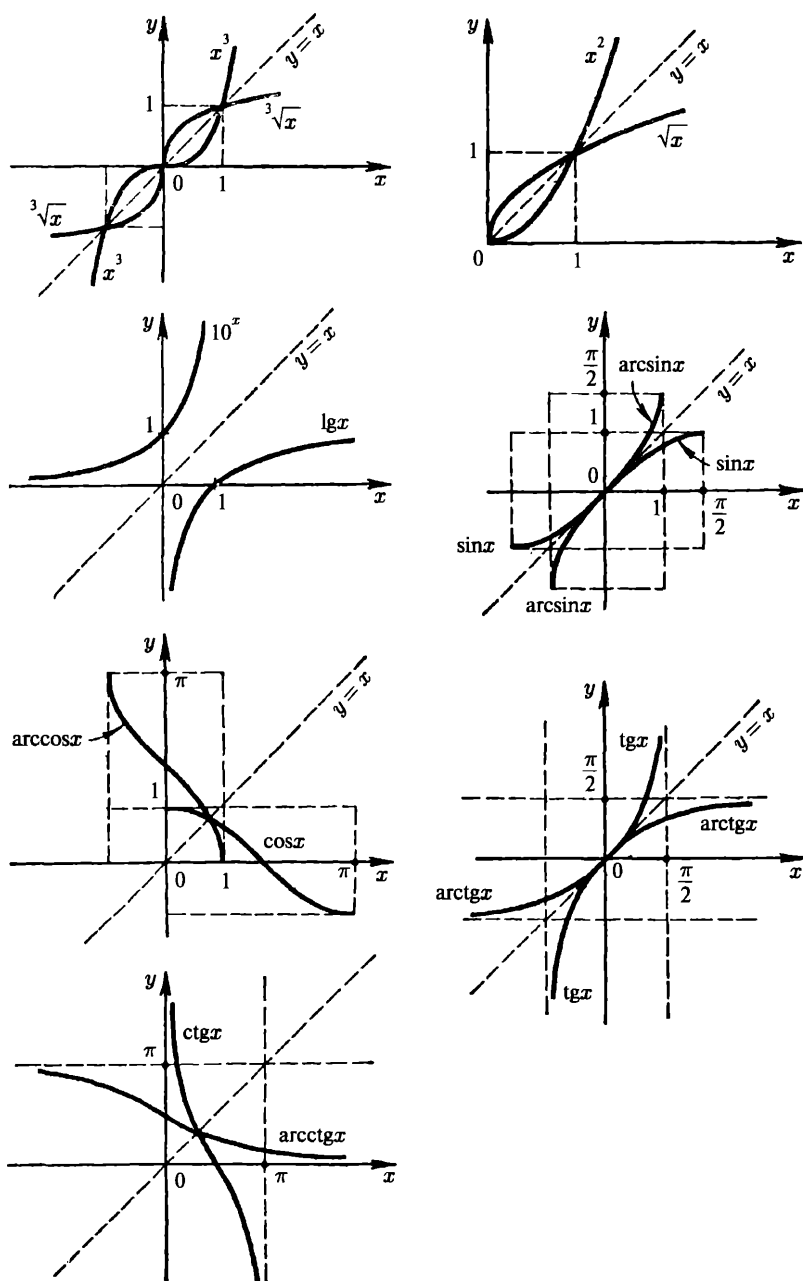


Рис. 20

Все приведенные здесь области определения обратных функций являются их естественными областями определения (правда, в случае функции $y = \sqrt[3]{x}$ естественную область определения иногда условливаются считать равной не всей числовой прямой, а промежутку $[0; \infty[$). Что же касается исходных функций, то только две из них ($y = x^3$; $y = 10^x$) рассматриваются здесь на естественной области определения. Остальные определены на более узких промежутках, обеспечивающих строгую монотонность функции.

Далее обсудим понятие «сложная функция».

Возьмем в качестве примера функцию $h(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$. Будем рассматривать также функции $f(x) = \cos x$ и $g(y) = \sqrt{1 + y^2}$.

Понятие
сложной
функции

Читатель. Однако до сих пор мы не обозначали функцию символом $f(x)$; мы говорили: функция $y = f(x)$.

Автор. Верно. Однако здесь целесообразно немного упростить символику.

Итак, обратимся к указанным трем функциям: $h(x)$, $f(x)$, $g(y)$.

Функция $h(x)$ есть сложная функция, составленная из функций $f(x)$ и $g(y)$:

$$h(x) = g(f(x)).$$

Читатель. Понимаю, здесь значения функции $f(x)$ используются в качестве значений независимой переменной (аргумента) для функции $g(y)$.

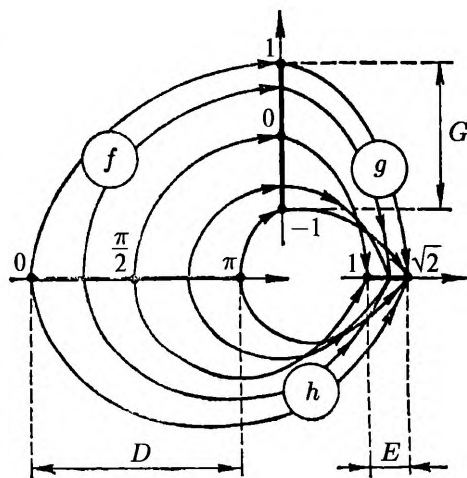


Рис. 21

Автор. Обратимся к рис. 21, иллюстрирующему отображения множеств в случае сложной функции. На рисунке рассматривается упомянутая выше сложная функция $h(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$, причем функция $f(x) = \cos x$ определена на отрезке $[0; \pi]$.

Мы видим, что функция f есть отображение множества D (отрезка $[0; \pi]$) на множество G (на отрезок $[-1; 1]$). Это есть отображение f . Функция g (функция $\sqrt{1 + y^2}$) есть отображение множества G на множество E (на отрезок $[1; \sqrt{2}]$) — отображение g . Наконец, функция h (функция $\sqrt{1 + \cos^2 x}$, определенная на отрезке $[0; \pi]$) есть отображение множества D на множество E — отображение h .

Отображение h есть результат *последовательного* осуществления отображений f и g . В таких случаях говорят о *композиции отображений* и применяют запись

$$h = g \circ f$$

(правую часть равенства надо читать справа налево: сначала используется отображение f , а затем отображение g).

Читатель. По-видимому, для сложной функции можно использовать также и такую «картинку», какую мы имеем на рис. 22.

Автор. Не возражаю. Хотя, конечно, лучше исходить из представления об отображении множеств друг на друга (см. рис. 21).

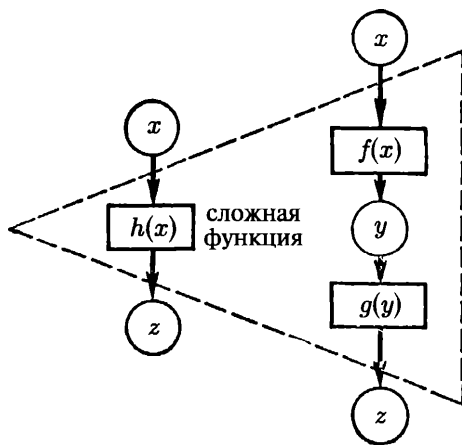


Рис. 22

Читатель. Наверное, возможны определенные «неприятности» в связи с тем, что множество значений функции f является областью определения функции g ?

Автор. Во всяком случае, отмеченное Вами обстоятельство требует к себе должного внимания. Надо помнить, что естественная область определения сложной функции $g(f(x))$ есть такая часть (подмножество) естественной области определения функции $f(x)$, для кото-

рой значения функции f попадают в естественную область определения функции g . Этого не надо было специально учитывать в примере с функцией $g(f(x)) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$, поскольку все значения функции f (даже если рассматривать $\cos x$ на всей числовой

прямой) попадают в естественную область определения функции $g(y) = \sqrt{1+y^2}$: Однако можно привести иной пример:

$$h(x) = \sqrt{\sqrt{x-1}-2}; \quad f(x) = \sqrt{x-1}; \quad g(y) = \sqrt{y-2}.$$

Естественная область определения функции $f(x)$ есть промежуток $[1; \infty[$. Однако не всякая точка из этого промежутка может принадлежать области определения сложной функции $h(x)$. Поскольку выражение $\sqrt{y-2}$ имеет смысл лишь при $y \geq 2$, а $y = 2$ отвечает $x = 5$, то отсюда следует, что естественная область определения рассматриваемой сложной функции есть промежуток $[5; \infty[$, т. е. она меньше, нежели естественная область определения функции $f(x)$.

Давайте рассмотрим еще один пример сложной функции — функцию $y = \sin(\arcsin x)$. Известно, что $\arcsin x$ можно рассматривать как угол, синус которого равен x . Иначе говоря, $\sin(\arcsin x) = x$. Можете ли Вы указать различие между сложной функцией $y = \sin(\arcsin x)$ и функцией $y = x$?

Читатель. Могу. Естественная область определения функции $y = x$ есть вся числовая прямая. Что же касается сложной функции $y = \sin(\arcsin x)$, то ее естественная область определения совпадает с естественной областью определения функции $\arcsin x$, т. е. совпадает с отрезком $[-1; 1]$. График функции $y = \sin(\arcsin x)$ показан на рис. 23.

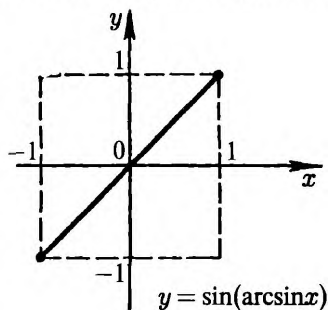


Рис. 23

Автор. Очень хорошо. В заключение вернемся к вопросу о графическом задании функции и заметим, что существуют примеры, когда график функции (целиком или же в некоторой его части) принципиально нельзя изобразить. Так, нельзя, очевидно, нарисовать график функции $y = \sin \frac{1}{x}$ вблизи $x = 0$ (рис. 24).

Понятие
о графике
функции

Невозможно нарисовать график упоминавшейся выше функции Дирихле.

Читатель. Мне казалось, что функция Дирихле вообще не имеет графика.

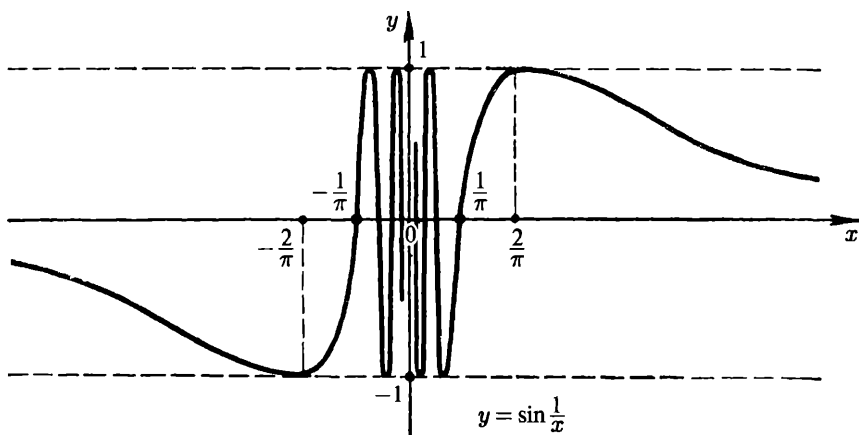


Рис. 24

Автор. Напрасно. По-видимому, Вы представляете себе график функции обязательно в виде некоторой линии.

Читатель. Но ведь все графики, которые мы до сих пор рассматривали, имели вид линий и притом довольно гладких.

Автор. В общем случае это не обязательно. Надо подчеркнуть, что *каждая функция имеет график и притом единственный*.

Читатель. Справедливо ли это также и для функций, не являющихся числовыми?

Автор. Справедливо. В самом общем случае можно дать следующее определение.

Определение. График функции f , заданной на множестве D и принимающей значения в множестве E , есть множество всех таких пар (x, y) , что первый элемент пары x принадлежит множеству D , а второй элемент пары y — множеству E , причем $y = f(x)$.

Читатель. Получается, что график такой функции, как площадь круга, есть множество пар, каждая из которых состоит из круга (элемент x) и положительного числа (элемент y), выражающего площадь данного круга.

Автор. Именно так. График же такой функции как расписание дежурств в классе есть множество пар, каждая из которых содержит

день календаря (элемент x) и фамилию учащегося (элемент y), который дежурит в этот день. Заметьте, что указанная функция на практике задается именно таким образом, т. е. графически. Небезынтересно, что при этом говорят о графике дежурств.

Если, в частности, оба элемента пары (как x , так и y) являются числами, то мы приходим к графику функции в виде множества точек на координатной плоскости. Это есть привычный для нас график числовой функции.

Предел функции

Понятие предела
функции в точке

Автор. Рассмотрим понятие «предел функции».

Читатель. Но раньше мы уже рассматривали (и довольно подробно) предел числовой последовательности. Последовательность же есть не что иное, как функция, определенная на множестве натуральных чисел. Получается, что, рассмотрев предел последовательности, мы тем самым познакомились и с пределом функции. Есть ли смысл в специальном рассмотрении понятия *предел функции*?

Автор. Безусловно, есть. Ведь интересующие нас функции существенно отличаются (я это уже подчеркивал раньше) от последовательностей: они определены на *промежутках*, а не на множестве натуральных чисел. Это и предопределяет специфику понятия *предела функции*. Заметьте, например, что всякая конкретная сходящаяся последовательность имеет только один предел, так что фраза «предел данной последовательности» является исчерпывающей. Что же касается функции, определенной на промежутке, то с ней можно сопоставить бесконечно много «пределов», поскольку предел функции рассматривается *всякий раз* в некоторой точке $x = a$ (или, как принято говорить, при x , стремящемся к a). Фраза «предел данной функции» не имеет, таким образом, смысла; надо рассматривать «предел *данной* функции в *данной* точке a ». При этом упомянутая точка a либо должна принадлежать области определения функции, либо должна совпадать с одним из концов этой области.

Читатель. В таком случае определение предела функции должно, конечно, заметно отличаться от определения предела последовательности.

Автор. Отличие, разумеется, есть. Перейдем к определению предела функции.

Прежде всего отметим, что рассматривается некоторая функция $y = f(x)$ определенная на некотором промежутке, и точка a , взятая из этого промежутка (или совпадающая с одним из его концов). Последнее возможно в случае, когда функция определена на открытом или полуоткрытом промежутке.

Читатель. Получается, что в самой точке $x = a$ функция $f(x)$ может и не быть определена?

Автор. Совершенно верно. А теперь дадим само определение предела функции.

Определение предела
функции по Коши

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к a (пределом в точке a), если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , что при всех x , удовлетворяющих условиям: x принадлежит области определения функции, $x \neq a$,

$$|x - a| < \delta, \quad (6.1)$$

будет выполняться неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \quad (6.2)$$

При этом используют следующую запись:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Читатель. Определение предела функции заметно длиннее и сложнее, чем определение предела последовательности.

Автор. Прежде всего отметим, что согласно неравенству (6.1) точка x должна находиться в интервале $[a - \delta; a + \delta]$, причем точка $x = a$ должна быть *изъята* из указанного интервала. Интервал $[a - \delta; a + \delta]$ без точки $x = a$ называют *проколотой δ -окрестностью* точки a .

Итак, выбирается произвольное положительное число ε . Для этого числа ищется *другое* положительное число — число δ . При этом выдвигается требование: значение функции в *любой* точке x из проколотой δ -окрестности точки a должно *попадать внутрь* интервала

$]b - \varepsilon; b + \varepsilon[$ (говоря о «любой» точке x , мы подразумеваем, что речь идет о точках x , в которых рассматриваемая функция определена). Если такое число b существует для *любого* числа $\varepsilon > 0$, то в этом случае говорят: число b является пределом функции в точке a . В противном случае число b не является пределом функции в точке a .

Читатель. А что означает на практике «противный случай»?

Автор. Предположим, что поиски числа δ завершились благополучно для чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ (всякий раз мы выбираем все меньшее и меньшее число ε). Но вот мы обнаруживаем, что для какого-то числа ε' уже невозможно найти требуемое число δ : какое бы число δ мы ни пытались брать (как бы ни уменьшали это число), *всякий раз* найдется *хотя бы одна* точка x из проколотой δ -окрестности точки a , в которой значение функции *не попадет внутрь* интервала $]b - \varepsilon'; b + \varepsilon'[,$

Читатель. А не может ли случиться, что мы уменьшим δ -окрестность точки a настолько сильно, что там вообще не останется *ни одной* точки x из области определения функции?

Автор. Этого, очевидно, не может быть. Ведь функция определена на промежутке, а точка a берется либо из этого промежутка, либо совпадает с его концом.

Особенности
определения предела

Читатель. Как будто все понятно. Наверное, чтобы все это закрепилось в сознании, следовало бы обратиться к графику функции?

Автор. Я как раз и предполагал так поступить. Рассмотрим для определенности график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 25). На рисунке проиллюстрированы всего лишь две ситуации. Одна отвечает выбору числа ε_1 (см. рисунок). Легко видеть, что число δ_1 есть в этом случае искомое число: значения функции во всех точках x из δ_1 -окрестности точки a попадают внутрь интервала $]b - \varepsilon_1; b + \varepsilon_1[$. Им соответствует участок графика между точками A и B . Вторая ситуация отвечает выбору числа ε_2 ; в этом случае искомым числом является число δ_2 : значениям функции в точках x из δ_2 -окрестности точки a соответствует участок графика между точками A' и B' .

Читатель. Все это выглядит настолько очевидным, что я не усматриваю, в чем же может заключаться тут, как Вы выражаетесь, «изюминка».

Автор. «Исюминка» вот в чем. Как бы вы ни уменьшали длину интервала $]b - \varepsilon; b + \varepsilon[$, всегда можно выбрать такую δ -окрестность точки a , что во всех точках x из этой δ -окрестности (именно во всех точках, за исключением самой точки a и тех точек, в которых функция не определена) значения функции должны обязательно попадать внутрь указанного интервала.

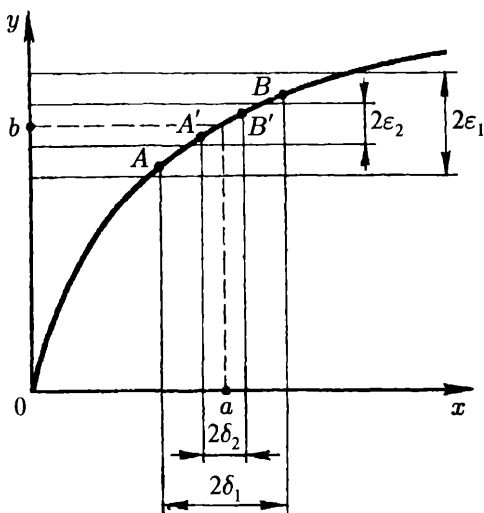


Рис. 25

Читатель. Нельзя ли привести пример функции, для которой это не так?

Автор. Например, функция $y = \sin \frac{1}{x}$ вблизи точки $x=0$.

График этой функции был изображен на рис. 24. Очевидно, чем меньше $|x|$, тем выше частота, с которой график данной функции колеблется около оси x . При сколь угодно малых $|x|$ частота этих колебаний может стать сколь угодно большой. Легко убедиться, что функция $y = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела в нуле.

Читатель. Она и не определена в нуле.

Автор. Вы правы. Однако это соображение несущественно с точки зрения вопроса о существовании (или отсутствии) предела функции в нуле. Данная функция определена на $] - \infty; 0[$ и $]0; \infty[$. Точка $x = 0$ является здесь общим концом промежутков, на которых определена функция $\sin \frac{1}{x}$.

Итак, вернемся к вопросу о пределе. Можно ли, например, утверждать, что $b = 0$ есть предел функции $\sin \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$?

Читатель. Я, кажется, понял. Пока мы выбираем число ε так, чтобы оно было больше единицы, все в порядке. Если же мы выберем любое ε , удовлетворяющее условию $\varepsilon < 1$, то в этом случае

уже невозможно найти такую δ -окрестность точки $x = 0$, чтобы во всех точках $x \neq 0$ из этой δ -окрестности значение функции $\sin \frac{1}{x}$ оказалось внутри интервала $] - \varepsilon; \varepsilon[$. Какой бы *малой* ни была δ -окрестность точки $x = 0$, это будет промежуток *конечной* длины, так что график нашей функции в любом случае совершит *бесконечно много* колебаний и тем самым *бесконечно много раз* выйдет за пределы интервала $] - \varepsilon; \varepsilon[$.

Автор. Правильно. Причем заметьте, чтобы убедиться в отсутствии предела, достаточно более «скромной» ситуации: достаточно, чтобы в любой δ -окрестности рассматриваемой точки график функции *хотя бы всего один раз* выходил за пределы интервала $] - \varepsilon; \varepsilon[$.

Читатель. По-видимому, не только $b = 0$, но и любое число b не может быть пределом функции $y = \sin \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$.

Ведь для любого числа b можно повторить те же самые рассуждения, что и для числа $b = 0$.

Автор. Следовательно, мы убеждаемся, что функция $y = \sin \frac{1}{x}$ действительно не имеет предела в точке $x = 0$.

Читатель. Причина отсутствия предела в $x = 0$ — колебания графика функции, которые все более и более учащаются по мере приближения к точке $x = 0$.

Автор. Впрочем, дело не только в безгранично возрастающей частоте колебаний графика, но и в сохраняющейся при этом постоянной амплитуде колебаний. Давайте «подправим» рассматриваемую функцию, умножив $\sin \frac{1}{x}$ на x . График функции $y = x \sin \frac{1}{x}$ показан на рис. 26. Как Вы думаете, является ли число $b = 0$ пределом этой функции в точке $x = 0$?

Читатель. Не знаю...

Автор. Я отвечу за Вас: является. Вы можете без особого труда убедиться в этом, если воспользуетесь определением предела функции. Прошу Вас.

Читатель. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Надо найти $\delta > 0$, такое чтобы для всех x (кроме $x = 0$), удовлетворяющих условию $|x - 0| < \delta$,

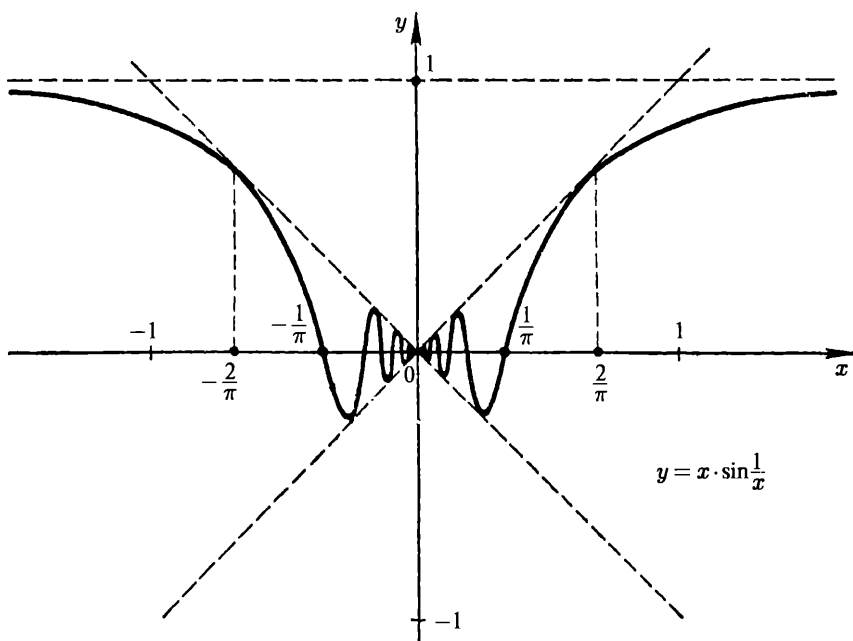


Рис. 26

выполнялось неравенство $\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$. Мне кажется, что искомое число δ есть $\delta = \varepsilon$.

Автор. Совершенно верно. Ведь если $|x| < \delta = \varepsilon$, то, очевидно, $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$ (поскольку $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$).

Читатель. В самом деле, существование предела доказывается без особого труда.

Автор. Конечно, не всегда такое доказательство оказывается простым. Рассмотрим, например, хорошо знакомую нам функцию $y = \sqrt{x}$ и докажем (пользуясь определением предела функции), что $b = 1$ есть предел этой функции в точке $x = 1$.

При доказательстве нам придется иметь дело с неравенством

$$|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon.$$

Попробуем сначала найти такую функцию $g(\varepsilon)$, чтобы из неравенства $|x - 1| < g(\varepsilon)$ вытекало неравенство $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$.

Читатель. Я понимаю, $g(\varepsilon)$ и есть искомое δ , соответствующее произвольно выбранному ε .

Автор. Конечно. Итак, выполним некоторые преобразования. Будем исходить из неравенства

$$|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon, \quad (6.3)$$

которое можно, очевидно, переписать в виде

$$1 - \varepsilon < \sqrt{x} < \varepsilon + 1.$$

Поскольку $\sqrt{x} \geq 0$, то, выбирая ε заведомо меньше единицы (что, конечно, не нарушает общности доказательства), можем возвести последние неравенства в квадрат:

$$(1 - \varepsilon)^2 < x < (\varepsilon + 1)^2$$

или, после раскрытия скобок,

$$-2\varepsilon + \varepsilon^2 < x - 1 < 2\varepsilon + \varepsilon^2. \quad (6.4)$$

Заметим, что неравенства (6.4) эквивалентны неравенству (6.3) (при условии, что $0 < \varepsilon < 1$). А теперь перейдем от (6.4) к более жесткому неравенству:

$$|x - 1| < 2\varepsilon - \varepsilon^2 \quad (6.5)$$

(поскольку $0 < \varepsilon < 1$, то $(2\varepsilon - \varepsilon^2) > 0$). Легко сообразить, что если выполняется неравенство (6.5), то тем более будут выполняться неравенства (6.4), а следовательно, и (6.3). Таким образом, для произвольного $0 < \varepsilon < 1$ достаточно выбрать $\delta = 2\varepsilon - \varepsilon^2$.

