

Н.Л. ПИЛДЕНКО



Н.П. Прицаденко



Ну-ка
РЕШИ

Для
СРЕДНЕГО
ШКОЛЬНОГО
ВОЗРАСТА

СНЕВ
"Радянська школа"
1991

Рецензенты: *Н. Г. Городивская*, заведующая кафедрой математики Ивано-Франковского педагогического института, кандидат педагогических наук и *Э. Г. Готман*, доцент кафедры алгебры и геометрии Арзамасского педагогического института, кандидат педагогических наук

Редактор *Г. В. Криволапова*



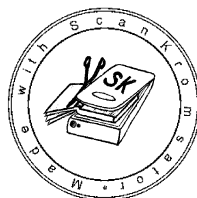
Н. П. Грицаенко

Г 85 Ну-ка, реши!: Для средн. шк. возраста.— К.: Рад. шк., 1991.— 159 с.
ISBN 5-330-00740-2.

Книга содержит занимательные математические задачи и упражнения творческого характера, связанные с программным материалом 5—9-х классов и направленные на формирование у учащихся навыков самостоятельной работы и приемов умственной деятельности, таких, как анализ, синтез, аналогия, обобщение и др. Многие задания иллюстрированы выразительными картинками, сюжеты которых тесно связаны с жизнью и интересами детей. Решение целого ряда заданий предусматривает использование калькулятора.

Для учащихся средней школы.

Г 4802020000—187 316—90
М210(04)—91
ISBN 5-330-00740-2



Scan AAW

ББК 22.1



Дорогие друзья! Кто возьмет эту книгу в руки, задаст себе вопрос: «Что нового я узнаю из этой книги? Опять сухие расчеты, головоломные рассуждения, трудные доказательства?»

У предлагаемой книги скромная задача: возбудить интерес к математике у тех, кто пока еще равнодушен к этой прекрасной науке.

Математика не любит верхоглядства, халатности, неряшливости в мышлении. С ней трудно войти в контакт человеку, который из-за умственной лени жертвует истиной. Радость открытия — одна из величайших радостей мыслящего человека. По преданию, когда Архимед, находясь в ванне, открыл закон выталкивания тела, погруженного в жидкость, он, забыв одеться, помчался к друзьям, чтобы поделиться своей радостью.

Попробуйте испытать радость открытия, если даже оно состоит лишь в отыскании пути решения

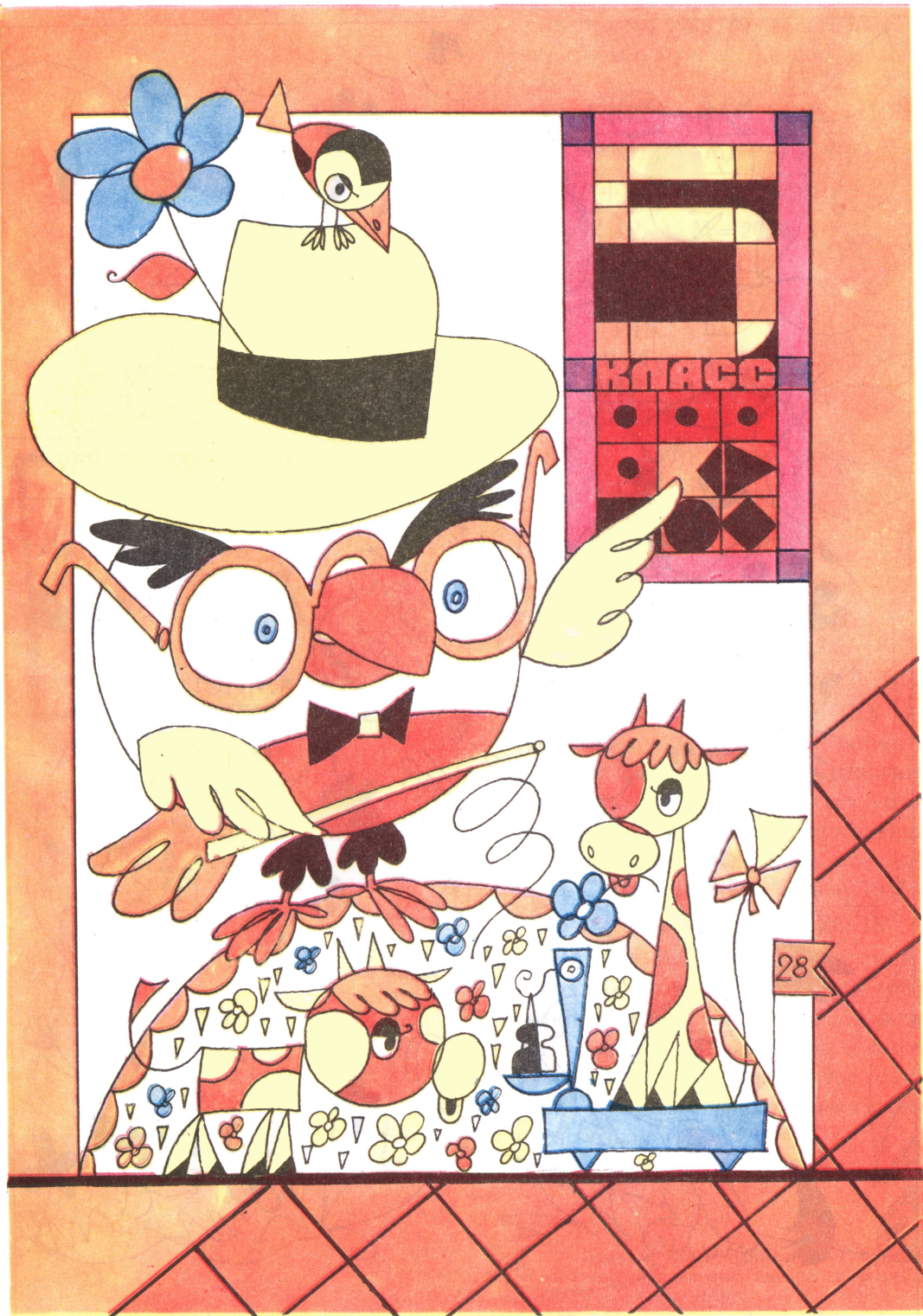
довольно сложной задачи. Радость открытия придаст уверенности в своих силах, и вас не покинет стремление искать новые решения, законы.

Чтобы придать предмету привлекательность, в книге фигурируют мультфильмовские герои Волк и Заяц, наделенные математическими способностями. Читателю предлагается помочь им в решении математических вопросов.

Многие задания иллюстрированы. Число на каждом рисунке совпадает с номером соответствующей задачи.

Попытайтесь решить задачи самостоятельно. Надеемся, что книга поможет вам усваивать школьную программу, и, кто знает, может математика станет для некоторых из вас занятием всей жизни.







МИР+НАМ+ИМ=
=1000

а

МИР+МИР+МИР+
(МИР+МИР+МИР+)
+МИР+6)-1РРР=
=ИРРР

б

МИР×4×И=
=2000

в

МИР
× МИР
Р И С
И И И
МИР
МИС И С

г

× ТАК
ТАК
РАК
А К С
ТАК
Т К А К

д

1. Вместо букв* поставьте цифры так, чтобы получилось верное равенство:

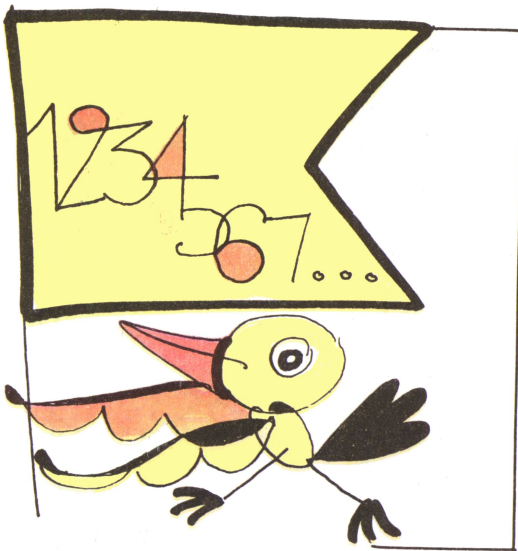
а) $\overline{\text{МИР}}^{**} + \overline{\text{НАМ}} + \overline{\text{ИМ}} = 1000$;

б) $(\overline{\text{МИРУ}} + \overline{\text{МИР}} + \overline{\text{МИР}} + \overline{\text{МИР}} + 6) - \overline{\text{ИРРР}} = \overline{\text{ИРРР}}$;

в) $\overline{\text{МИР}} \cdot 4 \cdot \overline{\text{М}} = 2000$;

г)
$$\begin{array}{r} \overline{\text{МИР}} \\ \times \overline{\text{МИР}} \\ \hline \text{РИС} \\ \text{ИИИ} \\ \overline{\text{МИР}} \\ \hline \text{МИСИС} \end{array}$$

д)
$$\begin{array}{r} \times \overline{\text{ТАК}} \\ \overline{\text{ТАК}} \\ \hline \text{РАК} \\ \text{АКО} \\ \overline{\text{ТАК}} \\ \hline \text{ТКРАК} \end{array}$$



2. Волк: «В примере $\overline{\text{ВОЛК}} \times \overline{\text{ЗАЯЦ}} = 1\,985\,000$ запись $\overline{\text{ЗАЯЦ}}$ означает 1985, а запись $\overline{\text{ВОЛК}}$ — 1000, если под буквами понимать цифры». Заяц: «Твое имя означает 1000, если не придерживаться условия, что разные буквы — это разные цифры. В таком случае и мое имя может означать 1000, а твое 1985». Сова: «Добавьте условие $\overline{\text{ВОЛК}} = \overline{\text{ЗАЯЦ}} = 985$, и тогда все станет ясно». Чье имя будет означать 1000, если выполнить условие, предложенное Совой? Прав ли Заяц в своем рассуждении? Добавьте свое условие, чтобы было ясно, чье имя какое число означает.

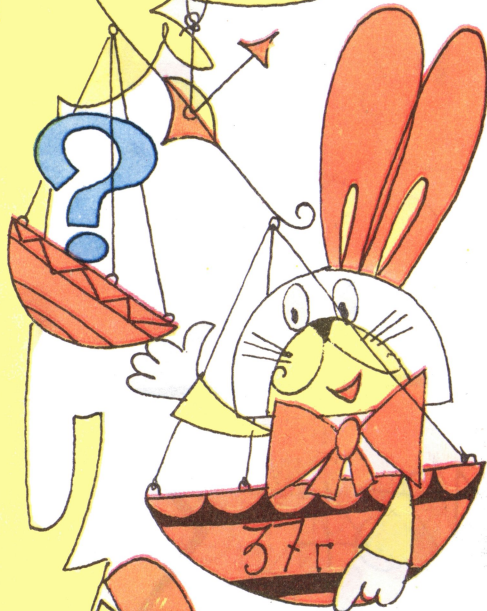
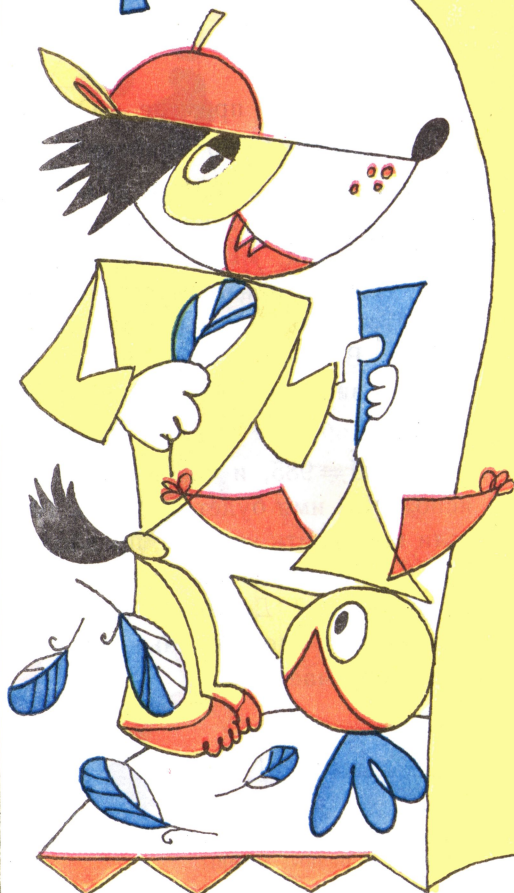
* Здесь и далее одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, а разными буквами — разные цифры.

** Запись \overline{abc} означает число, в котором a сотен, b десятков и c единиц.

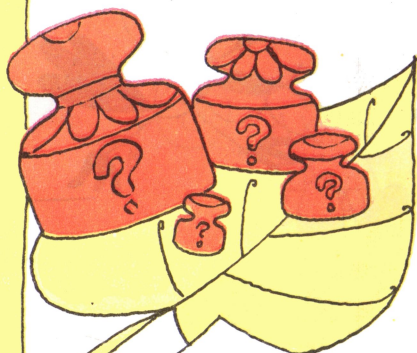
3000 ДЕРЕВЬЕВ

2000
ПЕРЬЕВ

11



16



масса
гирь
40г



3. Докажите, что никакие натуральные четырехзначные числа, записанные разными цифрами, не удовлетворяют условию примера $\text{ВОЛК} \cdot \text{ЗАЯЦ} = 1\,985\,000$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее трехзначные числа, удовлетворяющие условию $\text{НОС} - \text{СОН} = 198$, где буквами обозначены цифры.

5. Можно ли между числами от 1 до 9 поставить знаки «плюс» и «минус» так, чтобы получилось число: а) 35; б) 20?

6. Докажите, что $\overline{\text{АВАВ}} + \overline{\text{ВАВА}} = \overline{\text{АААА}} + \overline{\text{ВВВВ}}$, где $\text{А} \neq 0$, $\text{В} \neq 0$.

7. Придумайте такой пример на сложение и вычитание чисел, записанных при помощи только цифры 1, чтобы количество единиц во всех компонентах действий равнялось 24, а ответ был равен 1.

8. Во сколько раз увеличится трехзначное число, если к нему приписать (справа или слева) такое же число?

9. Выполните действия:

$$(\overline{\text{АВСАВС}} + \overline{\text{АВС}}) : \overline{\text{АВС}}.$$

10. Волк: «Число 42 делю на число b , получаю в частном b и в остат-

ке тоже b . На какое число я делю 42?» В чем ошибка Волка? На какое число он делил 42?

11. В роще 3000 деревьев. На каждом дереве сидит одна птица с числом перьев не более 2000. Докажите, что в роще есть, по крайней мере, два дерева с птицами, у которых число перьев одинаковое.

12. Три модницы: Галя-брюнетка, Катя-шатенка и Нина-блондинка по очереди смотрели в волшебное зеркало, которое черный цвет волос отражало как каштановый, блонденок делало рыжими, а шатенок — синеволосыми. Катя сказала: «Такой цвет волос ей не к лицу. Ей лучше быть рыжей».

Кто из модниц в данный момент смотрел в зеркало?

13. Среди чисел первой сотни найдите все пары последовательных чисел, первое из которых кратно 3, а второе — 4. Установите правило, по которому можно, зная одну пару, найти сразу вторую. Может ли хоть одно из чисел такой пары быть кратно и 3 и 4? Почему?

14. Найдите два последовательных натуральных числа, сумма которых равна 651.

15. Сколько существует способов, чтобы заплатить 93 к. если есть достаточное количество монет достоинством по 3 к. и 5 к.?



16. Масса четырех гирек составляет 40 г. Масса первой гирьки в 3 раза меньше массы второй, масса второй — в 3 раза меньше массы третьей, а масса третьей — в 3 раза меньше массы четвертой. Какова масса каждой гирьки? Как взвесить при помощи таких гирек 37 г? (см. с. 8.)

17. Заяц сказал Волку: «Задумай число. Прибавь к нему 100. Отними от суммы 37. Отними от того, что осталось, задуманное число. Раздели разность на 9. Хочешь знать ответ?» Не успел Волк выполнить деление, как Заяц назвал частное. Раскройте секрет загадки.

18. а) Могут ли все звери и птицы в лесу иметь вместе 5400 ног и 2800 голов?

б) Сколько в лесу зверей и сколько птиц, если у них вместе 6000 ног и 2500 голов?

19. Выполните действия:

$$(\overline{ABCABC} : 13 - (77 \cdot \overline{ABC} - 70 \times \overline{ABC})) : 7 \cdot \overline{ABC}.$$

20. Как, имея три сосуда емкостью 8 л, 5 л и 3 л, налить в котел 7 л воды?

21. Сумма однозначного, двузначного и трехзначного чисел, записанных одной и той же цифрой,

представляет собой трехзначное число, последняя цифра которого такая же, как и в записи данных чисел. Найдите числа и их сумму.

22. В пятизначном числе средняя цифра нуль, а первые две обозначают такое же число, как и последние две. Во сколько раз уменьшится данное число, если зачеркнуть последние две цифры?

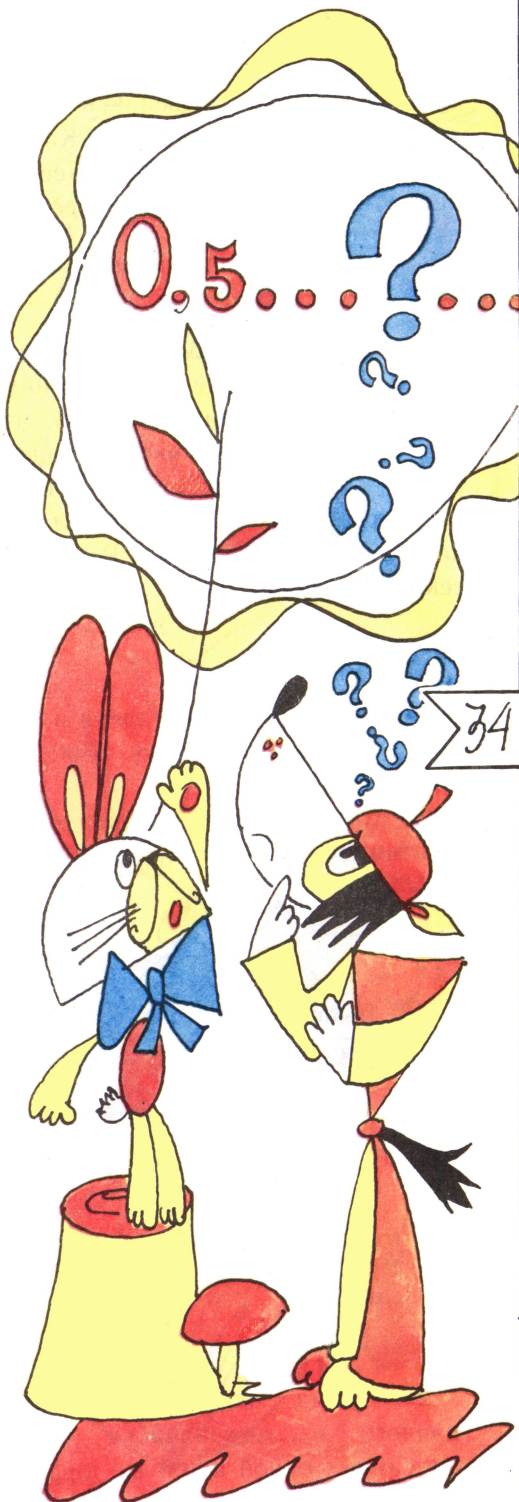
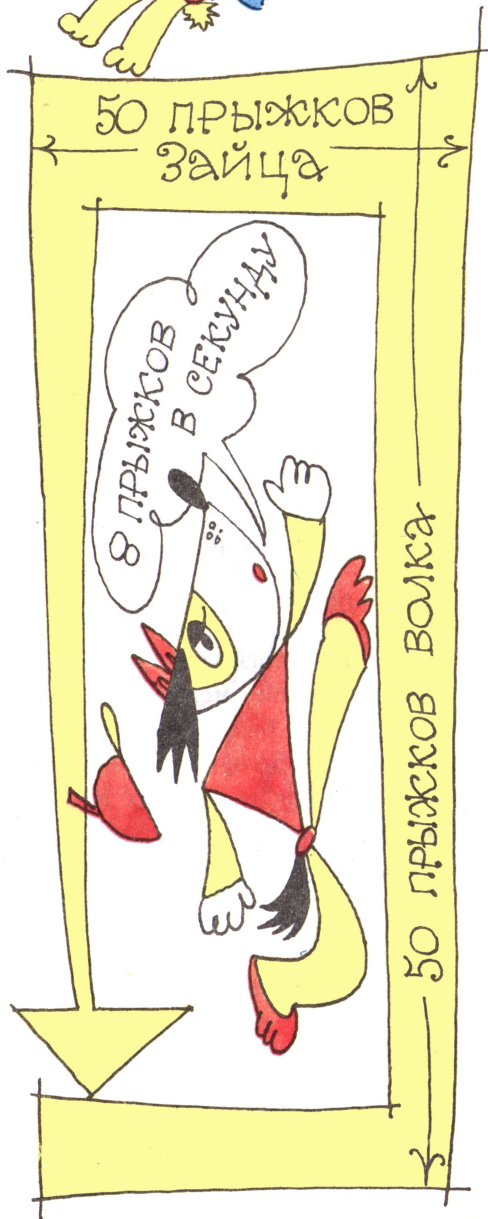
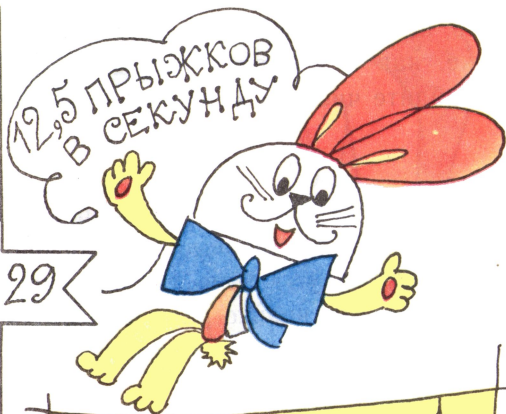
23. Два яблока, три груши и один персик стоят вместе 85 к. Одно яблоко, три груши и один персик стоят 75 к. Сколько стоит одно яблоко, одна груша и персик, если персик стоит столько, сколько стоят два яблока?

24. К числу прибавили 0,1 его, а затем вычли 0,1 суммы и получили 990. Найдите это число.

25. Волк погнался за Зайцем, когда расстояние между ними было 100 м. Заяц бежал со скоростью 0,01 км/с, Волк — со скоростью 0,006 км/с. После каждых 10 с бега Заяц отдыхал 10 с. Через сколько секунд Волк догонит Зайца?

26. Не вычисляя, установите, правильной или неправильной дробью является значение выражения:

$$а) \frac{1999 \cdot 15 - 1000}{2000 \cdot 14 + 1000};$$



$$\text{б) } \frac{1985 \cdot 20 - 1000}{1000 + 1986 \cdot 19}.$$

Правильность своего вывода проверьте при помощи калькулятора.

27. Найдите все двузначные числа, которые уменьшаются в 14 раз при зачеркивании последней цифры.

28. Среднесуточный привес у 100 бычков составлял 80 кг. $\frac{1}{5}$ часть бычков имела среднесуточный привес 850 г на каждого, $\frac{2}{5}$ — 800 г. Найдите среднесуточный привес каждого из остальных бычков.

29. Волк и Заяц разметили спортивную площадку прямоугольной формы: большая сторона — расстояние в 50 прыжков Волка, меньшая — 50 прыжков Зайца. Прыжок Волка в 1,5 раза длиннее прыжка Зайца. Заяц делает 12,5 прыжка в секунду, а Волк — 8 прыжков. За какое время каждый из них преодолеет расстояние по периметру?