Читатель. А если все же $\varepsilon \geq 1$?

Автор. Тогда заведомо будет пригодным δ , найденное для любого $\varepsilon < 1$.

Читатель. По-видимому, можно утверждать, что

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$$

и вообще $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Автор. Да, это так.

Читатель. А может быть, вообще

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)?$$

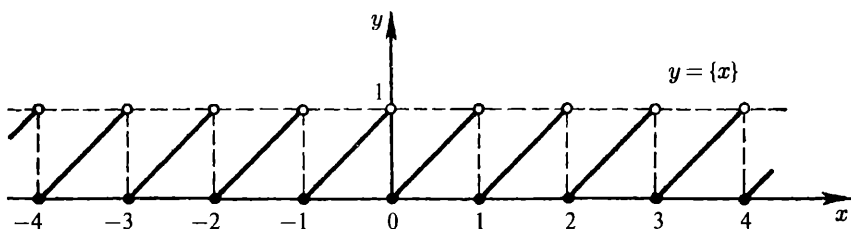


Рис. 27

Автор. Это часто так. Но не всегда. Ведь функция $f(x)$ может быть не определена в точке a . Вспомните, что предел функции $x \sin \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ равен нулю, но сама функция $x \sin \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ не определена.

Читатель. Но тогда, может быть, равенство $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ можно считать справедливым во всех тех случаях, когда функция $f(x)$ определена в точке a ?

Автор. Это тоже неверно. Рассмотрим, например, функцию, называемую «дробной частью числа x ». Эту функцию обычно обозначают как $\{x\}$. Она определена на всей числовой прямой. Разобьем числовую прямую на полуинтервалы $[n; n + 1[$. Для x из полуинтервала $[n; n + 1[$ имеем $\{x\} = x - n$. График функции $y = \{x\}$ показан на рис. 27.

Возьмем, например, $x = 1$. Очевидно, что функция $\{x\}$ определена в точке $x = 1$ ($\{x\} = 0$). Однако существует ли предел данной функции в точке $x = 1$?

Читатель. Предела нет. Это понятно. В любой δ -окрестности точки $x = 1$ найдутся одновременно как точки, в которых функция $\{x\}$ принимает значения больше, например, $\frac{2}{3}$, так и точки, в которых функция $\{x\}$ принимает значения меньше $\frac{1}{3}$. Значит, ни $b = 1$, ни $b = 0$ не могут быть пределом данной функции в точке $x = 1$ уже по той причине, что для $\epsilon = \frac{1}{3}$ невозможно найти нужного числа δ .

Автор. Я вижу, что Вы уже довольно свободно оперируете с определением предела функции. Это очень приятно. Кстати говоря,

Вы только что доказали теорему *единственности предела* функции в данной точке:

Теорема. В данной точке функция не может иметь два (или более) предела.

Понятие
о непрерыв-
ной функции

А теперь вернемся к равенству:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (6.6)$$

Вы уже убедились, что возможны ситуации, когда $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует, а $f(a)$ не существует, и напротив, когда $f(a)$ существует, а $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ не существует. Возможна, наконец, ситуация, когда и $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $f(a)$ существуют, но не равны друг другу. Приведем пример:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

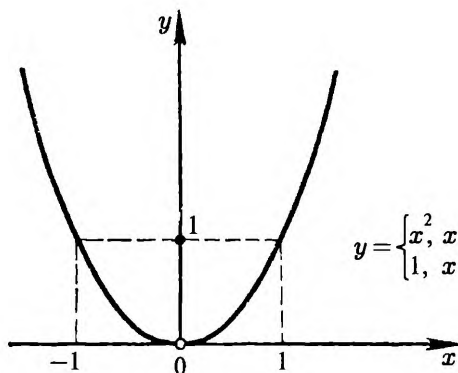


Рис. 28

График этой функции показан на рис. 28. Легко видеть, что в данном случае $f(0) = 1$, в то время как $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Таким образом, мы убеждаемся в том, что равенство (6.6) справедливо отнюдь не всегда!

Читатель. Но во многих случаях оно, по-видимому, все же справедливо?

Автор. В тех случаях, когда оно справедливо, го-

ворят, что функция $f(x)$ *непрерывна* в точке $x = a$.

Таким образом, мы приходим к новому важному понятию — понятию *непрерывности функции в точке*. Дадим ему определение.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если:

- 1) она определена в точке $x = a$;
- 2) существует предел функции в точке $x = a$;
- 3) этот предел равен значению функции в точке $x = a$;
иными словами, функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Полагаю, что наш предыдущий разговор вплотную подводит к этому определению, так что оно не нуждается в дополнительных пояснениях. Подчеркну лишь, что понятие непрерывности функции есть понятие *локальное*. Как и понятие предела функции, оно относится к той или иной точке x . Функция может быть непрерывна во всех точках или же не во всех точках промежутка, на котором она определена.

Можете ли Вы из приведенных ранее примеров выделить функции, которые не являются непрерывными в тех или иных точках?

Читатель. Прежде всего можно сослаться на функцию, график которой показан на рис. 28. Эта функция не является непрерывной в точке $x = 0$.

Автор. Почему?

Читатель. Потому что в этой точке данная функция принимает значение $y = 1$, тогда как предел функции в указанной точке равен, очевидно, нулю.

Автор. Очень хорошо. Приведите еще примеры.

Читатель. Функция $y = \{x\}$ (см. рис. 27) не является непрерывной в точках $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Функция $y = \sin \frac{1}{x}$ (см. рис. 24) не является непрерывной в точке $x = 0$; в этой точке функция не определена, и, кроме того, она не имеет предела в указанной точке. Функция, график которой показан на рис. 14 а (см. предыдущую беседу), не является непрерывной в точке $x = 2$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ не является непрерывной в точках

$$x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi, \pm \frac{7}{2}\pi, \dots$$

Автор. Достаточно. Отметим, что точки, в которых нарушается непрерывность функции, называют *точками разрыва* функции. Говорят, что в этих точках функция имеет (или претерпевает) разрыв. При прохождении через точку разрыва наблюдаются особенности в поведении графика функции. Это обстоятельство хорошо иллюстрируют приведенные Вами примеры.

Читатель. Во всех указанных примерах в точках разрыва наблюдается *разрыв линии*, изображающей график функции. Исключение составляет пример с функцией $y = \sin \frac{1}{x}$, где вообще нельзя нарисовать график вблизи точки $x = 0$.

Автор. Думаю, что и в примере с функцией $y = \operatorname{tg} x$ Вы тоже не сможете нарисовать график вблизи точек разрыва (не можете же Вы на самом деле прочертить линию, «уходящую в бесконечность»).

Читатель. Во всяком случае, если функция везде непрерывна (если точек разрыва нет), то ее график — сплошная линия; его можно начертить, не отрывая карандаша от листа бумаги.

Автор. Согласен. Хотелось бы подчеркнуть: *непрерывность функции в данной точке x дает гарантию, что если совсем немного сдвинуться из этой точки, то значение функции изменится тоже совсем немного.*

Обратимся к рис. 27, где изображен график функции $y = \{x\}$. Возьмем, например, $x = 0,5$. В этой точке функция непрерывна. Вполне очевидно, что при очень малом смещении из указанной точки (как влево, так и вправо) значение функции будет изменяться также очень мало. Иное дело точка $x = 1$ (одна из точек разрыва). В точке $x = 1$ функция принимает значение $y = 0$. Но если Вы сколь угодно мало сдвинетесь из точки $x = 1$ *влево* (возьмете, например, $x = 0,999$, или $x = 0,9999$, или другую точку, сколь угодно близкую к $x = 1$), то Вы обнаружите *резкое* изменение значения функции — от $y = 0$ до $y \approx 1$.

Читатель. Это мне понятно. Но должен признаться, что локальность понятия непрерывности функции (тот факт, что это понятие относится всякий раз к той или иной точке x) не вполне отвечает обыденному пониманию непрерывности. Ведь непрерывность обычно предполагает некий *процесс*, а следовательно, какой-то промежуток. Казалось бы, непрерывность должна относиться не к отдельному моменту времени, а к промежутку времени.

Автор. Весьма интересное замечание. Здесь как раз и проявляется одна из специфических сторон математического анализа. Рассматривая функцию в данной точке x , Вы привыкли говорить лишь о ее значении в этой точке. В математическом анализе Вы можете говорить не только о значении функции в точке, но также о наличии (отсутствии) предела функции в точке, о непрерывности функции в точке. Это означает, что на основании информации о функции в данной точке мы можем получить представление о *поведении функции вблизи этой точки*. Мы получаем возможность предсказывать, как поведет себя функция, если мы немного сдвинемся из данной точки x .

Впрочем, пока мы сделали лишь первый шаг в этом направлении. Следующий шаг будет сделан с введением понятия «производная», о чем мы поговорим позднее — в восьмой и девятой беседах.

Читатель. Все же мне хотелось бы заметить, что в приведенных выше примерах функция на любом промежутке конечной длины либо оказывалась непрерывной во всех точках промежутка, либо претерпевала разрыв лишь в *конечном* числе точек. В этом смысле локальность понятия «точка разрыва» очевидна. Непрерывность же функции все равно наблюдается всякий раз на том или ином промежутке.

Автор. Во-первых, непрерывность функции на промежутке отнюдь не мешает рассматривать понятие непрерывности как локальное понятие. *Функция непрерывна на промежутке, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.*

Во-вторых, нетрудно придумать пример, когда на промежутке конечной длины число точек разрыва оказывается *бесконечно большим*. Рассмотрим, например, такую функцию:

$$y = \begin{cases} 2 & \text{для } x = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{1}{16}, \dots, \\ x^2 & \text{для всех остальных точек числовой прямой, включая } x = 0. \end{cases}$$

Представление о графике этой функции дает рис. 29. Легко видеть, что в любой δ -окрестности точки $x = 0$ данная функция имеет бесконечное число точек разрыва.

Наконец, можно указать пример функции, являющейся разрывной *во всех точках бесконечного промежутка*. Такой функцией является

уже знакомая Вам функция Дирихле (см. предыдущую беседу). Будучи определенной на всей числовой прямой, эта функция в то же время ни в одной точке не имеет предела и, следовательно, ни в одной точке не является непрерывной.

Читатель. Недаром мы принципиально не можем нарисовать график функции Дирихле.

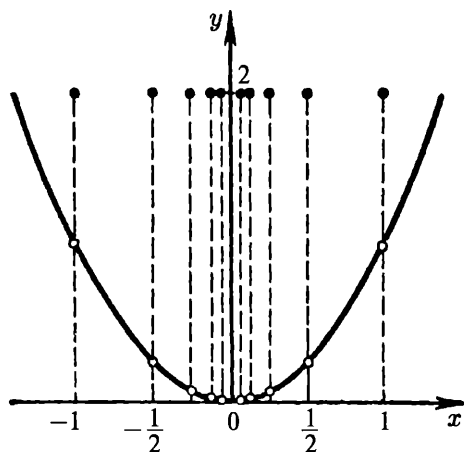


Рис. 29

Автор. Что же касается наиболее часто встречающихся Вам функций — *степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических, обратных тригонометрических*, то о них можно сказать, что они непрерывны во всех точках естественной области определения соответствующего аналитического выражения. То же можно сказать о сложных функциях, получаемых из указанных функций. В кур-

сах математического анализа непрерывность всех этих функций специально доказывается. Мы же ограничимся лишь констатацией этого факта.

Предел функции (продолжение)

Читатель. Сопоставляя определение предела функции в точке с определением предела числовой последовательности, приходится заключить, что эти пределы имеют разную природу.

Определение предела
функции по Гейне

Автор. Могу Вас понять. Я сам подчеркивал в прошлой беседе различие между этими понятиями, указывая, как Вы, наверное, помните, на тот факт, что последовательность есть функция, определенная на множестве натуральных чисел, тогда как интересующие нас функции определены на промежутках. Однако вряд ли правомерно говорить о различии природы предела функции и предела последовательности, В конечном счете (и это очень важно понимать!) *предел функции в точке может быть определен на основе использования предела числовой последовательности.*

Читатель. Это интересно.

Автор. Временно забудем данное в прошлой беседе определение предела функции. Рассмотрим новое определение.

При этом, как и ранее, будем рассматривать некоторую функцию $f(x)$, определенную на некотором промежутке, и некоторую точку $x = a$, взятую из этого промежутка либо совпадающую с его концом.

Определение предела функции может быть сформулировано в следующем виде.

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для любой числовой последовательности (x_n) , удовлетворяющей условиям:

- 1) все x_n принадлежат области определения функции;

- 2) $x_n \neq a$ при любом номере n ;
- 3) последовательность (x_n) сходится и предел ее есть a , последовательность соответствующих значений функции $[f(x_n)]$ сходится и предел ее равен b .

Итак, надо «сконструировать» некоторую сходящуюся к a последовательность:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

(полагаем при этом, что все x_n принадлежат области определения функции и для всех n имеем $x_n \neq a$). Автоматически возникает последовательность значений функции:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$$

Предположим, что эта последовательность сходится и предел ее есть число b . После этого «сконструлируем» новую последовательность, сходящуюся к a :

$$x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n, \dots$$

(все x'_n принадлежат области определения функции; $x'_n \neq a$). Важно, чтобы соответствующая последовательность значений функции

$$f(x'_1), f(x'_2), f(x'_3), \dots, f(x'_n), \dots$$

как и в предыдущем случае оказалась сходящейся, и притом к числу b . Затем «сконструлируем» третью последовательность, сходящуюся к a :

$$x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_n, \dots$$

и т. д. И если окажется, что для любой сходящейся к a последовательности (x_n) (все x_n из области определения функции; $x_n \neq a$ для всех n) соответствующая последовательность значений функции сходится к числу b , то последнее может быть названо пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$.

Читатель. Само по себе это определение предела функции вполне понятно. А как же быть с прежним определением предела функции?

Эквивалентность
определений
предела

Автор. Эти определения эквивалентны.

Читатель. Но внешне они довольно различны!

Автор. Докажем их эквивалентность. Предварительно условимся называть определение предела функции, использующее δ -окрестность точки a , «определением 1», а определение

предела функции, использующее числовые последовательности, «определением 2».

Какие две теоремы надо доказать, чтобы убедиться в эквивалентности определения 1 и определения 2? Сформулируйте эти теоремы.

Читатель. Надо доказать две теоремы — *прямую и обратную*. Надо доказать, что из определения 1 вытекает определение 2 и наоборот — из определения 2 вытекает определение 1.

Автор. Правильно. Итак, сначала докажем теорему:

Теорема. Если число b является пределом функции $f(x)$ в точке a в смысле определения 1, то оно является пределом функции $f(x)$ в точке a и в смысле определения 2.

Доказательство. Поскольку число b есть предел функции $f(x)$ в точке a в смысле определения 1 (это нам дано), то, следовательно, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое что для всех $x \neq a$ из δ -окрестности точки a выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Далее «сконструируем» произвольным образом последовательность (x_n) , потребовав, чтобы она сходилась к числу a (все x_n принадлежат области определения функции и для всех n имеем $x_n \neq a$). При этом возникнет последовательность соответствующих значений функции (последовательность $(f(x))$). Надо доказать, что последовательность $(f(x))$ сходится к числу b .

Приступим к доказательству. Выберем произвольно число $\varepsilon > 0$. Нам надо найти такой номер N , чтобы при всех $n > N$ выполнялось неравенство: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Сразу указать такой номер N для произвольного числа ε мы не можем. Однако мы можем указать для произвольного числа ε другое число — число δ , такое что если $|x - a| < \delta$, то $|f(x) - b| < \varepsilon$. Возьмем это число δ и обратимся к последовательности (x_n) , сходящейся к a . Очевидно, что коль скоро последовательность (x_n) сходится к a , то для упомянутого числа δ (как и для любого другого положительного числа) можно указать номер такой, что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \delta$, а следовательно, при всех $n > N$ будет выполняться и другое неравенство: $|f(x_n) - b| < \varepsilon$. Таким образом, найденный для числа δ

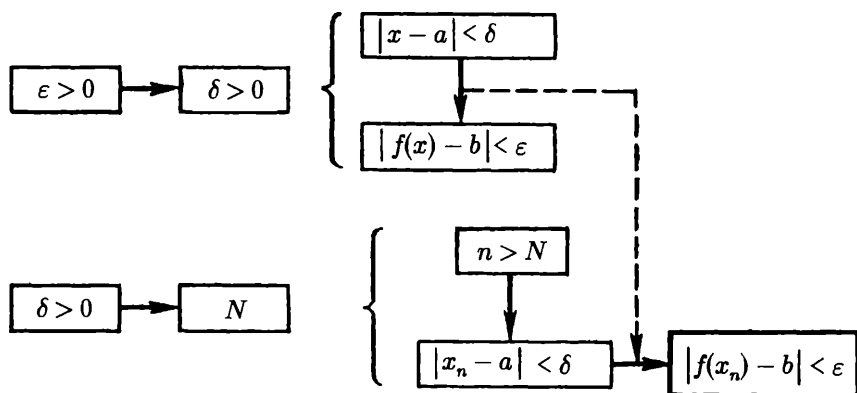


Рис. 30

при рассмотрении последовательности (x_n) номер N является искомым номером. Это означает, что сходимость последовательности $(f(x))$ к числу b доказана. Поскольку последовательность (x_n) , сходящаяся к a , была выбрана («сконструирована») произвольно, то в результате заключаем, что теорема доказана. \square

Если Вы поняли нить рассуждений, то попробуйте кратко описать логическую структуру доказательства.

Читатель. Я попробую «изобразить» структуру доказательства при помощи схемы (рис. 30).

Автор. Ваша схема мне нравится. Поясните ее словами.

Читатель. *Первый шаг* доказательства: для произвольного $\epsilon > 0$ находим число $\delta > 0$, такое что из неравенства $|x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$.

Второй шаг доказательства: для найденного (на первом шаге) числа δ находим, рассматривая сходящуюся к a последовательность (x_n) , номер N , такой что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \delta$. Учитывая то, что было сказано в связи с первым шагом, заключаем, что из неравенства $|x_n - a| < \delta$ вытекает неравенство $|f(x_n) - b| < \epsilon$.

Следовательно, для произвольного $\epsilon > 0$ найден номер N , такой что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|f(x_n) - b| < \epsilon$. Это и требовалось доказать.

Автор. Хорошо. В заключение я все же хочу подчеркнуть некоторые «изюминки», на которых было построено доказательство теоремы. Мы знаем, что для любого x из δ -окрестности точки a выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Поскольку последовательность (x_n) сходится к a , то, начиная с некоторого номера $N + 1$, все x_n (весь бесконечный «хвост» последовательности (x_n)) попадут в упомянутую δ -окрестность точки a . Отсюда немедленно следует, что, начиная с того же самого номера $N + 1$, все $f(x_n)$ (весь бесконечный «хвост» последовательности $(f(x_n))$) попадут внутрь интервала $]b - \varepsilon; b + \varepsilon[$. Это и доказывает сходимость последовательности $(f(x_n))$ к числу b .

Читатель. Все понятно.

Автор. А теперь докажем обратную теорему.

Теорема. Если число b является пределом функции $f(x)$ в точке a в смысле определения 2, то оно является пределом функции $f(x)$ в точке a и в смысле определения 1.

Доказательство. Теорему будем доказывать методом от противного. Предположим противное тому, что надо доказать: предположим, что число b , являясь пределом функции в смысле определения 2, не является, однако, пределом функции в смысле определения 1. Как сформулировать последнее утверждение (точнее, предположение)?

Читатель. Насколько я помню, мы встречались с такой формулировкой в прошлой беседе. Если число b не является пределом функции $f(x)$ в точке a (в смысле определения 1), то это означает, что существует такое число $\varepsilon' > 0$, для которого невозможно найти нужного числа $\delta > 0$. Какое бы число δ мы ни подбирали, *всякий раз* хотя бы для одной точки x из δ -окрестности точки a значение функции $f(x)$ не попадет внутрь интервала $]b - \varepsilon'; b + \varepsilon'[$, т. е. не будет выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon'$.

Автор. Верно. Так вот, предположим, что выбрано именно такое число $\varepsilon' > 0$. Возьмем далее любое число $\delta > 0$, например $\delta_1 = 1$. Как Вы уже сказали, в любой δ -окрестности точки a и, в частности, в δ_1 -окрестности этой точки найдется по крайней мере одна точка x (обозначим ее через x_1), для которой имеем: $|f(x_1) - b| \geq \varepsilon'$.

Читатель. А если таких точек x в δ_1 -окрестности окажется много?

Автор. Для нас это безразлично. Нам важно, что найдется *хотя бы одна*. Если таких точек несколько, выберите любую из них и обозначьте ее через x_1 .

Далее возьмем новое число δ , например $\delta_2 = \frac{1}{2}$. Согласно принятому предположению, и в δ_2 -окрестности точки a найдется хотя бы одна точка x (обозначим ее через x_2), для которой имеем: $|f(x_2) - b| < \epsilon'$.

Далее возьмем $\delta_3 = \frac{1}{3}$. В δ_3 -окрестности точки a также найдется хотя бы одна точка (точка x_3), для которой имеем: $|f(x_3) - b| \geq \epsilon'$.

Продолжим этот процесс, рассматривая последовательность δ -окрестностей точки a :

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}, \quad \delta_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

Заметьте, что δ -окрестности выбираются так, чтобы последовательность (δ_n) сходилась к нулю (была бесконечно малой).

Выбирая из каждой δ -окрестности по одной точке x , в которой значение функции не попадает внутрь интервала $]b - \epsilon'; b + \epsilon'[,$ получим последовательность, составленную из таких точек:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

Поскольку последовательность (δ_n) сходится к нулю, то отсюда следует, что последовательность (x_n) сходится к точке a . Последовательность же соответствующих значений функции (последовательность $(f(x_n))$) не сходится к числу b , поскольку для всех n имеем: $|f(x_n) - b| \geq \epsilon'$. Получается, что мы нашли такую сходящуюся к точке a последовательность (x_n) , для которой последовательность $(f(x_n))$ не является сходящейся.

Тем самым мы пришли к противоречию с условием теоремы. Ведь дано, что число b есть предел функции в точке a в смысле определения 2; а это означает, что для *любой* последовательности (x_n) сходящейся к a , соответствующая последовательность $(f(x_n))$ должна сходиться к b . Мы же нашли последовательность (x_n) , для которой это условие не выполняется.

Отсюда следует вывод: неверно предположение о том, что число b , являющееся пределом функции в смысле определения 2,

не является пределом функции в смысле определения 1. Тем самым теорема доказана. \square

Читатель. Я вижу, что был неправ, когда ранее говорил о разной природе предела числовой последовательности и предела функции в точке.

Предельные
теоремы

Автор. Эти пределы различны, но *природа их едина*. Понятие *предела функции в точке* основывается, как мы убедились, на понятии *предела числовой последовательности*.

Недаром основные теоремы о пределах функций аналогичны соответствующим теоремам о пределах последовательностей.

Читатель. Одну такую теорему мы уже отмечали: *единственность предела функции в точке*.

Автор. Эта теорема аналогична теореме о единственности предела числовой последовательности.

Отметим также (без доказательства) *теорему о пределе суммы произведения, отношения функций*.

Теорема. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке a , то существуют в указанной точке также пределы функций

$$[f(x) + g(x)], \quad [f(x)g(x)], \quad \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right],$$

равные соответственно сумме, произведению и отношению пределов исходных функций (в последнем случае необходимо, чтобы предел функции $g(x)$ в точке a был отличен от нуля).

Итак,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{при дополнительном условии: } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

Читатель. Аналогичные теоремы мы обсуждали, рассматривая числовые последовательности.

Автор. Далее я хочу сделать два замечания, используя для этого специально подобранные примеры.

Первое замечание связано со следующим примером. Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1 - x^2} = 0$ и что $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 1} = 0$. Можно ли утверждать, что $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x - 1}) = 0$?

Читатель. Предел функции $\sqrt{1 - x^2}$ в точке $x = 1$ существует и равен нулю. Предел функции $\sqrt{x - 1}$ в точке $x = 1$ тоже существует и тоже равен нулю. Согласно теореме о пределе суммы предел функции $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x - 1}$ должен существовать и должен равняться сумме двух предыдущих пределов, т. е. нулю.

Автор. И тем не менее предела функции $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x - 1}$ в точке $x = 1$ нет по той простой причине, что выражение $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x - 1}$ имеет смысл в одной-единственной точке (точке $x = 1$). Применяя теорему о пределе суммы, Вы не приняли во внимание области определения функций $\sqrt{1 - x^2}$ и $\sqrt{x - 1}$. Первая из этих функций имеет естественную область определения $[-1; 1]$, а вторая — $[1; \infty[$.

Читатель. По-видимому, подобное замечание относится также и к тем случаям, когда применяются теоремы о пределе произведения и пределе частного (пределе отношения функций)?

Автор. Разумеется. Работая с функциями, Вы всегда должны учитывать области их определения. Естественные области определения функций могут пересекаться (или даже вообще совпадать), но могут и не пересекаться. За этим надо внимательно следить. Кстати, как Вы думаете, почему мы не встречаемся с подобными осложнениями, когда работаем с последовательностями?

Читатель. Потому, очевидно, что все числовые последовательности имеют одну и ту же область определения — множество натуральных чисел.

Первый замечательный предел

Автор. Верно. А теперь перейдем ко *второму замечанию*. Как Вы полагаете, существует ли предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}?$$

Читатель. Во всяком случае, теорема о пределе частного здесь неприменима, поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

Автор. Оказывается, что если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, то предел частного (предел функции $[f(x)/g(x)]$) может существовать.

Читатель. Чему же он равен?

Автор. Это зависит от конкретных функций $f(x)$ и $g(x)$. Убедимся, например, в том, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Попутно заметим, что функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$; однако это обстоятельство, как мы знаем, еще не мешает ставить вопрос о пределе данной функции в точке $x = 0$.

Будем исходить из известных неравенств:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Предположение, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, не уменьшает общности рассмотрения. Поделив $\sin x$ на каждый из членов этих неравенств, получим:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

откуда

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Далее учтем, что

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < 2 \frac{x}{2} = x.$$

Таким образом,

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x,$$

или, иначе,

$$-x < -\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) < 0.$$

Значит,

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < |x|.$$

Итак, мы получили следующее неравенство, справедливое при $|x| < \frac{\pi}{2}$:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|. \quad (7.1)$$

Если воспользоваться этим неравенством, то можно легко доказать, что функция $\frac{\sin x}{x}$ имеет предел в точке $x = 0$, причем этот предел равен единице. Будем при этом пользоваться определением 1 для предела функции в точке. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, потребовав для простоты, чтобы $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$. В качестве искомого числа δ достаточно выбрать $\delta = \varepsilon$, поскольку в этом случае из неравенства $|x - a| < \delta$ будет следовать согласно (7.1) неравенство

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \delta = \varepsilon.$$

Таким образом, единица действительно есть предел функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$.

Замечание о пределе вида $0/0$

Читатель. Неужели всякий раз, когда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, для выяснения вопроса о пределе

функции $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ в точке a надо прибегать к по-

добного рода выкладкам, используя при этом определение предела функции в точке?

Автор. Нет, конечно. Ситуация, о которой Вы говорите, известна как «неопределенность вида $0/0$ ». Существуют правила, которые позволяют относительно просто рассматривать такую ситуацию, или, как говорят, «раскрывать неопределенность». В результате на практике обычно без особого труда решается вопрос как о существовании предела функции $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ в той или иной точке,

так и о том, чему равен этот предел (если, конечно, он существует). С некоторыми правилами раскрытия неопределенности вида $0/0$ (а также неопределенностей других видов) мы познакомимся ниже; однако систематическое рассмотрение таких правил выходит за рамки наших бесед.

Нам важно подчеркнуть здесь следующее принципиальное (и весьма существенное для дальнейшего) обстоятельство: хотя теорема о пределе частного и не распространяется на случаи, когда $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, однако если при этом $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, то в таком случае

предел функции $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ в точке a может существовать. В этом мы

убедились на примере предела функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$.

Читатель. По-видимому, подобная ситуация может иметь место и для числовых последовательностей?

Автор. Безусловно, может. Вот простой пример:

$$(x_n) = 1, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{27}, \quad \frac{1}{64}, \dots, \quad \frac{1}{n^3}, \dots \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right);$$

$$(y_n) = 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \dots, \quad \frac{1}{n}, \dots \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \right).$$

Легко видеть, что предел последовательности $\left(\frac{x_n}{y_n} \right)$ есть в данном случае предел последовательности $\left(\frac{1}{n^2} \right)$. Он существует и равен нулю.

Читатель. Вы заметили, что существование предела функции $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ в точке a , когда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (существование предела «типа $0/0$ »), весьма важно для дальнейшего рассмотрения.

Автор. Дело в том, что именно на пределах «типа $0/0$ » и основано одно из важнейших в математическом анализе понятий — понятие *производной*. В этом мы убедимся в следующих беседах.

Скорость

О понятии
скорости

Автор. Мы приблизились вплотную к рассмотрению понятия *производной*. Наряду с понятиями *предела числовой последовательности* и *предела функции* это понятие является одним из наиболее важных, специфических понятий математического анализа.

К понятию производной можно прийти, рассматривая, например, такое широко используемое в физике понятие, как *мгновенная скорость* неравномерно движущегося тела.

Читатель. Мы знакомимся с этим понятием, изучая в курсе физики раздел кинематики, а точнее кинематики прямолинейного неравномерного движения.

Автор. Совершенно верно. Как же Вы представляете себе мгновенную скорость? Что это такое?

Читатель. Мгновенной скоростью тела называют скорость, которую оно имеет в данный момент времени (в данной точке траектории).

Автор. А как Вы представляете себе *скорость в данный момент времени*?

Читатель. Так и представляю... Если тело движется равномерно, то в разные моменты времени его скорость одинакова. Если тело движется неравномерно (ускоряясь или замедляясь), то в разные моменты времени его скорость будет, вообще говоря, различной.

Автор. Разве Вы не чувствуете, что фраза «скорость в данный момент времени» не более как *синоним* фразы «мгновенная скорость»? Как говорится, «что в лоб, что по лбу». Термин «скорость в данный

момент времени» нуждается в разъяснении в той же мере, в какой нуждается в нем термин «мгновенная скорость».

Для измерения скорости тела надо, очевидно, измерить какое-то расстояние, пройденное телом, и промежуток времени, за который это расстояние было пройдено. Однако о каком пройденном расстоянии и о каком промежутке времени можно говорить *в данный момент времени*?

Читатель. Для измерения скорости действительно нужно оперировать с неким пройденным расстоянием и неким промежутком времени. Но мы ведь говорим не об измерении, а об *определении* понятия *мгновенной скорости*.

Автор. Не будем пока заботиться о формальном определении этого понятия. Гораздо важнее выявить его сущность, его содержание. А чтобы выявить сущность физической величины, поневоле приходится начинать с вопроса о том, как она измеряется. Итак, как Вы ухитритесь измерить скорость тела в данный момент времени?

Читатель. Можно выбрать какой-нибудь малый промежуток времени Δt , а точнее промежуток от рассматриваемого момента времени t до момента $t + \Delta t$. Пусть за этот промежуток времени тело пройдет расстояние Δs . Если Δt выбран достаточно малым, то отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ и будет представлять собой скорость тела в момент времени t .

Автор. Что такое *достаточно малый* промежуток времени? С чем именно его следует сравнивать? Является ли он достаточно малым по отношению к году, месяцу, часу, минуте, секунде, миллисекунде?

Читатель. Очевидно, что ни год, ни месяц, ни час, ни, наверное, минута здесь не годятся... Впрочем, измерение мгновенной скорости можно осуществить лишь с той или иной степенью точности. Чем меньше Δt , тем точнее будет величина измеренной мгновенной скорости.

Автор. Сущность самого понятия *мгновенной скорости* (или, иными словами, «скорости в данный момент времени») не должна зависеть от той точности, с какой производится измерение. Та скорость, о которой Вы сейчас говорили, т. е. отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, есть не что иное, как *средняя скорость за промежуток времени Δt* , а вовсе не мгновенная скорость. Правильно, что, чем меньше Δt , тем

(участок 0–1 графика). Вспомните формулу пути для равноускоренного движения без начальной скорости.

Читатель. Эта формула такова:

$$s(t) = \frac{at^2}{2}, \quad (8.1)$$

где a — ускорение.

Автор. Упоминавшаяся крайняя левая парабола есть график функции, к которой относится указанная Вами формула.

Читатель. Получается, что на промежутке времени от 0 до t_1 тело движется равноускоренно.

Автор. Совершенно верно.

Читатель. Я понимаю. На промежутке от t_1 до t_2 тело движется равномерно (график на участке 1–2 имеет вид отрезка прямой линии); на промежутке от t_2 до t_3 тело движется равнозамедленно (здесь используется парабола перевернутого вида); на промежутке от t_3 до t_4 тело находится в покое; на промежутке от t_4 до t_5 оно движется равноускоренно, а на промежутке от t_5 до t_6 — равнозамедленно.

Автор. Именно так. А теперь давайте подойдем к изображенному на рис. 31 графику функции $s(t)$ с чисто математической точки зрения. Поставим вопрос: как сильно изменяются значения функции $s(t)$ при изменении значений ее аргумента t для разных участков графика?

Читатель. На участке 3–4 значения функции $s(t)$ вообще не меняются; на остальных участках меняются. Медленнее меняются значения функции $s(t)$ вблизи точек графика 0, 3, 4, 6; быстрее меняются вблизи точек 1, 2, 5. Впрочем, на всем участке 1–2 изменение оказывается одинаково быстрым.

Автор. Вы достаточно наблюдательны. А где, по-вашему, быстрее изменяются значения функции — вблизи точки 2 или вблизи точки 5?

Читатель. Конечно, вблизи точки 2. Здесь график функции идет более круто, чем вблизи точки 5.

Автор. Обратимся к рис. 32. Здесь в столбце A показаны отдельно два участка графика функции $s(t)$ — участок вблизи точки 2

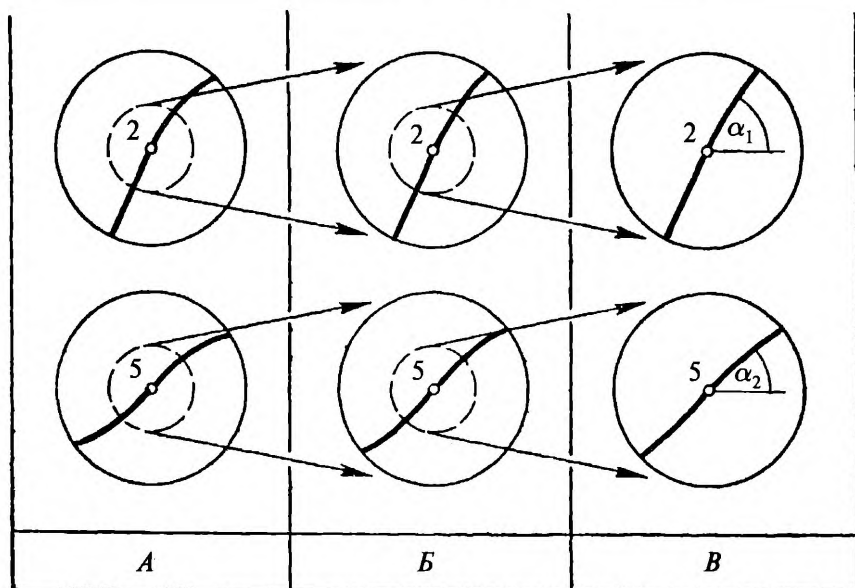


Рис. 32

и участок вблизи точки 5 (на рис. 31 эти участки выделены пунктирными окружностями). В столбце *Б* снова показаны участки графика вблизи точек 2 и 5, но при двукратном увеличении масштаба. Последующее двукратное увеличение масштаба отражено в столбце *В*. Мы видим, что по мере увеличения масштаба кривизна графика функции $s(t)$ становится все менее заметной. Можно сказать, что график обладает свойством «линейности в малом». Это позволяет говорить об угле наклона графика *в той или иной его точке*. На рис. 32 (в столбце *В*) показано, что угол наклона графика в точке 2 есть α_1 (наклон рассматривается по отношению к оси t), а угол наклона в точке 5 есть α_2 , причем, как легко видеть, $\alpha_2 < \alpha_1$.

Связь тангенса
угла наклона
касательной
и скорости

Обозначим через $\alpha(t)$ угол наклона графика функции $s(t)$ в момент t . Тогда $\operatorname{tg} \alpha(t)$ принято называть *скоростью изменения* функции $s(t)$ в момент t . Это и есть мгновенная скорость.

Читатель. Но почему именно тангенс?

Автор. Это легко понять, обратившись к участку 1–2 графика на рис. 31. На этом участке движение равномерное; скорость изменения функции $s(t)$ одинакова во всех точках. Очевидно, что

она равна средней скорости за промежуток времени $t_2 - t_1$. Последняя же равна $\frac{s_1 - s_1}{t_2 - t_1} = \operatorname{tg} \alpha$.

Читатель. Однако продемонстрированное на рис. 32 «спрямление» графика с увеличением масштаба, в котором он рассматривается, является *приближенным*. Почему Вы удовлетворились всего лишь четырехкратным увеличением масштаба?

Автор. Можно избавиться от подмеченной Вами приближенности и обосновать совершенно строго понятие «угол наклона графика в той или иной его точке». Возьмем для определенности участок графика функции $s(t)$ вблизи точки 5. Выберем на этом участке произвольную точку B и проведем секущую через точки 5 и B (рис. 33). Затем выберем на графике между точками 5 и B произвольно точку C и проведем новую секущую — $5C$. Далее выберем на графике между точками 5 и C произвольно точку D и проведем секущую $5D$. Будем продолжать этот процесс бесконечно долго; в результате получится последовательность секущих, сходящаяся к некоторой прямой (на рис. 33 к прямой $5A$). Эту прямую называют *касательной* к графику рассматриваемой функции в точке 5. Угол наклона касательной и есть угол наклона графика в данной точке.

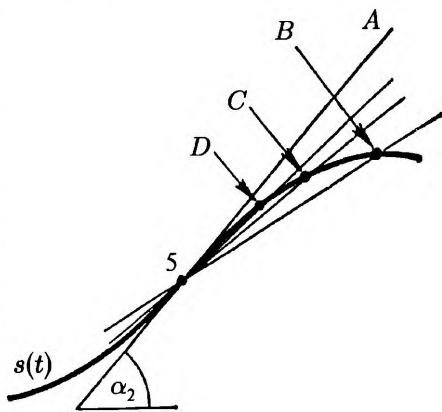


Рис. 33

Читатель. Если я правильно понял, теперь можно вполне строго сформулировать ответ на вопрос: что такое мгновенная скорость?

Скорость
как предел
отношения

Автор. Попробуйте это сделать.

Читатель. Мгновенная скорость тела в момент времени t есть скорость изменения функции $s(t)$ в момент t . Она численно равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции $s(t)$ для момента времени t .

Автор. Очень хорошо. Только следовало отметить, что функция $s(t)$ выражает зависимость расстояния, пройденного телом, от времени.

Читатель. Правда, такое определение мгновенной скорости «при-
вязано» к *графику* функции $s(t)$. А если функция $s(t)$ не задана
графически?

Автор. Во всяком случае, график у функции $s(t)$ существует всегда.
Единственное «неудобство» сформулированного Вами определения
сосрится в необходимости учитывать масштабы единиц по осям
координат. Если единице времени (на оси t) и единице длины
(на оси s) соответствуют отрезки одинаковой длины, то мгновенная
скорость в момент t есть

$$\operatorname{tg} \alpha(t) \frac{\text{единица длины}}{\text{единица времени}}.$$

Если же отрезок, отвечающий единице длины, в n раз больше от-
резка, отвечающего единице времени, то в этом случае мгновенная
скорость есть

$$\frac{1}{n} \operatorname{tg} \alpha(t) \frac{\text{единица длины}}{\text{единица времени}}.$$

Это «неудобство», однако, не принципиально.

Впрочем, можно дать определение мгновенной скорости в иной
форме (свободной от графических образов). Обратимся к рис. 34,
представляющему собой дальнейшее «развитие» рис. 33. Из рисунка

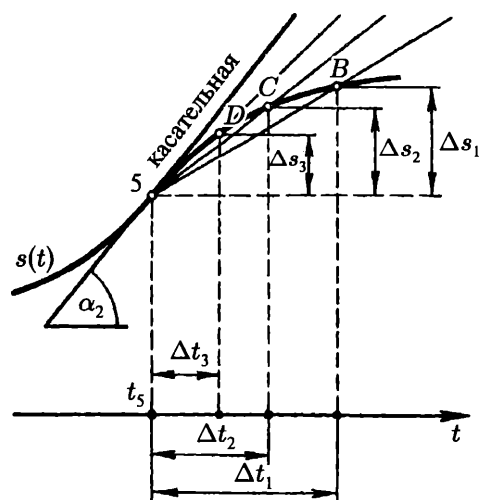


Рис. 34

видно, что тангенс угла наклона к оси t секущей SB есть отношение $\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}$; иначе говоря, это есть средняя скорость за промежуток времени от t_5 до $t_5 + \Delta t_1$. Тангенс угла наклона секущей SC есть $\frac{\Delta s_2}{\Delta t_2}$, т. е. средняя скорость за промежуток времени от t_5 до $t_5 + \Delta t_2$ (причем $\Delta t_2 < \Delta t_1$). Тангенс угла наклона секущей SD есть $\frac{\Delta s_3}{\Delta t_3}$, т. е. средняя скорость за промежуток времени от t_5 до $t_5 + \Delta t_3$ (причем $\Delta t_3 < \Delta t_2$) и т. д. Таким

образом, последовательности секущих, сходящейся к касательной (проведенной к графику функции $s(t)$ в точке 5), соответствует последовательность средних скоростей, сходящаяся к тангенсу угла наклона α_2 касательной, т.е. к значению мгновенной скорости в момент t_5 .

Читатель. Получается, что *мгновенная скорость есть предел последовательности средних скоростей*.

Автор. Именно так. Мгновенная скорость есть не что иное, как предел последовательности средних скоростей, при условии, что промежуток времени, за который производится усреднение, стремится к нулю, стягиваясь к рассматриваемому моменту времени t (на рис. 34 этот момент есть t_5).

Давайте сформулируем все это строго. Итак, нас интересует мгновенная скорость тела в некоторый момент времени t . Выберем произвольно промежуток времени от t до $t + \Delta t_1$; пусть за этот промежуток тело прошло расстояние Δs_1 . Средняя скорость за указанный промежуток времени есть

$$v_{\text{cp}}(t, \Delta t_1) = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}.$$

Далее выберем более короткий промежуток времени — от t до $t + \Delta t_2$ ($\Delta t_2 < \Delta t_1$); за этот промежуток пройдено расстояние Δs_2 . Следовательно, средняя скорость за промежуток времени, равный Δt_2 , есть

$$v_{\text{cp}}(t, \Delta t_2) = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2}.$$

Будем продолжать этот процесс, выбирая все более короткие промежутки времени, содержащие момент t (например, в качестве своего левого конца). Получим последовательность средних скоростей:

$$v_{\text{cp}}(t, \Delta t_1), v_{\text{cp}}(t, \Delta t_2), v_{\text{cp}}(t, \Delta t_3), \dots$$

Предел этой последовательности при $\Delta t \rightarrow 0$ и есть мгновенная скорость в момент t :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{cp}}(t, \Delta t). \quad (8.2)$$

Учитывая, что

$$v_{\text{cp}}(t, \Delta t) = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

перепишем выражение (8.2) в виде

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \quad (8.3)$$

В результате можно сформулировать следующее определение мгновенной скорости.

Определение. Мгновенная скорость в момент t есть предел последовательности средних скоростей за промежутки времени от t до $t + \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Читатель. Теперь я вижу, что, вместо того чтобы говорить о достаточно малом промежутке времени Δt (я имею в виду наш разговор об отношении $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ в начале беседы), надо говорить о *предельном переходе* при $\Delta t \rightarrow 0$. Иными словами, мгновенная скорость есть не $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ при достаточно малом Δt , а $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Автор. Именно так. Сформулированное выше определение мгновенной скорости не только вскрывает ее сущность, но и дает правило для ее вычисления, коль скоро известно аналитическое выражение для функции $s(t)$. Давайте выполним такое вычисление для случая, когда функция $s(t)$ описывается выражением (8.1).

Читатель. Надо подставить (8.1) в (8.3). После подстановки получаем:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{a(t + \Delta t)^2}{2} - \frac{at^2}{2}}{\Delta t}.$$

Автор. Смелее. Раскрывайте скобки.

Читатель. Итак,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2)}{2\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(at + \frac{\Delta t}{2} \right) = at.$$

Мы получили хорошо известную в курсе физики формулу для скорости при равноускоренном движении без начальной скорости:

$$v(t) = at. \quad (8.4)$$

Автор. Совершенно верно. Вас следует поздравить: Вы впервые в своей жизни выполнили операцию, называемую *дифференцированием*. Иначе говоря, по заданной функции $s(t)$ Вы нашли *производную* — функцию $v(t)$.

Читатель. Мгновенная скорость есть производная?

Автор. Заметьте, что производная всегда рассматривается *по отношению* к некоторой *исходной* функции. Если исходная функция есть $s(t)$ (зависимость пройденного расстояния от времени), то производная есть мгновенная скорость.

Но вернемся к графику функции $s(t)$, изображенному на рис. 31. Наши предыдущие рассуждения и, в частности,

результат (8.4) позволяют без особого труда нарисовать по графику функции $s(t)$ график производной, т. е. функции $v(t)$. Сопоставление этих двух графиков дано на рис. 35. Советую внимательно рассмотреть этот рисунок, воспринимая его как сопоставление графика некоторой функции $s(t)$ и графика скорости изменения этой функции.

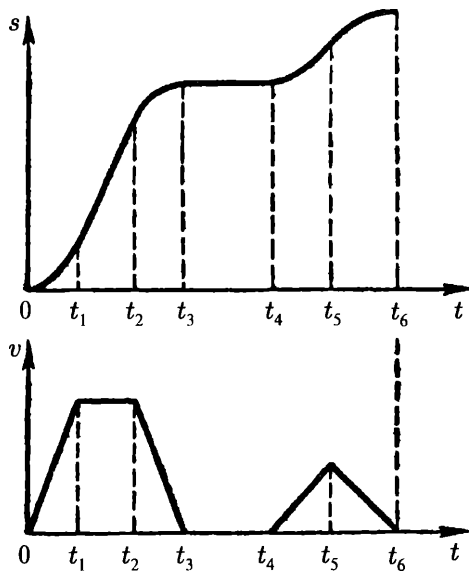


Рис. 35

Производная

Понятие производной
функции в точке

Автор. Предыдущая беседа дала возможность на конкретном примере из курса физики (на примере мгновенной скорости тела, движущегося прямолинейно и неравномерно) познакомиться с понятием *производной*. Теперь рассмотрим это понятие с чисто математической точки зрения, не вкладывая в математические символы физического содержания.

На рис. 36 показан график некоторой функции $y = f(x)$. Выберем произвольно точку $x = x_0$ из области определения функции.

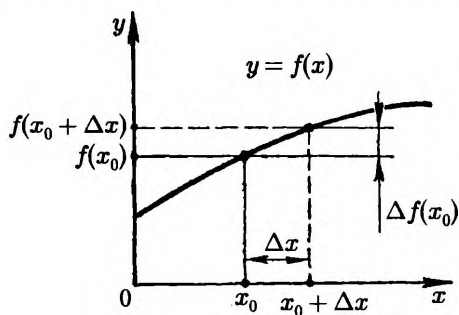


Рис. 36

В дальнейшем обсуждении эта точка будет предполагаться *фиксированной*. Рассмотрим другую точку из области определения функции — точку x . Введем обозначение: $\Delta x = x - x_0$. Величину Δx принято называть *приращением независимой переменной*; приращение рассматривается относительно фиксированной точки x_0 . В зависимости от выбора

точки x приращение Δx может быть больше или меньше, может быть положительным или отрицательным.

Далее рассмотрим разность значений функции в точках $x = x_0 + \Delta x$ и $x = x_0$: $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Разность $\Delta f(x_0)$ называют *приращением функции f в точке x_0* . Поскольку x_0 фиксирована, то

$\Delta f(x_0)$ должна рассматриваться как функция переменного приращения Δx независимой переменной.

Читатель. Но тогда, наверное, лучше бы обозначать эту функцию как $\Delta f(x)$, а не как $\Delta f(x_0)$?

Автор. Возможно. Однако принято обозначение $\Delta f(x_0)$. Такое обозначение подчеркивает тот факт, что данное приращение функции f (иными словами, данная функция от Δx) рассматривается именно для точки x_0 .

Пользуясь понятиями приращений, нетрудно оценить скорость изменения функции f вблизи точки x_0 .

Читатель. Эта скорость должна характеризоваться отношением. Так, например, если рассмотреть для сравнения приращение функции f в некоторой другой точке из области ее определения (точке $x = x_1$), то, получив, например, неравенство

$$\frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} > \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

можно сделать заключение: вблизи точки x_1 скорость изменения функции f больше, чем вблизи точки x_0 .

Автор. Однако Вы ничего не сказали о величине приращения Δx . Если приращение Δx окажется слишком большим, то из неравенства, о котором Вы говорили, можно сделать неверный вывод. Поясню свою мысль при помощи рис. 37. Как видите,

$$\frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} > \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Однако согласитесь, что вблизи точки x_0 функция изменяется заметно быстрее (график функции идет круче), нежели вблизи точки x_1 .

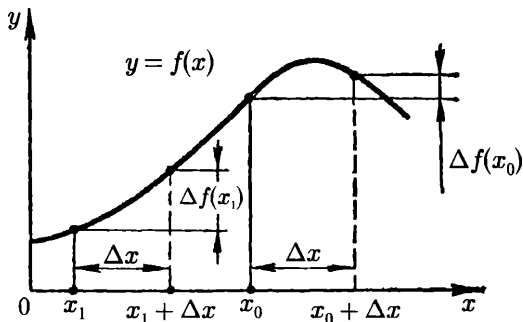


Рис. 37

Читатель. Необходимо, чтобы величина приращения Δx была достаточно малой. Чем меньше Δx , тем точнее информация о скорости изменения функции вблизи рассматриваемой точки.

Автор. Можно поступить совсем аккуратно: рассмотреть предел отношения $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx , стремящемся к нулю (вспомните предыдущую беседу).

Читатель. Этот предел будет характеризовать *скорость изменения функции* f непосредственно в точке $x = x_0$.

Определение
производной
функции в точке

Автор. Совершенно верно. Выпишем этот предел подробнее:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (9.1)$$

Выясним прежде всего математическую природу этого предела.