30. Играя в настольную игру, Петя набрал за 40 ходов 90 очков, а Степа 77 очков за 30 ходов. За каждый правильный ход засчитывалось 7 очков, а за каждый ошибочный снималось 12 очков. У кого было больше правильных ходов?

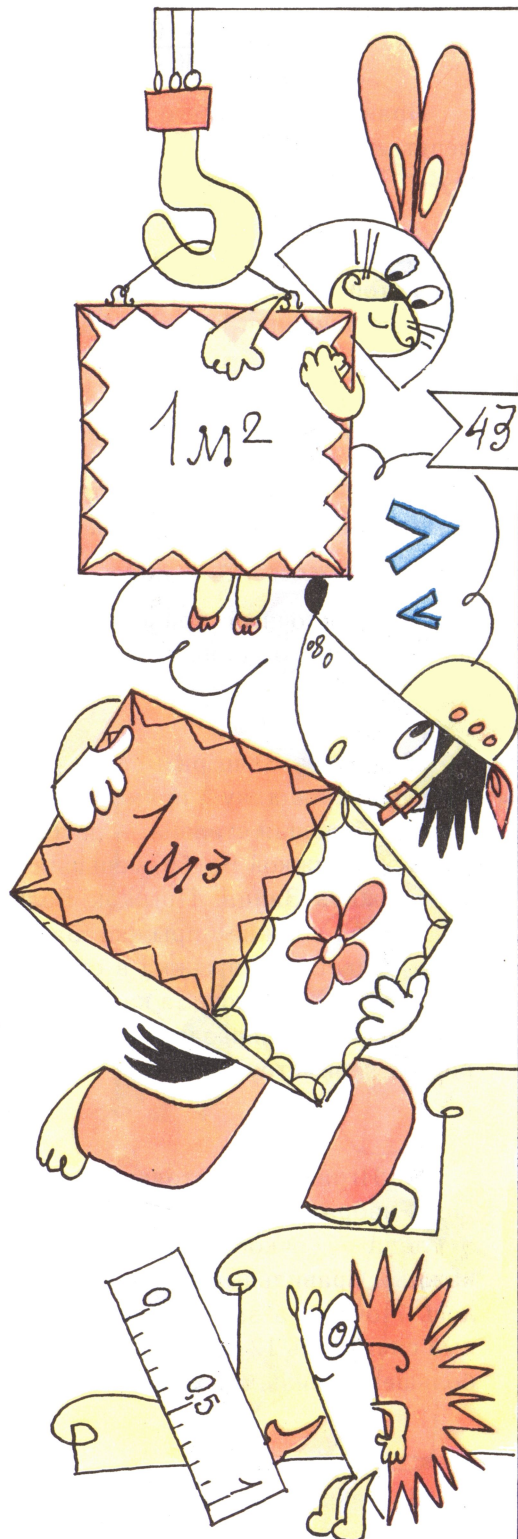
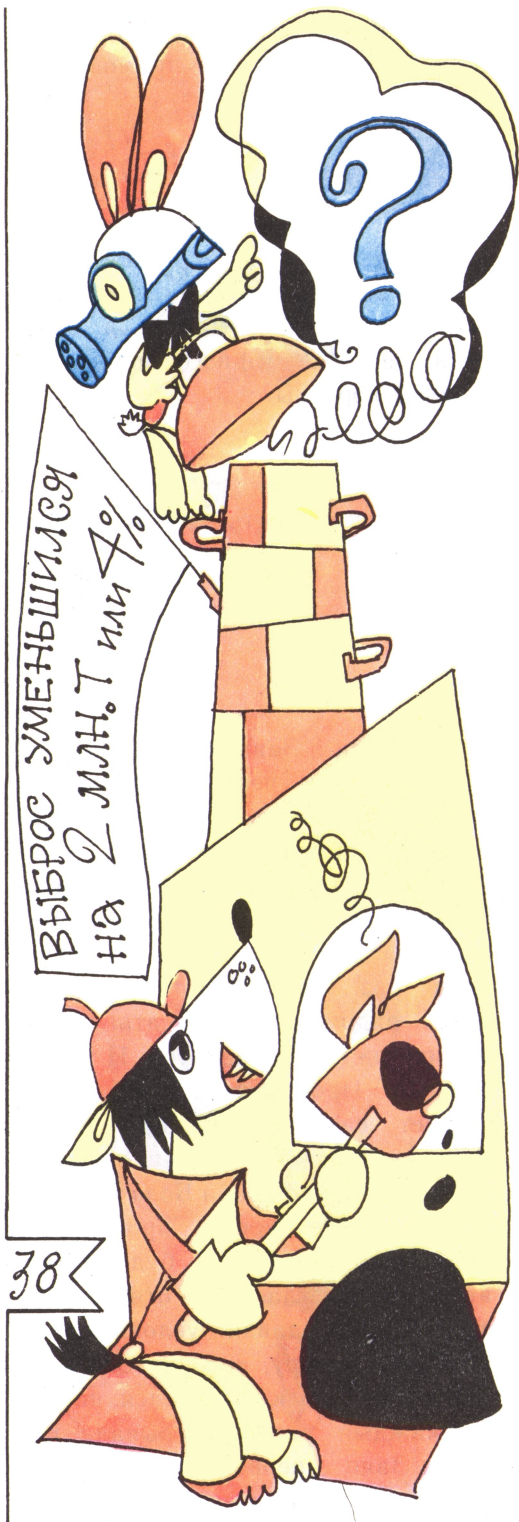
31. Ребро куба равно 2 дм. Этот куб разрезали на кубики с ребром

в 1 см. Какой длины получится ряд, если их выложить на прямой один за другим?

32. В первой корзине каждое яблоко имеет массу 200 г, во второй — 150 г, а в третьей — 100 г. Можно ли составить наборы массой в 1 кг, взяв не менее одного яблока из каждой корзины?

33. Как от ленты длиной $\frac{2}{3}$ м отрезать $\frac{1}{2}$ м, не пользуясь никакими измерительными приспособлениями?

34. Волк и Заяц придумали игру. Один из них первым записывает десятичную дробь, у которой нуль целых и один десятичный знак. Другой должен образовать дробь, больше записанной, дописывая справа цифру, причем можно повторить один раз цифру, которая стоит слева рядом или дописать такую, которой нет после запятой. И так по очереди. Проигрывает тот, кто не сможет назвать большего числа. Заяц сказал: «Ты старше, ты и начинай». С какой дроби Волк ни начинал, он все время проигрывал. «Ну, Заяц, погоди! Я буду играть вторым». «Согласен! — ответил Заяц. — Только давай условимся не повторять цифру, которая стоит рядом слева». Волк согласился, но снова каждый раз проигрывал. Как играл Заяц в первом варианте? Почему Волк не мог выиграть и во втором варианте?



35. Разделите метр на такие две части, чтобы разность между ними составляла 7 дм 5 см.

36. От шнура длиной 10 м сначала отрезали $\frac{1}{5}$ его, затем $\frac{1}{25}$, а потом отрезали $\frac{1}{11}$ того, что осталось. Сколько осталось шнура после трех его укорачиваний?

37. За текущий год платных услуг населению было оказано на 62 млн. р., что составило 115 % по сравнению с предыдущим годом. На какую сумму увеличились платные услуги населению за год?

38. После усовершенствования специальных фильтров выброс вредных веществ в атмосферу уменьшился на 2 млн. т, или на 4 %. Сколько тонн вредных веществ все еще попадает в атмосферу?

39. Вычислите:

$$\underbrace{\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{15}}_{10 \text{ раз}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3}}_{5 \text{ раз}} - \underbrace{\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60}}_{100 \text{ раз}}$$

40. К числу 100 и к числу 10 дописали справа цифру 1. Какое из чисел увеличилось на большее число процентов?

41. Волк задумал трехзначное число, а Заяц — двузначное. Каждый дописал справа одну и ту же цифру и увеличил свое число на

одно и то же число процентов. Какую цифру дописали Волк и Заяц и на сколько процентов увеличилось каждое число?

42. Волк и Заяц заспорили. «Я умнее тебя!» — говорит Волк. «На сколько?» — спрашивает Заяц. Волк не смог ответить. А вы смогли бы? Почему?

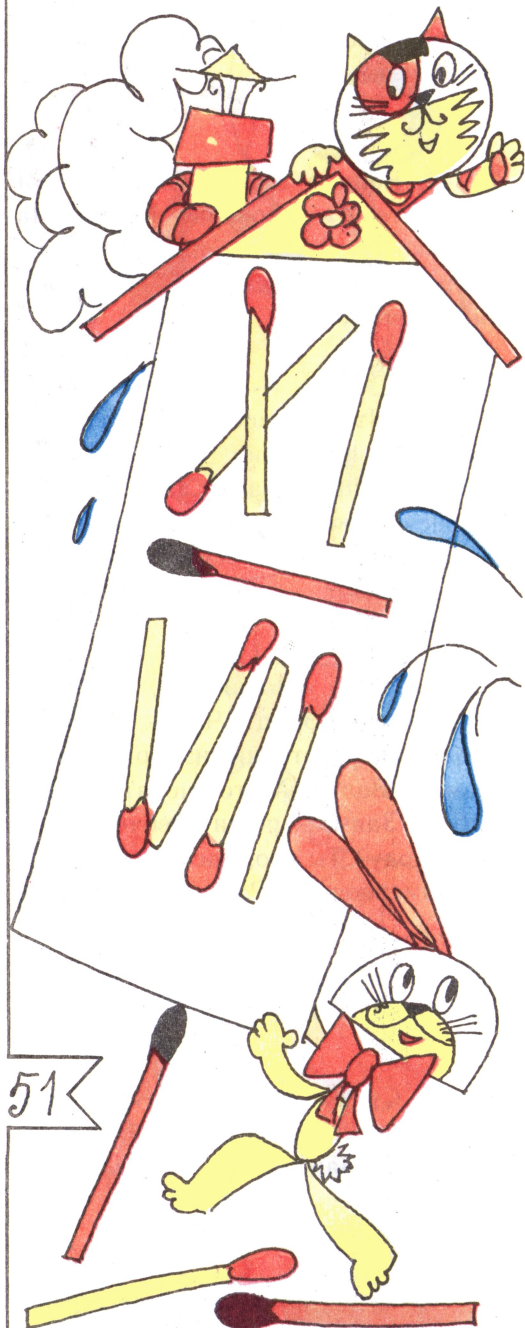
43. «Что больше: один метр кубический или один метр квадратный?» — спрашивает Заяц Волка. «Конечно же, метр кубический!» — не задумываясь, отвечает тот. А вы как думаете?

44. Волк: «Подвинься, Заяц, на 10 граммов!» Заяц: «Чудак ты, Волк! Ну кто же расстояние измеряет граммами?» Волк: «А кто вчера говорил, что до Заячьей рощи требуется два часа ходу? Ты что, расстояние часами измеряешь?» Рассудите их спор.

45. Какую часть кубического километра составляет один литр?

46. Сумма двух чисел 495. Одно из них заканчивается нулем. Если этот нуль зачеркнуть, то получится второе число. Найдите эти числа.

47. Существует ли прямоугольник, у которого длина каждой стороны — натуральное число, а площадь и периметр выражаются числом 10 соответствующих единиц измерения?



a_1	$\frac{a_1+a_2}{2}$	a_2
$\frac{a_1+a_3}{2}$?	$\frac{a_2+a_4}{2}$
a_3	$\frac{a_3+a_4}{2}$	a_4

58



48. Докажите, что средние арифметические трех последовательных нечетных, трех последовательных натуральных и трех последовательных четных чисел есть натуральные числа.

49. Петя сообщил Коле свой адрес так: «Название моей улицы происходит от названия того осеннего месяца, когда ты родился. Номер моего почтового отделения — среднее арифметическое первого и последнего дней месяца твоего рождения, номер моего дома — среднее арифметическое номера моего почтового отделения и порядкового номера месяца твоего рождения, а номер квартиры — среднее арифметическое номера моего дома и номера месяца твоего рождения, считая его номер с конца года». Какой адрес Пети?

50. В СССР учится около 50 млн. человек. Если допустить, что каждый учащийся непродуктивно истратит 1 лист бумаги, то какой высоты получится стопка из этих листов (толщина 10 листов составляет 2 мм)?

51. Дробь $\frac{XI}{VII}$ сложена из спичек. Переложите сначала одну, затем две спички так, чтобы значение дроби в обоих случаях было натуральным числом.

52. Найдите цифру x в числе $2x3$, если разность между этим числом и неким двузначным числом равна 113.

53. Найдите такие пары цифр a и b , чтобы число $10ab3$ было больше 10 900 и делилось: а) на 3; б) на 9.

54. Дедушка в лифте, а внук по лестнице поднимаются на 4-й этаж за 15 с. За сколько секунд каждый поднимается на один этаж?

55. Восстановите пример на разложение числа на простые множители:

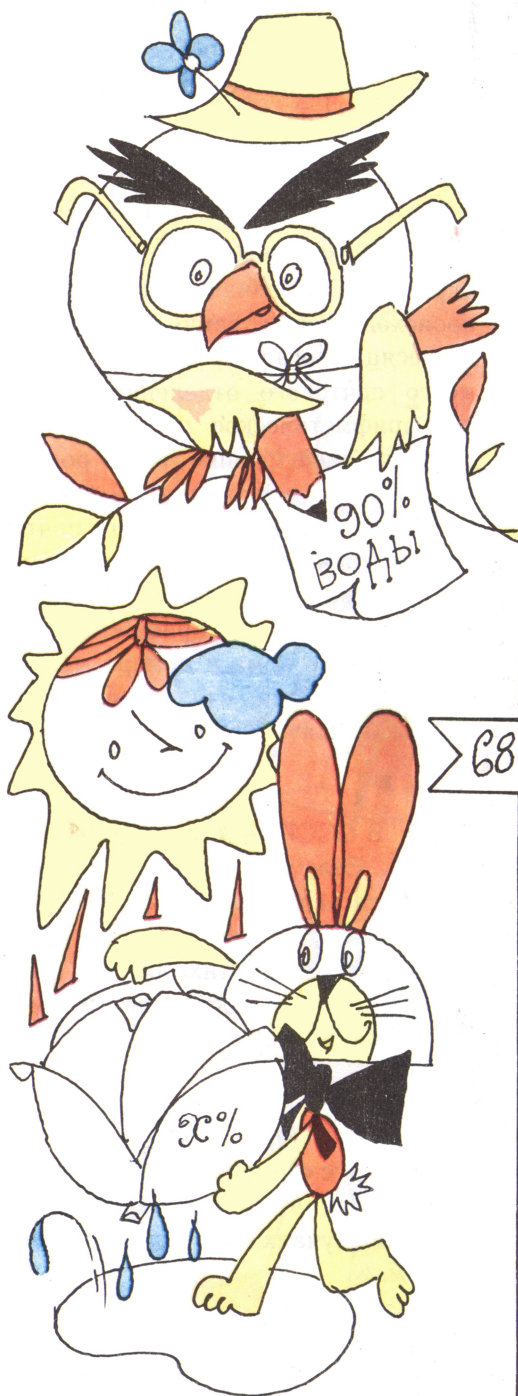
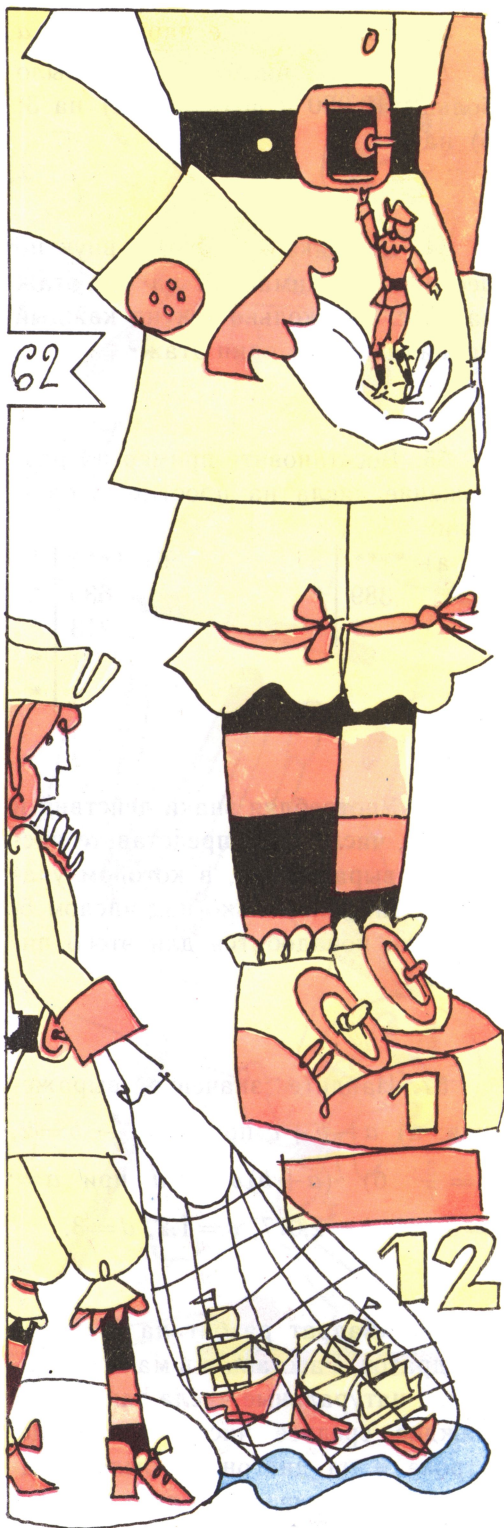
$$\begin{array}{r|l} \text{а) } **** & 5 \\ 389 & * \\ * & * \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{б) } **** & * \\ 639 & * \\ 213 & * \\ 71 & * \\ * & * \end{array}$$

56. Употребляя знаки действий и скобки, число 1985 представьте числовым выражением, в котором указаны действия только над числом 5. Сколько понадобится для этого пятерок?

57. Найдите значение выражения: а) $a - b + c$ при $a = 2\frac{4}{7}$, $b = 2$, $c = \frac{3}{7}$; б) $(a + b)c - a : d$ при $a = 3,423$, $b = 2,077$, $c = 1,2$, $d = 3$.

58. Квадрат разбит на 9 малых квадратов. Расставьте в малых квадратах натуральные числа так, чтобы каждое среднее число в столбце, строке и на диагонали было средним арифметическим двух других чисел.



59. Из чисел от 1 до 20 составьте четыре тройки чисел, чтобы их среднее арифметическое было бы равным 13.

60. На сколько среднее арифметическое всех четных чисел от 1 до 100 больше или меньше среднего арифметического всех нечетных чисел от 1 до 100?

61. Пятиклассникам поручили обсадить кустарником дорожку с обеих сторон, длина которой 210 м. Сколько надо иметь саженцев, если их сажают на расстоянии 70 см друг от друга и кустики должны быть в начале и конце дорожки?

62. Гулливер в Стране Лилипутов был в 12 раз выше лилипута, а в Стране Великанов в 12 раз ниже великана. Можно ли утверждать, что рост Гулливера есть среднее арифметическое между ростом лилипута и ростом великана?

63. Разность между первым и третьим числами такая же, как и разность между третьим и вторым числами. Докажите, что третье число есть среднее арифметическое между первым и вторым.

64. Для жителей города установлена ежесуточная норма расхода воды. Фактически за 4 дня расходы воды были такими: 1-й день — на 10 % меньше нормы, 2-й день — на 15 % больше нормы, 3-й день —

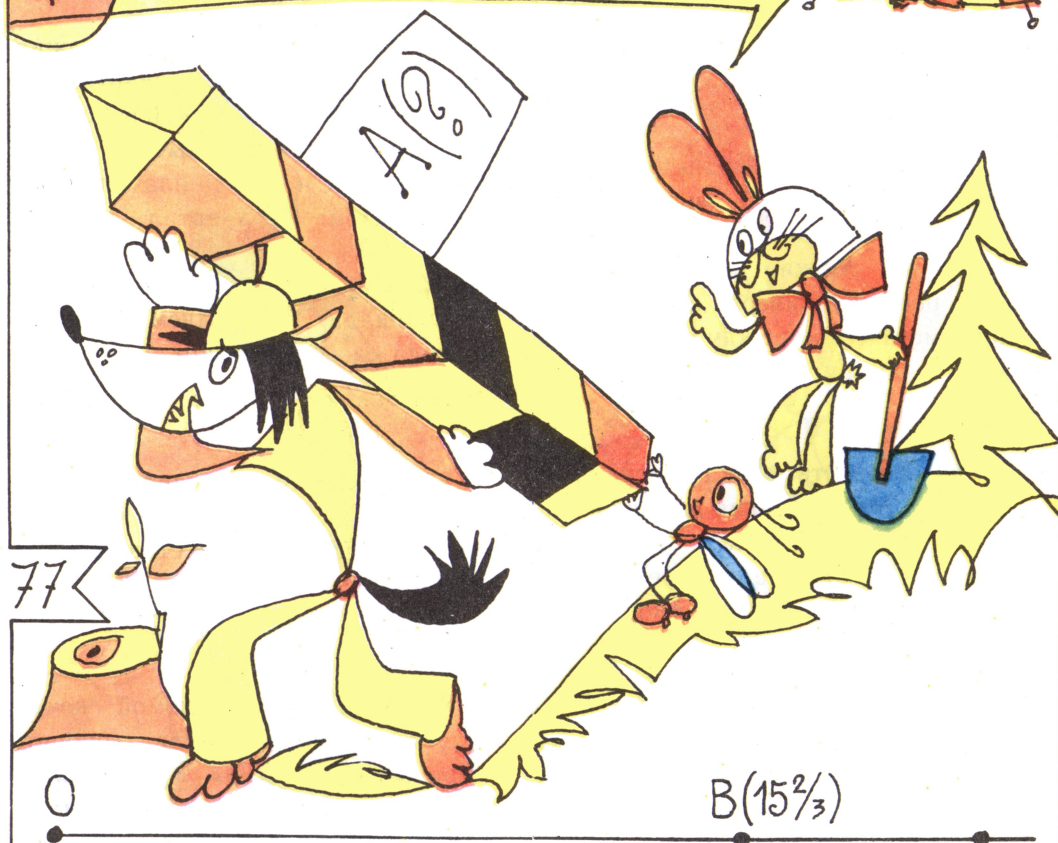
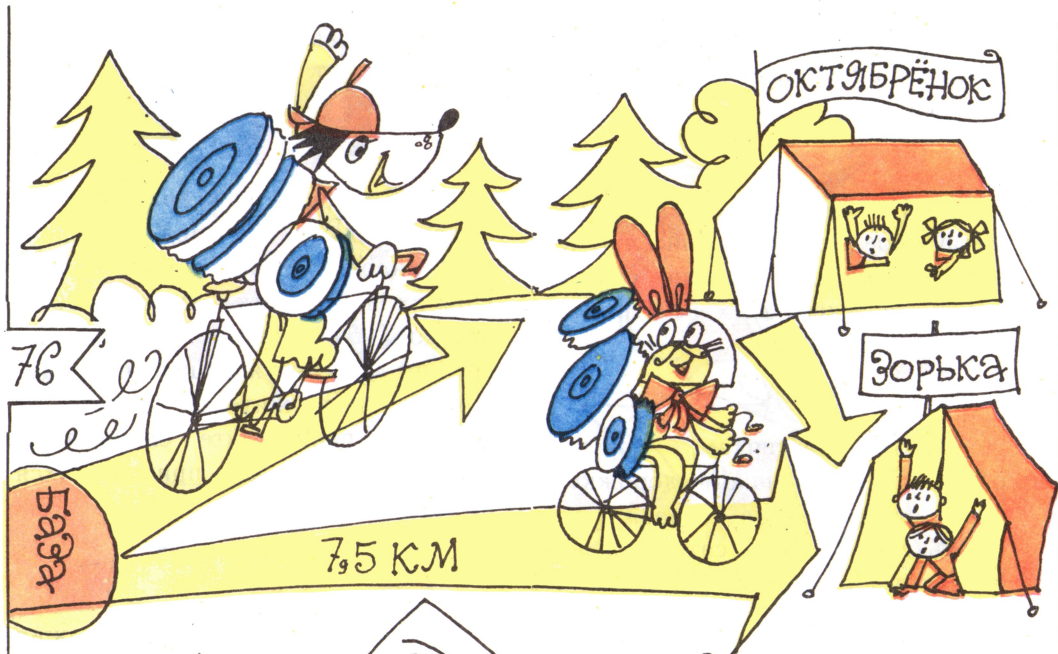
на 5 % сверх нормы и на 4-й день — на 20 % меньше нормы. Не нарушился ли бюджет расхода воды?