Автор. Поскольку точка x_0 фиксирована, то это есть, очевидно, предел отношения двух функций от Δx , рассматриваемый при Δx , стремящемся к нулю.

Автор. Обозначим указанные функции как F и G :

$$F(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0); \quad G(\Delta x) = \Delta x.$$

Читатель. Предел (8.1) есть предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(\Delta x)}{G(\Delta x)}$ причем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(\Delta x) = 0$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} G(\Delta x) = 0$. Следовательно, мы имеем здесь дело с пределом, подобным тому, какой рассматривался в конце седьмой беседы, — пределом «типа $0/0$ ».

Автор. Правильно. Этот предел, т. е. предел «типа $0/0$ », и есть главный предмет нашей беседы.

Прежде всего необходимо, чтобы он *существовал*. Это означает, что функция f должна быть такова, чтобы имело место равенство:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(\Delta x) = 0.$$

Необходимым условием выполнения указанного равенства является, как нетрудно сообразить, условие *непрерывности* функции f в рассматриваемой точке $x = x_0$. Впрочем, мы еще вернемся к этому вопросу в конце беседы.

Если упомянутый предел «типа $0/0$ » (иначе говоря, предел (9.1)) существует, то его называют «производная функции f в точке $x = x_0$ » и обозначают обычно как $f'(x_0)$. Итак,

Определение. Производная функции f в точке x_0 (обозначается как $f'(x_0)$) есть предел отношения приращения функции f в точке x_0 (обозначается как $\Delta f(x_0)$) к приращению Δx независимой переменной при стремлении приращения Δx к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

или, в более подробной записи,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (9.2)$$

Заметим, что правая часть равенства (9.2) Вам уже знакома (см. выражение (8.3) из предыдущей беседы).

Читатель. Фактически производная функции f в точке x_0 есть предел функции

$$\frac{F}{G} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

в точке $\Delta x = 0$. Независимой переменной функции $\left(\frac{F}{G}\right)$ является приращение Δx .

Автор. Вы совершенно правы. Однако в дальнейшем пользуйтесь тем определением производной, которое сформулировано выше.

В нем не фигурирует функция $\left(\frac{F}{G}\right)$, зависящая от Δx , которая играет, как Вы понимаете, вспомогательную роль. Просто надо иметь в виду, что под словами «предел отношения приращения $\Delta f(x_0)$ к приращению Δx при Δx , стремящемся к нулю» понимается предел некоторой функции от Δx (функция (F/G)), рассматриваемый в точке $\Delta x = 0$.

Производной можно дать также *геометрическое толкование*.

Геометрическая
интерпретация
производной

Читатель. Пользуясь, как это делалось в предыдущей беседе, *касательной* к графику функции?

Автор. Конечно. Обратимся к графику функции $y = f(x)$ (рис. 38), фиксируем некоторую точку $x = x_0$. Рассматриваем приращение аргумента, равное Δx_1 ; ему соответствует приращение функции

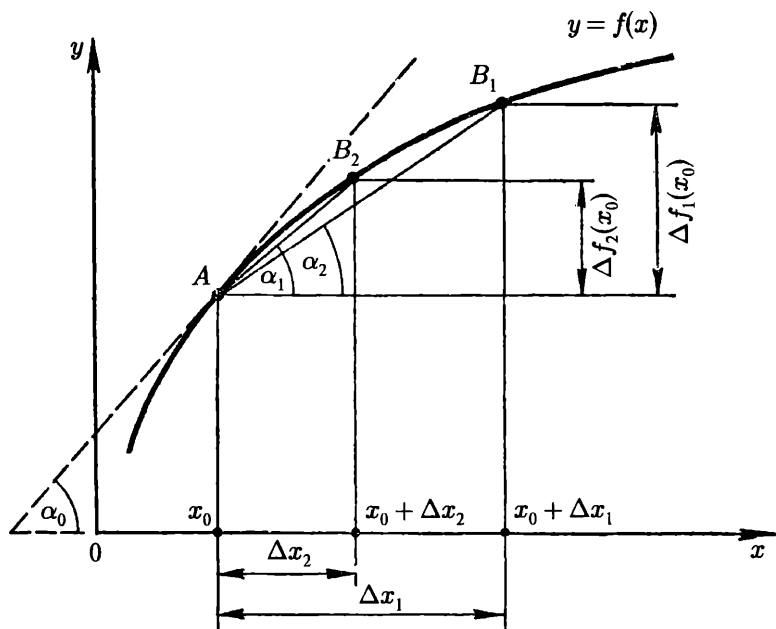


Рис. 38

в точке x_0 , равное $\Delta f_1(x_0)$. Обозначим через α_1 угол наклона хорды AB_1 ; легко видеть, что

$$\frac{\Delta f_1(x_0)}{\Delta x_1} = \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Затем берем приращение Δx_2 (заметьте: $\Delta x_2 < \Delta x_1$). Ему соответствует приращение функции f в точке x_0 , равное $\Delta f_2(x_0)$. Обозначим через α_2 угол наклона хорды AB_2 ; легко видеть, что

$$\frac{\Delta f_2(x_0)}{\Delta x_2} = \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Затем надо взять приращение Δx_3 ($\Delta x_3 < \Delta x_2$) и т. д. В результате мы будем иметь бесконечно малую последовательность приращений независимого переменного

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n, \dots$$

и соответствующую ей бесконечно малую последовательность приращений функции f в точке x_0

$$\Delta f_1(x_0), \Delta f_2(x_0), \Delta f_3(x_0), \dots, \Delta f_n(x_0), \dots$$

Кроме того, возникнет построенная как отношение двух указанных последовательностей последовательность значений тангенса угла наклона хорд $AB_1, AB_2, AB_3, \dots, AB_n, \dots$:

$$\operatorname{tg} \alpha_1, \operatorname{tg} \alpha_2, \operatorname{tg} \alpha_3, \dots, \operatorname{tg} \alpha_n, \dots \quad (9.3)$$

Последовательности (Δx_n) и $(\Delta f_n(x_0))$ сходятся к нулю. А что можно сказать о сходимости последовательности $(\operatorname{tg} \alpha_n)$ или, иначе говоря, последовательности $\left(\frac{\Delta f_n(x_0)}{\Delta x_n} \right)$?

Читатель. Очевидно, что последовательность $\left(\frac{\Delta f_n(x_0)}{\Delta x_n} \right)$ должна сходиться к $f'(x_0)$. Иными словами, предел последовательности $\left(\frac{\Delta f_n(x_0)}{\Delta x_n} \right)$ и есть производная функции f в точке x_0 .

Автор. На чем основывается Ваше заключение?

Читатель. Но оно действительно очевидно!

Автор. Я подскажу Вам: оно основывается на определении 2 предела функции в точке. Не так ли?

Читатель. Действительно так. Ведь некое число (в данном случае $f'(x_0)$) есть предел некоторой функции $\Phi(\Delta x)$ (в данном случае $\Phi = F/G$) в точке $\Delta x = 0$, если для любой последовательности (Δx) , сходящейся к нулю, соответствующая последовательность $(\Phi(\Delta x))$ сходится к упомянутому числу. В данном случае $(\Phi(\Delta x))$ как раз и есть последовательность (9.3).

Автор. Хорошо. Итак, мы выяснили, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \alpha_n = f'(x_0)$. А теперь посмотрите на рис. 38 и скажите, какое направление будет являться *предельным* для последовательности направлений хорд $AB_1, AB_2, AB_3, \dots, AB_n, \dots$?

Читатель. Направление *касательной* к графику $f(x)$, проведенной для точки $x = x_0$.

Автор. Верно. Обозначим угол наклона этой касательной через α_0 . Таким образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_0$$

и, следовательно,

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0$$

Итак, мы приходим к следующему геометрическому толкованию производной:

Определение. Производная функции f в точке x_0 определяется тангенсом угла наклона касательной, проведенной к графику функции f в точке $x = x_0$.

Заметим, что угол наклона касательной рассматривается по отношению к положительному направлению оси абсцисс. Так, в точ-

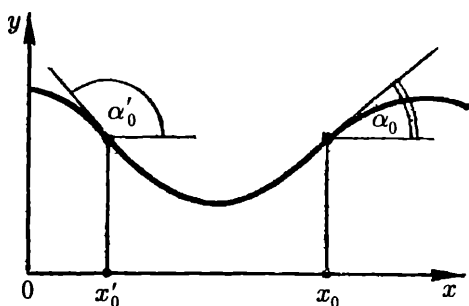


Рис. 39

ке x_0 на рис. 39 производная функции f положительна (в этой точке $\operatorname{tg} \alpha_0 > 0$), а в точке x'_0 на том же рисунке производная функции f отрицательна ($\operatorname{tg} \alpha'_0 < 0$).

Геометрическое толкование производной не должно, конечно, заслонять (оттеснять на «второй план») ее основное содержание:

Определение. Производная функции f в точке x_0 есть скорость изменения функции f в этой точке.

В предыдущей беседе рассматривалась функция $s(t)$ — расстояние, пройденное телом за время t . В этом случае производная функции $s(t)$ в точке $t = t_0$ есть *скорость* тела в момент времени $t = t_0$. Если же в качестве исходной функции рассматривать, например, функцию $v(t)$ (зависимость мгновенной скорости тела от времени), то в таком случае производная в точке $t = t_0$ будет иметь смысл ускорения тела в момент $t = t_0$. Ведь ускорение есть не что иное, как *скорость изменения скорости* тела.

Читатель. Исходя из соотношения (9.2) можно, по-видимому, дать очень наглядное толкование производной (хотя, возможно, и несколько упрощенное). Можно сказать, что:

Определение. Производная функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ показывает, во сколько раз быстрее меняется y , чем x , в окрестности точки $x = x_0$.

Автор. Такое толкование производной правомерно. Его полезно всегда иметь в виду.

Возвращаясь к геометрическому толкованию производной, заметим, что оно позволяет немедленно вывести ряд достаточно важных заключений. Так, например,

- производная функции $f = \text{const}$ (производная постоянной) равна нулю во всех точках;
- производная функции $f = ax + b$ (где a и b — постоянные коэффициенты) постоянна во всех точках и равна a ;
- производная функции $f = \sin x$ равна нулю в точках $x = \pm\pi n$ (в этих точках касательная к графику функции горизонтальна).

Подобный «список» можно было бы, очевидно, продолжить.

Далее мне хотелось бы обратить Ваше внимание на следующее обстоятельство: с математической точки зрения производная функции сама должна рассматриваться как некоторая функция.

Понятие
производной
функции

Читатель. Но ведь производная — это предел, а следовательно, число!

Автор. Давайте разберемся в этом. Мы зафиксировали точку $x = x_0$ и, используя функцию $f(x)$, получили для этой точки число:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для каждой точки x (из области определения функции f) получим, вообще говоря, свое число

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Определение. В итоге приходим к отображению некоторого множества чисел x на некоторое множество чисел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Функцию, представляющую собой это отображение одного числового множества на другое, называют производной и обозначают как $f'(x)$.

Читатель. Я понял. Просто до сих пор мы рассматривали в данной беседе лишь одно значение функции $f'(x)$ — ее значение в точке $x = x_0$.

Автор. Напомню в связи с этим, что в предыдущей беседе рассматривалась функция $v(t)$, являющаяся производной функции $s(t)$. На рис. 35 даже сравнивались графики двух функций: исходной функции $s(t)$ и ее производной $v(t)$.

Читатель. Теперь я понял.

Автор. Хочу сделать два замечания относительно функции $f'(x)$.

Первое замечание состоит в том, что функцию $f'(x)$ мы получаем, непременно используя функцию $f(x)$. Действительно,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (9.4)$$

Можно представить, что *имеется некий оператор* (вспомните четвертую беседу), такой что если на его «вход» подать функцию $f(x)$, то на «выходе» получится функция $f'(x)$. Иными словами, этот оператор, действуя на функцию $f(x)$, «порождает» функцию $f'(x)$.

Обычно указанный оператор обозначают как $\frac{d}{dx}$. Этот символ следует воспринимать единым образом, а не как некоторую дробь (читается он так: «дэ по дэ икс»).

Изобразим такую «картинку»: $\frac{d}{dx} \boxed{1} = \boxed{2}$. Здесь квадратики изображают «окошки»: в «окошко» 1 надо подставить функцию $f(x)$, тогда в «окошке» 2 мы получим функцию $f'(x)$. Таким образом,

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x). \quad (9.5)$$

Определение. Операцию получения функции $f'(x)$ из функции $f(x)$ называют дифференцированием функции $f(x)$.

Эту операцию осуществляет над функцией $f(x)$ оператор $\frac{d}{dx}$. Его называют *оператором дифференцирования*.

Читатель. Но как именно действует оператор $\frac{d}{dx}$ на функцию $f(x)$?

Автор. Так, как это записано в соотношении (9.4). Можно сказать, что оператор $\frac{d}{dx}$ «конструирует» из функции $f(x)$ отношение $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ и находит предел этого отношения (рассматриваемого как функция от Δx) в точке $\Delta x = 0$.

Читатель. Иначе говоря, оператор $\frac{d}{dx}$ выполняет некоторый предельный переход?

Автор. Конечно. Все дифференциальное исчисление (а заодно и интегральное исчисление) можно сформулировать в терминах тех или иных пределов.

Читатель. Но какой же в таком случае смысл вводить оператор $\frac{d}{dx}$, коль скоро за ним скрывается не что иное, как предельный переход, описываемый формулой (9.4)?

Автор. Вы поставили очень важный и принципиальный вопрос. Дело в том, что если бы дифференциальное исчисление формулировали в терминах пределов, используя соотношения типа (9.4), то все книги по математическому анализу увеличились бы в объеме в несколько раз и были бы трудночитаемыми. Использование же соотношений типа (9.5) вместо соотношений типа (9.4) позволяет избежать этого.

Читатель. Но как можно пользоваться соотношениями типа (9.5), не используя при этом соотношений типа (9.4)?

Исчисление
производных

Автор. Поступают по следующей схеме.

Сначала, используя (9.4), выясняют, каким должен быть результат действия оператора $\frac{d}{dx}$ на сумму, произведение, отношение функций, на сложную или обратную функцию, *коль скоро известен* результат действия этого оператора на исходные (исходную) функции. Иными словами, сначала устанавливают *правила дифференцирования функций*.

Затем, опять-таки используя (9.4), выясняют, к какому результату приводит действие оператора $\frac{d}{dx}$ на некоторые основные эле-

ментарные функции (например, на функции $y = x^n$, $y = \sin x$, $y = \log_a x$).

После этого Вы фактически можете забыть о соотношениях типа (9.4). Чтобы продифференцировать ту или иную функцию, достаточно выразить эту функцию через основные элементарные функции (производные которых были ранее получены) и воспользоваться правилами дифференцирования функций.

Читатель. Получается, что соотношения типа (9.4) перестают быть необходимыми после того, как они использованы, во-первых, для составления сводки правил дифференцирования функций и, во-вторых, для получения таблицы производных основных элементарных функции?

Автор. Именно так. Пользуясь правилами дифференцирования и таблицей производных некоторых основных элементарных функций, Вы можете уже не обращаться к соотношениям типа (9.4) и проводить дальнейшее рассмотрение на «языке» соотношений типа (9.5). При формализованном обучении дифференцированию можно было бы вообще не рассматривать предельных переходов, описываемых соотношениями типа (9.4); вполне достаточно, чтобы учащийся запомнил («вызубрил») сводку правил дифференцирования и таблицу производных некоторых функций.

Читатель. Мне кажется, что лучше все получить осмысленно.

Автор. Наша следующая беседа как раз и будет посвящена выполнению обсуждавшейся выше программы. На первом этапе на основе соотношений типа (9.4) будут установлены основные правила дифференцирования и, кроме того, будут получены производные трех функций: $y = x^2$, $y = \sin x$, $y = \log_a x$. На втором этапе (уже без обращения к соотношениям типа (9.4)) будут получены производные функций: $y = x^n$, $y = x^{-n}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = a^x$.

Читатель. Подождем до следующей беседы. Однако Вы хотели сделать еще одно замечание о производной $f'(x)$.

Автор. Второе замечание касается естественной области определения производной. Пусть множество D — область определения функции $f(x)$. Будет ли D также и областью определения $f'(x)$?

Читатель. Во всяком случае, область определения функции $f'(x)$ не может быть шире области определения функции $f(x)$. Ведь для получения функции $f'(x)$ мы используем функцию $f(x)$.

Автор. Осторожный, разумный ответ. Областью определения функции $f'(x)$ является в общем случае некое *подмножество* множества D . Оно получается из множества D в результате изъятия тех точек x , для которых предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ не существует. Замечу, что указанное подмножество называют *областью дифференцируемости* функции $f(x)$.

Читатель. А каковы условия дифференцируемости функции $f(x)$ в той или иной точке x ?

Условие существования производной

Автор. Очевидно, эти условия суть условия существования в точке x предела $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Мы с Вами уже отмечали, что это есть предел «типа $0/0$ ». Для его существования необходимо, чтобы наряду со знаменателем стремился к нулю также и числитель. А это означает, что функция $f(x)$ должна быть *непрерывной* в рассматриваемой точке x . Можно было бы привести строгое доказательство следующей теореме:

Теорема. Непрерывность функции $f(x)$ в точке x является необходимым условием существования функции $f'(x)$ в точке x .

Доказывать, однако, эту теорему мы не будем, ограничившись приведенными выше простыми качественными соображениями.

Читатель. Является ли непрерывность функции также и *достаточным* условием ее дифференцируемости?

Автор. Нет, не является. Рассмотрим, например, функцию $y = |\log x|$. Достаточ-

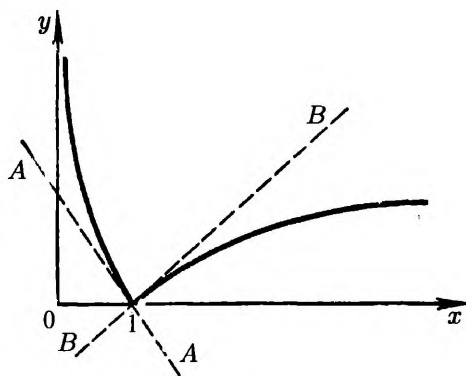


Рис. 40

но взглянуть на ее график (рис. 40), чтобы сообразить, что в точке $x = 1$ касательная к графику функции, строго говоря, не существует (при приближении к точке $x = 1$ слева получаем одну касательную — прямую AA , а при приближении к точке $x = 1$ справа получаем другую касательную — прямую BB). Значит, функция $y = |\log x|$ не имеет производной в точке $x = 1$. В то же время она непрерывна в этой точке.

В заключение беседы обратим внимание на одно интересное свойство дифференцируемой функции. Рассмотрим некоторую дифференцируемую функцию $f(x)$ и представим ее приращение Δf в точке x , соответствующее приращению Δx аргумента, в виде:

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + \eta(\Delta x)\Delta x, \quad (9.6)$$

где $\eta(\Delta x)$ — какая-то функция от Δx . Поделим обе части равенства (9.6) на Δx :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \eta(\Delta x).$$

Переходя в обеих частях последнего равенства к пределу при Δx , стремящемся к нулю, получим: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta(\Delta x) = 0$.

Следовательно, функция $\eta(\Delta x)$ есть *бесконечно малая* (по аналогии с терминологией, которой пользовались для числовых последовательностей; см. третью беседу). Таким образом, *приращение Δf в точке x дифференцируемой в этой точке функции $f(x)$ может быть представлено в виде двух слагаемых: слагаемого, пропорционального приращению Δx аргумента (это слагаемое есть $f'(x)\Delta x$), и слагаемого, которым по сравнению с первым слагаемым можно пренебречь при достаточно малых Δx (это слагаемое есть $\eta(\Delta x)\Delta x$, где $\eta(\Delta x)$ — бесконечно малая).*

Читатель. Мне кажется, что Вы сформулировали не что иное, как отмечавшееся в предыдущей беседе (см. рис. 32) свойство «линейности в малом».

Автор. Совершенно верно. Отметим, что основная часть приращения дифференцируемой функции (слагаемое, линейное по Δx) называется *дифференциалом* рассматриваемой функции.

Дифференцирование

Автор. Приступим к практическому выполнению той программы, которая была намечена в предыдущей беседе. Данная беседа по сути своей является практическим занятием по дифференцированию. Разобьем это занятие на три части.

1°. Правила дифференцирования.

2°. Дифференцирование элементарных функций: $y = x^2$, $y = \sin x$, $y = \log_a x$.

3°. Применение правил дифференцирования к различным функциям.

Прежде чем приступим к занятию, напомним, что дифференцированием функции $f(x)$ называют операцию получения из этой функции производной $f'(x)$. Указанную операцию осуществляет оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$:

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

§ 1. Правила дифференцирования

Автор. Докажем следующую теорему (*правило 1*).

Теорема. Производная суммы двух функций равна сумме их производных, если последние существуют, т. е.

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x). \quad (10.1)$$

Доказательство. Обозначим: $f(x) + g(x) = u(x)$. Тогда условие теоремы можно записать так: $u'(x) = f'(x) + g'(x)$. Попробуйте доказать теорему.

Читатель. Сначала я запишу:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \\ g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}, \\ u'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Дальше я затрудняюсь...

Автор. Давайте повторим Вашу запись, но не вводя пока пределов:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}.$$

Читатель. Понятно. А теперь надо воспользоваться известной теоремой о пределе суммы функций. Тогда наша теорема оказывается доказанной. \square

Автор. Совершенно верно. Следующая теорема (*правило 2*).

Теорема. Постоянный множитель выносится за знак производной, т. е.

$$\frac{d}{dx}(af(x)) = a \frac{d}{dx}f(x). \quad (10.2)$$

Доказательство. Теорема доказывается немедленно, если воспользоваться очевидным равенством:

$$\frac{\Delta(af(x))}{\Delta x} = a \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

□

Далее рассмотрим теорему о производной произведения двух функций (*правило 3*).

Теорема. Производная функции $u(x) = f(x)g(x)$ вычисляется по формуле

$$u'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (10.3)$$

при условии существования производных $f'(x)$ и $g'(x)$.

Формулу (10.3) называют *формулой Лейбница*. Иная форма записи этой формулы:

$$\frac{d}{dx}(fg) = g \frac{d}{dx}f + f \frac{d}{dx}g.$$

Доказательство.

Читатель. Как и в первой теореме, мы должны, по-видимому, выразить $\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}$ через $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$. Но как это сделать?

Автор. Это проще всего сделать так:

$$u + \Delta u = (f + \Delta f)(g + \Delta g) = fg + g\Delta f + f\Delta g + \Delta f\Delta g.$$

Отсюда

$$\Delta u = g\Delta f + f\Delta g + \Delta f\Delta g$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = g(x) \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + f(x) \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \Delta g(x).$$

Далее перейдем к пределу при Δx , стремящемся к нулю. При этом заметим, что ни $g(x)$ ни $f(x)$ не зависят от Δx , а $\Delta g(x)$ стремится к нулю. В результате получаем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}.$$

Легко видеть, что теорема тем самым доказана. □

Следующая теорема относится к производной отношения двух функций (*правило 4*).

Теорема. Производная функции $u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ вычисляется по формуле

$$u'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (10.4)$$

при условии, что существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$ и что $g(x) \neq 0$.

В иной записи:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \frac{d}{dx} f - f \frac{d}{dx} g}{g^2}.$$

Попробуйте доказать эту теорему.

Доказательство.

Читатель. Я буду действовать по аналогии с предыдущим случаем. Запишем:

$$u + \Delta u = \frac{f + \Delta f}{g + \Delta g}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta u = \frac{f + \Delta f}{g + \Delta g} - \frac{f}{g} = \frac{g\Delta f - f\Delta g}{g^2 + g\Delta g}$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{g \frac{\Delta f}{\Delta x} - f \frac{\Delta g}{\Delta x}}{g^2 + g\Delta g}.$$

Переходя затем к пределу при Δx , стремящемся к нулю, учтем, что ни g , ни f не зависят от Δx и что Δg тоже будет стремиться к нулю. При этом воспользуемся известными теоремами о пределе произведения и пределе суммы функций:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{g^2 + g\Delta g} \right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(g \frac{\Delta f}{\Delta x} - f \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \\ &= \frac{1}{g^2} \left(g \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} - f \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \right). \end{aligned}$$

Как видим, теорема доказана. □

Автор. Очень хорошо. Далее рассмотрим вопрос о дифференцировании *сложной функции* (сложные функции были рассмотрены в пятой беседе). Пусть имеется сложная функция $w = h(x)$, причем $h(x) = g(f(x))$. Данная сложная функция есть композиция функций $w = g(y)$ и $y = f(x)$.

Напомним, что производная $f'(x)$ показывает, во сколько раз быстрее меняется y , чем x , а производная $g'(y)$ показывает, во сколько раз быстрее меняется w , чем y . Следовательно, произведение $g'(y)f'(x)$ должно показывать, во сколько раз быстрее меняется w , чем x , т. е. должно равняться производной $h'(x)$.

Таким образом, мы приходим к правилу дифференцирования сложной функции (*правило 5*).

Теорема. Производная сложной функции $h(x) = g(f(x))$ вычисляется по формуле:

$$h'(x) = g'(y)f'(x). \quad (10.5)$$

Читатель. Мы пришли к этому правилу, используя очень простые соображения. Можно ли их рассматривать как доказательство указанного правила?

Автор. Нет, конечно. Поэтому проведем доказательство правила дифференцирования сложной функции.