65. Ежегодно из недр Земли добывается около 100 млрд. т различных видов полезных ископаемых. При их переработке остается 90 % отходов, большинство из которых вредно для окружающей природы. Приняв число жителей планеты за 5 млрд. рассчитайте ежедневную долю таких отходов, приходящихся на одного человека.

66. Бригада строителей должна была сдавать каждый квартал по 2500 м² жилплощади. Перейдя на хозрасчет, бригада повысила темпы сдачи жилья и выполняла план таким образом: 1-й квартал — 105 %, 2-й — 115 %, 3-й — 120 %, 4-й — 140 %. Сколько квадратных метров жилплощади в среднем сдавала бригада ежеквартально?

67. Число b составляет 1 % от числа a . Как надо изменить число a , чтобы b составляло от него 2 %?

68. Заяц принес домой кочан капусты. Соседка Сова говорит: «Принес 90 % воды». Капуста подсохла. Сова определила 40 % влажности ее и уменьшение массы на 0,6 кг. Какова была масса кочана капусты сначала?



69. Имеет ли решение задача, если корень уравнения $2x - 3 = 1$, составленного по ее условию, должен удовлетворять и требованию:

$$x = \frac{3n-1}{2}, \text{ где } n \text{ — натуральное число?}$$

70. Число разделили на 5 и в частном получили 6 и остаток на 4 меньше частного. Какое число делили на 5?

71. Восстановите цифру b в числе $1bb2$, которое делится на 9. Не производя деления, установите, делится ли полученное число на 12.

72. В сосуде, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда с размерами основания $1,02 \times 5$ м и высотой в 3 раза меньшей, чем большая сторона основания, есть отверстие в боковой стенке. На какой высоте от основания находится это отверстие, если сосуд можно наполнить жидкостью на 60 % его объема? Можно ли в сосуд с размерами дна $1,02 \times 5$ дм влить 20 литров жидкости, если отверстие находится на высоте 4 дм от дна?

73. Сколько слагаемых с числителем 1 пропущено в примере

$$\frac{2}{19} + \frac{1}{19} + \dots + \frac{3}{19} = 2?$$

74. Расстояние между городами в 100 км автомобиль преодолевает за 2 часа, а мотоцикл — за 2,5 часа. На сколько процентов средняя ско-

рость автомобиля выше средней скорости мотоцикла?

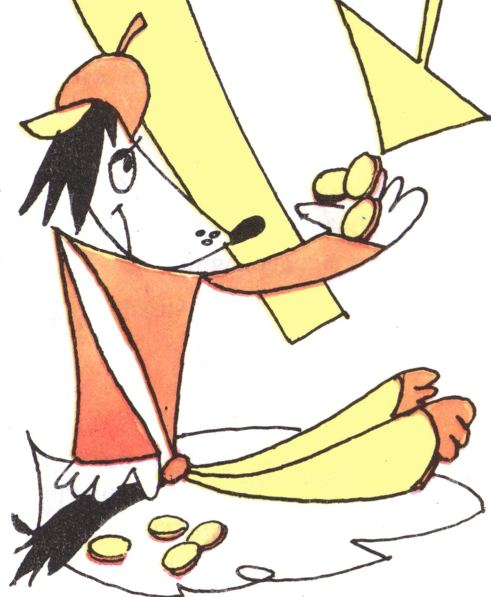
75. На предприятии выпускалось 98 % продукции на уровне мировых стандартов. Благодаря внедрению новейшей электроники предприятие стало выпускать уже 99,5 % такой продукции. На сколько процентов уменьшился выпуск продукции качества ниже мировых стандартов?

76. Волк и Заяц выехали на велосипедах одновременно с одной и той же базы, чтобы доставить пленки с мультфильмами детям. Заяц поехал в лагерь «Зорька», а Волк — в лагерь «Октябренок», расположенный в стороне от прямой дороги на «Зорьку». Расстояние 7,5 км от базы до «Зорьки» Заяц проехал за $\frac{1}{2}$ часа. Какое расстояние проехал Волк, если его скорость в два раза больше скорости Зайца и он прибыл в «Зорьку» на 10 мин позже Зайца?

77. Найдите координату точки $A(x)$, если расстояние от нее до точки $B(15\frac{2}{3})$ на числовом луче равно 7.

78. Железный гараж размерами $2 \times 3 \times 2$ м покрасили изнутри и снаружи. Расход краски на крышу в 1,5 раза больше, чем на пол. Каков расход краски на 1 м², если всего израсходовано 10 кг краски?

Волк пробежал 10 кругов



79. В прямоугольнике размерами $5 \times 1,2$ м большую сторону уменьшили на 50 %, а меньшую увеличили на 150 %. Как изменилась площадь прямоугольника?

80. Образуют ли два угла развернутый угол, если один из них составляет 180 %, а второй $\frac{1}{5}$ прямого угла?

81. Углы в 30° и 50° имеют общую сторону. Какой угол образует биссектриса большего угла с общей стороной этих углов?

82. На прямой от точки O сначала отложили отрезок OA , равный 15 см, а затем отрезок AB , равный 12 см. Какова длина отрезка OB ?

83. Заяц предложил Волку: «Пробежишь круг стадиона и тогда деньги, которые у тебя есть, я устрою. Но после каждого круга ты будешь отсчитывать мне удвоенную сумму от той, которая у тебя есть сейчас». — «Получу втрое, а отдам вдвое», — подумал Волк и охотно согласился. Стремясь побольше получить денег, он обежал стадион 10 раз и, обесиленный, упал. «Давай рассчитывать», — прохрипел Волк. Сколько денег получит Волк от Зайца?

84. В урне находятся белые, черные и синие шары. Чтобы узнать, сколько шаров каждого цвета, их достают по одному из урны и складывают в другую. Перечислите

по порядку все действия по подсчету шаров.

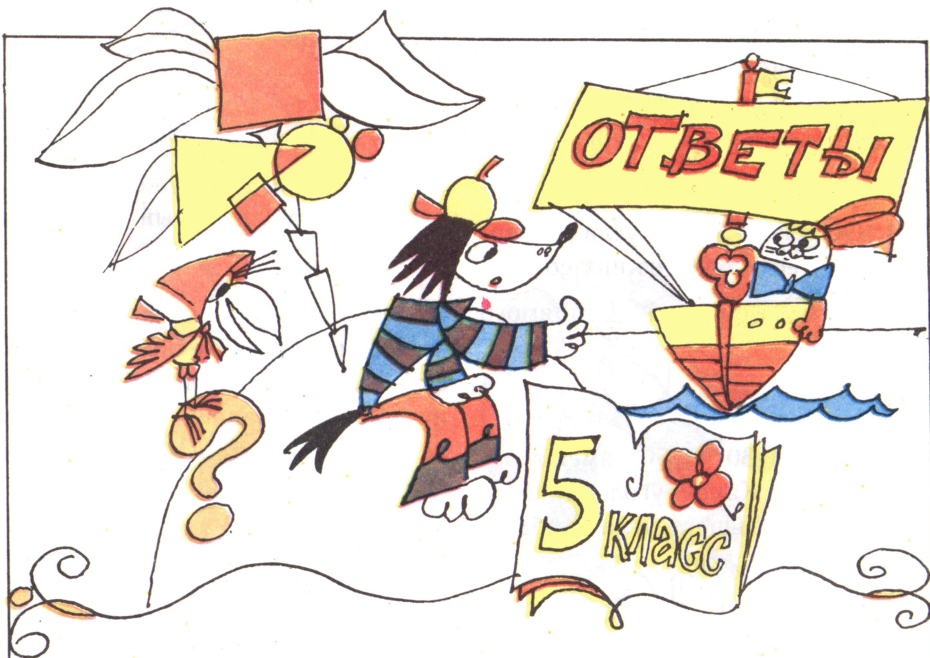
85. До конца суток осталось $\frac{7}{5}$ того времени, что уже прошло от начала суток. Какой сейчас час?

86. За покупку нужно заплатить на восемь трехкопеечных монет больше, чем пятикопеечных. Сколько стоит покупка? Задачу решите составлением уравнения и арифметическим способом.

87. Волк погнался за Зайцем, который находился на расстоянии 30 м от него. Прыжок Волка равен 2 м, а Зайца — 1 м. За время, что Заяц делает 3 прыжка, Волк делает 2. На каком наибольшем расстоянии от Зайца должно находиться укрытие, чтобы он успел до него добежать?

88. Для приготовления сметанного соуса берут 100 г сметаны, 5 г масла и 3 г муки. Каков процент муки? Сколько муки пойдет на приготовление 500 г сметанного соуса?

89. Некоторые виды лягушек, занесенные в Красную книгу, пытаются разводить в неволе. Для нормального развития одному головастику требуется 2 л воды. Какое максимальное число икринок лягушки можно выпустить в искусственный водоем емкостью 1000 м^3 , чтобы обеспечить нормальное развитие головастиков?



1. а) Одно из решений: $246 + 712 + 42 = 1000$; б) $(2304 + 230 + 230 + 230 + 6) - 1000 = 2000$; в) $250 \cdot 4 \cdot 2 = 2000$; г) $102 \cdot 102 = 10\,404$; д) $125 \cdot 125 = 15\,625$. 2. ВОЛК — 1985, ЗАЯЦ — 1000. 3. Число 1 985 000 может быть представлено в виде произведения только таких четырехзначных чисел: $1985 \cdot 1000$ и $1588 \cdot 1250$, которые не удовлетворяют условию задачи. 4. $301 - 103 = 198$. 5. а) Можно; б) нельзя. Рассмотрим сумму $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Чтобы получить из этой суммы 20, надо некоторые знаки $+$ заменить на $-$. При замене одного плюса на минус сумма уменьшается на удвоенное число, перед которым поменяли знак, т. е. на четное число. Разность между нечетным числом 45 и четным даст нечетное число, а следовательно, получить 20 (четное число) невозможно. 6. $1000A + 100B + 10A + B + 1000B + 100A + 10B + A = 1111A + 1111B = AAAA + BBBB$. 7. $1 = 111 - (11 + 11 + \dots + 11)$. 8. а) 1001 раз. 9. $1001 + 1 = 1002$. 10. $b = 6$. 11. Пронуме-

руем все ^{10 раз} деревья рощи. Предположим невероятное: на первом дереве сидит птица с одним пером, на втором с двумя, на третьем — с тремя и т. д. На 2000-м дереве сидит птица с числом перьев 2000. На 2001-м дереве число перьев у птицы уже не может быть 2001 по условию. Значит должно равняться одному из чисел до 2000, что и доказывает утверждение задачи. 12. Галя. 13. Пары таких чисел можно получить, вычисляя выражения $3 + 12 \cdot n$ и $4 + 12 \cdot n$, где n принимает натуральные значения от 1 до 8 и 0. 14. 325 и 326.

15. 7. 16. 1 г, 3 г, 9 г и 27 г. 17. Числовая формула $(x + 100 - 37 - x) : 9 = 63 : 9 = 7$. Результат не зависит от задуманного числа. 18. а) Нет; б) 500 и 2000. 19. 10. 20. 1-й способ. С помощью трехлитрового сосуда набираем 6 л в восьмилитровый. Отливаем 5 л в пятилитровый. К оставшемуся одному литру добавляем 6 л в восьмилитровый. 2-й способ. Наливаем 5 л в восьмилитровый сосуд. Из пятилитрового сосуда отливаем 3 л в трехлитровый. Оставшиеся 2 л доливаем в восьмилитровый сосуд. 21. 5, 55, 555, 615. 22. В 100,1 раза. 23. 10 к., 15 к., 20 к. 24. 1000. 25. Заяц за 10 с пробегает 100 м, а Волк за 20 с — 120 м. Каждые 20 с расстояние между ними сокращается на 20 м. Для преодоления расстояния в 100 м Волку потребуется 100 с. Волк

догонит Зайца через 100 с. 26. а) $\frac{1999 \cdot 15 - 1000}{2000 \cdot 14 + 1000} = \frac{2000 \cdot 15 - 15 - 1000}{2000 \cdot 15 - 2000 + 1000} = \frac{2000 \cdot 15 - 1015}{2000 \cdot 15 - 1000} < 1$. 27. 14 и 28. 28. 775 г. 29. Чтобы обежать площадку

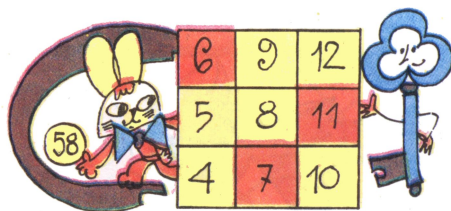
Волку потребуется сделать $100 + 100 \cdot \frac{2}{3}$ прыжков, а Зайцу $100 + 100 \cdot \frac{3}{2}$ прыжков. На это потребуется Волку $100 \left(1 + \frac{2}{3}\right) : 8 = 20 \frac{5}{6}$ (с), а Зайцу $100 \left(1 + \frac{3}{2}\right) : 12,5 = 20$ (с). 30. У Пети на 7 удачных ходов больше. 31. 80 м. 32. Можно. Одно из решений 1, 2 и 5. 33. Сложить ленту вдвое, затем еще раз вдвое и отрезать получившуюся четвертую часть. Останется $\frac{2}{3} - \frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ (м). 34. В первом варианте Заяц повторял цифру, написанную Волком.

Волку этого делать уже нельзя. В таком случае всего цифр после запятой могло быть 18. Последнюю цифру записывал Заяц. Его ходы имели четные номера. Во втором варианте, без повторения цифр, Заяц записывал каждый раз новую цифру. Последнюю, девятую цифру записывал также он (его ходы имели нечетные номера). 35. 8,75 дм и 1,25 дм. 36. $6 \frac{10}{11}$ м. 37. ≈ 8 млн. р. 38. ≈ 48 млн. т. 39. $\frac{2}{3}$. 40. 1001 % и 1010 %. 41. Каждый дописал ноль.

900 %. 45. 1 л = 0,000000000001 км³. 46. 450 и 45. 47. Нет. При периметре, содержащем 10 единиц измерения, стороны должны иметь длину 1 и 4 или 2 и 3, произведение которых не дает 10. 48. Сумма трех последовательных нечетных чисел дает: $2n - 1 + 2n + 1 + 2n + 3 = 6n + 3$, а четных — $6n + 6$. Первое и второе выражения делятся на 3 при любом натуральном n .

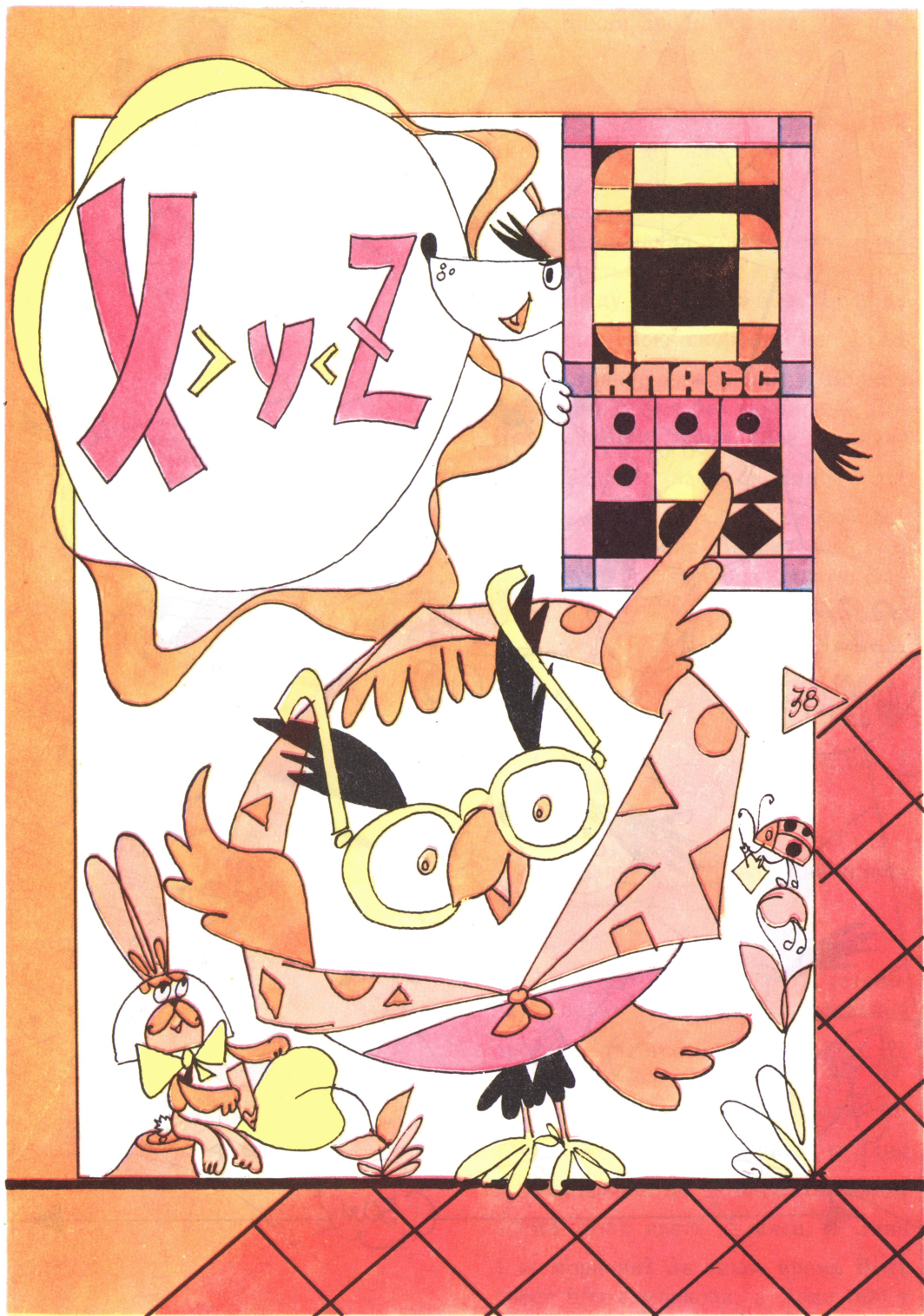
49. Почтовое отделение 16, ул. Октябрьская, дом 13, кв. 8. 50. $(50\,000\,000 : 10) \times 2 \text{ мм} = 10\,000 \text{ (м)} = 10 \text{ (км)}$. 51. $\frac{XII}{VI}$ и $\frac{XII}{IV}$. 52. Разность $2x3 - 113$ равна

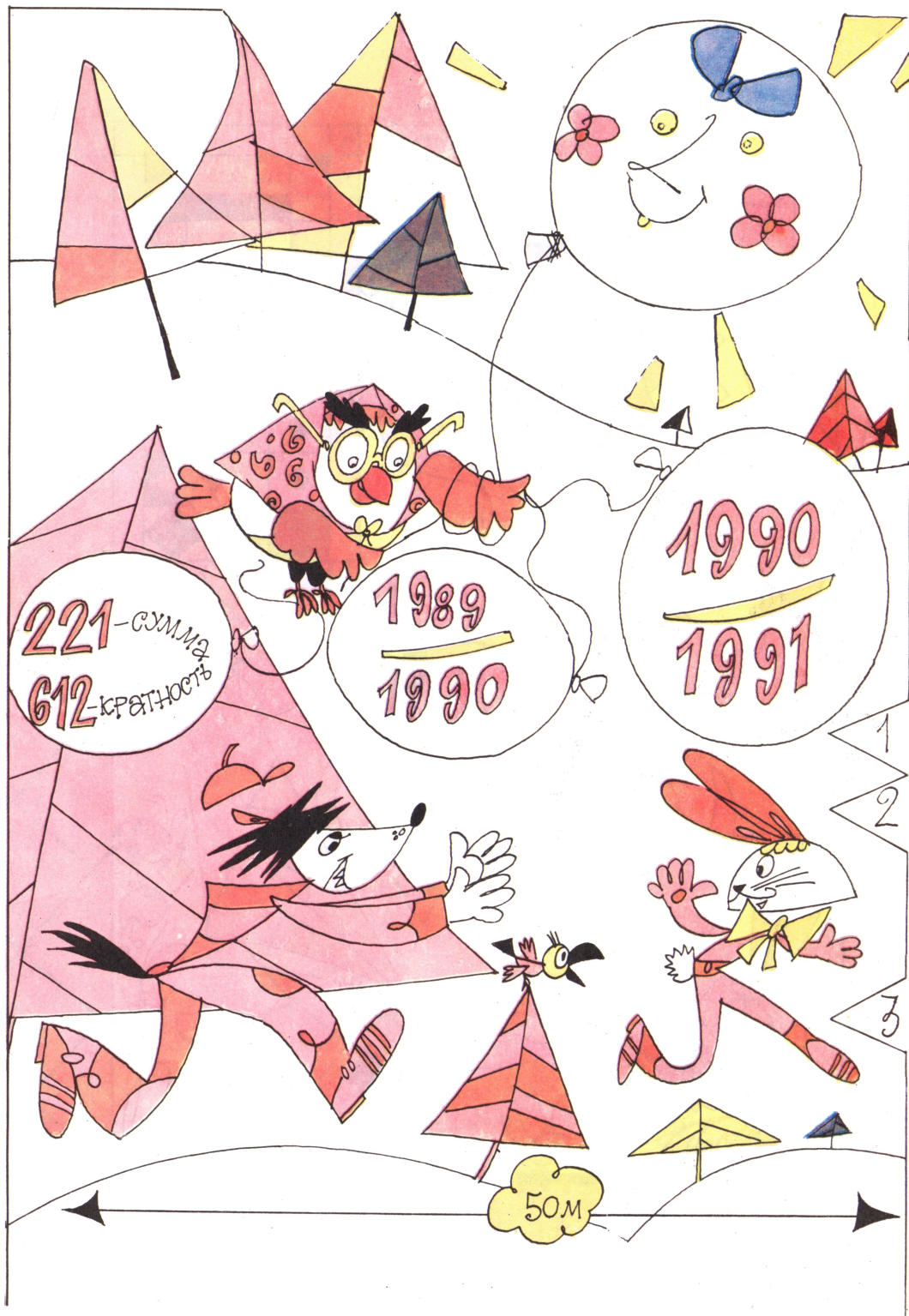
двузначному числу только при $x = 0$. 53. а) 92, 95 и 98; б) 95. 54. 5 с. 55. а) $1945 = 5 \cdot 389$; б) $1917 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 71$. 57. а) 1; б) 5,459. 58. См. рис. 59. (1, 18, 20), (4, 16, 19), (9, 17, 13), (10, 14, 15). 60. Среднее арифметическое четных чисел на 1 больше. 62. Нет. 63. Из равенства $a_1 + a_3 = a_3 - a_2$ следует $a_3 = (a_1 + a_2) : 2$. 64. На 10 % ниже нормы. 65. ≈ 50 кг.