Доказательство. Дадим независимой переменной x приращение Δx , такое что $x + \Delta x$ принадлежит области определения функции $h(x)$. Тогда переменная y получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а переменная w получит приращение $\Delta w = g(y + \Delta y) - g(y)$. Приращение Δw можно выразить, используя факт существования производной $g'(y)$, следующим образом (см. выражение (10.6) из прошлой беседы):

$$\Delta w = g'(y)\Delta y + \eta\Delta y,$$

где $\eta \rightarrow 0$ при $\Delta y \rightarrow 0$. Разделим обе части этого равенства на Δx ; получим:

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = g'(y) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \eta \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Далее перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = g'(y) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\eta \frac{\Delta y}{\Delta x} \right).$$

Поскольку $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = h'(x)$, а $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, то

$$h'(x) = g'(y)f'(x) + f'(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta.$$

Так как при $\Delta x \rightarrow 0$ имеем $\Delta y \rightarrow 0$, то, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \eta = 0.$$

Отсюда немедленно получаем формулу (10.5), т. е. правило дифференцирования сложной функции. \square

Наконец, приведем (без доказательства) правило дифференцирования обратной функции (*правило 6*).

Теорема. Если производная $y'(x)$ исходной монотонной функции $y(x)$ существует и не равна нулю, то производная обратной функции $x(y)$ определяется по формуле

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}. \quad (10.6)$$

Читатель. Мне кажется, что эту формулу можно легко получить, если воспользоваться геометрическим толкованием производной. В самом деле, возьмем график некоторой *монотонной* функции $y(x)$ (рис. 41). Ее производная в точке x_0 равна $\operatorname{tg} \alpha$. Та же самая кривая может, очевидно, рассматриваться как график обратной функции $x(y)$, если теперь считать независимой переменной не x , а y , а зависимой переменной не y , а x . Но тогда производная обратной функции в точке y_0 есть $\operatorname{tg} \beta$ (см. рисунок).

Поскольку $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то, следовательно,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

А это и есть сформулированное выше правило дифференцирования обратной функции.

Автор. Надо признать, что хотя Ваши рассуждения и не являются строгим математическим доказательством, однако они представляют собой пример весьма удачного использования геометрических представлений.

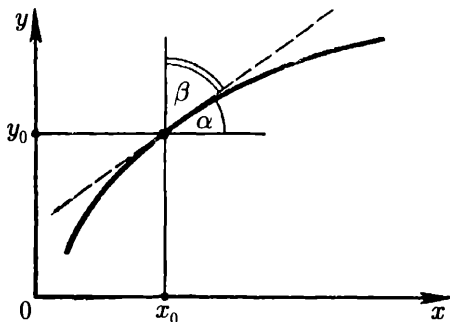


Рис. 41

§ 2. Дифференцирование функций

$$y = x^2, \quad y = \sin x, \quad y = \log_a x$$

Автор. Пользуясь соотношением (10.4) из предыдущей беседы, найдем производные для трех указанных функций. Начнем с функции $y = x^2$. Прошу Вас.

Читатель. Запишем:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Отсюда

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Далее переходим к пределу при Δx , стремящемся к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = 2x.$$

Таким образом:

$$y'(x) = 2x.$$

Автор. Итак, Вы получили результат действия оператора $\frac{d}{dx}$ на функцию $y = x^2$:

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^2 = 2x.} \quad (10.7)$$

Мы видим, что, подавая на «вход» оператора $\frac{d}{dx}$ квадратичную функцию $y = x^2$, получаем на «выходе» линейную функцию $y = 2x$.

А теперь попробуйте продифференцировать функцию $y = \sin x$.

Читатель. Запишем:

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x.$$

Отсюда

$$\Delta y = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x.$$

Автор. Здесь лучше воспользоваться не формулой для синуса суммы, а формулой для разности синусов. Представим:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Тогда получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

При переходе к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ следует учесть, что в седьмой беседе был получен предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Читатель. Понимаю. Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x.$$

Автор. Итак, действуя оператором $\frac{d}{dx}$ на функцию $y = \sin x$, получаем функцию $y = \cos x$:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sin x = \cos x.} \quad (10.8)$$

Теперь нам надо продифференцировать функцию $y = \log_a x$. Здесь, однако, придется начать с разговора о трансцендентном числе e (называемом обычно «основанием натуральных логарифмов»). Число e можно определить как предел числовой последовательности:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (10.9)$$

Приближенное значение числа e таково:

$$e = 2,7182818284590 \dots$$

Используя (10.9), можно показать, что число e есть также предел функции $y = (1 + x)^{1/x}$ при x , стремящемся к нулю:

$$\boxed{e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}.} \quad (10.10)$$

Результат (10.10) примем без вывода.

Читатель. Но результат (10.10) как будто непосредственно вытекает из (10.9).

Автор. Отнюдь нет. Не забывайте, что в (10.9) фигурирует предел *числовой последовательности*, а в (10.10) предел функции, рассматриваемый в некоторой точке. Если n — натуральные числа, то x принадлежат всей числовой прямой (за исключением точки $x = 0$).

Поэтому переход от (10.9) к (10.10) требует немалых рассуждений и выкладок.

А теперь займемся дифференцированием функции $y = \log_a x$. Будем действовать при этом в том же духе, как и раньше. Прошу Вас.

Читатель. Запишем:

$$y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x).$$

Отсюда

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x}$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \frac{x + \Delta x}{x}.$$

Тут надо было бы перейти к пределу при Δx , стремящемся к нулю.

А Я помогу Вам. Представим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) \frac{1}{\Delta x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x} = \\ &= \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \frac{x}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Читатель. Я понял. Итак,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \frac{x}{\Delta x}.$$

Таблица 1

Сводка правил дифференцирования

Правило 1 (дифференцирование суммы функций)	$\frac{d}{dx} (f + g) = \frac{d}{dx} f + \frac{d}{dx} g$
Правило 2	$\frac{d}{dx} (af) = a \frac{d}{dx} f \quad (a = \text{const})$
Правило 3 (дифференцирование произведения функций)	$\frac{d}{dx} (fg) = g \frac{d}{dx} f + f \frac{d}{dx} g$
Правило 4 (дифференцирование отношения функций)	$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \frac{d}{dx} f - f \frac{d}{dx} g}{g^2}$
Правило 5 (дифференцирование сложной функции)	$\frac{d}{dx} g(fx) = \left(\frac{d}{df} g(f) \right) \frac{d}{dx} f(x)$
Правило 6 (дифференцирование обратной функции)	$\frac{d}{dy} x(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx} y(x)}$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, воспользуемся результатом (10.10). Получаем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

(знак \ln используется, как это принято, для обозначения *натурального логарифма*).

Автор. Итак, мы получили, что в результате действия оператора $\frac{d}{dx}$ на функцию $y = \log_a x$ возникает функция $y = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}}. \quad (10.11)$$

При этом надо иметь в виду, что естественная область определения функции $y = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$ в (10.11) есть $]0; \infty[$.

Подведем итоги.

Пользуясь соотношением (10.4) из девятой беседы, мы, во-первых, установили (доказали) шесть правил дифференцирования и, во-вторых, продифференцировали три функции. Сведем упомянутые правила в табл. 1, а на рис. 42 изобразим графически для трех рассмотренных конкретных случаев результат действия оператора $\frac{d}{dx}$ (левый столбец на рисунке — это графики трех функций $f(x)$, а правый — графики соответствующих производных $f'(x)$).

Далее мы уже не будем пользоваться соотношением (10.4) из девятой беседы, т. е. не будем рассматривать предельные переходы. Исходя из полученных результатов, мы без рассмотрения пределов найдем производные для ряда элементарных функций.

§ 3. Применение правил дифференцирования к различным функциям

Автор. В качестве первого примера рассмотрим функцию $y = x^n$. Докажем, что в результате дифференцирования этой функции получается функция $y = nx^{n-1}$, т. е.

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}}. \quad (10.12)$$

Доказательство проведите, используя *метод математической индукции*.

Доказательство.

Читатель. При $n = 2$ формула (10.12) верна — в этом случае она превращается в формулу (10.7). Предположим теперь, что формула (10.12) верна при $n = m$. Надо убедиться, что она будет верна также и при $n = m + 1$. Представим $x^{m+1} = x^m x$ и применим *формулу Лейбница* (правило 3):

$$\frac{d}{dx} (x^m x) = x \frac{d}{dx} x^m + x^m \frac{d}{dx} x.$$

Поскольку $\frac{d}{dx} x = 1$ и, по предположению, $\frac{d}{dx} x^m = mx^{m-1}$, то получим:

$$\frac{d}{dx} x^{m+1} = mx^m + x^m = (m+1)x^m,$$

в чем и требовалось убедиться. □

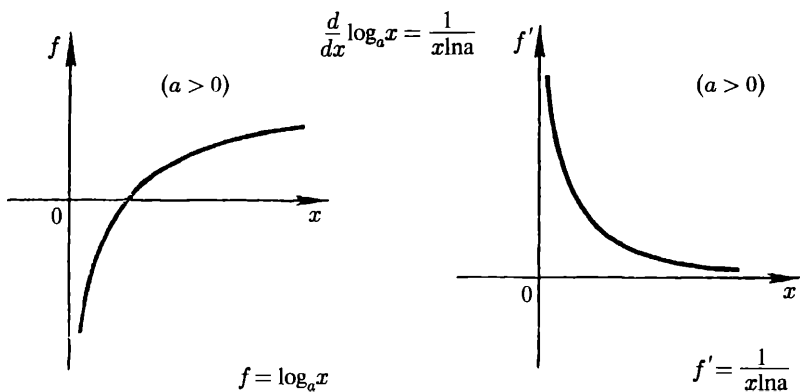
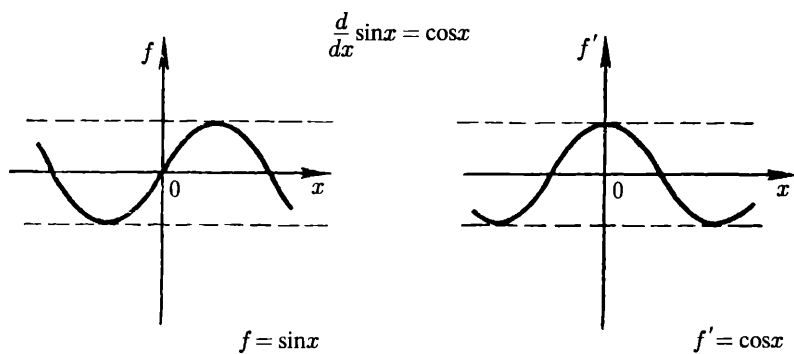
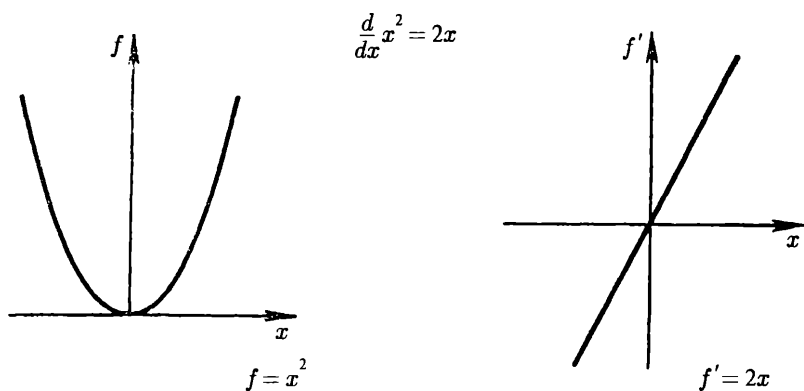


Рис. 42

Автор. Следующий пример — функция $y = x^{-n}$. Продифференцируйте ее, пользуясь правилом 4 и результатом (10.12).

Читатель. Здесь все просто. Применяя правило 4, запишем:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^n} \right) = \frac{-\frac{d}{dx} x^n}{x^{2n}}.$$

Используя далее результат (10.12), находим:

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^n = -nx^{-(n+1)}}. \quad (10.13)$$

Автор. Из (10.13) следует, в частности, что

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}. \quad (10.14)$$

Следующий пример — функция $y = \sqrt{x}$.

Читатель. Здесь надо воспользоваться правилом 6 (правилом дифференцирования обратной функции). Обратная функция: $x = y^2$. Для ее производной имеется формула (10.7). Таким образом:

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{\frac{d}{dy} y^2} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Итак,

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}. \quad (10.15)$$

Автор. А теперь перейдем к *тригонометрическим* функциям. Рассмотрим функцию $y = \cos x$.

Читатель. Я предлагаю воспользоваться результатом (10.8) и тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Дифференцируя обе части этого тождества, получаем, пользуясь правилом 1:

$$\frac{d}{dx} \sin^2 x + \frac{d}{dx} \cos^2 x = 0.$$

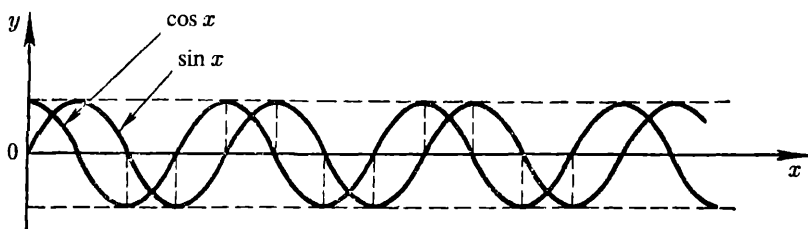


Рис. 43

Затем применим правило 5 (правило дифференцирования сложной функции) вместе с результатом (10.7):

$$2 \sin x \frac{d}{dx} \sin x + 2 \cos x \frac{d}{dx} \cos x = 0.$$

Поскольку согласно (10.8) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, то отсюда находим:

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$$

Автор. Верно, но можно все получить немного проще. Для этого лучше воспользоваться тождеством $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Далее, применяя правило 5, находим:

$$\frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left(\frac{d}{dx} \sin y\right) \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \left(\text{здесь: } y = \frac{\pi}{2} - x\right).$$

Учитывая результат (10.8), получаем:

$$\frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{d}{dx} \sin y = -\cos y = -\sin x.$$

С учетом указанного выше тождества приходим к окончательному результату:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.} \quad (10.16)$$

Читатель. Получается, что операция дифференцирования «превращает» синус в косинус и наоборот — косинус в синус.

Автор. Да, только в последнем случае меняется знак: косинус преобразуется в синус со знаком минус. Если Вы нарисуете в одной

и той же системе осей графики функций $\sin x$ и $\cos x$ (рис. 43), то убедитесь, что в тех точках x , где одна из этих функций достигает максимального либо минимального значения (принимает значение 1 либо -1), другая функция обращается в нуль. Легко сообразить, что это обстоятельство имеет прямое отношение к Вашему замечанию. Ведь если, например, в некоторой точке x функция $\sin x$ принимает максимальное значение, то касательная к ее графику в этой точке будет, очевидно, горизонтальной; следовательно, производная данной функции (т. е. функция $\cos x$) должна обращаться в нуль в рассматриваемой точке. Советую Вам внимательно рассмотреть рис. 43. Проследите, в частности, за соответствием между углом наклона касательной к графику функции в разных точках и знаком ее производной в этих точках.

А теперь обратимся к следующему примеру — функции $y = \operatorname{tg} x$. Продифференцируйте эту функцию, используя результаты дифференцирования функций $\sin x$ и $\cos x$ и применяя правило 4.

Читатель. Это нетрудно выполнить:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) &= \frac{\cos x \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \frac{d}{dx} \cos x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}}. \quad (10.17)$$

Автор. Аналогичным путем можно получить результат для функции $y = \operatorname{ctg} x$:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}}. \quad (10.18)$$

Чтобы продифференцировать функцию $y = \arcsin x$, надо воспользоваться правилом 6:

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\frac{d}{dx} \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos (\arcsin x)}.$$

Поскольку

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2},$$

то получаем отсюда:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.} \quad (10.19)$$

Чтобы продифференцировать функцию $y = \arccos x$, достаточно воспользоваться результатом (10.19) и тождеством

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.} \quad (10.20)$$

По правилу 6 дифференцируем функцию $y = \operatorname{arctg} x$:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \operatorname{tg} y} = \cos^2 y = [\cos(\operatorname{arctg} x)]^2.$$

Поскольку

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

то получаем:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1 + x^2}.} \quad (10.21)$$

Наконец, дифференцирование функции $y = \operatorname{arccctg} x$ производим, используя тождество

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{arccctg} x = -\frac{1}{1 + x^2}.} \quad (10.22)$$

Итак, мы выполнили дифференцирование всех элементарных тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

В заключение обратимся к *показательной функции* $y = a^x$. Пользуясь результатом (10.11) и правилом 6, получаем:

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \log_a y} = y \ln a = a^x \ln a.$$

Таким образом:

$$\boxed{\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a.} \quad (10.23)$$

Результат (10.23) весьма интересен. Мы видим, что при дифференцировании показательной функции $y = a^x$ получается снова показательная функция a^x , помноженная на постоянный множитель $\ln a$. Если, в частности, $a = e$, то, поскольку $\ln e = 1$,

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x.} \quad (10.24)$$

Показательную функцию $y = e^x$ принято называть «экспонентой». Из (10.24) следует, что эта функция при дифференцировании *преобразуется сама в себя*.

Первообразная

Читатель. Дифференцирование — это операция отыскания функции $f'(x)$ по заданной функции $f(x)$. По-видимому, существует также и *обратная* операция?

Определение
первообразной

Автор. Действительно, обратная операция существует. Ее называют *интегрированием*. Интегрирование функции $f(x)$ — это операция отыскания (для данной функции $f(x)$) так называемой *первообразной* функции.

Определение. Первообразной называют такую функцию $F(x)$, по отношению к которой исходная функция $f(x)$ является производной:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x). \quad (11.1)$$

Читатель. Понимаю. Если в предыдущей беседе мы отыскивали по заданной функции $f(x)$ производную функцию $f'(x)$, то теперь мы рассматриваем ситуацию, когда заданная функция $f(x)$ сама является производной некоторой функции $F(x)$.

Автор. Совершенно верно. Возьмем в качестве примера функцию $f(x) = 2x^2 - 3x$. В результате дифференцирования этой функции получаем *производную*:

$$f'(x) = 4x - 3,$$

а в результате интегрирования — *первообразную*:

$$F(x) = \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2.$$

Читатель. Но как именно Вы получили первообразную?

Автор. Очень просто. Я воспользовался известными правилами дифференцирования, но, так сказать, в *обратной* последовательности. Иначе говоря, я попросту прикинул в уме, какой вид должен быть у функции, чтобы при дифференцировании получилась именно функция $f(x) = 2x^2 - 3x$. Легко убедиться, что

$$F'(x) = \frac{2}{3} 3x^2 - \frac{3}{2} 2x = 2x^2 - 3x.$$

Читатель. Но почему бы тогда не взять в качестве первообразной, например, функцию $F(x) = \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2$? Ведь и в этом случае $F'(x) = 2x^2 - 3x$.

Первообразная как
семейство функций

Автор. Вы подметили весьма важное обстоятельство. Действительно, первообразная определяется по заданной функции *не однозначно*.

Если $F(x)$ — некоторая первообразная (для функции f), то и функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной исходной функции, поскольку

$$\frac{d}{dx} (F(x) + C) = \frac{d}{dx} F(x) + \frac{d}{dx} C = \frac{d}{dx} F(x).$$

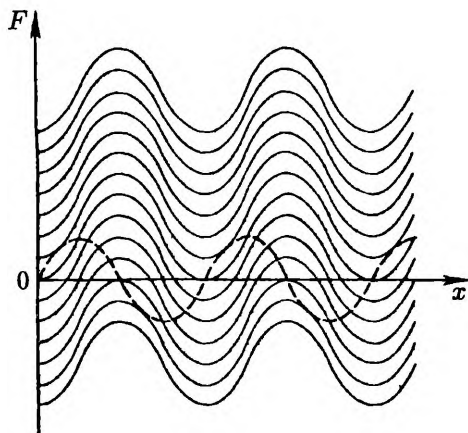


Рис. 44

Читатель. Значит, данной функции $f(x)$ соответствует целое *семейство* первообразных $F(x) + C$?

Автор. Именно так. Возьмите график одной из первообразных, и, производя параллельные переносы его вдоль оси y , Вы получите семейство графиков первообразных для данной функции f . Пусть, например, $f(x) = \sin x$. Графики первообразных этой функции показаны на рис. 44. Это графики функций

$$F(x) = \cos x + C$$

(штриховой линией на рисунке показан график функции $f(x) = \sin x$). На рисунке постоянные C выбирались с разницей 0,5. Уменьшая эту разницу, можно, очевидно, получить сколь угодно «густую» (плотную) картину кривых $F(x)$.

Принадлежность разных первообразных одному и тому же семейству (иными словами, соответствие одной и той же исходной функции f) хорошо просматривается на графике. В случае же аналитического задания функции эта принадлежность не всегда вполне очевидна. Возьмем, например, функции $F_1 = -\cos x$ и $F_2 = 3 - 2 \cos^2 \frac{x}{2}$. С первого взгляда трудно сказать, что обе эти функции — первообразные *одной и той же* функции (функции $f = \sin x$). Однако поскольку $2 \cos^2 t = 1 + \cos x$, то

$$F_2(x) = 3 - 1 - \cos x = -\cos x + 2.$$

Читатель. Наверное, можно и непосредственно убедиться, что $F_1'(x) = F_2'(x)$?

Автор. Разумеется, можно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F_2(x) &= -2 \frac{d}{dx} \cos^2 \frac{x}{2} = 4 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sin x; \\ \frac{d}{dx} F_1(x) &= \frac{d}{dx} (-\cos x) = \sin x. \end{aligned}$$

Однако проще сообразить, что $F_2 - F_1 = C$.

Подобных примеров можно привести много. Нетрудно убедиться, например, что одному и тому же семейству первообразных принадлежат следующие пары функций (каждая пара — своему семейству первообразных):

а) $F_1 = x^2 - 2x + 3$; $F_2 = (x - 1)^2$.

б) $F_1 = \arcsin x$; $F_2 = 1 - \arccos x$.

в) $F_1 = \operatorname{tg} x \sin x + \cos x$; $F_2 = (2 \cos x + 1) \frac{1}{\cos x}$.

Так, в случае (а) $F_2 - F_1 = -2$; обе функции являются первообразными функции $f = 2x - 2$.

Дальше убедитесь в этом самостоятельно.

Читатель. В случае (6)

$$F_2 - F_1 = 1 - (\arccos x + \arcsin x) = 1 - \frac{\pi}{2};$$

обе функции являются первообразными функции $f = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Случай (в) посложнее. Здесь нужно выполнить небольшие преобразования:

$$F_1 = \operatorname{tg} x \sin x + \cos x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x};$$

$$F_2 = \frac{2 \cos x + 1}{\cos x} = 2 + \frac{1}{\cos x}.$$

Следовательно, $F_2 - F_1 = 2$. Обе функции (F_1 и F_2) являются первообразными функции $f = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Основные
элементарные
первообразные

Автор. Правильно. А теперь, учитывая результаты, полученные в предыдущей беседе, составим таблицу (табл. 2), где во втором столбце стоят различные функции $f(x)$, в третьем столбце — соответствующие этим функциям производные $f'(x)$, а в четвертом столбце — соответствующие функциям $f(x)$ первообразные $F(x) + C$. Здесь уместно еще раз подчеркнуть: переход $f(x) \rightarrow f'(x)$ есть операция дифференцирования функции $f(x)$, а переход $f(x) \rightarrow [F(x) + C]$ есть операция интегрирования функции $f(x)$.

Читатель. Судя по примерам 8, 9, 10, приведенным в таблице, создается впечатление, что переход $f(x) \rightarrow f'(x)$ сложнее, нежели переход $f(x) \rightarrow [F(x) + C]$.

Автор. Это Ваше впечатление объясняется специальным выбором функций $f(x)$. Проще продифференцировать, например, функцию $\operatorname{tg} x$, чем функцию $\frac{1}{\cos^2 x}$. Ведь во втором случае приходится пользоваться правилами дифференцирования отношения функций и сложной функции.

Вообще же надо отметить, что операция интегрирования в общем случае заметно сложнее операции дифференцирования. При дифференцировании элементарных функций мы во всех случаях снова получаем элементарные функции. Пользуясь рассмотренными в предыдущей беседе правилами дифференцирования, Вы

Таблица 2

Сводка производных и первообразных для некоторых функций

	$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
1	a	0	$ax + C$
2	x^n	nx^{n-1}	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
3	e^x	e^x	$e^x + C$
4	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x + C$
5	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$
6	$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
7	$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
8	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$2 \frac{\sin x}{\cos^3 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
9	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-2 \frac{\cos x}{\sin^3 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
10	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$	$\arctg x + C$

сможете продифференцировать (и притом без особого труда) практически любую элементарную функцию. Иное дело — интегрирование. Правила интегрирования элементарных функций включают множество приемов, для ознакомления с которыми нам потребовалось бы несколько специальных бесед. Главное же заключается в том, что не у всякой элементарной функции первообразная является элементарной функцией. В качестве примера можно отметить первообразную таких простых элементарных функций, как $\frac{1}{\lg x}$

или $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$. В подобных случаях приходится, как правило, обращаться к методам так называемого *численного интегрирования*.

Читатель. Я внимательно слушал Вас. И у меня возникли два вопроса. Первый: что именно понимают под понятием — *элементарная функция*?

Автор. В девятой беседе я приводил примеры так называемых *основных элементарных* функций (x^n , x^{-n} , $x^{\frac{1}{n}}$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, a^x , $\log_a x$). *Элементарной* называют любую функцию, которая может быть получена из *основных элементарных* функций в результате использования конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня, взятия модуля, а также правил получения обратных и сложных функций. Все используемые в наших беседах функции (за исключением упоминавшейся в пятой беседе функции Дирихле) являются элементарными функциями, причем многие из них — основные элементарные функции.

Правила интегрирования

Читатель. Второй мой вопрос относится к упоминавшимся Вами *правилам интегрирования*. Как выглядят хотя бы некоторые из этих правил?