66. 3000 м². 67. Число a надо уменьшить в 2 раза. 68. 800 г. 69. Нет. 70. 32.
 71. 1332. Делится. 72. 1; можно. 73. 32. 74. 25 %. 75. 75 %. 76. 20 км.
 77. $8\frac{2}{3}$ и $22\frac{2}{3}$. 78. ≈ 164 г. 79. Увеличилась на 25 %. 80. Да. 81. 25 °.
 82. 27 см и 3 см. 83. Ничего не получит. Если a — деньги Волка, то после каждого круга он остается при «своих» деньгах: $3a - 2a = a$.
 84. 1) Приготовить бумагу и карандаш; 2) составить условные обозначения или таблицы; 3) достать шар и в зависимости от цвета сделать в соответствующей колонке таблицы пометку; 4) продолжать до тех пор, пока в урне есть шары; 5) произвести подсчет количества пометок в соответствующих колонках. 85. 10 часов. 86. Уравнение: $5y = 3(y + 8)$, $y = 12$. Покупка стоит 60 к. Арифметическое решение: 1) $3 \text{ к.} \times 8 = 24 \text{ к.}$; 2) $5 - 3 = 2 \text{ (к.)}$, 3) $24 : 2 = 12$; 4) $5 \text{ к.} \times 12 = 60 \text{ к.}$ 87. 90 м. 88. $2\frac{7}{9} \%$, $\approx 13,9 \text{ г.}$
 89. 500 000.



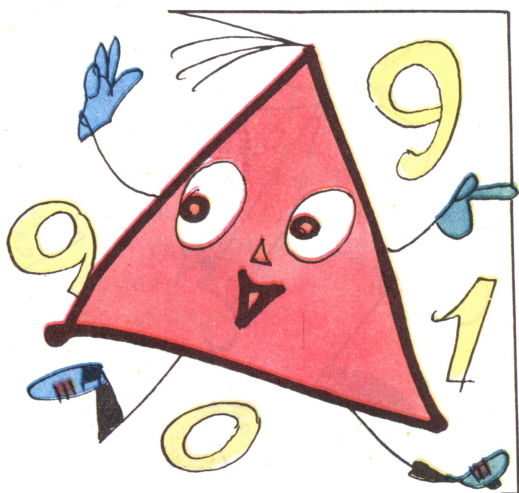




1. Какая дробь больше: $\frac{1989}{1990}$ или $\frac{1990}{1991}$?

2. Сумма двух чисел равна 221, а их наименьшее общее кратное 612. Найдите эти числа.

3. Заяц начал убежать от Волка со скоростью 25 м/с, когда расстояние между ними было 50 м. Если он уменьшит свою скорость на $\frac{1}{5}$ ее, то расстояние между ним и Волком будет оставаться без изменений. Догонит ли Волк Зайца, если увеличит свою скорость на $\frac{1}{4}$, а Заяц будет убежать с первоначальной скоростью? Догонит ли Волк Зайца, если тот уменьшит свою первоначальную скорость на $\frac{1}{5}$, а Волк увеличит свою еще на $\frac{1}{5}$? И если догонит, то через сколько секунд?

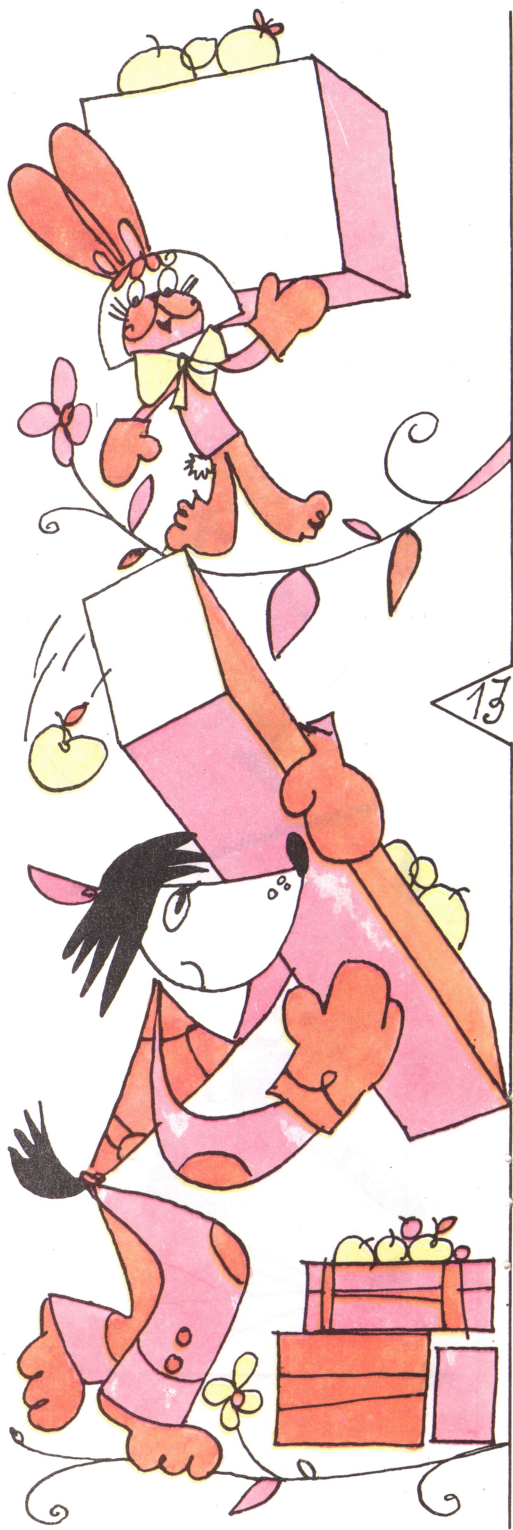
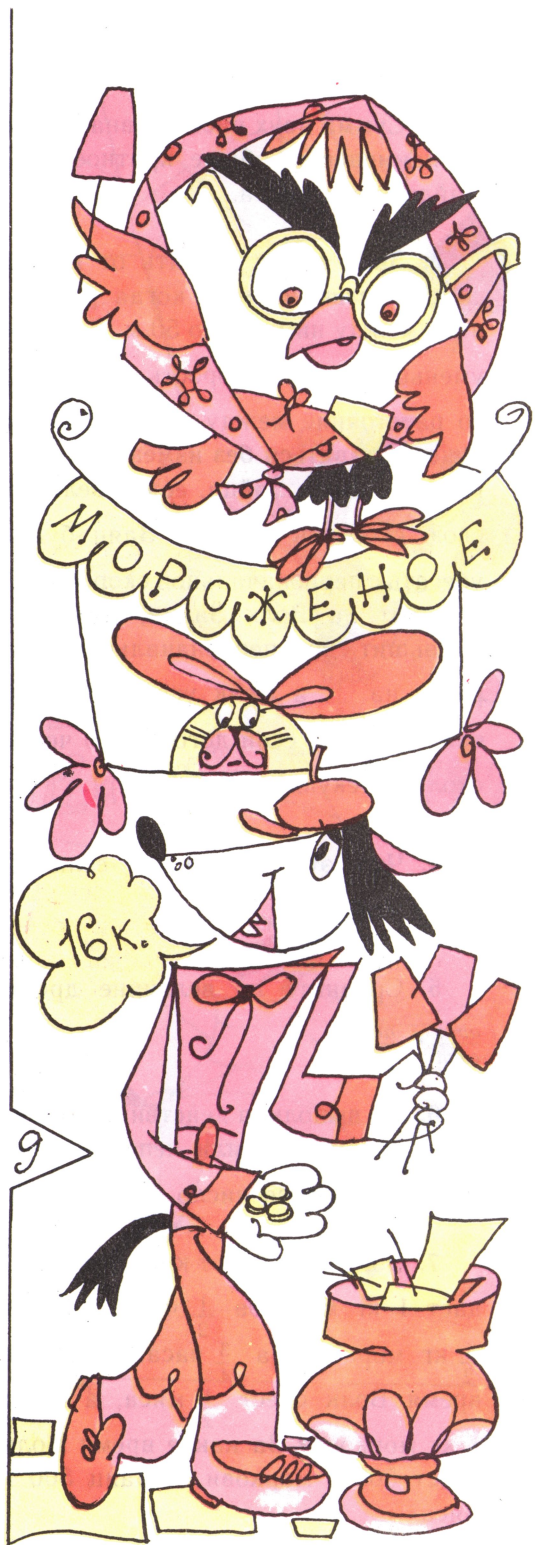


4. Что это за число, если $\frac{2}{3}$ это $\frac{2}{3}$ его?

5. Сравните по величине дроби $\frac{abab}{cdcd}$ и $\frac{ab}{cd}$.

6. Не выполняя действий, установите, правильной или неправильной дробью является число $\frac{244 \cdot 395 - 191}{244 + 395 \cdot 243}$

7. Задача-шутка. Волк съедает 1 кг мяса за $\frac{1}{2}$ часа, а Заяц $\frac{1}{2}$ кг моркови за $\frac{3}{4}$ часа. За какое время Волк съест $\frac{1}{2}$ мяса, а Заяц 1 кг моркови? За какое время Волк съест 500 г моркови, а Заяц 500 г мяса?



8. Найдите наименьшее натуральное число, при делении которого на дроби $\frac{2}{5}$ и $\frac{5}{7}$ в частном получаются целые числа.

9. Волк и Заяц ели мороженое, каждый свой сорт. Мороженое, которым лакомился Волк, стоит $\frac{1}{2}$ р. за две порции, а то, которое, ел Заяц — 1 р. за три порции. Всего съели по 10 порций. Заяц предложил такой способ расчета: «Твои две порции и мои три вместе стоят $\frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$ (р.). Мы съели 20 порций. $20 : 5 = 4$; $1\frac{1}{2} \cdot 4 = 6$ (р.). Значит, с каждого из нас по 3 р.», — и дал Волку 3 р. Волк пошел рассчитывать. Подал Сове 6 р., а та дает сдачу 16 к. Волк забрал сдачу, думая, что Сова ошиблась. Кого обманул?

10. Мяч стоит 1 р. 20 к. Волк говорит Зайцу: «Я плачу половину стоимости мяча, а ты $\frac{1}{3}$ и еще 30 к. Заяц понял неточность условия, согласился и первым подал в кассу деньги. Когда Волк подал свою часть, кассир говорит: «Не хватает $\frac{1}{10}$ р.». Как понял условие Волка Заяц и сколько денег он дал в кассу?

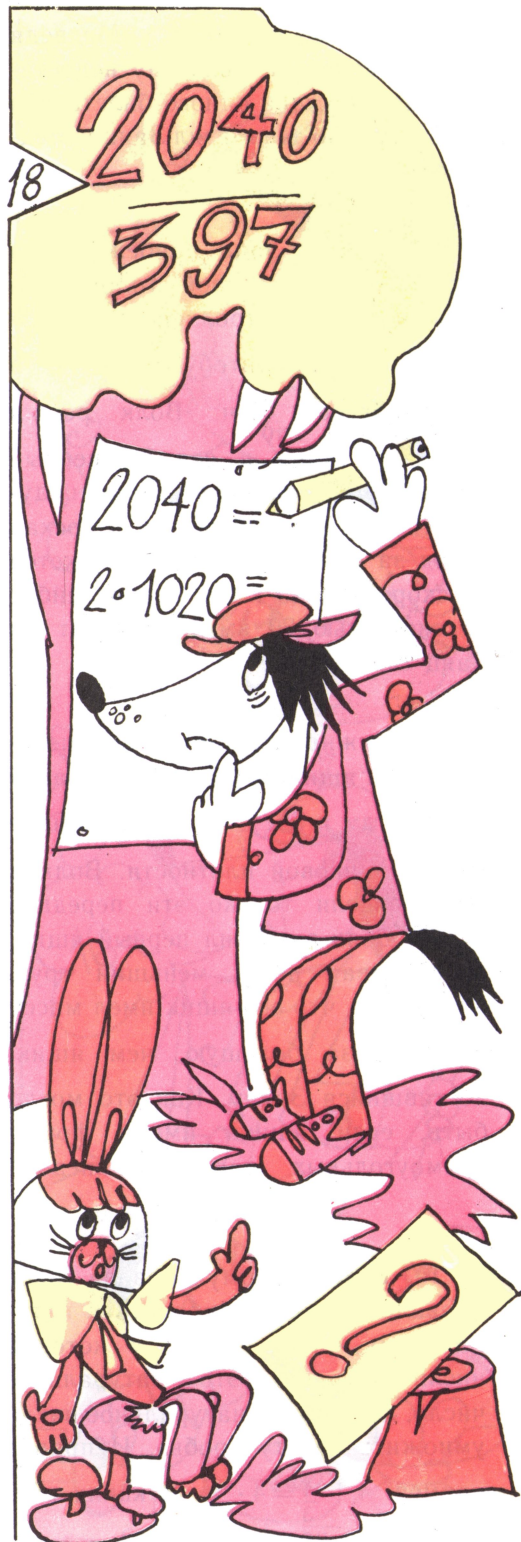
11. Волк и Заяц решили посмотреть мультфильмы. У Зайца была $\frac{1}{4}$ часть тех денег, что были у Волка. Если сложить деньги обоих, то на покупку двух билетов не хватит 10 к. Если же купить один билет, то останутся 20 к. «Погоди, Заяц! Пойдешь «зайцем» в кино!» Заяц не захотел

быть «зайцем» и занял у Медведя столько денег, сколько ему не доставало для покупки одного билета для себя. Сколько денег взял Заяц у Медведя?

12. Волк и Заяц прибежали на остановку, от которой только что отошли автобус и троллейбус. Интервал движения автобусов $\frac{1}{6}$ ч, а троллейбусов $\frac{1}{10}$ ч. Волк решил обогнать Зайца и сел на первый подошедший транспорт. Заяц подумал, подождал следующий и поехал вслед за Волком. Автобус движется со скоростью 25 км/ч, а троллейбус со скоростью 20 км/ч. Догонит ли Заяц Волка?

13. Нужно взять с полки и перенести два ящика с размерами граней $2\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ дм и $5 \times \frac{1}{2}$ дм, содержащие груз одинаковой плотности. Волк и Заяц видели только эти передние грани. Волк захватил первый ящик, рассчитывая нести меньший груз. Оказалось, что его ящик имел массу в $1\frac{1}{2}$ раза большую, чем ящик, доставшийся Зайцу. Как это могло быть, если ящики имели форму прямоугольных параллелепипедов?

14. Волк сформулировал такое правило: «Чтобы прибавить к натуральному числу дробь, у которой числитель есть это натуральное число, достаточно натуральное число умножить на эту дробь». И привел пример: $4 + \frac{4}{3} = 4 \cdot \frac{4}{3}$. В каких случаях верно правило Волка?



15. Найдите дробь, которая не изменит своей величины, если к числителю прибавить 10, а к знаменателю 9. Найдите общий вид таких дробей.

16. а) Какая правильная дробь увеличится в 4 раза, если к ее числителю прибавить ее знаменатель?

б) Какая неправильная дробь уменьшится в 3 раза, если к ее знаменателю прибавить ее числитель?

17. На сколько пятая часть числа больше его шестой части и во сколько раз больше?

18. Волк, пытаясь сократить дробь $\frac{2040}{397}$, начал раскладывать числитель на множители. Заяц, посмеиваясь, наблюдал за его действиями. Наконец Волк понял, что труд его напрасен. Как Заяц сразу догадался, что попытки Волка тщетны?

19. Волк решил пример $4872 \times 895 = 4\,360\,340$ и начал делать проверку делением. Заяц посмотрел на условие и сказал: «Не делай лишней работы! И так видно, что ты ошибся». Волк удивился: «Как ты это видишь?» Что ответил Заяц?

20. Какую цифру нужно дописать справа к числу 250, чтобы образованное четырехзначное число имело два простых делителя, оканчивающиеся дописанной цифрой.

21. а) Каждый автомобиль за год пробегает около 10 000 км и на каж-

дых 1000 км пути расходует годовую норму кислорода для человека. Природа восстанавливает лишь 80 % кислорода. Сколько человеческих норм кислорода остаются за год невосполнимыми при эксплуатации одного автомобиля?

б) На 1000 км пути каждый двигатель выбрасывает в атмосферу около 60 кг вредных веществ, которые поглощаются растениями только на 70 %. Сколько вредных веществ остается в атмосфере при эксплуатации одного автомобиля в течение года?

22. Докажите, что разность между любым трехзначным числом и суммой его цифр, делится на 3.

23. При делении числа \overline{abc} на 3 получили остаток p . Докажите, что при делении суммы цифр этого числа на 3 тоже получится остаток p .

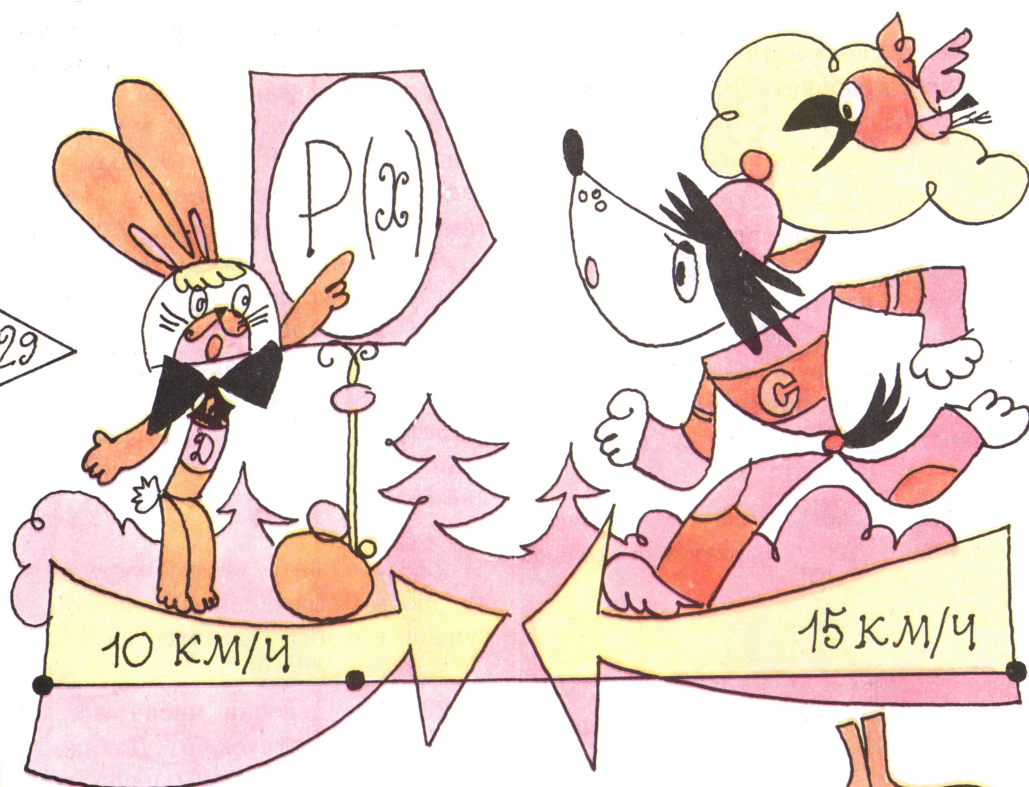
24. Числа abc и mnk не делятся на 3. Докажите, что либо $abc + mnk$, либо $abc - mnk$ делится на 3.

25. Для числа 123 найдите такое трехзначное число, разность между которым и 123 делилась бы и на 9, и на 99.

26. Найдите десятизначное число, у которого ни одна цифра не повторяется и которое делится на 45.

27. Если к числу прибавить число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то в сумме получится число, записанное единицами с нулем в конце и кратное 111. Найдите хотя бы одно такое число.

29



32



28. Делятся ли числа 5742, 4356, 8712, 1584 на 99? Найдите закономерность в записи этих чисел. Проверьте свой вывод на других примерах.

29. Прямая дорога — координатная прямая с масштабной единицей 1 км. Когда координата Зайца была (-20) , а Волка (60) , они начали двигаться навстречу друг другу со скоростями: Заяц 10 км/ч, а Волк 15 км/ч. Найдите координату точки, в которой Заяц должен остановиться, чтобы сохранить расстояние между собой и Волком 5 км.

30. Масса Царь-колокола и Царь-пушки приблизительно равна 240 т. Царь-пушка на 160 т легче, чем Царь-колокол. Во сколько раз Царь-колокол тяжелее Царь-пушки?

31. При каком наименьшем натуральном $k \neq 1$ будут целыми числами дроби:

а) $\frac{2^5+1}{k^2-1}$, б) $\frac{2^5}{k^2-1}$, в) $\frac{k^2-1}{2^5}$?

32. Найдите наименьшее число, которое записано только единицами и делится на 33.

33. В пределах первой сотни найдите все пары простых чисел, разность между которыми тоже простое число.

34. Отряд пионеров можно разбить на звенья по 4 и по 7 человек. Сколько пионеров в отряде, если их больше 20 и меньше 40?

35. Сколько раз цифра 4 встречается в записях всех чисел от 60 до 100?

36. Одно число в 10 раз больше другого. Во сколько раз НОК этих чисел больше их НОД?

37. Может ли произведение нескольких простых чисел оканчиваться нулем? А цифрой 5?

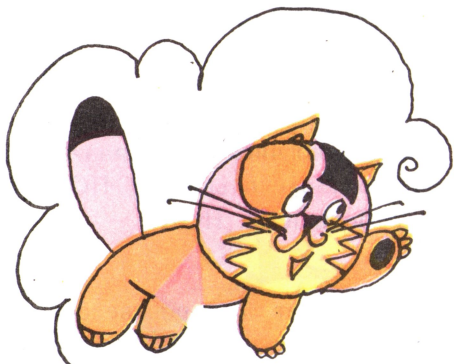
38. Число x в 5 раз больше y , а y меньше числа z в 3 раза. Найдите НОК и НОД чисел x , y и z .

39. Одна порция мороженого стоит 10 к. У Пети денег больше, чем на две порции, но не хватает на три. У Степы денег больше, чем на одну порцию, но не хватает на две. Когда они сложили свои деньги, то смогли купить 4 порции мороженого. Сколько денег было у каждого, если каждый имел простое число копеек?

40. Найдите сумму всех чисел от 1 до 1000. Какие законы арифметических действий помогут сделать это быстро? (См. с. 34.)

41. Купили два билета в театр по 1 р., 4 билета по 70 к. и 8 билетов еще более дешевых по одинаковой цене. С 10 р. получили сдачу 3 р. 15 к. Правильно ли произведен расчет?

42. Является ли целым числом частное $\frac{\text{НОК}(a, b, c)}{\text{НОД}(a, b, c)}$?



40

$$1+2+3+\dots+998$$

$$+999+1000=\dots?$$



ABCABC:ABC

$$:13:11=$$

47



43. Делится ли разность двух неравных чисел на НОД этих чисел?

44. Разность двух нечетных чисел равна 8. Какой НОД этих чисел?

45. Из двузначного числа вычли сумму его цифр и получили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите первоначальное число.

46. Найдите трехзначное число, которое уменьшится в 10 раз, если зачеркнуть его среднюю цифру.

47. Запишите трехзначное число. Допишите к нему справа такое же число. Полученное число разделите на 13. Частное разделите на 11. Новое частное разделите на задуманное число. Сколько бы ни задумывать чисел, ответ будет один и тот же. Какой? Почему?

48. В сентябре месяце Петя и Степа ходили на уроки музыки: Петя по числам, кратным 4, а Степа — по числам, кратным 5. В спортивную секцию оба ходили по числам, кратным 7. Остальные дни провели на рыбалке. Сколько дней провели ребята на рыбалке?

49. Сколько среди чисел от 1 до 40 таких, которые записаны только четными цифрами?

50. «Который час?» — спрашивает Волк Зайца. «Данное время кратно 5, а время суток в часах кратно данному», — отвечает Заяц. «Такого

быть не может!» — возмутился Волк. А вы как думаете?

51. Заяц предлагает Волку: «Задумай трехзначное число. Найди сумму его цифр. Сумму отними от задуманного числа. В полученной разности зачеркни одну цифру. Назови цифры, которые остались. Ты зачеркнул цифру...» И Заяц правильно называет зачеркнутую цифру. Как он ее узнал? (См. с. 38.)

52. Сумма нечетных чисел равна 16. Докажите, что эти числа взаимно простые.

53. Сколько есть различных прямоугольников с площадью 24 см^2 , стороны которых выражаются целым числом сантиметров?

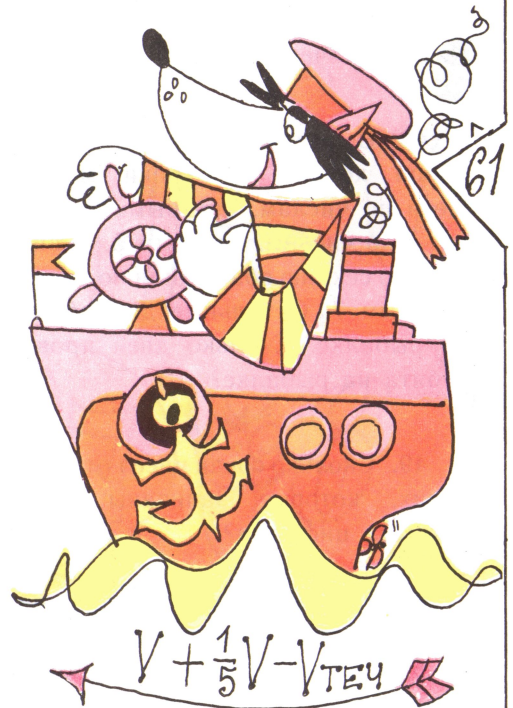
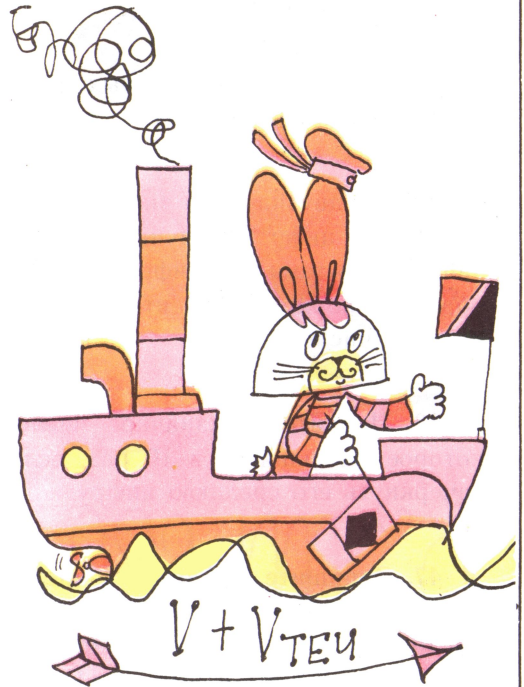
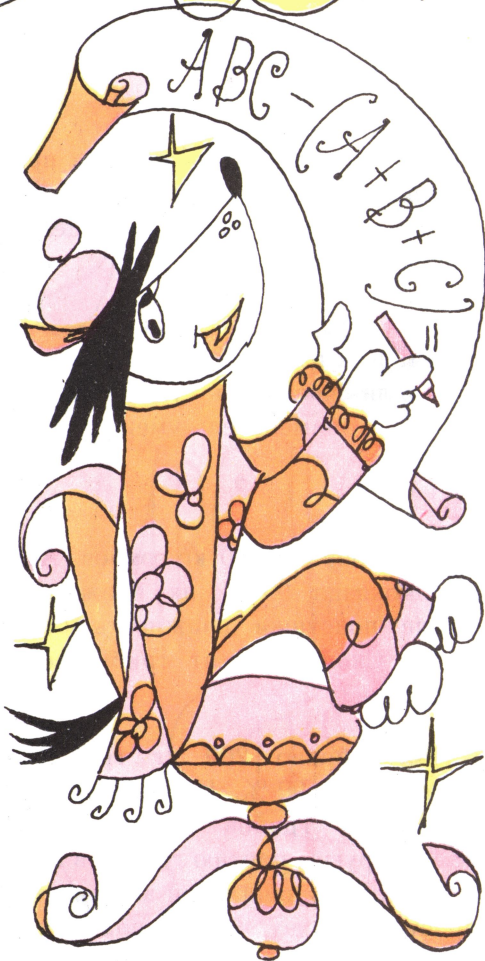
54. Как изменится величина дроби, если числитель увеличить на 200 %, а знаменатель уменьшить на 50 %?

55. Собрано 100 кг грибов. Анализ показал 99 % их влажности. После подсушки влажность стала 98 %. Сколько весят грибы после подсушки?

56. Собрано 200 кг грибов с влажностью 99 %. После подсушки влажность грибов стала равной 98 %. Другую партию грибов в 50 кг и с такой же начальной влажностью просушили до 97 % влажности. С подсушенных грибов составили смесь. Сколько получили смеси?



51



61

Сколько килограммов должна потерять смесь, чтобы довести грибы до 50 % влажности?

57. Одна сторона прямоугольника на 20 % больше стороны квадрата, другая — на 20 % меньше стороны того же квадрата. Найдите процентное отношение площади прямоугольника к площади квадрата.

58. Зарплата увеличилась на 10 %, а через некоторое время еще увеличилась на 25 %. На сколько процентов всего увеличилась зарплата?

59. Если к Таниным деньгам прибавить 60 % их, то получится 30 рублей. Сколько денег у Тани?

60. Найдите двузначное число, которое от суммы цифр этого числа составляет 500 %; 1000 %.

61. Собственная скорость теплохода, плывущего по течению, 20 км/ч, а собственная скорость теплохода, плывущего против течения, на 20 % больше. Теплоходы выходят одновременно навстречу друг другу и преодолевают за одно и то же время расстояние между портами. Какова скорость течения реки?

62. Уменьшаемое на 20 % больше вычитаемого. Сколько процентов составляет разность от уменьшаемого?

63. Сколько процентов составляет НОД (24, 48) от НОК (24, 48)?

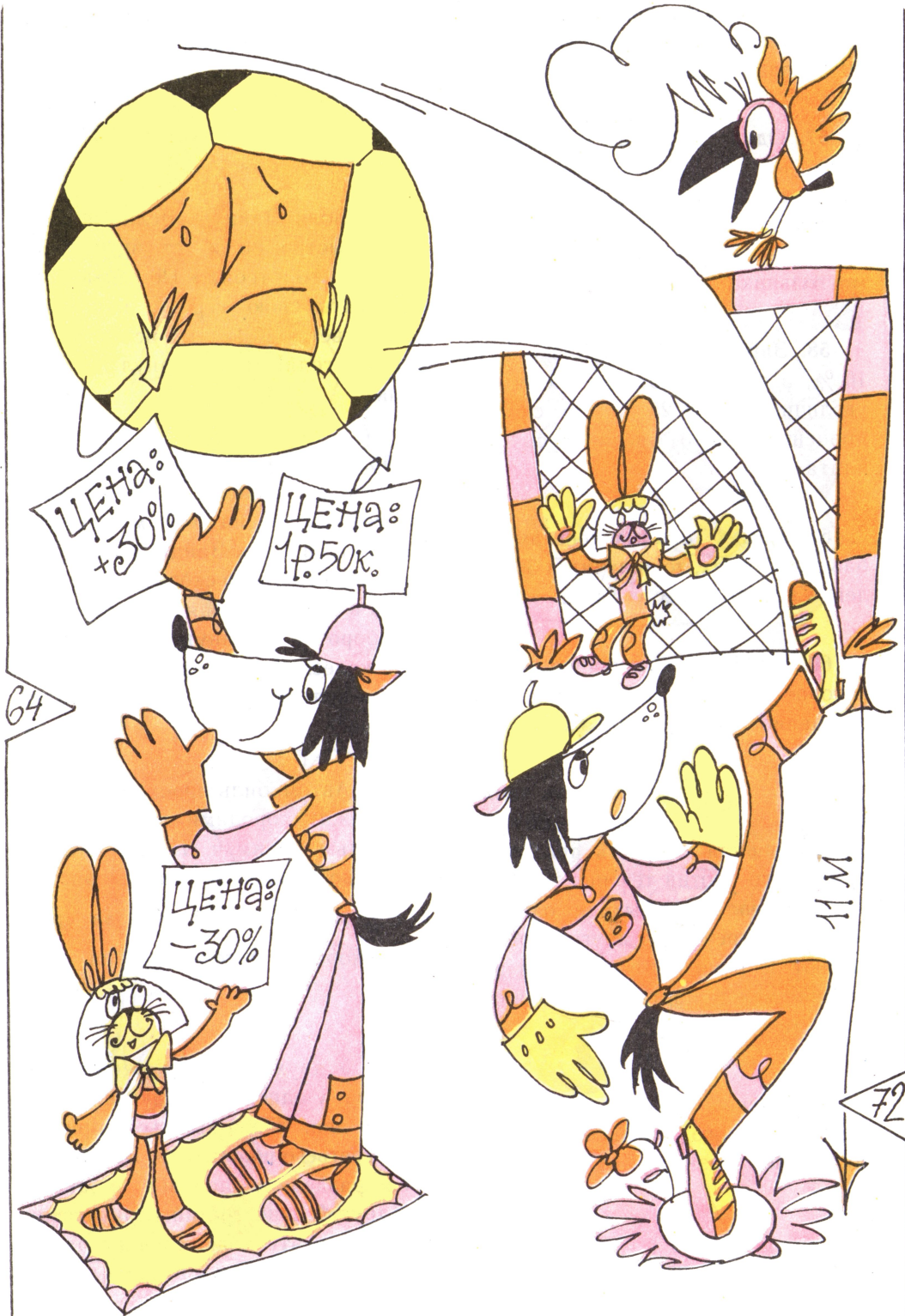
64. Мяч стоит 1 р. 50 к. Через некоторое время цена на такой мяч повысилась на 30 %, а еще через некоторое время понизилась на 30 %. Сколько теперь стоит мяч? (См. с. 40.)

65. Волк Заяц: «Если не найдешь быстро 80 % от выражения $8 \cdot 0,125^2$, то я тебя...» Не успел Волк закончить свою угрозу, как Заяц дал ответ: «0,1» и исчез. «Ну, Заяц, погоди!» Не обманул ли Заяц Волка?

66. Волк на велосипеде начал гнаться за Зайцем, который ехал на велосипеде на 100 м впереди. Догонит ли Волк Зайца, если будет вращать педали со скоростью 50 оборотов в минуту, а Заяц со скоростью 80 оборотов в минуту и если диаметр колеса велосипеда Волка 1 м, а колеса велосипеда Зайца в два раза меньше?

67. Автомобиль проехал расстояние между городами в 120 км со скоростью 40 км/ч. Назад автомобиль возвращался со скоростью в $1 \frac{1}{2}$ раза большей. Какова средняя скорость автомобиля на всем пути?

68. У двух школьников были лакомства: у одного три пакета, у другого — два. Полакомиться пригласили третьего школьника. Все лакомства разделили поровну и съели. На другой день третий вернул свою долю. Как эту долю следует разделить между первым и вторым школьниками?



69. Волк и Заяц купили футбольный мяч за 13 р. У Зайца было в 2 раза меньше денег, чем у Волка, да еще рубль. Кто сколько внес денег на покупку мяча?

70. Два числа относятся как 2 : 5. На какое число надо разделить второе число, чтобы отношение стало равным 2 : 3?

71. а) Отношение двух чисел равно 1 : 2, а их разность в 2 раза больше их произведения. Найдите эти числа.

б) При том же условии найдите числа, если их разность в два раза меньше их произведения.

72. Волк и Заяц били пенальти друг другу. Заяц бил с расстояния 5,5 м, а Волк с 11 метров. Отношение забитых мячей было 2 : 1 в пользу Зайца. «Ну, погоди, Заяц! — решил Волк. — Я тоже буду бить с 5,5 м!» Отношение забитых мячей стало равным 3 : 1 в пользу Волка. Кто выиграл по двум сериям пенальти, если в первой было забито 15 голов, а во второй 20. Какое общее отношение забитых мячей?

73. Отец ежемесячно дает сыну 3 р. с тем, чтобы тот вносил их в сбербанк и собрал определенную сумму для экскурсии. Когда у мальчика спросили, сколько у него денег, он сказал: «Через 3 месяца будет в 3 раза больше, чем было 3 месяца назад». Сколько денег собрал мальчик? (См. с. 42.)

74. Цена книги снизилась на $\frac{1}{4}$ ее стоимости. Во сколько прежняя цена больше новой?

75. Сколько процентов составляет часть, отрезанная от веревки длиной 15 м, если отношение отрезанной части к той, что осталась, равно 2 : 3?

76. Мастер один выполняет работу за 3 дня, а с учеником за 2 дня. За сколько дней выполнит работу ученик самостоятельно?

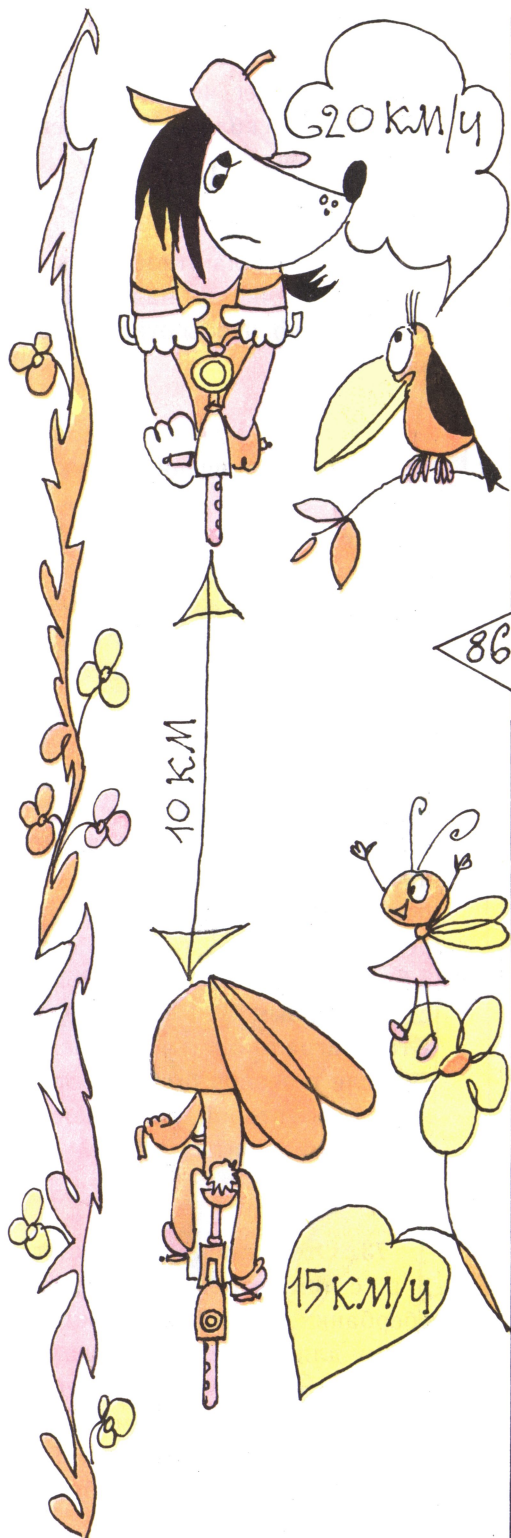
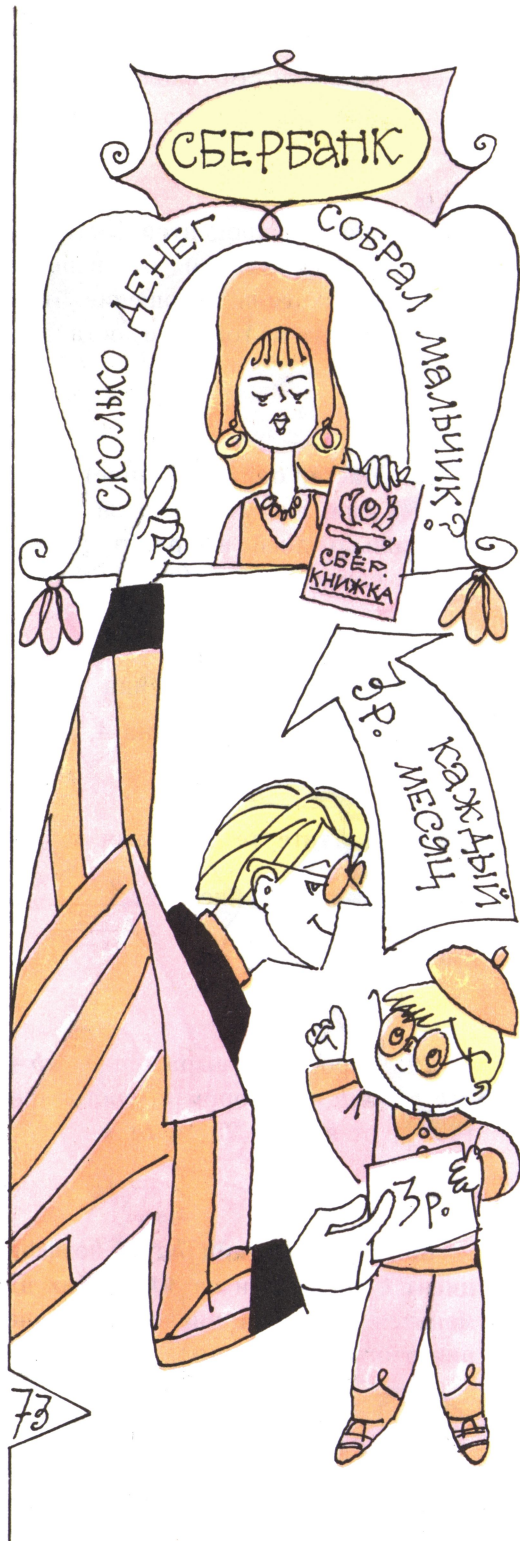
77. Найдите те значения y , при которых дробь $\frac{2}{|y-2|}$ равна 4, 5, $\frac{1}{2}$.

78. Найдите те значения x , при которых выражение $\frac{2}{2 - \frac{2}{|x-2|}}$ не имеет смысла.

79. Упростите выражение $kb + k_1b + k_2b$, в котором k_1 составляет 125 % от k , а k_2 25 % от k_1 .

80. В выражении ka^2b^3 коэффициент k увеличили на 30 %. Как изменится величина числового значения этого выражения?

81. Волк погнался за Заяцем, когда они были рядом. Заяц, имея большую скорость, сразу оторвался



от Волка, пробежал 2 км и повернул обратно. Подбежав к Волку, Заяц сразу же повернул и побежал к месту, до которого добежал первый раз, затем снова побежал навстречу Волку и повторял так до тех пор, пока Волк не пробежал 2 км. Какое расстояние пробежал Заяц, если его скорость 40 км/ч, а Волка — 20 км/ч?

82. Какая из дробей $\frac{1}{a}$ или $\frac{1}{b}$ больше, если $b > a$ и $a < 0$ и $b < 0$?

83. При каких положительных значениях n верно неравенство $n^2 < n$?

84. Вычислите $(-1)^8 + (-1)^3 + (-1)^{2k} + (-1)^{2k-1}$, где k — натуральное число.

85. Из числа -5 нужно вычесть такое число, чтобы разность была числом обратным и противоположным по знаку уменьшаемому. Какое число нужно вычесть?

86. Волк и Заяц двигались на велосипедах по прямой дороге навстречу друг другу: Заяц — со скоростью 15 км/ч, а Волк — со скоростью 20 км/ч. Будем считать дорогу координатной прямой, за начало отсчета которой примем пункт A , а за масштабную единицу 1 км. В определенный момент координаты Зайца и Волка были соответственно (-70) и (80) . Через какое время от этого

момента расстояние между ними будет равно 10 км? Какие координаты будут иметь тогда Волк и Заяц?

87. Вычислите рациональным способом: а) 3,84 % от 25; б) 37,5 % от 39 120.

88. Делится ли $12^2 + 48^2$ на 12? Ответ дайте без вычислений.

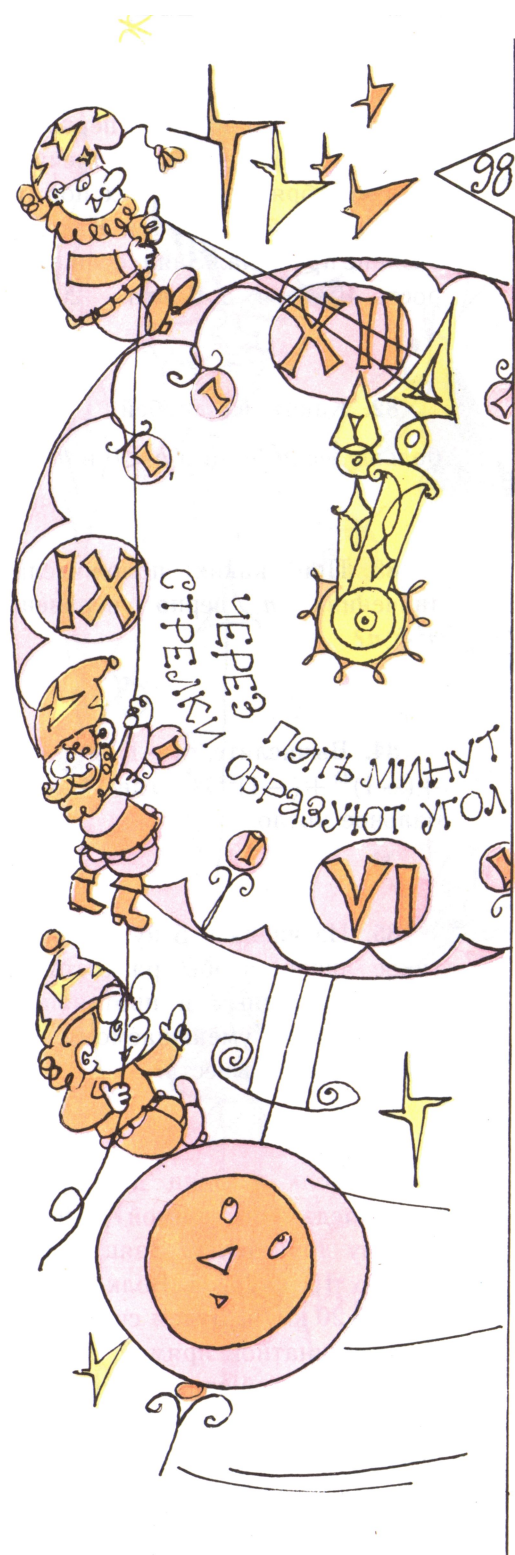
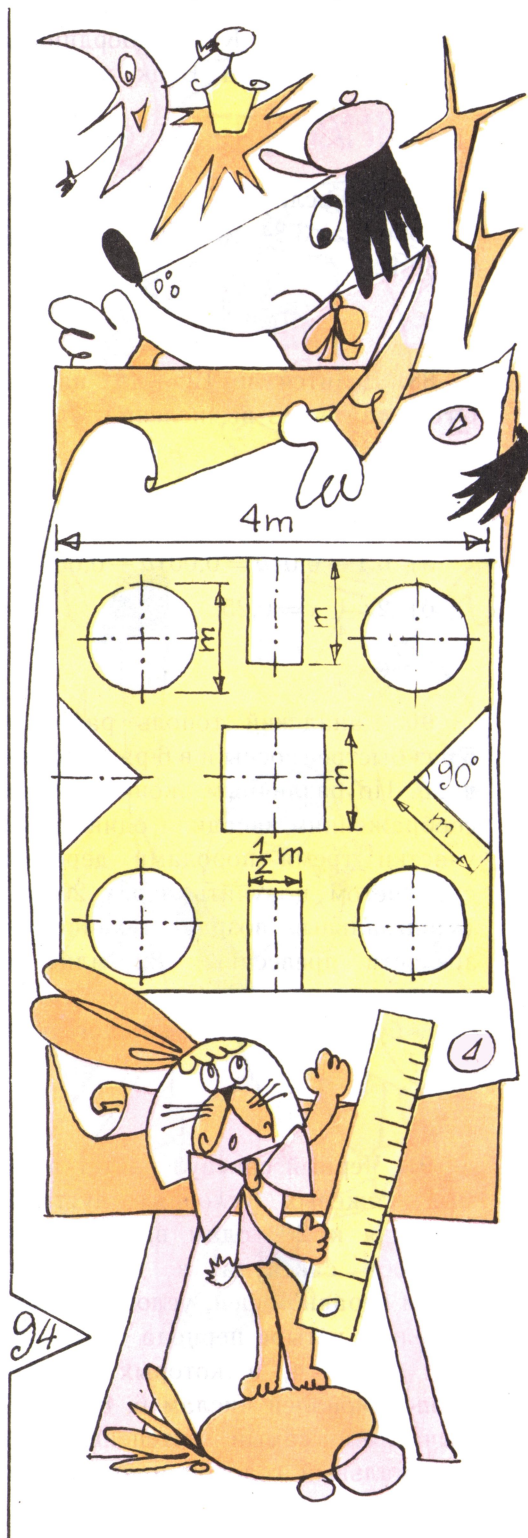
89. Решите уравнение:

а) $0,1 - 0,01a = 0,001a - 0,0001$;

б) $2 : \frac{1}{4}x = 0,25$.