Автор. Укажу лишь три простейших правила.

1. Если F — первообразная для f , а G — первообразная для g , то первообразная для суммы функций $f + g$ есть функция $F + G$.
2. Если F — первообразная для f , то первообразная для функции af , где a — постоянная, есть функция aF .
3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а a и b — постоянные, то первообразная для функции $f(ax + b)$ есть функция $\frac{1}{a}F(ax + b)$.

Все три правила без особого труда доказываются, если воспользоваться известными правилами дифференцирования (в последнем случае надо применить правило дифференцирования сложной функции). Действительно,

$$1) \quad \frac{d}{dx}(F + G) = \frac{d}{dx} F + \frac{d}{dx} G = f + g;$$

$$2) \quad \frac{d}{dx}(aF) = a \frac{d}{dx} F = af;$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} F(ax + b) \right] &= \frac{1}{a} \frac{d}{dx} F(ax + b) = \\ &= \frac{1}{a} \frac{d}{dy} F(y) \frac{d}{dx} (ax + b) = \\ &= \frac{1}{a} f(y) a = f(y) = f(ax + b) \\ &\quad (\text{здесь } y = ax + b). \end{aligned}$$

Разумеется, рассмотренные три правила ни в коей мере не исчерпывают всего богатого арсенала правил интегрирования, которым располагает математический анализ. Мы, однако, ограничимся этими тремя правилами, поскольку преследуем довольно скромную цель: дать лишь начальное представление о первообразной.

Читатель. При обсуждении производной мы рассматривали, в частности, ее *геометрическое представление*. Наверное, существует определенное геометрическое представление и первообразной?

Геометрическое
представление
первообразной

Автор. Да, существует. Найдем его (тем более что оно понадобится нам в дальнейшем).

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$. Пусть для простоты эта функция является *монотонной* (конкретно: *возрастающей*). Впоследствии мы рассмотрим функцию, не предполагая ее монотонности. Главное, чтобы функция $f(x)$ была *непрерывной* на рассматриваемом промежутке (т.е. на том промежутке, где она определена). На рис. 45 заштрихована геометрическая фигура (так называемая *криволинейная трапеция*), ограниченная графиком функции $f(x)$, отрезком $[a; x]$ оси x и перпендикулярами, проведенными к оси x в точках a и x . Пусть точка a фиксирована; что же касается точки x (правого конца отрезка $[a; x]$), то она не фиксирована — x может принимать значения от a и больше (в пределах области определения функции). Очевидно, что *площадь* заштрихованной на рисунке криволинейной трапеции есть функция от x . Обозначим эту функцию через $S(x)$.

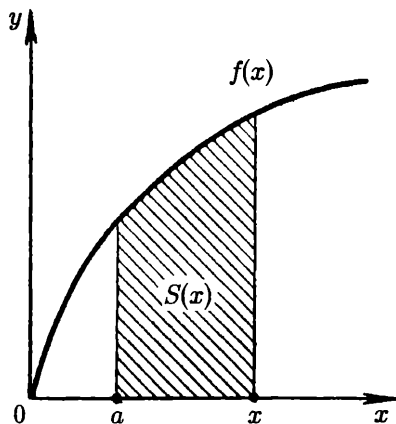


Рис. 45

Далее обратимся к рис. 46. Рассмотрим приращение Δx независимой переменной. Отрезку $[a; x + \Delta x]$ соответствует площадь $S(x + \Delta x)$. Обозначим: $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$. Приращение $\Delta S(x)$ есть, очевидно, площадь криволинейной трапеции, которая заштрихована. Из рисунка видно, что

$$\text{площадь } ADEF < \Delta S(x) < \text{площадь } ABCF.$$

Но площадь $ADEF$ равна $f(x)\Delta x$, а площадь $ABCF$ равна $f(x + \Delta x)\Delta x$. Следовательно,

$$f(x)\Delta x < \Delta S(x) < f(x + \Delta x)\Delta x,$$

или

$$f(x) < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < f(x + \Delta x),$$

или

$$0 < \left[\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} - f(x) \right] < [f(x + \Delta x) - f(x)] = \Delta f(x).$$

Далее перейдем в этих неравенствах к пределу при Δx , стремящемся к нулю. В силу непрерывности функции $f(x)$ заключаем, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} - f(x) \right] = 0.$$

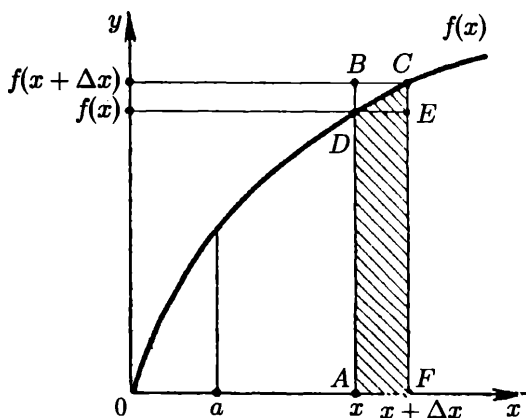


Рис. 46

Так как функция $f(x)$ от Δx не зависит, то из последнего соотношения получаем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x). \quad (11.2)$$

По определению производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = S'(x).$$

Поэтому результат (11.2) означает:

$$f(x) = S'(x). \quad (11.3)$$

Итак, с точки зрения геометрических представлений *первообразная функции f , рассматриваемая в точке x , есть площадь криволинейной трапеции, определяемой графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a; x]$ оси x .*

Читатель. По-видимому, не первообразная, а одна из первообразных?

Автор. Конечно.

Читатель. Но легко видеть, что площадь $S(x)$ зависит также и от выбора точки a .

Формула
Ньютона—Лейбница

Автор. Вы абсолютно правы. Выбирая разные точки a , мы будем иметь разные площади криволинейных трапеций и соответственно разные первообразные. Однако все они будут первообразными функции f , рассматриваемыми в точке x . Важно лишь, чтобы выполнялось неравенство $a < x$.

Читатель. Почему же в таком случае точка a нигде не фигурирует?

Автор. Понимаю Ваше недоумение. Давайте сформулируем полученные выше результаты немного иначе. Пусть $F(x)$ — какая-то первообразная функции $f(x)$, рассматриваемая в точке x . Согласно (11.3) можем записать¹⁾:

$$S(x) = F(x) + C.$$

Постоянную C легко найти, если учесть, что $S(a) = 0$. Итак,

$$S(a) = F(a) + C = 0.$$

Следовательно, $C = -F(a)$. Таким образом,

$$S(x) = F(x) - F(a). \quad (11.4)$$

Итак,

Теорема. Если $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$, то площадь $S(x)$ криволинейной трапеции, определяемой графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a; x]$, есть разность $F(x) - F(a)$.

Как видите, теперь точка a фигурирует явным образом.

Читатель. Вот теперь все понятно.

Автор. Результат (11.3) (а следовательно, и (11.4)) может быть получен для любой непрерывной функции; *монотонность* функции отнюдь не является необходимым условием. Рассмотрим функцию $f(x)$, график которой представлен на рис. 47. Выберем некоторую

¹⁾ Мы молчаливо используем здесь теорему: *если производные двух функций равны, то эти функции отличаются на постоянное слагаемое.*

точку x . Нам надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что для всех Δx , удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство:

$$\left[\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} - f(x) \right] < \varepsilon. \quad (11.5)$$

Читатель. Точка x в этом рассуждении фиксирована?

Автор. Да. Приращения Δx и соответственно $\Delta S(x)$ рассматриваются всякий раз для определенной точки x .

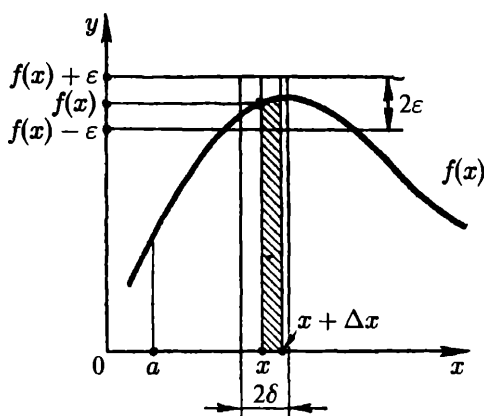


Рис. 47

Итак, взяли произвольное число $\varepsilon > 0$ (оно показано на рисунке). Поскольку $f(x)$ — непрерывная функция, то найдется число $\delta > 0$, такое что для всех Δx , удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (11.6)$$

Это число δ и является искомым.

Действительно, возьмем для определенности $\Delta x > 0$, но такое, чтобы $\Delta x < \delta$. Обозначим через $\Delta S(x)$ заштрихованную на рис. 47 площадь криволинейной трапеции, определяемой графиком функции $f(x)$ на отрезке $[x; x + \Delta x]$. Из неравенства (11.6) следует (см. рисунок):

$$(f(x) - \varepsilon)\Delta x < \Delta S(x) < (f(x) + \varepsilon)\Delta x,$$

или

$$(f(x) - \varepsilon) < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < (f(x) + \varepsilon),$$

или

$$-\varepsilon < \left[\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} - f(x) \right] < \varepsilon,$$

или, наконец,

$$\left[\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} - f(x) \right] < \varepsilon,$$

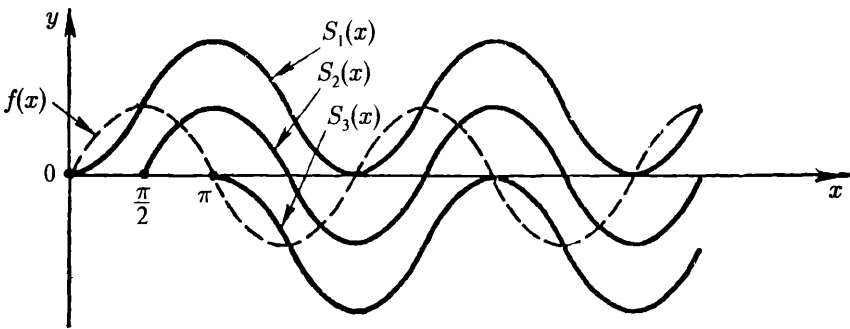


Рис. 48

в чем и необходимо было убедиться.

Как видите, требование монотонности функции f отнюдь не обязательно: результат (11.3) (а следовательно, и (11.4)) обобщается без особого труда на случай произвольной непрерывной функции f .

А теперь обратимся снова к рис. 44, где для функции $f(x) = \sin x$ приведено семейство графиков первообразной $F(x) = -\cos x + C$. Укажите, какой именно из этих графиков (какая именно первообразная) есть функция $S(x)$ в каждом из следующих трех случаев: а) $a = 0$; б) $a = \pi/2$; в) $a = \pi$.

Читатель. Я понял Ваш вопрос. Я обозначу искомые функции $S(x)$ соответственно через $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$. Эти функции приведены на рис. 48. Мы можем, очевидно, записать:

$$S_1(x) = F(x) - F(0); \quad S_2(x) = F(x) - F\left(\frac{\pi}{2}\right);$$

$$S_3(x) = F(x) - F(\pi).$$

Автор. Правильно. При этом важно подчеркнуть, что в каждом из написанных Вами равенств в качестве функции $F(x)$ фигурирует произвольно выбранная из представленного на рис. 44 семейства первообразной функции f .

Читатель. Получается, что какую бы первообразную данной функции f мы ни взяли, разность ее значений в двух точках зависит от выбора только точек, но не зависит от выбора конкретной первообразной.

Автор. Вы подметили весьма принципиальное обстоятельство. Оно настолько принципиально, что мы посвятим ему всю следующую беседу.

Интеграл

Понятие интеграла

Автор. Итак, мы уже знаем, что разность значений первообразной в двух каких-либо точках зависит только от выбора этих точек (и разумеется, от вида исходной функции $f(x)$). Выберем в качестве упомянутых точек точки a и b , т. е. рассмотрим приращение первообразной $F(b) - F(a)$. Это приращение играет весьма важную роль в аппарате математического анализа; оно получило название *интеграл*.

Определение. Интегралом от a и b функции f называется приращение первообразной F этой функции: $F(b) - F(a)$.

Интеграл обозначают так:

$$\int_a^b f(x) dx$$

(читается: «интеграл от а до бэ, эф от икс дэ икс»). Числа a и b называют соответственно нижним и верхним *пределами интегрирования*. Функцию f называют *подынтегральной функцией*, а x — *переменной интегрирования*.

Таким образом, если F есть одна из первообразных функции f , то по определению интеграла

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (12.1)$$

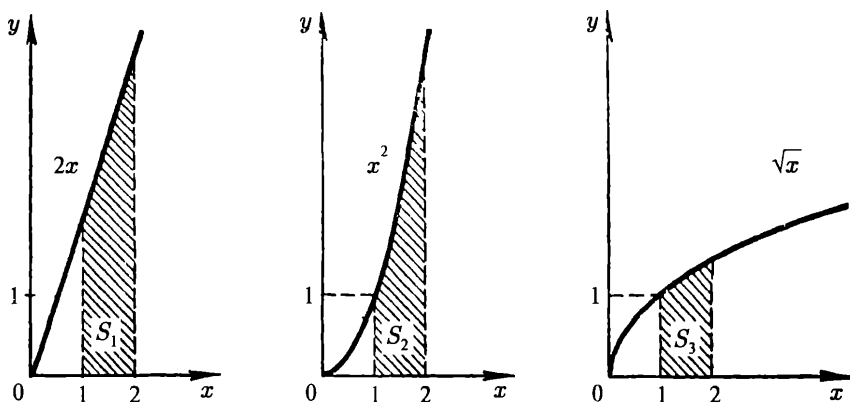


Рис. 49

Равенство (12.1) известно в математической литературе как *формула Ньютона—Лейбница*. Следует помнить, что функция F , входящая в эту формулу, есть произвольно выбранная первообразная функции f .

Читатель. Насколько я понимаю, интеграл от a и b функции f как раз и есть площадь криволинейной трапеции, определяемой графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$?

Автор. Именно так. Выражение

$$\int_a^b f(x) dx$$

есть не что иное, как площадь упомянутой фигуры. На рис. 49 изображены три случая, отвечающие разным подынтегральным функциям:

$$\text{а) } f(x) = 2x, \quad \text{б) } f(x) = x^2, \quad \text{в) } f(x) = \sqrt{x}.$$

Во всех трех случаях пределы интегрирования выбраны одинаковыми: $a = 1$, $b = 2$. Соответствующие площади криволинейных трапеций на рисунке заштрихованы:

$$S_1 = \int_1^2 2x dx, \quad S_2 = \int_1^2 x^2 dx, \quad S_3 = \int_1^2 \sqrt{x} dx.$$

Числа S_1 , S_2 , S_3 различны, поскольку различны соответствующие подынтегральные функции $f(x)$. Получается, что выражение

$$\int_a^b f(x) dx$$

работает как *функционал* (вспомните четвертую беседу). Вы «закладываете» в него ту или иную функцию f и получаете в результате то или иное число S .

Кстати, нетрудно проверить этот функционал в работе. Для этого надо воспользоваться лишь формулой (12.1) и учесть, что у функции $f(x) = 2x$ первообразная есть функция $F(x) = x^2 + C$, у функции $f(x) = x^2$ — функция $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, у функции $f(x) = \sqrt{x}$ — функция $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.

Принято обозначать: $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.

Таким образом,

$$\int_1^2 2x dx = x^2 \Big|_1^2 = 4 - 1 = 3;$$

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(8 - 1) = \frac{7}{3};$$

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \Big|_1^2 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

Подавая на «вход» функционала $\int_1^2 f(x) dx$ функцию $2x$, получаем на «выходе» число 3; подавая на «вход» функцию x^2 , получаем на «выходе» число $\frac{7}{3}$; подавая на «вход» функцию \sqrt{x} , получаем на «выходе» число $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

Читатель. Я вижу, что мы можем довольно просто определять площадь различных криволинейных трапеций!

Автор. И не только криволинейных трапеций. Попробуйте, например, определить площадь фигуры, заштрихованной на рис. 50.

Читатель. Эта площадь есть разность площадей двух криволинейных трапеций:

$$S = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx.$$

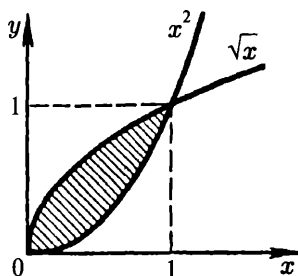


Рис. 50

Следовательно,

$$S = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Автор. Правильно. Рассмотрим еще один пример. Определите площадь заштрихованной фигуры (рис. 51).

Читатель. Графики функций $\sin x$ и $\cos x$ пересекаются в точке $x = \frac{\pi}{4}$. Значит,

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ надо использовать первообразную функции $\sin x$, а на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ — первообразную функции $\cos x$.

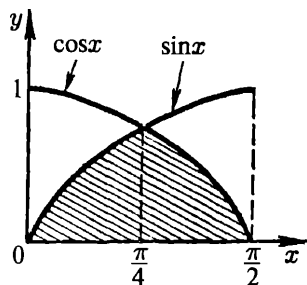


Рис. 51

Следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{x} dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/4} + \sin x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \\ &= -\left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos 0\right) + \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Интеграл
с перемен-
ным верхним
пределом

Автор. Все верно. Обсудим далее одну «тонкость», для чего вернемся к формуле (12.1) и перепишем ее в виде:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a). \quad (12.2)$$

Что мы изменили, переписывая формулу (12.1)?

Читатель. Во-первых, мы заменили *постоянный* верхний предел интегрирования (число b) на *переменный* предел интегрирования (на переменную x). Во-вторых, мы заменили переменную интегрирования x на переменную интегрирования t .

Автор. Здесь существенно лишь первое обстоятельство. Второе же (замена переменной интегрирования) несущественно. Легко сообразить, что все записи

$$\int_a^b f(x) dx; \quad \int_a^b f(t) dt; \quad \int_a^b f(y) dy; \quad \int_a^b f(z) dz$$

равнозначны, поскольку во всех случаях это есть $F(b) - F(a)$. Так что совершенно неважно, какая именно переменная интегрирования используется в том или ином случае (точнее говоря, совершенно неважно, *как обозначается* в том или ином случае переменная интегрирования).

Читатель. Но в таком случае, зачем же надо было менять в (12.2) переменную интегрирования x на переменную t ?

Автор. Только лишь затем, чтобы не путать переменную интегрирования с переменным верхним пределом. Это разные переменные, и, естественно, их надо обозначать по-разному.

Выражение

$$\int_a^x f(t) dt$$

называют *интегралом с переменным верхним пределом*. Существенно, что в отличие от выражения

$$\int_a^b f(t) dt$$

Таблица 3

$f(x)$	$\int_1^2 f(t) dt$	$\int_1^x f(t) dt$
$2x$	3	$x^2 - 1$
$3x^2$	7	$x^3 - 1$
$4x^3$	15	$x^4 - 1$
$5x^4$	31	$x^5 - 1$
$6x^5$	63	$x^6 - 1$

это выражение дает уже не *число*, а *функцию*. Согласно (12.2) это есть функция $F(x) - F(a)$.

Читатель. Получается, что если «аппарат» $\int_a^b \square dt$ есть *функционал*,

то «аппарат» $\int_a^b \square dt$ есть *оператор*? (Я воспользовался здесь условным обозначением для тех «окошек», в которые надо подставлять функцию f .)

Автор. Совершенно верно. Это отчетливо видно, если взглянуть на следующую своеобразную таблицу (табл. 3).

Второй и третий столбцы этой таблицы показывают, *что* получается на «выходе» «аппаратов», соответственно

$$\int_1^2 f(t) dt \quad \text{и} \quad \int_1^x f(t) dt$$

при подаче на «вход» функций f из первого столбца.

Итак, интеграл $\int_a^x (\dots) dt$ действительно есть не-

Связь производной и интеграла

кий оператор. Примечательно, что действие его на функцию *противоположно* действию оператора $\frac{d}{dt}$ (этот оператор мы рассмотрели в девятой беседе).

В самом деле, возьмем некоторую функцию f и подействуем на нее сначала оператором $\int_a^x (\dots) dt$, а затем оператором $\frac{d}{dx}$:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right).$$

В результате получаем:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = \frac{d}{dx} [F(x) - F(a)] = \frac{d}{dx} F(x) = f(x),$$

т. е. приходим к исходной функции f .

Читатель. Наверное, можно подействовать на функцию рассматриваемыми операторами и в обратной последовательности?

Автор. Можно и в *обратной* последовательности. Это означает, что выражение

$$\int_a^x \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] dt$$

также есть исходная функция f . По крайней мере с точностью до постоянного слагаемого.

Читатель. А как в этом убедиться?

Автор. Очень просто. Какая функция является первообразной для функции $f'(x)$?

Читатель. Очевидно, функция $f(x) + C$.

Автор. Следовательно,

$$\int_a^x \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] dt = \int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a).$$

Читатель. Получается, что если оператор $\frac{d}{dx}$ выполняет *операцию дифференцирования*, то оператор $\int_a^x (\dots) dt$ выполняет *операцию интегрирования*?

Автор. Именно так.

И казалось бы, на этом можно было поставить точку. Однако наш разговор будет неполным, если мы не выясним одну весьма существенную «тонкость». Выше мы широко использовали понятие площади криволинейной трапеции, выяснили, что именно такой смысл имеет интеграл. Но что такое «площадь криволинейной трапеции»?

Площадь
криволинейной
трапеции

Читатель. Разве это не вполне очевидно? Достаточно взглянуть на рисунки.

Автор. Обратимся, например, к рис. 45. На нем изображена некая заштрихованная геометрическая фигура, названная криволинейной трапецией. Однако рисунок ничего не говорит о *площади* этой фигуры.

Читатель. В геометрии мы широко пользуемся понятием площади.

Автор. Не спорю. Однако не забывайте, что в геометрии вы обычно применяете понятие площади к вполне определенным фигурам — треугольникам, трапециям и т. п. А вот уже определение понятия *площади круга* вызывает, как известно, определенные затруднения. Площадь круга определяется как предел последовательности площадей вписанных в круг (или описанных около круга) правильных многоугольников при неограниченном возрастании числа сторон многоугольника.

Читатель. По-видимому, площадь криволинейной трапеции тоже можно определить как *предел некоторой последовательности площадей*?

Автор. Так именно и поступают. Рассмотрим криволинейную трапецию, определяемую графиком некоторой функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (рис. 52). Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков одинаковой длины $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (на рисунке $n = 10$). Обозначим концы этих отрезков в порядке возрастания:

$$x_0 = a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b.$$

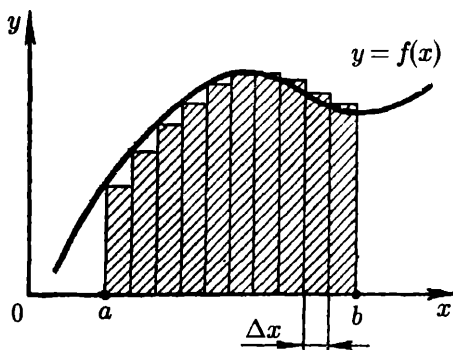
На каждом отрезке длины Δx построим как на основании *прямоугольник* высоты $f(x_{k-1})$, где k — индекс правого конца данного отрезка (это непринципиально; можно было бы брать не левые, а правые концы). Площадь этого прямоугольника есть

$$f(x_{k-1})\Delta x.$$

Рассмотрим далее сумму площадей всех таких прямоугольников (эта суммарная площадь заштрихована на рис. 52):

$$\begin{aligned} S_n(a, b) &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \\ &= [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] \frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, то при достаточно большом n (при достаточно малом Δx) объединение всех таких прямоугольников будет достаточно точно совпадать с рассматриваемой криволинейной трапецией.



Во всяком случае тем точнее, чем больше n (чем меньше Δx). Поэтому естественно допустить, что *последовательность сумм* $(S_n(a, b))$ *при* n , *стремящемся к бесконечности, имеет предел, который и есть площадь данной криволинейной трапеции* $S(a, b)$:

$$S(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a, b). \quad (12.3)$$

Рис. 52

Читатель. Но поскольку площадь $S(a, b)$ криволинейной трапеции есть, как мы выяснили раньше, интеграл $\int_a^b f(x) dx$, то из (12.3) следует еще одно определение интеграла:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a, b).} \quad (12.4)$$

Не так ли?

Автор. Верно. Причем, заметьте, определение (12.4) вполне *самостоятельно* — оно не нуждается в привлечении понятия первообразной.

Исторически именно так и появился в математике интеграл, чем, кстати, и можно объяснить принятую при его написании символику. Действительно, выражение (12.4) можно переписать немного

подробнее:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x \right]. \quad (12.5)$$

Нетрудно уловить определенное сходство в характере записи левой и правой частей этого равенства. Сам знак \int (знак интеграла) происходит от буквы S , которую часто использовали для обозначения суммы. Вместо произведения $f(x_{k-1})\Delta x$ в записи интеграла возникло выражение $f(x) dx$. Математики XVII в. не применяли понятия предела. Они рассматривали интеграл как «сумму бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых»; под последними они понимали $f(x) dx$. В этом смысле площадь криволинейной трапеции S понималась как «сумма бесконечно большого числа бесконечно малых площадей $f(x) dx$ ».

Полагаю, что Вам вполне очевидна математическая нестрогость подобных представлений.

Читатель. Это как раз пример того, что Вы неоднократно называли «вкусовыми представлениями».

Автор. Строгое же математическое объяснение понятия *интеграл* возможно, как Вы понимаете, лишь при условии использования *предельного перехода*. Я уже подчеркивал, что в основе математического анализа лежит операция предельного перехода. Если не применять понятия предела («предел последовательности» или «предел функции»), то невозможно строго рассмотреть ни производную, ни интеграл.