90. Канадский тополь растет в 5 раз быстрее сосны и в 6 раз быстрее дуба. По различным экономическим соображениям засадили одинаковые участки тремя породами деревьев с расчетом получить через 20 лет (минимальный возраст технической зрелости древесины) 82 млн. м³ древесного сырья. Сколько древесины будет получено с каждого участка?

91. Черный саксаул растет в самых тяжелых условиях пустыни, достигая к 20 годам высоты 6 м. Прирост саксаула в высоту по годам неравномерен; условно можно выделить четыре периода в отношении 1 : 2 : 3 : 4, в которых прирост пропорционален числам 6, 8, 9 и 7. Вычислите самый интенсивный и минимальный годовой прирост саксаула.



92. Турист проехал $\frac{1}{8}$ часть пути и еще 20 км. Если он проедет еще $\frac{3}{4}$ оставшегося пути, то до конца пути останется 16 км. Каков весь путь туриста?

93. Если из квадратного километра воображаемого материала нарезать ленту шириной 2 см, то какой длины могла бы получиться лента? Какова была бы площадь такой ленты?

94. Квадрат разбит на части, как указано на рисунке. Найдите площадь закрашенной части квадрата.

95. Брусok, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда размерами $2 \times 2 \times 3$ см, нужно разрезать на кубики с ребром 1 см. Резец лазерного аппарата за одну секунду разрезает 1 см^2 материала. За сколько секунд можно выполнить задание?

96. Поля шахматной доски расположили лентой. Каковы площадь и длина такой ленты, если одно поле доски имеет размеры $0,5 \times 0,5$ дм?

97. Меньший из смежных углов увеличили в 5 раз и получили угол меньше развернутого. Как изменится смежный с ним угол?

98. Часы показывают 12 ч. Какой величины будет угол между минутной и часовой стрелками через 5 мин?

99. Периметр прямоугольника 30 см. Точка находится внутри прямоугольника на расстоянии 2 см и 7 см от двух его сторон. Найдите стороны прямоугольника, если их длины выражаются целыми числами. (Рассмотрите все возможные случаи).

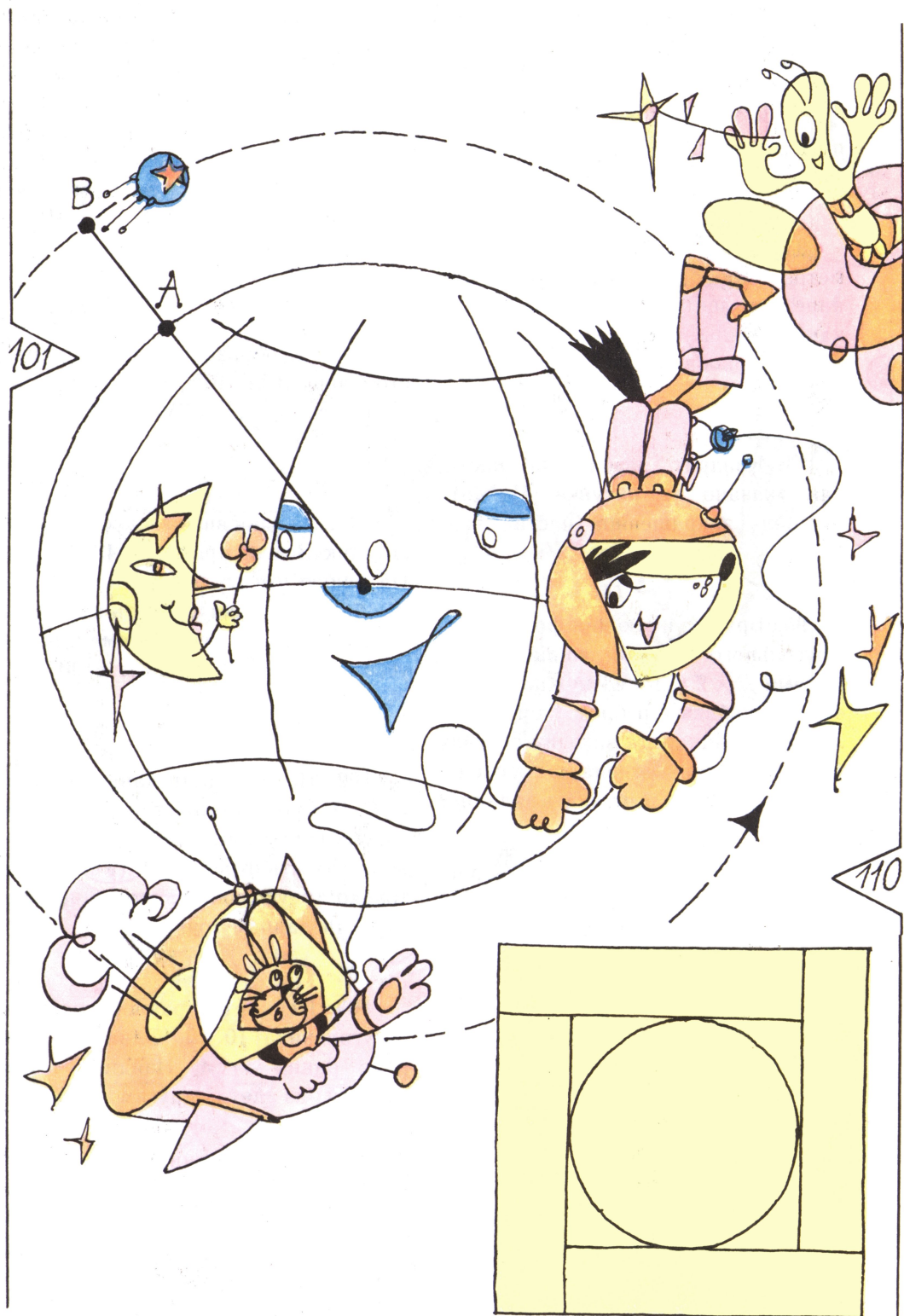
100. Углы 60° и 40° имеют общую сторону. Найдите отношение меры угла, образованного не общей стороной угла 40° и биссектрисой большего угла, к мере большего угла.

101. За один виток искусственный спутник Земли проходит 43 960 км. На какую высоту запущен спутник? (Орбиту спутника принять за круговую с центром в центре Земли, радиус Земли считать равным 6400 км). (См. с. 46.)

102. На плоскости даны точки A , B , C , D . Сколько может образоваться треугольников, если эти точки попарно соединять отрезками? (Учитывать только треугольники, имеющие вершинами данные точки).

103. Периметр равнобедренного треугольника 10 см. Одна его сторона равна 3 см. Найдите длину каждой из двух других сторон.

104. На координатной прямой даны точки $A(-10)$ и $B(5)$. Точки C и D расположены между точками A и B так, что расстояние AC , CD и DB пропорциональны числам 1, 2 и 2. Найдите координаты точек C и D .



105. На прямой даны лучи AB и CD . Точка A не лежит между точками луча CD . Укажите расположение точек A , B , C и D на прямой.

106. Окружность имеет длину 12π м. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

107. Точка C принадлежит отрезку AB . $AB = 20$ см, $AC - CB = 2$ см. Найдите длину отрезка AC и отрезка CB .

108. Дан угол 126° . Чему равна сумма углов смежного и вертикального по отношению к данному? На сколько градусов вертикальный угол больше смежного?

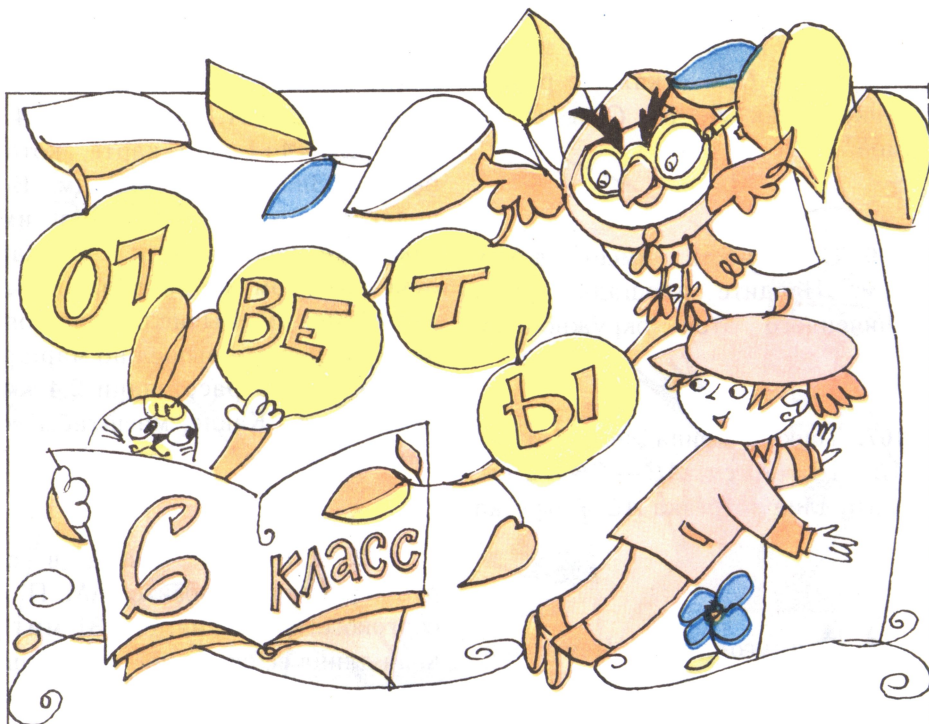
109. Можно ли вырезать из квадрата 2×2 дм круг, длина окружности которого 3π дм?

110. Из квадрата 2×2 м вырежьте ли круг, длина окружности которого 4 м. Центр круга совпадает с центром квадрата. Из того что осталось, вырезали 4 прямоугольника наибольшей площади. Принимая значение π равным 3, найдите: а) Какова сумма площадей прямоугольников? б) Каков процент «отхода» после того, как вырезали круг и прямоугольники? (Произведите расчеты с микрокалькулятором, приняв число π с точностью до пятого знака после запятой).

111. Волк и Заяц должны были прибыть из пункта B в контрольный пункт M , который находится между пунктами B и A , причем $BA = 4$ км, $BM : MA = 4 : 1$. По карте, которая была у Зайца, $BM = 3,2$ дм. Волк, полагая, что карта Зайца имеет такой же масштаб, как и его карта, отметил в том же направлении BM , равное 3,2 дм. Вычислив расстояние до M , он первым вышел по маршруту и очутился на расстоянии 2,4 км за пунктом A . Какие масштабы карт Зайца и Волка?

112. Памятная монета в один рубль в честь композитора М. П. Мусоргского имеет диаметр 31 мм. Какова длина ее окружности и площадь лицевой стороны? Из 3 млн. выпущенных монет 0,3 млн. улучшенного качества. Какой процент составляют монеты улучшенного качества?

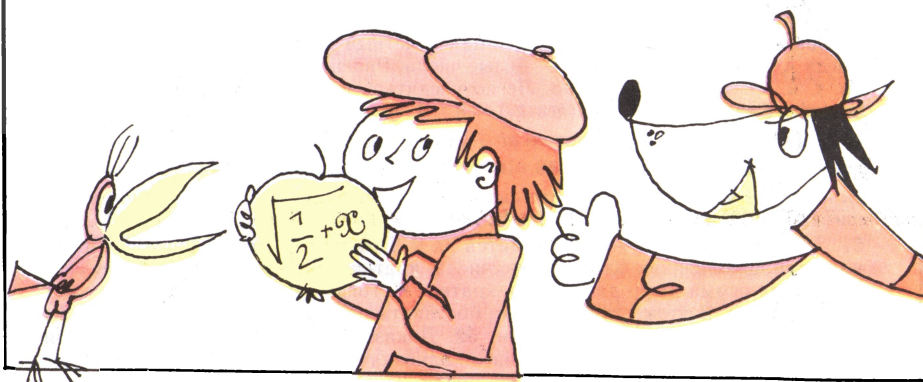


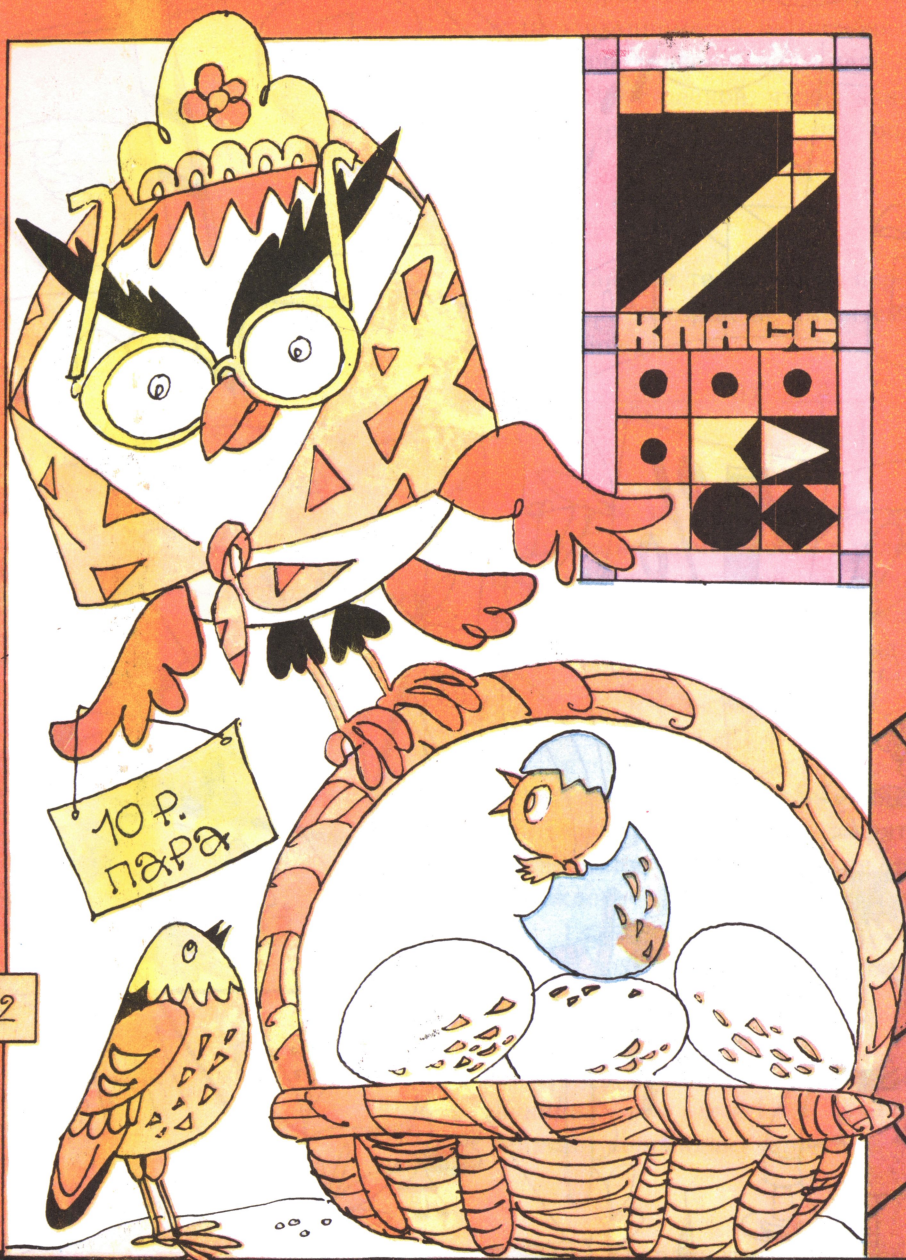


1. Первая дробь меньше единицы на $\frac{1}{1990}$ а вторая — на $\frac{1}{1991}$. Так как $\frac{1}{1990} > \frac{1}{1991}$, то $\frac{1989}{1990} < \frac{1990}{1991}$. 2. Пусть $a + b = 221$ (1). Числа a и b должны содержать делители НОК. $612 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17$. Из условия (1) ясно, что одно из чисел четное, другое — нечетное. Поэтому делители 2 и 2 должны принадлежать одному числу. 221 не делится на 3, значит, на 3 делится только одно слагаемое. Только 17 — общий делитель. По сумме чисел определяем их: $a = 2 \cdot 2 \cdot 17 = 68$, $b = 3 \cdot 3 \cdot 17 = 153$. 3. Если Заяц уменьшит свою скорость на $\frac{1}{5}$, то она станет равной 20 м/с, а расстояние между Волком и Зайцем не изменится. Отсюда следует, что первоначальная скорость Волка 20 м/с. Когда Волк увеличит свою скорость на $\frac{1}{4}$ ее, то она станет равной 25 м/с. Но Заяц будет убегать с такой же скоростью, поэтому расстояние между ними не будет изменяться. Наконец, если Заяц уменьшит свою скорость на $\frac{1}{5}$, а Волк увеличит свою на $\frac{1}{5}$, то их скорости станут 20 м/с и 30 м/с. Каждую секунду расстояние между ними будет сокращаться на 10 м, и Волк догонит Зайца через $50 : 10 = 5$ (с.) 4. 1. 5. Дробь равны. После сокращения первой на 101 получается вторая дробь. 6. Правильная. 7. За 15 мин и $1\frac{1}{2}$ ч при условии, что оба хотят есть и в состоянии употребить такое количество еды. Заяц не ест мяса, а Волк моркови. 8. Искомое число должно быть кратным 2 и 5, т. е. кратным 10, которое и есть наименьшее. 9. Все мороженое, съеденное обоими, стоит 5 р. $83\frac{1}{3}$ к. Сова дала сдачу правильно. Волк доплатил за мороженое Зайца 34 к. 10. Волк не уточнил, $\frac{1}{3}$ какой суммы платить Зайцу. Тот и заплатил $\frac{1}{3}$ половины стоимости мяча и еще 30 к., т. е. 50 к. 11. Билет стоит 30 к. Заяц занял 20 к. 12. Через 16 мин Заяц догонит на автобусе Волка, который поехал на троллейбусе. 13. Волк не учел третьего измерения ящика. Это измерение у его ящика оказалось в 3 раза больше, чем третье измерение ящика Зайца: $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot y$.

Откуда $x = 3y$ 14. «Правило» Волка верно, когда к целому числу прибавляется неправильная дробь с числителем, равным целому числу и большим знаменателя на 1. $a + \frac{a}{a-1} = \frac{a^2 - a + a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1} = \frac{a}{a-1} \cdot a$. 15. $\frac{10}{9}$. Вообще, $\frac{10+10n}{9+9n}$, где n — натуральное число. 16. а) $\frac{4a}{b} = \frac{a+b}{b}$. Откуда $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$; б) $\frac{a}{b} = \frac{3a}{a+b}$. Откуда $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$. 17. На $\frac{1}{30}$ числа; в $1\frac{1}{5}$ раза. 18. Знаменатель 397 простое число и не есть делителем числителя. 19. Один из множителей кратен 3. Произведение должно делиться на 3, а оно не делится. 20. Простые числа больше 2 могут оканчиваться цифрой 1, 3, 7 и 9. Тогда $ab \cdot cb = 250b$. Этому условию может отвечать только цифра 1. Прикидка дает простые числа 41 и 61. 22. $\overline{abc} - (a+b+c) = 99a + 9b$, что кратно 3. 23. Пусть $\overline{abc} = 3k + p$ и $a + b + c = 3n + q$, где k и n — натуральные числа, а p и q могут принимать значения 1 и 2. Так как разность $\overline{abc} - (a+b+c)$ кратна 3, то кратно 3 и разность $3(k-n) + p - q$, что возможно при $p - q = 0$. Откуда $p = q$. 24. Если \overline{abc} не делится на 3, то его можно представить в виде $3p+1$ или $3p+2$. Аналогично, число \overline{mnk} может быть представлено в виде $3q+1$, либо $3q+2$, где p и q — натуральные числа. Если взять два числа вида $3p+1$ и $3q+1$ или $3p+2$ и $3q+2$, то их сумма не делится на 3, но разность делится на 3. Если же взять числа вида $3p+1$ и $3q+2$, то их сумма делится на 3. 25. Разность $321 - 123$ делится на 9. и 99. 26. 1234567890. Приведенное число не единственное. Все числа, удовлетворяющие условию, можно подсчитать так: оставляя цифру 0 на последнем месте, остальные переставляют всевозможными способами. Затем оставляют цифру 5 на последнем месте, а все остальные переставляют различными способами. Чисел получится и в этом случае столько же, сколько и в первом, но из их числа надо исключить те, у которых на первом месте окажется 0. 27. Задача не имеет однозначного ответа. Наименьшим трехзначным числом, удовлетворяющим условию, есть число 159. Вообще, условию отвечают числа, в которых сумма первой и последней цифр равна 10, а между ними стоят пятерки. 28. Первые две цифры составляют число, которое в сумме с числом, образованным третьей и четвертой цифрами, дает 99. 29. 10. 30. ≈ 5 раз. 31. а) 2; б) 3; в) 15. 32. 111 111. 33. Все простые числа являются нечетными, кроме числа 2. Разность нечетных чисел есть число четное. Следовательно, условию задачи удовлетворяют пары простых чисел, разность между которыми 2. Таких чисел-близнецов в первой сотне есть 8. (3; 5), (5; 7), (11; 13), (17; 19), (29; 31), (41; 43); (59; 61), (71; 73). 34. 28. 35. 4. 36. НОК этих чисел большее из них, а НОД — меньшее. Поэтому, НОК больше НОД этих чисел в 10 раз. 37. Может. Например: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$. 38. НОД — y , НОК — $15y$. 39. Пусть Петя имел x к., а Степа — y к. Тогда $20 < x < 30$ (1), $10 < y < 20$ (2) причем, $x + y = 40$ (3). Условие (1) удовлетворяют числа 23 и 29, а условию (2) — простые числа 11, 13, 17 и 19. Учтявая (3), имеем два ответа: у Пети 23 к., у Степы — 17 к.; у Пети — 29 к., у Степы — 11 к. 40. Переместительный и сочетательный законы сложения позволяют прийти к выводу, что нахождение суммы сводится к вычислению произведения $1001 \cdot 500 = 500 \cdot 1001$. Нет. Стоимость самых дешевых билетов должна быть кратна 8. При произведенном расчете она не кратна. 42. Да. НОК содержит все делители НОД данных чисел. 43. Да. Уменьшаемое и вычитаемое делятся на НОД. 44. Пусть A и B — нечетные числа и $A - B = 8$. Нечетные числа не могут иметь четных делителей. Предположим, что A и B имеют общий нечетный делитель (он не больше 7). Тогда $A = 3k$ и $B = 3k_1$, k и k_1 — целые числа. Равенство $3k - 3k_1 = 8$ невозможно, т. к. $k - k_1$ — целое число. Легко убедиться в невозможности и таких равенств: $5(k - k_1) = 8$ и $7(k - k_1) = 8$. A и B — взаимно простые числа. НОД (A, B) = 1. 45. По условию $\overline{ab} - (a+b) = \overline{ba}$. Откуда $4a = 5b$, что возможно при $a = 5$ и $b = 4$; число 54. 46. 100. 47. Число \overline{abcabc} последовательно делится на 13, 11 и \overline{abc} . Если вначале выполнить деление на \overline{abc} , то в частном получим 1001. $1001 = 11 \cdot 13 \cdot 7$. Поэтому ответ всегда будет 7. 48. 15. 49. 10. 50. 15 ч. 51. Разность $\overline{abc} - (a+b+c)$ делится на 9. Поэтому сумма сообщенных цифр является дополнением ближайшего числа, кратного 9. Исключением будет случай, когда сумма цифр даст число, кратное 9. Тогда зачеркнутая цифра может быть 0 или 9. В этом случае можно поставить дополнительное условие, чтобы зачеркнутая цифра не была нулем. 52. Доказательство такое же, как и при решении задачи 44. 53. 4. Всякое число однозначно раскладывается на простые множители. Поэтому из делителей числа 24 можно составить строго определенное число произведений, дающих 24. 54. Увеличится в 6 раз. 55. 50 кг.