Читатель. Но интеграл можно определить и не используя соотношения (12.4). Достаточно воспользоваться формулой Ньютона—Лейбница (12.1). А ведь эта формула не предусматривает какого-либо предельного перехода.

Автор. Зато в этой формуле присутствует первообразная. А первообразная определяется так или иначе через использование представления о производной, т.е. опять-таки через привлечение операции предельного перехода.

Между прочим, Ваше последнее замечание заставляет меня коснуться вопроса о том, как принято на практике вводить интеграл. Здесь возможны два методически разных подхода.

Первый подход (его мы как раз и использовали в наших беседах) предполагает введение операции интегрирования с самого начала как операции, *обратной дифференцированию*. При этом формула Ньютона—Лейбница (12.1) служит фактически определением интеграла: интеграл вводится как *приращение первообразной*.

Второй подход предполагает введение операции интегрирования как *независимой* операции; при этом интеграл определяется как *предел* последовательности, составленной из известных сумм (см. формулу (12.4)). Этот подход соответствует историческому развитию математики; ведь интегральное исчисление первоначально развивалось независимо от дифференциального. Лишь в конце XVII в. была раскрыта глубокая связь между двумя ветвями математики: их основные проблемы предстали как *взаимно-обратные* задачи. Формула Ньютона—Лейбница (12.1) как раз и отразила указанную связь: выяснилось, что интеграл есть не что иное, как приращение первообразной.

Дифференциальные уравнения

Автор. Вам, конечно, знакомы различные типы уравнений: алгебраические, логарифмические, показательные, тригонометрические. Все они имеют общую черту: в результате решения этих уравнений получают какие-то *числа* (их называют, как известно, «корнями» уравнения). Теперь нам предстоит познакомиться с принципиально иным типом уравнений — *уравнениями, решениями которых служат не числа, а функции*. К подобным уравнениям относятся, в частности, так называемые *дифференциальные уравнения*.

Понятие дифференциального уравнения

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$. Обозначим через $f'(x)$ ее *первую* производную, через $f''(x)$ — *вторую* производную, через $f'''(x)$ — *третью* производную и т. д.

Определение. Дифференциальным уравнением называется равенство, связывающее x , $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д. В результате решения дифференциального уравнения отыскивается функция $f(x)$.

Читатель. Однако до сих пор мы не рассматривали таких понятий, как «вторая производная» или «третья производная».

Автор. Поэтому мы и начнем с выяснения этих понятий.

Читатель. Вообще-то нетрудно сообразить, что коль скоро производная $f'(x)$ есть некоторая *функция*, то ее можно продифференцировать и получить тем самым *производную производной*, которая, по-видимому, и есть вторая производная исходной функции $f(x)$.

Производные высших порядков

Автор. Выполнив над функцией $f(x)$ операцию дифференцирования n раз (если, конечно, это допустимо для данной функции), мы получим производную n -го *порядка* (иначе говоря, « n -ю производную»). В частности, третья производная функции $f(x)$ есть, очевидно,

$$f'''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \right].$$

Заметим, что со второй производной мы фактически уже имели дело. Поскольку функция $f(x)$ есть первая производная первообразной функции $F(x)$ ($f(x) = F'(x)$), то функция $f'(x)$ может рассматриваться как вторая производная первообразной $F(x)$:

$$f'(x) = F''(x).$$

Читатель. Как известно, производная функции $f(x)$ (точнее говоря, ее *первая* производная) есть скорость изменения этой функции. Ее величина отражается на крутизне графика функции $f(x)$ в той или иной точке, что измеряют тангенсом угла наклона касательной к графику. А что можно сказать в этом смысле о *второй* производной функции $f(x)$?

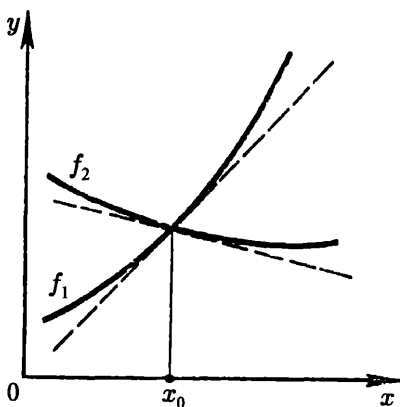


Рис. 53

Автор. Очевидно, вторая производная функции $f(x)$ характеризует *скорость, с которой изменяется скорость изменения этой функции*, т. е. она тем самым служит более тонкой характеристикой поведения исходной функции. Рассмотрим рисунок 53. Чем отличаются функции f_1 и f_2 в точке $x = x_0$?

Читатель. У них различны первые производные. Можно записать так:

$$f_1(x_0) = f_2(x_0); \quad f'_1(x_0) \neq f'_2(x_0).$$

Автор. Отметим для полноты картины, что в рассматриваемом случае производные различны как по абсолютной величине (из рисунка ясно видно, что $|f'_2(x_0)| < |f'_1(x_0)|$), так и по знаку: $f'_1(x_0) > 0$, $f'_2(x_0) < 0$. В результате мы говорим, что в точке $x = x_0$ функция f_1

возрастает (и притом достаточно быстро), тогда как функция f_2 убывает (и притом относительно медленно).

А теперь обратимся к рис. 54. Мы видим, что в точке $x = x_0$ совпадают не только значения функций f_1 и f_2 , но и значения их первых производных:

$$f_1(x_0) = f_2(x_0); \quad f'_1(x_0) = f'_2(x_0).$$

Однако, судя по графикам, существует различие в поведении функций f_1 и f_2 вблизи точки x_0 . Наверное, Вы сможете охарактеризовать это различие.

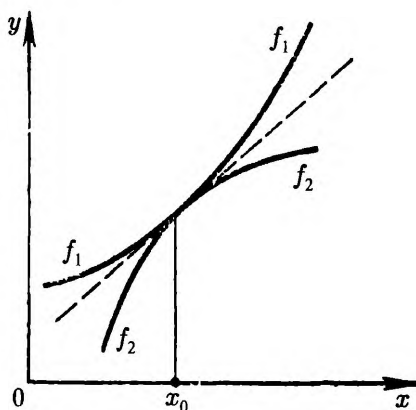


Рис. 54

Читатель. График функции f_1 имеет вблизи x_0 выпуклость книзу, а график функции f_2 — выпуклость кверху. Кроме того, у графика функции f_2 больше кривизна, чем у графика функции f_1 .

Автор. Вот эти-то тонкости поведения функции $f(x)$ вблизи точки $x = x_0$ и можно установить с помощью второй производной в точке x_0 (с помощью $f''(x_0)$). В случае, изображенном на рис. 54, имеем:

$$f''_1(x_0) \neq f''_2(x_0).$$

Нетрудно сообразить, что $f'_1(x_0) > 0$, а $f'_2(x_0) < 0$. Действительно, функция f_1 вблизи x_0 возрастает все быстрее и быстрее; значит, скорость изменения ее скорости роста *положительна*. Напротив, функция f_2 вблизи x_0 растет все медленнее и медленнее; значит, скорость изменения ее скорости роста *отрицательна*. Вполне очевидно при этом (см. рисунок), что $|f''_1(x_0)| < |f''_2(x_0)|$.

Читатель. По-видимому, третья производная $f'''(x_0)$ дает еще более тонкую характеристику поведения функции $f(x)$ вблизи $x = x_0$?

Автор. Именно так. К сожалению, проиллюстрировать это достаточно простым образом на графике функции $f(x)$ уже не представляется возможным.

На этом я предлагаю окончить разговор о производных разных порядков и перейти вплотную к дифференциальным уравнениям. Прежде всего

Решение простейших дифференциальных уравнений

заметим, что уравнение вида

$$f'(x) = \varphi(x), \quad (13.1)$$

где $\varphi(x)$ — некоторая заданная функция, можно рассматривать как простейший частный случай в теории дифференциальных уравнений; решение этого уравнения сводится к обычному интегрированию.

Два простых (и, кстати говоря, довольно распространенных) типа дифференциальных уравнений имеют вид:

$$\boxed{f'(x) = pf(x)}, \quad (13.2)$$

$$\boxed{f''(x) = -qf(x) \quad (q > 0)}, \quad (13.3)$$

где p и q — постоянные.

Уравнение (13.2) называют *дифференциальным уравнением экспоненциального роста (убывания)*, а уравнение (13.3) — *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*.

Остановимся на этих уравнениях подробнее. Начнем с дифференциального уравнения экспоненциального роста (убывания). Что можно заключить из вида этого уравнения?

Читатель. Из вида уравнения (13.2) следует, что в каждой точке x скорость изменения функции $f(x)$ совпадает со значением функции с точностью до постоянного множителя p . Иначе говоря, с точностью до указанного множителя функция $f(x)$ и ее первая производная $f'(x)$ в каждой точке x совпадают.

Автор. Вспомните, пожалуйста, десятую беседу и скажите, какие функции могут быть решением такого уравнения. Для каких функций производная совпадает с самой функцией? Иными словами, какие функции при дифференцировании преобразуются сами в себя?

Читатель. Этим свойством обладает показательная функция a^x при $a = e$. Ее называют *экспонентой*. В десятой беседе мы видели, что

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

Автор. Правильно. Значит, в качестве решения уравнения $f'(x) = pf(x)$ следует взять функцию $f(x) = e^{px}$. Действительно,

$$\frac{d}{dx} e^{px} = \left(\frac{d}{dy} e^y \right) \frac{d}{dx} (px) = pe^y = pe^{px}.$$

Именно поэтому уравнение (13.2) и называют дифференциальным уравнением *экспоненциального* роста (убывания). При $p > 0$ имеем, очевидно, рост, а при $p < 0$ — убывание.

Читатель. По-видимому, решением данного уравнения является любая функция

$$f(x) = Ce^{px},$$

где C — произвольный постоянный множитель. Ведь постоянный множитель выносится за знак производной.

Автор. Вы совершенно правы.

Решением дифференциального уравнения $f'(x) = pf(x)$ является семейство функций

$$f(x) = Ce^{px},$$

с произвольным постоянным множителем C (называемым обычно «постоянной интегрирования»).

Некоторые из функций Ce^{px} изображены на рис. 55 (для определенности здесь принято, что $p > 0$).

Формулу $f(x) = Ce^{px}$, описывающую все это семейство функций, называют *общим решением* данного дифференциального уравнения. Зафиксировав множитель C , можно выбрать (выделить) из общего решения то или иное *частное решение*.

Читатель. Как это делается?

Автор. Очень просто. Достаточно указать значение искомой функции $f(x)$ в некоторой точке. Пусть, например, известно, что

$$f(x_0) = y_0.$$

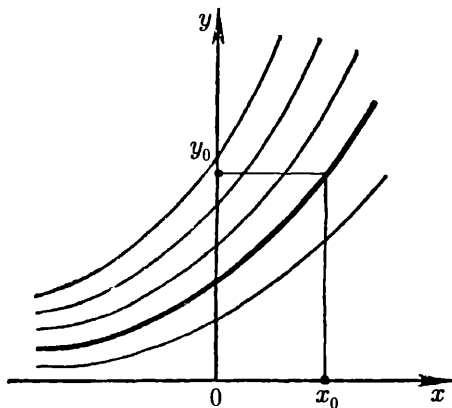


Рис. 55

В этом случае из всего семейства кривых (см. рис. 55) нас будет интересовать лишь *одна* (она выделена на рисунке жирной линией). Эта кривая описывает графически функцию Ce^{px} , для

которой $Ce^{px_0} = y_0$ и, следовательно, $C = y_0 e^{-px_0}$. Таким образом, искомое частное решение будет иметь вид:

$$f(x) = y_0 e^{-p(x-x_0)}, \quad (13.4)$$

Читатель. Получается, что для отыскания определенного (частного) решения дифференциального уравнения $f'(x) = pf(x)$ необходимо наряду с самим уравнением задать еще и некоторое условие: $f(x_0) = y_0$?

Автор. Именно так. Это условие называют *начальным условием*.

Теперь обратимся к дифференциальному уравнению (13.3):

$$f''(x) = -qf(x) \quad (q > 0).$$

Читатель. Здесь в каждой точке совпадает с функцией $f(x)$ уже не скорость изменения функции, а взятая с обратным знаком скорость изменения скорости изменения функции.

Автор. Иначе говоря, функция $f(x)$ совпадает (с точностью до постоянного множителя) со своей второй производной $f''(x)$. Вспомните, какие функции обладают таким свойством.

Читатель. Я догадываюсь, что решениями уравнения (13.3) должны быть функции $\sin x$ или $\cos x$.

Автор. Точнее: $\sin(\sqrt{q}x)$ или $\cos(\sqrt{q}x)$. Действительно,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \sin(\sqrt{q}x) \right) = \sqrt{q} \frac{d}{dx} \cos(\sqrt{q}x) = -q \sin(\sqrt{q}x),$$

или

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \cos(\sqrt{q}x) \right) = -\sqrt{q} \frac{d}{dx} \sin(\sqrt{q}x) = -q \cos(\sqrt{q}x).$$

Именно поэтому рассматриваемое уравнение и называют дифференциальным уравнением *гармонических колебаний*.

Нетрудно сообразить, что общее решение уравнения (13.3) может быть представлено в виде

$$f(x) = C_1 \sin(\sqrt{q}x) + C_2 \cos(\sqrt{q}x), \quad (13.5)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные (постоянные интегрирования). В самом деле,

$$f'(x) = \sqrt{q}C_1 \cos(\sqrt{q}x) - \sqrt{q}C_2 \sin(\sqrt{q}x),$$

$$f''(x) = -q[C_1 \sin(\sqrt{q}x) + C_2 \cos(\sqrt{q}x)] = -qf(x).$$

Читатель. Получается, что в данном случае мы имеем дело уже не с одной, а с *двумя* постоянными интегрирования.

Автор. Это связано с тем, что дифференциальное уравнение (13.3) содержит *вторую* производную. Значит, для перехода к функции $f(x)$ приходится *дважды* обращаться к интегрированию. А ведь каждое интегрирование дает, как известно, семейство первообразных, т. е. приводит к появлению постоянного интегрирования. Вообще число постоянных интегрирования в общем решении того или иного дифференциального уравнения равно *максимальному* встречающемуся в данном уравнении порядку производной. Общее решение уравнения (13.2) имеет одну постоянную интегрирования, поскольку уравнение содержит производную искомой функции первого порядка и не содержит производных более высоких порядков. Общее решение уравнения (13.3) имеет две постоянные интегрирования, поскольку уравнение содержит производную искомой функции второго порядка и не содержит производных более высоких порядков.

Читатель. Как же записать в случае уравнения (13.3) начальное условие?

Автор. Надо задать в некоторой точке $x = x_0$ значение не только искомой функции, но и ее первой производной. В данном случае *начальные условия* записываются так:

$$f(x_0) = f_0; \quad f'(x_0) = f'_0. \quad (13.6)$$

Читатель. А если бы дифференциальное уравнение содержало третью производную и, следовательно, общее решение включало уже не две, а три постоянных интегрирования?

Автор. В этом случае начальные условия отвечали бы заданию в некоторой точке $x = x_0$ искомой функции, ее первой производной и ее второй производной:

$$f(x_0) = f_0; \quad f'(x_0) = f'_0; \quad f''(x_0) = f''_0.$$

Но вернемся к общему решению уравнения (13.3). Обычно его записывают не в виде (13.5), а в несколько ином виде — либо

$$f(x) = A \sin(\sqrt{q}x + \alpha), \quad (13.7)$$

либо

$$f(x) = A \cos(\sqrt{q}x + \beta), \quad (13.7a)$$

Формула (13.7a) получается из (13.7), если положить $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$.

В дальнейшем будем использовать запись (13.7). Здесь вместо постоянных интегрирования C_1 и C_2 , входивших в общее решение вида (13.5), используются постоянные A и α . Переход от (13.5) к (13.7) нетрудно выполнить, если применить формулу для синуса суммы. Действительно,

$$A \sin(\sqrt{q}x + \alpha) = A \sin(\sqrt{q}x) \cos \alpha + A \cos(\sqrt{q}x) \sin \alpha,$$

так что

$$C_1 = A \cos \alpha; \quad C_2 = A \sin \alpha.$$

А теперь попробуйте выделить из общего решения (13.7) частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (13.6).

Читатель. Для этого надо выразить постоянные A и α через f_0 и f'_0 . Используя (13.7), запишем выражение для первой производной:

$$f'(x) = A\sqrt{q} \cos(\sqrt{q}x + \alpha).$$

Начальные условия (13.6) принимают в данном случае вид:

$$\begin{cases} \sin(\sqrt{q}x_0 + \alpha) = \frac{f_0}{A}, \\ \cos(\sqrt{q}x_0 + \alpha) = \frac{f'_0}{A\sqrt{q}}. \end{cases} \quad (13.8)$$

Мы должны решить систему (13.8) относительно неизвестных A и α . Возводя оба уравнения этой системы в квадрат и складывая, получаем (с учетом того, что $\sin^2 \nu + \cos^2 \nu = 1$):

$$\left(\frac{f_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{f'_0}{A\sqrt{q}}\right)^2 = 1.$$

Таким образом,

$$A = \sqrt{f_0^2 + \left(\frac{f'_0}{\sqrt{q}}\right)^2}. \quad (13.9)$$

Поделив друг на друга уравнения системы (13.8), находим:

$$\operatorname{tg}(\sqrt{q}x_0 + \alpha) = \frac{f_0}{f'_0} \sqrt{q}. \quad (13.10)$$

Отсюда можно выразить постоянную α .

Постоянные A и α , выраженные через f_0 и f'_0 , надо подставить в (13.7); в результате и получится частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (13.6).

Автор. Предположим, что начальные условия (13.6) имеют вид:

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = f'_0. \quad (13.11)$$

Читатель. В этом случае согласно (13.9) и (13.10) имеем:

$$A = \frac{f'_0}{\sqrt{q}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = 0. \quad (13.12)$$

Если $\operatorname{tg} \alpha = 0$, то $\alpha = \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Учитывая, что $\sin(\sqrt{q}x + \alpha) = \sin(\sqrt{q}x) \cos \alpha + \cos(\sqrt{q}x) \sin \alpha$ и что в данном случае $\sin \alpha = 0$, а $\cos \alpha = \pm 1$, заключаем:

$$\text{либо } f(x) = \frac{f'_0}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}x), \quad \text{либо } f(x) = -\frac{f'_0}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}x).$$

Автор. Второй вариант не годится, так как не будет выполняться условие $f'(0) = f'_0$.

Читатель. Значит, искомое частное решение есть

$$f(x) = \frac{f'_0}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}x). \quad (13.13)$$

Автор. Хорошо. А теперь рассмотрим начальные условия в таком виде:

$$f(0) = f_0; \quad f'(0) = 0. \quad (13.14)$$

Читатель. Согласно (13.9) находим: $A = f_0$. Соотношение же (13.10) в данном случае не годится, поскольку $f'_0 = 0$.

Автор. А Вы воспользуйтесь более ранним соотношением — вторым уравнением в системе (13.8). В рассматриваемом случае это уравнение принимает вид $\cos \alpha = 0$.

Читатель. Таким образом:

$$A = f_0; \quad \cos \alpha = 0. \quad (13.15)$$

Отсюда следует, что $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$ и поэтому

$$f(x) = f_0 \sin(\sqrt{q}x + \frac{\pi}{2} + \pi n) = f_0 \cos(\sqrt{q}x + \pi n).$$

Автор. Нетрудно убедиться, что частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (13.14), имеет вид

$$f(x) = f_0 \cos(\sqrt{q}x). \quad (13.16)$$

Следует обратить внимание на *периодичность* функций, являющихся решениями (общим либо частными) дифференциального уравнения (13.3).

Читатель. Из соотношений (13.13) или (13.16) хорошо видно, что эти функции имеют *период*

$$x_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{q}}. \quad (13.17)$$

Дифференциальные уравнения в описании физических процессов

Автор. Верно. Далее мне хотелось бы остановиться на одном принципиальном обстоятельстве. Дело в том, что рассмотренные дифференциальные уравнения описывают *определенные процессы*, что особенно хорошо видно,

если в качестве независимой переменной использовать *время*. Обозначая в этом случае независимую переменную как t , перепишем уравнения (13.2) и (13.3) в виде

$$f'(t) - pf(t) = 0, \quad (2a)$$

$$f''(t) + qf(t) = 0 \quad (q > 0). \quad (3a)$$

Уравнение (2a) описывает развивающийся во времени процесс экспоненциального роста ($p > 0$) или экспоненциального убывания, затухания ($p < 0$). Уравнение (3a) описывает развивающийся

во времени процесс гармонических колебаний с периодом $T = \frac{2\pi}{\sqrt{q}}$.

Читатель. По-видимому, любое дифференциальное уравнение описывает некоторый процесс? Я предполагаю зависимость f от времени.

Автор. Совершенно верно. И я хотел бы, чтобы Вы самым внимательным образом отнеслись к этому. В известном смысле, здесь отражается идейная сторона, внутренняя сущность дифференциальных уравнений. Заметьте: дифференциальное уравнение связывает в произвольный момент времени (в произвольной точке пространства) значения функции и некоторой ее производной (производных), а в результате, решая уравнение, мы получаем картину развивающегося во времени (в пространстве) процесса. Иными словами, выражая локальную связь (связь в точке x , в момент t) между f, f', f'', \dots дифференциальное уравнение тем самым позволяет получить некую картину в целом, некий процесс, некое развитие. В этом и состоит идейная специфика дифференциальных уравнений.

Читатель. А какова при этом роль начальных условий?

Автор. Роль начальных (или граничных) условий вполне очевидна. Ведь само по себе дифференциальное уравнение позволяет выявить лишь характер протекания данного процесса. Конкретное же развитие того или иного процесса зависит от конкретных начальных условий (например, от положения и скорости тела в начальный момент времени).

Читатель. А можно ли по одному только виду данного дифференциального уравнения сделать заключение о характере «скрывающегося» за этим уравнением процесса?

Автор. Опытный математик обычно всегда это может сделать. Ему достаточно взглянуть на уравнение (2а), чтобы заключить о наличии экспоненциального роста (затухания). Уравнение (3а) ясно говорит ему о наличии некоего колебательного процесса (точнее, гармонических колебаний). Предположим, например, что имеется дифференциальное уравнение следующего вида (сравните с уравнениями (2а) и (3а)):

$$f''(t) - pf'(t) + qf(t) = 0 \quad (p < 0, q > 0). \quad (13.18)$$

Мы не будем подробно анализировать такое уравнение. Отметим лишь, что для математика за данным уравнением «скрывается» уже не просто гармонический колебательный процесс, но затухающий колебательный процесс. Можно показать (мы этого делать не будем), что амплитуда колебаний будет в этом случае уменьшаться со временем по экспоненциальному закону e^{pt} .

Читатель. Получается, что уравнение (13.18) описывает процесс, представляющий собой сочетание колебательного процесса и процесса экспоненциального затухания?

Автор. Фактически так оно и есть. Мы имеем здесь *колебательный* процесс, но с *затухающей* во времени амплитудой.

Дифференциальные уравнения (продолжение)

Автор. Во всех предыдущих беседах (за исключением восьмой беседы) мы практически совсем не касались возможного *физического содержания* рассматриваемых математических понятий и символов. В данной беседе, которая является заключительной, хотелось бы на примере дифференциальных уравнений «перекинуть мостик» от высшей математики к физике. Мы рассмотрим дифференциальные уравнения экспоненциального затухания и гармонических колебаний, наполняя их тем или иным конкретным физическим содержанием.

Задача о распаде ядер

Читатель. Другими словами, предполагается рассмотреть некоторые *физические процессы*?

Автор. Вот именно. При этом сразу же подчеркнем: дифференциальные уравнения играют в физике крайне важную роль. Во-первых, без дифференциальных уравнений, как правило, не удастся описать никакого более или менее реального физического процесса. Во-вторых, оказывается, что сплошь и рядом мы имеем дело с ситуацией, когда различные *физические* процессы описываются *одним и тем же* дифференциальным уравнением. В таких случаях говорят об *аналогичных* физических процессах. Аналогичным физическим процессам отвечают одинаковые математические задачи. Если мы знаем решение того или иного дифференциального уравнения, то тем самым мы фактически имеем результат для всех аналогичных физических процессов, описываемых данным дифференциальным уравнением.

Обратимся к следующей конкретной физической задаче. Имеется совокупность распадающихся радиоактивных атомных ядер. Обозначим через $N(t)$ функцию, описывающую количество атомных ядер в единице объема, не распавшихся к моменту времени t . Известно, что в момент $t = t_0$ имеется N_0 нераспавшихся ядер (в единице объема) и что скорость уменьшения числа нераспавшихся ядер в момент t пропорциональна числу имеющихся в данный момент нераспавшихся ядер:

$$-N'(t) = \frac{1}{\tau} N(t). \quad (14.1)$$

Здесь $\frac{1}{\tau}$ — некий коэффициент пропорциональности; величина τ имеет, очевидно, размерность времени, ее физический смысл мы выясним позднее.

Требуется найти функцию $N(t)$.

Такова конкретная физическая задача. Давайте посмотрим на нее с математической точки зрения.

Читатель. Уравнение (14.1) есть дифференциальное уравнение вида (2а) из предыдущей беседы, при условии: $p = -\frac{1}{\tau}$. Начальное условие имеет в данном случае вид $N(t_0) = N_0$. Используя результат (13.4) предыдущей беседы, можем сразу записать:

$$N(t) = N_0 e^{-(1/\tau)(t-t_0)}. \quad (14.2)$$

Автор. Правильно. Полученная Вами формула (14.2) описывает закон радиоактивного распада; мы видим, что этот закон имеет экспоненциальный характер: число нераспавшихся ядер уменьшается со временем по экспоненте (рис. 56).