56. $111 \frac{2}{3}$ кг. 57. 96 %. 58. 37,5 %. 59. 18 р. 75 к. 60. $\frac{10a+b}{a+b} \cdot 100 \% = 500 \%$, $10a+b=5a+5b$, $5a=4b$, $a=4$, $b=5$. Число 45. Число 10.
61. 2 км/ч. 62. $16 \frac{2}{3} \%$. 63. 50 %. 64. 1 р. 37 к. 65. $8 \cdot 0,125 \cdot 0,125 \cdot 0,8 = 0,1$.
66. Догонит через 3 мин 11 с. 67. Скорость автомобиля на обратном пути 60 км/ч. Всего в пути автомобиль находился $120 : 40 + 120 : 60 = 5$ (ч). Поэтому средняя скорость на всем пути будет $240 : 5 = 48$ км/ч. 68. Третий должен вернуть $\frac{5}{3}$ пакета. Тот, кто имел три пакета, получит 1 пакет, а тот, кто имел два пакета, получит $\frac{2}{3}$ пакета. 69. Заяц внес 5 р., Волк — 8 р. 70. $1 \frac{2}{3}$. 71. а) 1 и 2; б) 0,25 и 0,5. 72. 4 : 3 в пользу Волка. 73. Пусть сын имеет в данное время x р. Три месяца назад у него было $(x-9)$ р., а через три месяца будет $(x+9)$, $(x+9) : (x-9) = 3$. Откуда $x = 18$. 74. В $1 \frac{1}{3}$ раза. 75. 40 %. 76. За 1 день мастер выполняет $\frac{1}{3}$ часть всей работы. За 2 дня он выполнит $\frac{2}{3}$ части. Учащемуся на 2 дня остается $\frac{1}{3}$ часть. На всю работу учащемуся потребуется 6 дней. 77. Из равенства $\frac{2}{|y-2|} = 4$ находим $y = 1 \frac{1}{2}$ и $y = 2 \frac{1}{2}$. 78. $x=1$, $x=2$, $x=3$. 79. $2 \frac{9}{16} kb$.
80. Увеличится в 1,3 раза при $b > 0$ и $a \neq 0$. 81. Волк пробежит 2 км за время $2 : 20 = 0,1$ (ч). Заяц бегал это же время. Значит, он пробежит 4 км. 82. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
83. $0 < n < 1$. 84. 0. 85. $-5 \frac{1}{5}$. 86. Первый раз расстояние в 10 км между Зайцем и Волком будет через 4 часа, что следует из уравнения $15t + 20t = 140$. В этот момент Заяц будет находиться в точке с координатой (-10) , а Волк — в точке $A(0)$. Второй раз расстояние в 10 км будет через $4 \frac{4}{7}$ часа, что следует из уравнения $5t_1 + 20t_1 = 20$. В этот момент координата Зайца будет $(-1 \frac{3}{7})$, а Волка $(-11 \frac{3}{7})$. 87. а) 3,84 % от 25 равно 25 % или $\frac{1}{4}$ от 3,84; б) 37,5 от числа — это 75 % от 19 560 или 300 % от 4890, что и составляет 14 670. 88. Делится, т. к. каждое слагаемое делится на 12. 89. а) 9,1; б) 32. 90. 60, 12 и 10 млн. м³. 91. Продолжительность периодов составляет 2 года, 4 года, 6 и 8 лет. 60 см и 17,5 см. 92. 96 км. 93. Длина ленты 50 000 км, а площадь 1 км². 94. $m^2(13-\pi)$. 95. 20 с. 96. 16 дм²; 32 дм. 97. Уменьшится на учетверенную величину меньшего угла. 98. $27^\circ 30'$. 99. 8 и 7, 9 и 6, 10 и 5, 11 и 4, 12 и 3. 100. 7 : 6 или 1 : 6. 101. ≈ 600 км. 102. Ни одного, три или четыре. 103. 3 см и 4 см или 3,5 см и 3,5 см. 104. $C(-7)$, $D(-1)$. 105. Возможны расположения точек: 1) A , C , B , D ; 2) A , B , C , D ; 3) D , C , A , B ; 4) D , C , B , A ; 5) D , B , C , A . 106. 36π м². 107. $AC=11$ см, $BC=9$ см. 108. 180° , 72° . 109. Нет. 110. $2 \frac{2}{9}$ м². 11 $\frac{1}{9} \%$. 111. Масштаб карты у Зайца 1 : 10 000, у Волка — 1 : 20 000.



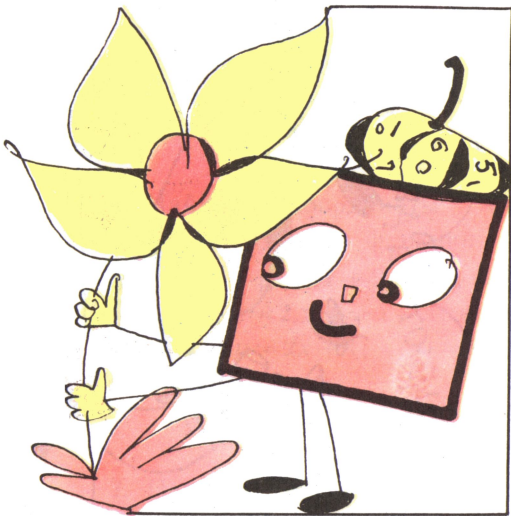




1. Вода в речке содержит 10 % разных примесей. А пить воду можно, если этих примесей не больше 1 %. Сколько родниковой воды надо добавить к 200 г речной, чтобы концентрация примесей была не больше 1 %?

2. Найдите те значения переменной z , при которых не имеет смысла выражение:

а) $\frac{10}{5-|5z-4|}$; б) $\frac{2}{1-\left|\frac{1}{z}\right|}$.



3. Петя зашифровал свое местонахождение на местности с условной координатной системой так: абсцисса и ордината точек местонахождения должны удовлетворять системе:

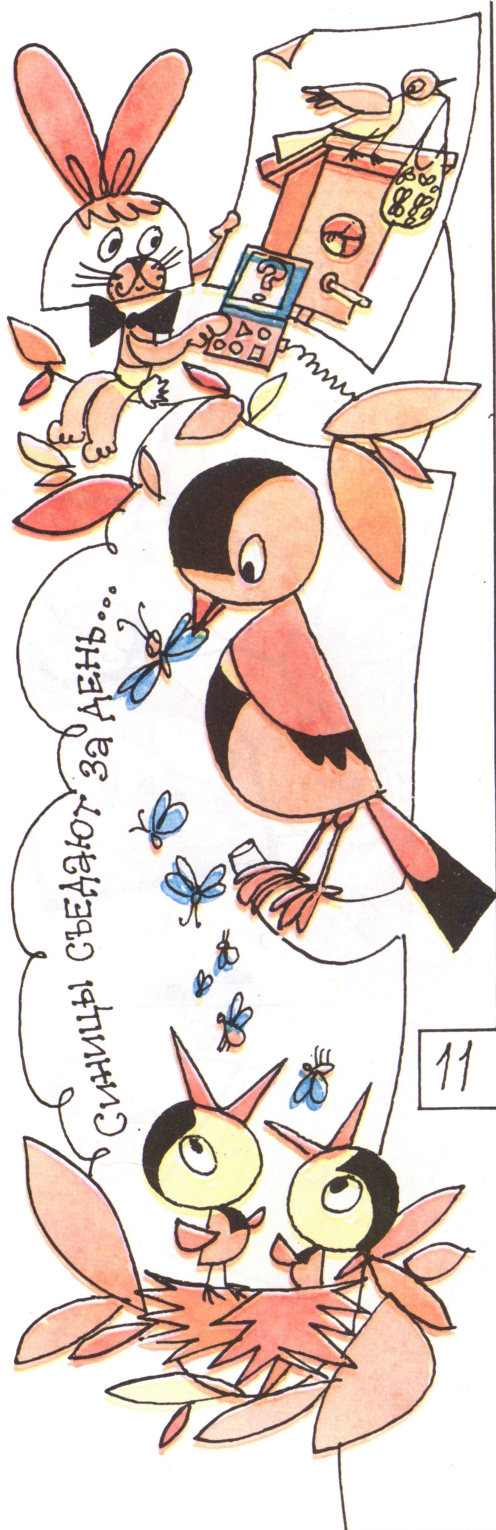
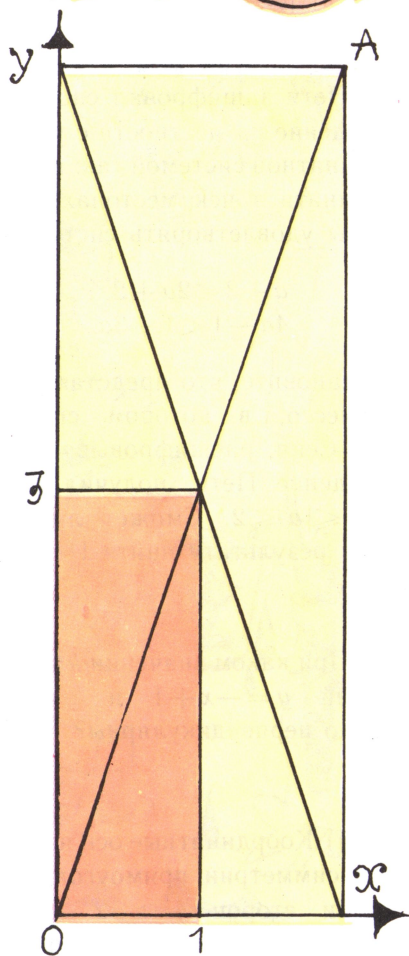
$$\begin{aligned} a+3 &< 2a+2, \\ 4a-1 &< 1+3a. \end{aligned}$$

Установите, что представляет собой место, в котором спрятался Петя? Сеня, расшифровывая местонахождение Пети, получил результат: $1 \leq |a| \leq 2$. Сможет ли он по такому результату найти Петю?

4. При каком значении k графики функций $y = -x + 1$ и $y = kx + 1$ взаимно перпендикулярны?

5. а) Координатные оси являются осями симметрии прямоугольника с длинами сторон 4 и 2. Найдите координаты вершин прямоугольника. Найдите уравнения прямых, на которых лежат стороны и диагонали прямоугольника.

5



б) Две стороны прямоугольника лежат на координатных осях. Точка пересечения диагоналей прямоугольника имеет координаты $(1; 3)$. Найдите:

1) координаты вершин прямоугольника;

2) уравнения прямых, которым принадлежат стороны и диагонали прямоугольника;

3) уравнения прямых, которым принадлежат стороны и диагонали прямоугольника, симметричного данному относительно Oy ;

4) уравнения прямых, которым принадлежат стороны прямоугольника, симметричного данному относительно начала координат.

6. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 2$ и $y = kx + 2$; б) $y = 2$ и $y = x$; в) $y = 2$ и $y = x - 1$; г) $y = x + 1$ и $y = 2x + 1$; д) $y = 5x + 4$ и $y = 5x - 4$.

7. Используя основное свойство дроби, упростите выражения:

$$\text{а) } \frac{\frac{1}{9}a + \frac{1}{3}b}{\frac{1}{45}a + \frac{1}{15}b};$$

$$\text{б) } \frac{\frac{4}{a^2b} - \frac{1}{b}}{\frac{2}{a^3b} - \frac{1}{a^2b}} \quad (a \neq 0, b \neq 0).$$

8. В выражение $(Aa - 1) : (A + 1)$ вместо A подставьте $\frac{1}{a+b}$ и упростите его. Имеет ли смысл полученное выражение при $a = 3$ и $b = -3$?

9. Найдите целые значения t , при которых целым числом является дробь:

$$\text{а) } \frac{t}{2-t}; \text{ б) } \frac{8-t}{5t}; \text{ в) } \frac{10+t}{5}.$$

10. Стенки скворечника имеют размеры:

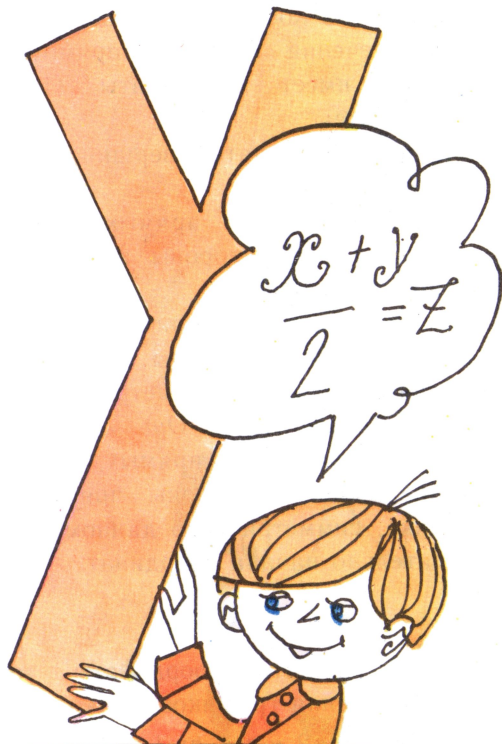
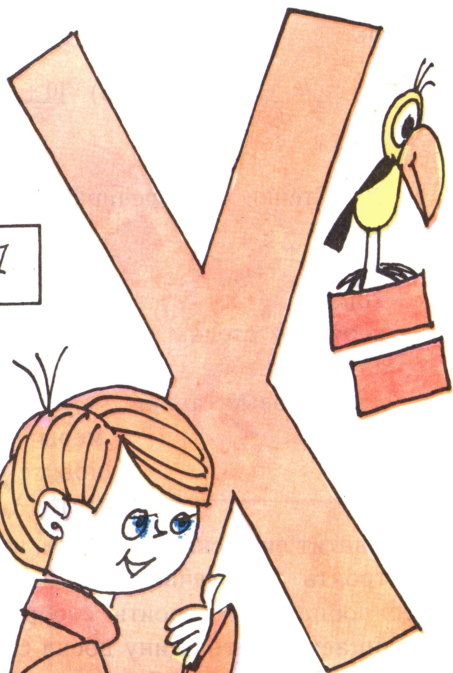
дно	15×15 см
крыша	15×20 см
передняя стенка	15×30 см
задняя стенка	15×25 см
две боковые стенки	? (размеры установите сами).

Хватит ли доски $1,8 \times 0,2$ м, чтобы построить скворечник? (Для тех, кто собирается строить скворечник сообщаем, что толщину доски следует брать не менее 1,5 см).

11. Синицы, скворцы, славки съедают за день пищи в 2,2 раза больше, чем весят сами. Пара скворцов выращивает за сезон четырех птенцов. Взрослый скворец весит 200 г, а птенец примерно 100 г. Сколько вредителей сада съедает за день такое семейство, если масса одного вредителя в среднем 0,1 г.

12. «Я старше тебя в 3 раза, и ты должен меня уважать!» — требует Волк от Зайца. «Не в 3 раза старше, а на 3 года старше», — возражает Заяц. «Нет, в 3 раза старше», — настаивает на своем Волк. «Нет, на 3 года старше», — твердит свое Заяц. «Ну, Заяц, погоди! Я докажу тебе свою правоту!» Кто из них прав?

17



СОВЕРШЕННО
СЕКРЕТНО

18



ВСТРЕТИМ
БОЛЬШЕГО
ЦИСЛА,

КВАДРАТ
"ПОСЛЕ ЗАВТРА"



13. Используя знаки математических действий и по одному разу каждую из десяти цифр, число 5 представьте в виде суммы трех дробных выражений.

14. Решите уравнение:

$$\frac{\left(\frac{1}{5} - 3x\right) \left(x - \frac{2}{15}\right)}{3x - \frac{2}{5}} = 0.$$

15. Докажите, что разность квадратов двух последовательных четных чисел делится на 4, а разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

16. Выполните действия:

а) $(m^{3n} + 1)(m^{3n} - 1);$

б) $(2^{x^2} - 1)^2.$

17. Витя рассуждал так: «Пусть даны числа x и y . Обозначим $\frac{x+y}{2} = z$. Отсюда $x = 2z - y$ и $2z - x = y$. Перемножим почленно эти равенства: $2xz - x^2 = 2yz - y^2$ или $x^2 - 2xz = y^2 - 2yz$. Прибавим к обеим частям по z^2 . Имеем: $x^2 - 2xz + z^2 = y^2 - 2yz + z^2$. Или $(x - z)^2 = (y - z)^2$. Откуда $x - z = y - z$ и $x = y$, то есть любые два числа равны между собой». Где была допущена ошибка?

18. Миша с Ваней, подражая разведчикам, вели между собой шифрованную переписку. Ваня пишет Мише: «Встретимся наибольшего числа, квадрат «послезавтра» которого поместится в числе дней месяца, в доме с номером, равным квадрату суммы «послезавтра» и «завтра» от дня

встречи. Время встречи — квадрат разности между «послезавтра» и «вчера» от дня встречи. Как вы поняли шифровку?

19. Вычислите:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}}$$

20. Найдите значение выражения

$$\frac{\frac{1}{2}x + 5}{8x - 3}, \text{ если: а) } x = 1, \text{ б) } x = \frac{3}{8}.$$

21. Число 21 разделите пропорционально числам $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

22. Решите уравнение: $7x - (5,5 - x) = 1\frac{1}{2} + x$.

23. Решите неравенство: $1 - 2 \times \times (0,3x - \frac{3}{4}) < 2\frac{1}{2}$.

24. Проходят ли графики функций $y = \frac{1}{3}x - 2$ и $y = \frac{6}{x}$ через точку $(6; 0)$?

25. Решите систему уравнений:

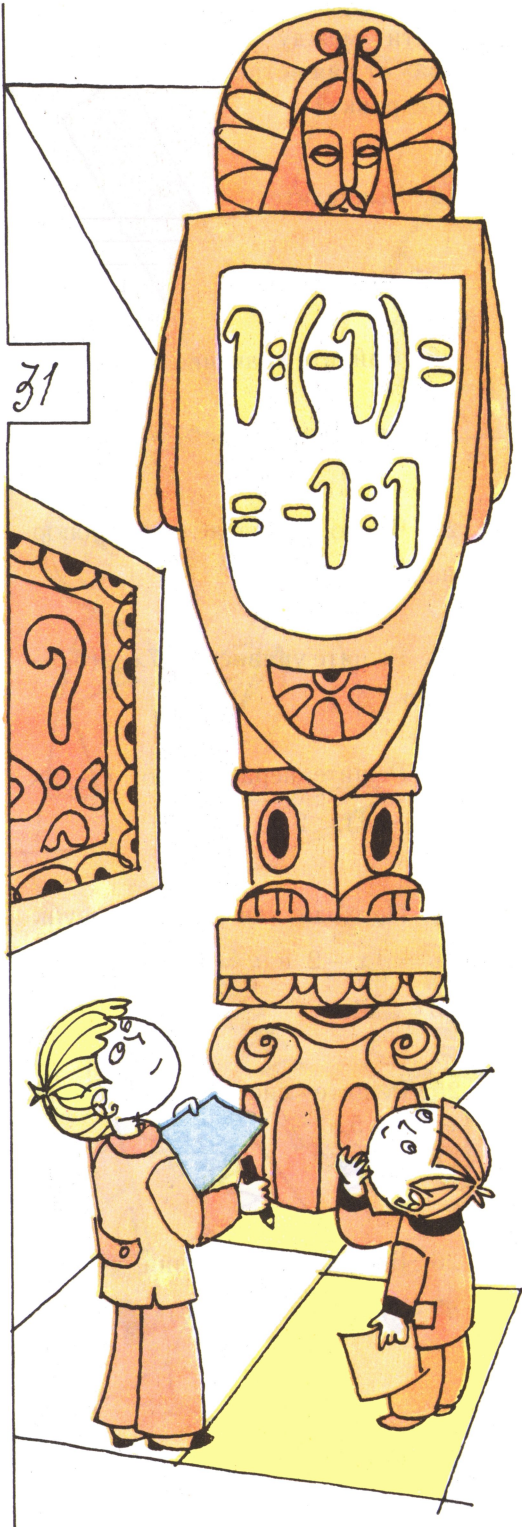
$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

26. Выполните действия:

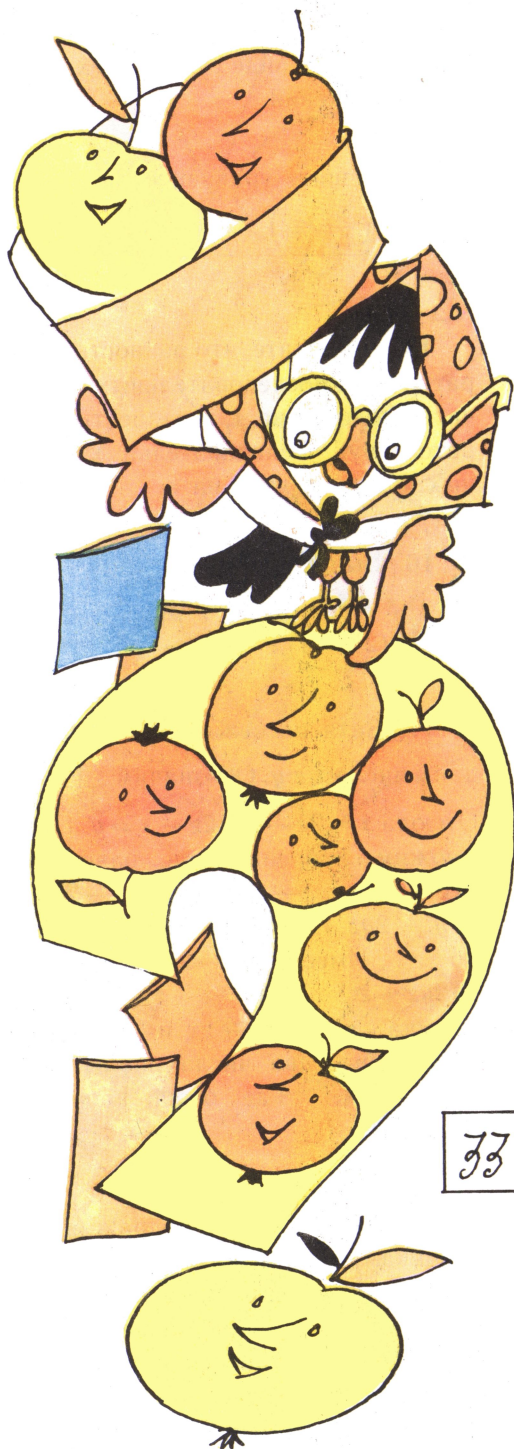
а) $a^m \cdot a^3 \cdot a^8 \cdot a : a^{m+11};$ б) $\frac{24^3}{27 \cdot 2^4}.$

27. Разложите на множители: $2 - 4y - 8y^2 + 16y^3.$

31



33



28. Ваня утверждал, что уравнение $9x + 27 = 8x + 24$ не имеет решения. Миша возражал. Тогда Ваня привел такое доказательство: «На основании распределительного закона имеем: $9(x + 3) = 8(x + 3)$. После упрощения имеем: $9 = 8$. Что ты теперь скажешь?» А вы что скажете?