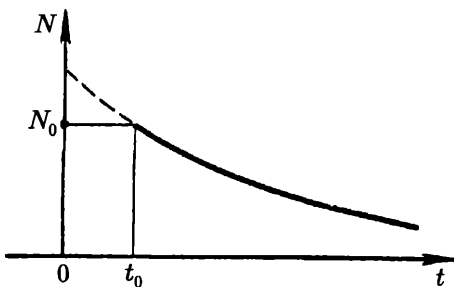


Рис. 56

экспоненциальный характер: число нераспавшихся ядер уменьшается со временем по экспоненте (рис. 56).

Прологарифмируем равенство (13.2), используя натуральные логарифмы:

$$\ln N(t) = \ln N_0 - \frac{t - t_0}{\tau}.$$

Отсюда следует, что

$$\tau = \frac{t - t_0}{\ln \frac{N_0}{N(t)}}.$$

Таким образом, постоянная τ есть такой промежуток времени, в течение которого число нераспавшихся ядер уменьшается в e раз (т. е. приблизительно в 2,7 раз) — ведь в этом случае $\ln \frac{N_0}{N(t)} = \ln e = 1$.

А теперь обратимся к другой физической задаче. Пусть на плоскую границу некой среды падает нормально световая волна интенсивности I_0 и затем распространяется, постепенно затухая, внутри среды. Выберем ось x в качестве направления распространения волны, приняв начало отсчета (точку $x = 0$) на границе среды (рис. 57). Требуется найти функцию $I(x)$ — зависимость интенсивности света от глубины проникновения его в среду (иначе говоря, от пути, пройденного внутри среды). При этом известно, что скорость затухания интенсивности в данной точке x (т. е. величина $-I'(x)$) пропорциональна величине интенсивности в данной точке:

$$-I'(x) = \eta I(x). \quad (14.3)$$

Здесь η — коэффициент пропорциональности, имеющий, очевидно, размерность обратной длины; его физический смысл мы выясним позднее.

Итак, физическая задача сформулирована.

Читатель. Легко видеть, что, как и в предыдущем случае, мы имеем здесь дифференциальное уравнение экспоненциального затухания. Начальное условие: $I(0) = I_0$. Используя результат (13.4) предыдущей беседы, получаем:

$$I(x) = I_0 e^{-\eta x}. \quad (14.4)$$

Автор. Формула (14.4) описывает хорошо известный в оптике закон Бугера: по мере проникновения в глубь вещества интенсивность

Задача о световой волне

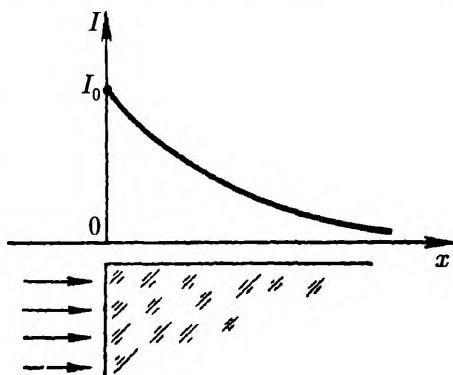


Рис. 57

света затухает по экспоненте (см. рис. 57). Легко видеть, что постоянная η есть величина, обратная такой длине, на которой интенсивность света уменьшается в e раз. Постоянную η называют *линейным коэффициентом затухания*.

Отметим, что результаты (14.2) и (14.4) относятся к двум *разным* физическим задачам, взятым из разных разделов физики. Мы имеем здесь дело с *разными физическими процессами*. Однако математическая природа этих физических процессов одна и та же — оба они описываются *одним и тем же дифференциальным уравнением*.

Задача о колебании шарика

Далее рассмотрим новую физическую задачу. Предположим, что шарик массы m совершает колебания вдоль оси x , будучи связан упругими пружинками с неподвижными стенками (рис. 58). Точка $x = 0$ выбрана в положении, отвечающем положению равновесия, т. е. посередине между стенками. Движение шарика происходит в соответствии со *вторым законом Ньютона*:

$$ma = F, \quad (14.5)$$

где a — ускорение, F — возвращающая сила. Будем полагать:

$$F = -kx, \quad (14.6)$$

где k — коэффициент упругости пружинки, характеризующий ее упругие свойства.

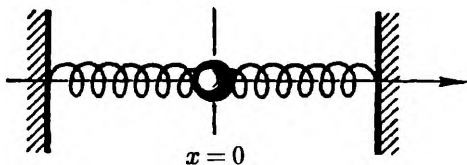


Рис. 58

Будем рассматривать величину отклонения шарика от равновесия (величину x) как некоторую функцию от времени: $x(t)$. Требуется найти эту функцию.

Напомним, что ускорение есть вторая производная функции, описывающей зависимость пути от времени: $a = x''(t)$. Используя это обстоятельство, перепишем (14.5) с учетом (14.6) в виде

$$mx''(t) + kx(t) = 0,$$

или

$$x''(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0. \quad (14.7)$$

Читатель. Мы пришли к дифференциальному уравнению вида (3а) из предыдущей беседы при условии, что $q = \frac{k}{m}$.

Автор. Значит, искомое общее решение должно иметь вид

$$x(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right). \quad (14.8)$$

Таким образом, мы убеждаемся, что шарик в рассматриваемой задаче совершает гармонические колебания около положения равновесия $x = 0$. Параметр A есть, очевидно, *амплитуда* колебаний; параметр α называют *начальной фазой* колебаний. Учитывая соотношение (13.17) из предыдущей беседы, заключаем, что *период* колебаний шарика равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (14.9)$$

Часто вместо периода используют *круговую частоту* ω : $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Из (14.9) следует, что

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (14.10)$$

Используя (14.10), перепишем общее решение (14.8) в виде

$$x(t) = A \sin (\omega t + \alpha). \quad (14.11)$$

Читатель. А как быть в данном случае с начальными условиями?

Автор. Предположим, что при $t < 0$ шарик покоится. Задавая те или иные начальные условия при $t = 0$, мы тем самым выбираем способ возбуждения колебаний в момент $t = 0$. Пусть, например, начальные условия описываются соотношениями (13.11) из предыдущей беседы:

$$x(0) = 0; \quad x'(0) = v_0. \quad (14.12)$$

Это означает, что шарик, находящемуся в положении равновесия ($x = 0$), сообщается в момент $t = 0$ начальная скорость v_0 . Согласно соотношению (13.13) из предыдущей беседы получаем в данном случае следующее частное решение:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin (\omega t). \quad (14.13)$$

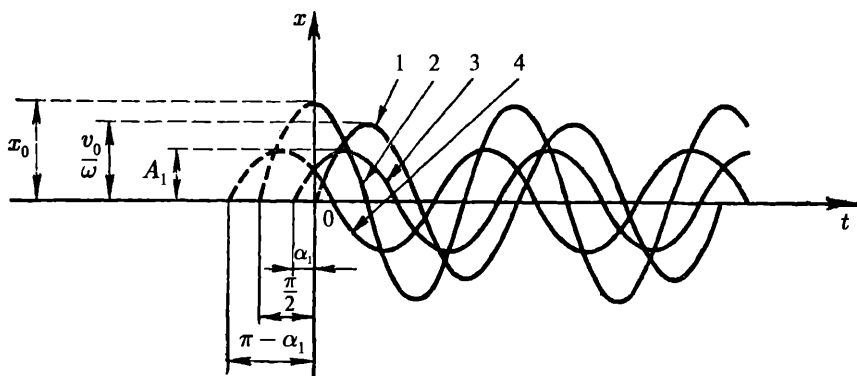


Рис. 59

А теперь сообразите, в чем состоит физический смысл начальных условий типа условий (13.14) из предыдущей беседы.

Читатель. Эти условия имеют вид

$$x(0) = x_0; \quad x'(0) = 0. \quad (14.14)$$

Это означает, что шарик отклонили от положения равновесия на расстояние $x = x_0$ и в момент времени $t = 0$ спокойно отпустили. Соответствующее частное решение имеет вид (см. выражение (13.16) из предыдущей беседы)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t). \quad (14.15)$$

Автор. Итак, в первом случае мы возбудили колебания, сообщив шарiku, находившемуся в положении равновесия, начальную скорость v_0 (в этом случае амплитуда колебаний A равна $\frac{v_0}{\omega}$, а начальная фаза α может быть принята равной нулю — см. соотношение (14.13)). Во втором случае мы возбудили колебания, отклонив шарик от положения равновесия на расстояние x_0 и затем отпустив его (в этом случае $A = x_0$, а начальная фаза α может быть принята равной $\frac{\pi}{2}$ — см. соотношение (14.15)).

Читатель. По-видимому, возможен и такой случай, когда в момент $t = 0$ шарик отклонен от положения равновесия на расстояние x_1 и одновременно получает начальную скорость v_1 ?

Автор. Конечно, возможен. На рис. 59 представлены четыре ситуации (четыре частных решения), отвечающие четырем разным

начальным условиям (четырем разным способам возбуждения колебаний шарика):

- 1) $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$; в этом случае $A = \frac{v_0}{\omega}$, $\alpha = 0$.
- 2) $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$; в этом случае $A = x_0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
- 3) $x(0) = x_1$, $x'(0) = v_1$ (здесь сообщаемая шарiku начальная скорость направлена в ту же сторону, что и начальное его отклонение); в этом случае $A = A_1$, $\alpha = \alpha_1$ (см. рисунок).
- 4) $x(0) = x_1$, $x'(0) = -v_1$ (сообщаемая шарiku начальная скорость направлена в противоположную сторону по сравнению с направлением его начального отклонения); в этом случае $A = A_1$, $\alpha = \pi - \alpha_1$ (см. рисунок).

Согласно соотношению (13.9) из предыдущей беседы

$$A_1 = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{v_1}{\omega}\right)^2}, \quad (14.16)$$

а согласно соотношению (14.10)

$$\alpha_1 = \arctg \left(\frac{x_1 \omega}{v_1} \right). \quad (14.17)$$

Читатель. Я вижу, что, задавая те или иные начальные условия (другими словами, возбуждая колебания шарика тем или иным способом), мы тем самым определяем амплитуду и начальную фазу колебаний.

Автор. Именно так. Это очень хорошо видно на рис. 59. Кстати, на том же рисунке хорошо видно, что независимо от начальных условий период колебаний (частота) остается постоянным.

Подводя итоги, отметим, что гармоническое колебание характеризуется тремя параметрами (см. (14.11)): амплитудой A , начальной фазой α и частотой ω . Первые два параметра определяются выбором начальных условий, последний же параметр не зависит от начальных условий.

Рассмотренный колебательный процесс относится к числу *механических* процессов. Теперь мы обратимся к процессу, имеющему совершенно иную

Задача
об электриче-
ских зарядах

физическую природу. Речь пойдет о движении электрических зарядов в контуре, состоящем из конденсатора с емкостью C и катушки с индуктивностью L (рис. 60). Пусть в момент t на пластинах конденсатора имеется заряд $Q(t)$; соответственно разность потенциалов на пластинах конденсатора будет равна $\frac{Q(t)}{C}$. Если в рассматриваемый момент времени в цепи идет ток силой $i(t)$, то на катушке индуктивности возникнет наведенная разность потенциалов, равная $-Li'(t)$. Она должна, как известно, компенсироваться разностью потенциалов на пластинах конденсатора:

$$-Li'(t) = \frac{Q(t)}{C}. \quad (14.18)$$

Продифференцируем равенство (14.18). Получим:

$$-Li''(t) = \frac{Q'(t)}{C}. \quad (14.19)$$

Далее учтем тот факт, что

$$Q'(t) = i(t)$$

(сила тока есть скорость изменения величины заряда). В результате уравнение (14.19) может быть переписано в виде

$$-Li''(t) = \frac{1}{C} i(t),$$

или

$$i''(t) + \frac{1}{LC} i(t) = 0. \quad (14.20)$$

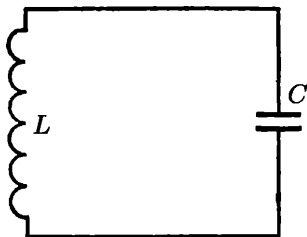


Рис. 60

Получилось хорошо знакомое дифференциальное уравнение. Не правда ли?

Читатель. Это есть дифференциальное уравнение вида (3а) из предыдущей беседы при условии, что $q = \frac{1}{LC}$. Следовательно, как и в предыдущем случае, мы приходим к гармоническим колебаниям...

Автор. Заметьте, однако, что здесь мы имеем уже не механические колебания шарика на пружинках, а *электромагнитные колебания* в контуре.

Читатель. Учитывая, что в данном случае $q = \frac{1}{LC}$, и используя результат (13.17) из предыдущей беседы, получаем выражение для периода электромагнитных колебаний в рассматриваемом контуре:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (14.21)$$

Общее решение уравнения (14.20) имеет вид

$$i(t) = A \sin \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \alpha \right). \quad (14.22)$$

Автор. Все правильно. Оба физических процесса — *механические колебания шарика на пружинках и электромагнитные колебания в контуре* — оказываются *математически аналогичными*. Они описываются *одним и тем же* дифференциальным уравнением. Недаром Вы, не задумываясь, указали период колебаний (формула (14.21)) и общее решение (формула (14.22)).

Мы рассмотрели в наших беседах всего лишь два (и притом достаточно простых) типа дифференциальных уравнений — дифференциальные уравнения экспоненциального роста (затухания) и гармонических колебаний. В качестве примера мы использовали затем эти уравнения для рассмотрения некоторых физических процессов разной природы.

Читатель. По-видимому, и перечень самих дифференциальных уравнений, и тем более перечень исследуемых при помощи этих уравнений физических процессов можно было бы существенно расширить.

Автор. Совершенно верно. На этом мы закончим обсуждение дифференциальных уравнений. В заключение заметим, что дифференциальные уравнения широко применяются не только в физике. Они применяются также в химии, биологии, кибернетике, социологии и других науках.

Упражнения

1 По заданным первым членам последовательности найти формулу для n -го члена:

а) $\frac{1}{11}, \frac{1}{21}, \frac{1}{31}, \frac{1}{41}, \frac{1}{51}, \dots;$

б) $1, \frac{1}{4}, \sqrt{3}, \frac{1}{16}, \sqrt{5}, \frac{1}{36}, \sqrt{7}, \dots;$

в) $1, -\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right)^3, -\left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}\right)^4, \dots;$

г) $\frac{3}{4}, -\left(\frac{6}{7}\right)^2, \left(\frac{9}{10}\right)^3, -\left(\frac{12}{13}\right)^4, \left(\frac{16}{5}\right)^5, \dots$

Ответ:

а) $y_n = \frac{1}{10n + 1};$

б) $y_n = \frac{\sqrt{n}}{2} [1 - (-1)^n] + \frac{1}{2n^2} [1 + (-1)^n];$

в) $y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^n};$

г) $y_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{3n}{3n + 1} \right)^n.$

2 Найти наименьший член последовательности:

а) $y_n = n^2 - 5n + 1$; б) $y_n = n + \frac{100}{n}$; в) $y_n = n + 5 \sin \frac{\pi n}{2}.$

Ответ: а) $y_2 = y_3 = -5$; б) $y_{10} = 20$; в) $y_3 = -2.$

3 Найти наибольший член последовательности:

$$\text{а) } y_n = \frac{90n}{n^2 + 9}; \text{ б) } y_n = \frac{10^n}{n!}.$$

Ответ: а) $y_3 = 15$; б) $y_9 = y_{10} = \frac{10^9}{9!}$.

4 Рассмотреть вопрос о монотонности следующих последовательностей:

$$\text{а) } y_n = 3n^2 - n; \text{ б) } y_n = n^2 - 3n;$$

$$\text{в) } y_n = 7n - n^2; \text{ г) } y_n = \lg \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

Ответ:

а) возрастающая; б) неубывающая;

в) немонотонная; г) убывающая.

5 Даны две последовательности (y_n) и (z_n) , такие что для всех n $0 \leq y_n \leq z_n$. Последовательность (z_n) сходится, и ее предел равен нулю.

Доказать, что последовательность (y_n) сходится к нулю.

6 Доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = 0.$$

Указание. В случае а) следует представить

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = \left[1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \dots \right] > \\ &> \left[n + \frac{n(n-1)}{2} \right] > \frac{n^2}{2} \end{aligned}$$

и воспользоваться теоремой, доказанной в упражнении 5.

В случае б) следует представить

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} < \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$

и воспользоваться указанной выше теоремой.

7 Найти пределы последовательностей:

$$\text{а) } y_n = \frac{2n + \frac{1}{n} + 3}{(\sqrt{n} + \sqrt{3})^2};$$

$$\text{б) } y_n = \frac{5n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n} - 3n^2};$$

$$\text{в) } y_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}};$$

$$\text{г) } y_n = \frac{2^n + n}{2^n + \sqrt{n}} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}).$$

Ответ: а) 2; б) $-\frac{5}{3}e$; в) e ; г) 0.

8 Найти функцию $f(x)$, если известно, что

$$3f(x-1) - f\left(\frac{1-x}{x}\right) = 2x.$$

Ответ: $f(x) = \frac{3}{4}(x+1) + \frac{1}{4(x+1)}.$

9 Найти аналитическое выражение и естественную область определения функций: а) $f(1-x)$; б) $f\left(\frac{1}{x}\right)$, если известно, что $f(x) = \lg(x^2 - 1)$.

Ответ: а) $\lg(x^2 - 2x)$; $x < 0, x > 2$; б) $\lg \frac{1-x^2}{x^2}$; $0 < |x| < 1$.

10 Рассмотреть вопрос о непрерывности и дифференцируемости функции $f(x) = \arcsin(\sin x)$ (в пределах естественной области определения).

Ответ: Естественная область определения: $] - \infty; \infty[$; функция непрерывна во всех точках; дифференцируема везде, за исключением точек $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi, \dots$.

11 Показать, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ не имеет производной в точке $x = 0$.

12 Доказать, что если $|x| \leq 2$, то $3x^5 - 5x^3 - 30x < 40$.

Указание. Убедиться, что наибольшее значение функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 30x$ на отрезке $[-2; 2]$ меньше 40. Для этого рассмотрите значения функции на концах отрезка $[-2; 2]$ и в точках, где обращается в нуль производная функции (если эти точки принадлежат указанному отрезку).

13 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x - 2 \ln x$ на отрезке $[1; e]$.

Ответ: Наименьшее значение: $f(2) = 2 - 2 \ln 2$, наибольшее значение: $f(1) = 1$.

14 В какой точке x_0 касательная к графику функции $f(x) = x^2 + 1$ будет параллельна прямой $y = 3x$?

Ответ: В точке $x_0 = \frac{3}{2}$.

15 Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4x + 5$ в точке $x_0 = 1$.

Ответ: $y = -2x + 4$.

Пояснение. Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, где $f'(x_0)$ — значение производной данной функции в точке x_0 .

16 Найти производные следующих функций:

а) $f(x) = \sqrt[n]{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$; в) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$;

г) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$; д) $f(x) = \sin^4 5x$; е) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$;
 ж) $f(x) = \ln \frac{x^2 - 1}{10}$ з) $f(x) = \ln \frac{1 + x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Ответ:

а) $\frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$; б) $-\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$; в) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$ г) $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$;
 д) $20 \sin^3 5x \cos 5x$; е) $\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$; ж) $\frac{2x}{x^2 - 1}$;
 з) $\frac{1 - x}{(1 + x)(1 + x^2)}$.

17 Убедиться, что функции

$$F_1 = \cos^2 x + \cos^4 x,$$

$$F_2 = \cos 2x - \frac{1}{4} \sin^2 2x,$$

$$F_3 = \cos^4 x + 3 \cos^2 x + 2 \sin^2 x$$

являются первообразными одной и той же функции. Найти $F_2 - F_1$ и $F_3 - F_1$.

Ответ: 1; 2.

18 Найти площадь криволинейной трапеции, определяемой графиком функции $f(x) = x^2 + 1$ на отрезке $[-3; 3]$.

Ответ: 24.

19 Найти разность площадей криволинейных трапеций, определяемых графиками функций $f_1 = e^x$ и $f_2 = e^{-x}$ на отрезке $[0; 1]$.

Ответ: $e + \frac{1}{e}$.

20 При каком значении a будет наименьшей площадь криволинейной трапеции, определяемой графиком функции $f(x) = (x - a)^2 + a^2$ на отрезке $[0; 1]$?

Ответ: При $a = \frac{1}{4}$.

- 21** Найти площадь фигуры, образованной графиком функции $f(x) = x^2 - 2x + 2$ и двумя касательными к этому графику — в точке $x_1 = 0$ и в точке $x_2 = 2$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

- 22** Найти числа, получающиеся при использовании в интеграле

$\int_1^2 f(x) dx$ следующих функций:

а) $f(x) = \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; в) $f(x) = \frac{1}{x^3}$; г) $f(x) = \frac{1}{x^4}$.

Ответ: а) $\ln 2$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{8}$; г) $\frac{7}{24}$.

- 23** Найти функции, получающиеся при использовании в интеграле

$\int_1^x f(t) dt$ следующих функций:

а) $f(t) = \frac{1}{t}$; б) $f(t) = \frac{1}{t^2}$; в) $f(t) = \frac{1}{t^3}$; г) $f(t) = \frac{1}{t^4}$.

Ответ: а) $\ln x$; б) $-\frac{1}{x} + 1$; в) $-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}$.

- 24** Убедиться, что функция $f(x) = (x+1)e^x$ удовлетворяет уравнению $f'(x) - f(x) = e^x$.

- 25** Найти частное решение уравнения $f'(x) = f(x)$, которое при $x = 2$ принимает значение 2.

Ответ: $f(x) = 2e^{x-2}$.

- 26** Дано уравнение $f'(x) = f(x)$. Найти частное решение, касательная к графику которого в точке x_0 пересекает ось ординат в точке y_1 .

Ответ: $f(x) = \frac{y_1}{1 - x_0} e^{x - x_0}$.

Указание. Воспользоваться уравнением касательной (см. пояснение к упражнению 15).

- 27** Рассматриваются графики различных частных решений уравнения $f'(x) = f(x)$. Убедиться, что касательные ко всем этим графикам для одной и той же точки x_0 пересекаются с осью абсцисс в общей точке $x = x_0 - 1$.

- 28** Найти n -ю производную для функций:
а) $f(x) = \sin x$, б) $f(x) = \cos x$.

Ответ: а) $\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$; б) $\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

- 29** Найти значение четвертой производной функции $f(x) = \ln x$ в точке $x = 2$.

Ответ: $-\frac{3}{8}$.

- 30** Найти площадь криволинейной трапеции, определяемой графиком третьей производной функции $f(x) = x^5 - 2x^2 + x - 1$ на отрезке $[0; 1]$.

Ответ: 20.

М. Ю. ПАНТАЕВ

Математический гербарий АБИТУРИЕНТА



АЛГЕБРА во всем ее блеске и многообразии

В жизни каждого абитуриента, решившего связать свою жизнь с точными науками, неизбежно наступает день, когда ему приходится сдавать экзамен по математике. Можно ли помочь отроку пережить этот день,

и не просто пережить, а более-менее успешно перейти в следующий?
То есть сдать экзамен. Существует ли рецепт успеха?

По авторитетному мнению, экзамен — не что иное, как кодовый замок, и чтобы его открыть, нужно знать шифр. Но особенность данного замка в том, что шифров — много: не единственная последовательность решенных задач ведет к цели, а многие и многие и многие. Но... У всех таких последовательностей есть нечто общее.

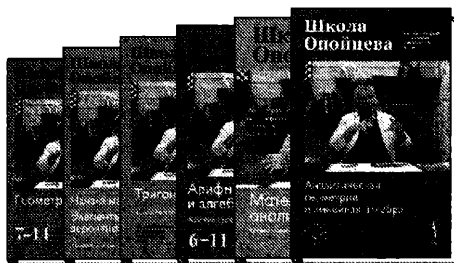
В настоящей книге показана в действии одна из подобных «последовательностей», которая, по мнению автора, вполне достаточна для **успешной подготовки по алгебре в любой вуз**. Пособие представляет собой сборник задач с немедленными решениями, предназначенный для повторения той части школьного курса алгебры, которая **востребована на выпускных и вступительных экзаменах**.

Эта книга — **путеводитель по задачам** разной степени трудности: тут есть и абсолютно стандартные задачи «базового» уровня, и более сложные «профильного» уровня, и задачи «с изюминкой», которые должен знать каждый абитуриент, не желающий относиться к тому, чем занимается, формально-прагматически.



В. И. ОПОЙЦЕВ

Школа Опойцева



Доктор физико-математических наук, профессор В. И. Опойцев выделяется умением сложное объяснять просто. Его «Лекции по математике» (16 томов под псевдонимом В. Босс) и популярная книга «Интуиция и математика» пользуются большой известностью среди любителей математики самых разных рангов — от специалистов до студентов смежных направлений подготовки.

Новаторский проект «Школа Опойцева» — это серия учебных курсов для студентов и школьников. Изложение основных разделов математики в книгах проекта отличается краткостью, простотой, ясностью и прозрачностью. Акцент делается на понимание существа дела, притом с заботой о новичках.

Книги легко читаются, однако охват материала в них даже несколько шире, чем предусматривает школьная программа. Цельность предмета достигается переплетением элементов различных математических дисциплин. Все объяснения даются «человеческим языком», так что становится ясно, «что для чего нужно».

Все книги сопровождаются авторскими видеолекциями.

В серии вышли тома:

- ※ **ГЕОМЕТРИЯ I** · 7-11
- ※ **НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА** · ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ · Старшие классы
- ※ **ТРИГОНОМЕТРИЯ** · Старшие классы
- ※ **АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА** · Краткий курс · 6-11
- ※ **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**
- ※ **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**