29. Коэффициент пропорциональности двух величин равен 1,4. Чему равно процентное отношение соответствующих значений этих величин?

30. Докажите, что среднее арифметическое квадратов двух простых чисел, из которых каждое больше 2, есть целое число.

31. Правильна ли пропорция: $1 : (-1) = -1 : 1$? Какому смыслу пропорциональных величин она противоречит?

32. В кооперативе по искусственному разведению перепелок имеется инкубатор с определенным числом температурных камер. Для разведения перепелок приобретено определенное число яиц. Если в каждую камеру класть по 2, по 3, по 4, по 5 или по 6 яиц, то все камеры будут заняты, но не на полную их вместимость и в каждом случае будет оставаться одно яйцо лишним. Если же класть по 7 яиц, то часть камер будет заполнена полностью, а часть останется пустой. Сколько было приобретено яиц? На сколько яиц рассчитан инкубатор при полной загрузке всех его камер? Сколько денег получит кооператив от продажи одного выводка перепелок при работе инкубатора

на полную его вместимость, если выживаемость птенцов составляет 90 %, а пара перепелок стоит 10 р.?

33. В n пакетов надо поровну разложить яблоки. Если разложить яблоки, которые есть в наличии, то лишними окажутся 4 яблока. Если добавить еще 3 яблока, то пакетов потребуется на один больше. Сколько всего могло быть яблок?

34. Докажите, что сумма трех последовательных нечетных чисел не делится на 6.

35. Докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет целые решения, если коэффициенты a и b взаимно простые числа.

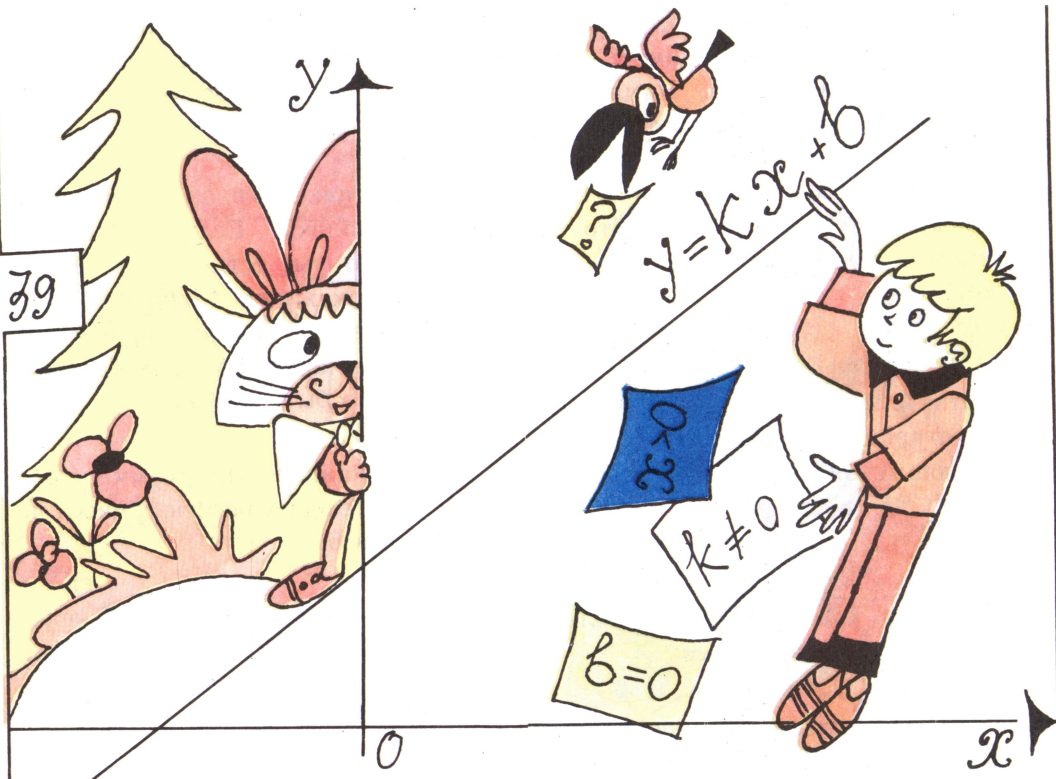
36. Дробь $\frac{m}{n}$ — несократимая. Докажите, что и дробь $\frac{m-n}{m+n}$ тоже несократимая.

37. Докажите, что дробь $\frac{k(k-3)}{2}$ есть целое число при любом натуральном k .

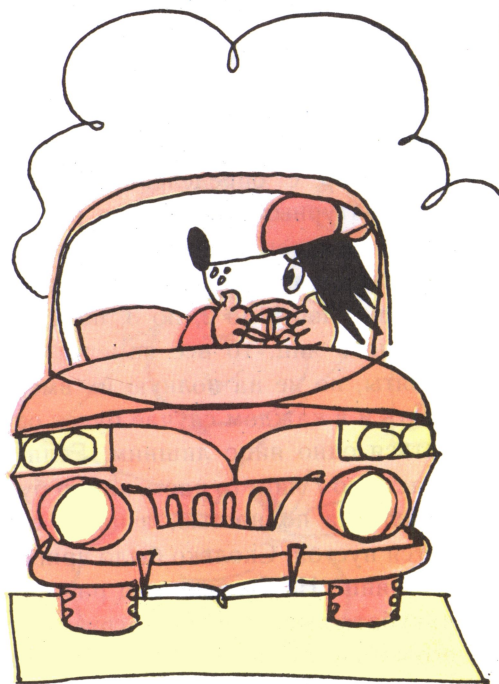
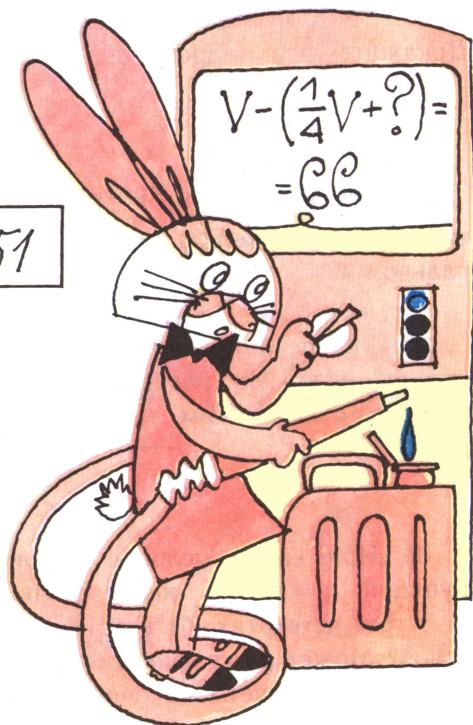
38. Употребляя знаки действий и скобки, число 1988 представьте выражением, содержащим только цифру 2.

39. При каком условии график функции $y = kx + b$ имеет точки: а) в трех четвертях; б) в двух; в) в одной? Может ли график иметь точки во всех четырех четвертях? (См. с. 60.)

39



51



40. В 1988 г. в СССР собрано 195 млн. т зерна. Средний урожай с гектара составлял 17 ц. Сколько гектаров было засеяно зерновыми культурами? Вычислите, каков будет сбор зерна с этой площади, если удастся довести средний урожай до 20 ц с гектара.

41. При каком k многочлен $4x^2 + 12xy + ky^2$ является полным квадратом?

42. Найдите пару чисел (a, b) , при которых уравнение $ax + by = k$ имеет решение (k, k) . Сколько существует таких пар?

43. Решите систему $\begin{cases} \overline{ab} + b = 44, \\ a - b = 2. \end{cases}$

44. Найдите область определения выражения:

- а) $\frac{|x+3|}{5}$; б) $\frac{2}{2m-3}$;
 в) $\frac{2m-3}{0,3-0,2m}$; г) $\frac{5}{|x|-5}$;
 д) $\frac{1}{(x+2)(x+3)}$.

45. При каком условии равна нулю дробь:

- а) $\frac{3-|x|}{2}$; б) $\frac{(2x-1) \cdot x}{(x-\frac{1}{2})(x+4)}$?

46. При каком a уравнение $5ax - 4 = x - 3$: а) имеет положительные решения; б) имеет отрицательные решения; в) не имеет решения; г) имеет нулевое решение?

47. При каких m и k система $\begin{cases} mx + 3y = 13, \\ x - ky = 10 \end{cases}$ имеет решение $(2; 3)$?

48. В системе $\begin{cases} a_1x + b_1y = 3, \\ a_2x + b_2y = 2 \end{cases}$
 $a_1 : a_2 = 1 : 3, b_1 - b_2 = 2$.

Найдите коэффициенты a_1, a_2, b_1 и b_2 , если пара $(2; 3)$ ее решение.

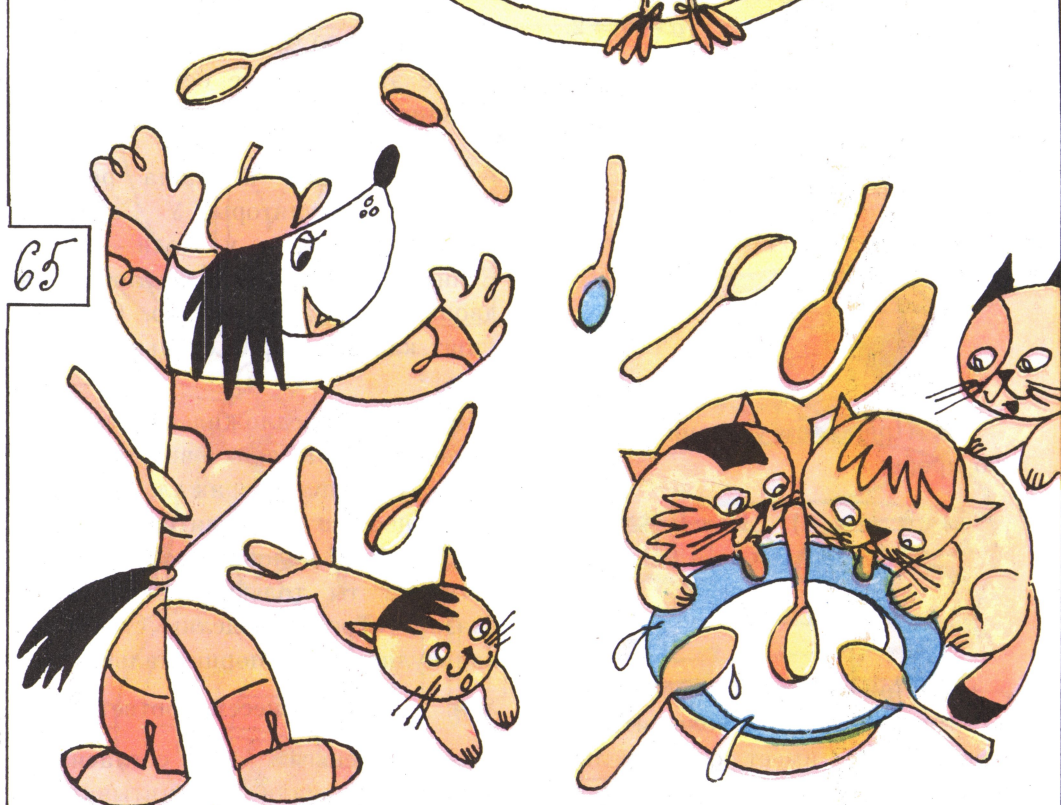
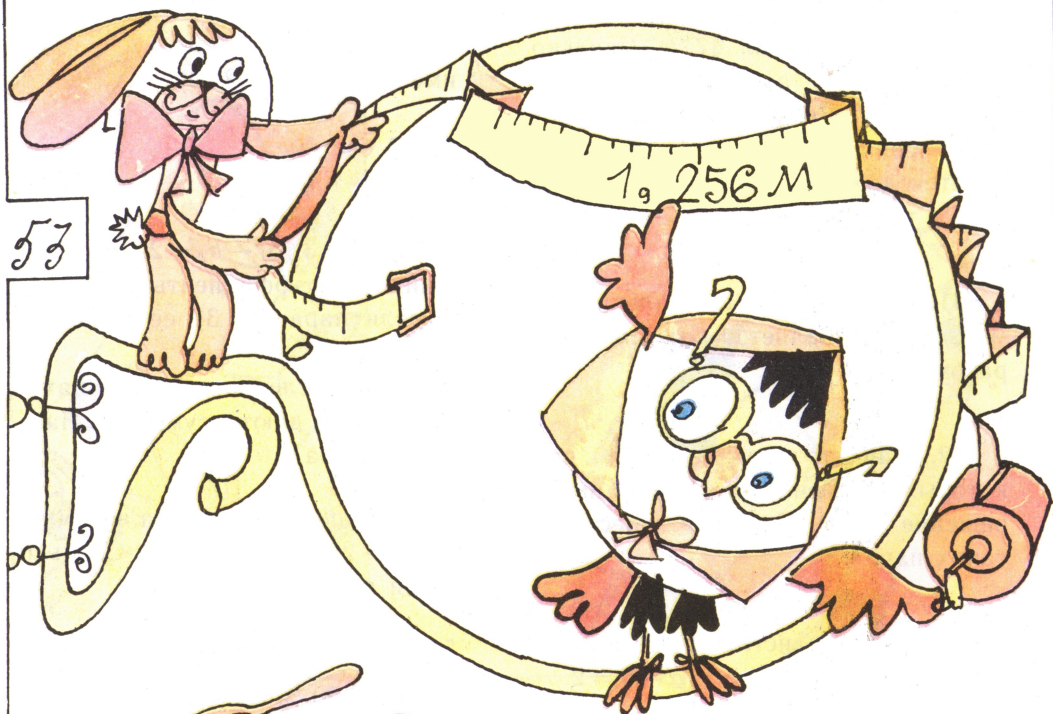
49. Три последовательных натуральных числа дают в сумме 24. Найдите эти числа.

50. При продаже товара на 150 р. получили 25 % прибыли. Сколько прибыли получили в рублях?

51. Из бака отлили $\frac{1}{4}$ часть бензина, потом 20 % его общей емкости. После этого в баке осталось 66 л бензина. Какова емкость бака?

52. а) Коля и Саша решили купить калькуляторы. У Саши не хватало 10 р., а у Коли — 20 р. Если купить один калькулятор на двоих, то останется 20 р. Сколько стоит калькулятор и сколько у кого денег?

б) Коля предложил купить один калькулятор на двоих и внести деньги поровну. Саша возражал: «У меня потребность в калькуляторе меньше, чем у тебя. Я половину задач решаю устно, а ты только треть». Коля сказал: «Тогда разделим стоимость калькулятора пропорционально числам $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ и внесем соответственно этому деньги». Саша согласился, а когда начали рассчитываться, увидел, что просчитался. Возьмите



стоимость калькулятора из предыдущей задачи и найдите суммы, внесенные каждым мальчиком.

53. Проволоку длиной 1,256 м согнули в окружность. Какова длина радиуса полученной окружности?

54. Число, полчисла, да еще четверть его, а всего 12. Какое это число?

55. В одном кармане лежит некоторое число копеек, в другом — в два раза больше, чем в первом, а в третьем — в два раза больше, чем в обоих карманах, а всего денег 1 р. 80 к. Сколько денег в каждом кармане?

56. Подберите тройку натуральных чисел, которая является решением уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 50$.

57. Решите уравнение:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

относительно переменной a .

58. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ |y| = x. \end{cases}$$

59. При каком k уравнения $9x + ky = 3$ и $\frac{1}{3}x + \frac{1}{27}y = \frac{1}{9}$ будут иметь одни и те же решения?

60. При каком значении k система уравнений $x + ky = 4$ и $x + 3y = 5$:

а) не имеет решения; б) имеет одно решение; в) имеет бесконечное множество решений?

61. При каком условии верно равенство $|kx| = k|x|$?

62. Найдите такое значение k , при котором разность $25^2 - k^2 6^2$ делится без остатка на 49.

63. Докажите, что выражение $k^3 - k$ делится на 6 при любом натуральном k .

64. Найдите возраст древнегреческого математика Диофанта (вероятно III век), если $\frac{1}{6}$ его жизни составляет детство, $\frac{1}{12}$ — юность, спустя $\frac{1}{7}$ — женился, еще через 5 лет родился сын, который прожил половину жизни отца, еще через 4 года Диофант умер.

65. Задача-шутка. Две кошки, еще треть кошки и еще в два раза больше кошек, чем за два раза. Сколько столовых ложек молока придется на целую кошку, если в блюде 21 ложка?

66. Вычислите:

а) $\frac{12^2 \cdot 15^2}{30^2}$; б) $\frac{k^2 p^2}{c} : \frac{kp}{c^2}$

при $k = 1,8$, $p = 5$, $c = 0,1$;

в) $a^{3-k} \cdot a^{5+2k} : a^{k+n}$ при $a = 1,5$ и $k = 2$.

67. Разложите на множители:

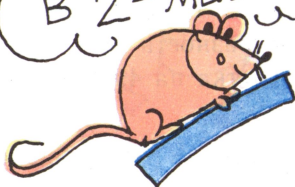
а) $5x - b + 25x^2 - 5bx$;

б) $a^m b + a^m b^2 + 2b + 2b^2$;

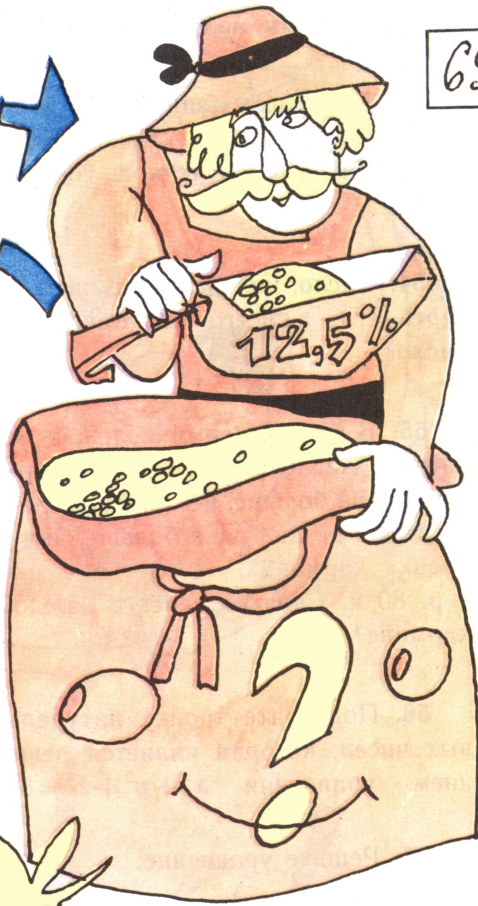
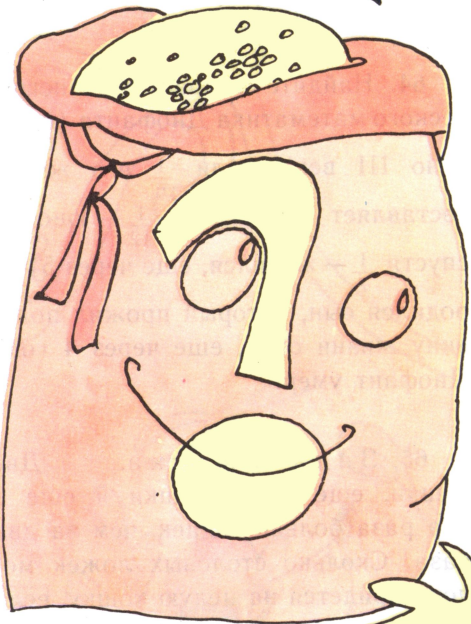
в) $(x+1)^3 - 2(x+1)^2 + x + 1$;

г) $x^2 - y^2 + x + y$.

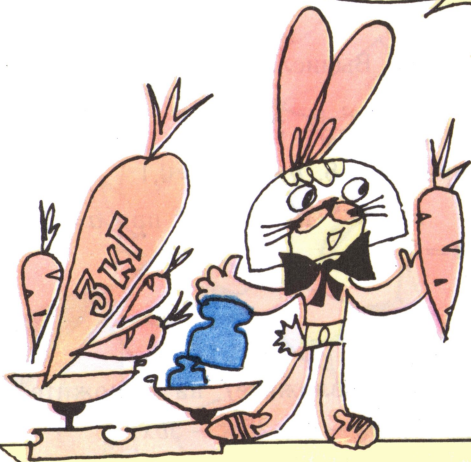
140 КГ
В 2^х МЕШКАХ!!!



69



72



68. Прочтите словами выражения:

а) $\frac{a+b}{2} - 3c$; б) $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} + c : d$.

69. В двух мешках 140 кг муки. Если из первого пересыпать 12,5 % муки, которая там есть, во второй мешок, то в обоих мешках муки станет поровну. Сколько муки в каждом мешке?

70. На заводе по переработке пищевых отходов города получают пасту и муку, которые идут на корм скоту. В каждом килограмме пасты 40 г протеина (белков), а в каждом килограмме муки 160 г протеина. За сутки завод перерабатывает 80 т отходов, которые идут на производство пасты и муки в отношении 1 : 5. Сколько протеина производит завод за сутки? Сколько корнеплодов экономит завод ежедневно, если 1 кг отходов эквивалентен 400 г корнеплодов? Сколько экономится средств за сутки, если 1 кг корнеплодов в среднем стоит 10 к. Сколько дополнительно можно получить протеина в городе, в котором живет 1,5 млн. человек, если пищевых отходов в среднем на каждого жителя приходится 50 кг в год?

71. Посеяли 120 семян ели, а возшло лишь 80. На одном аре высаживают 100 саженцев с учетом будущего прореживания — вырубki молодых елок для новогодних праздников. Сколько надо посеять семян ели, чтобы озеленить 1 га земель, если приживаемость саженцев 80 %?

72. Волк и Заяц должны были купить мясо и морковь. Число килограммов мяса кратно 3, а число

килограммов моркови кратно 4. Заяц за один раз может нести 3 кг, а Волк 4 кг. Заяц схитрил и купил на 1 кг моркови больше, а мяса на 1 кг меньше. Чтобы не раздражать Волка, он сказал: «Теперь новое число килограммов мяса кратно 4, а новое число килограммов моркови кратно 3. Ты будешь носить свое мясо, я морковь, а мне все равно придется сделать на одну больше ходок, чем тебе». Сколько продуктов было куплено?

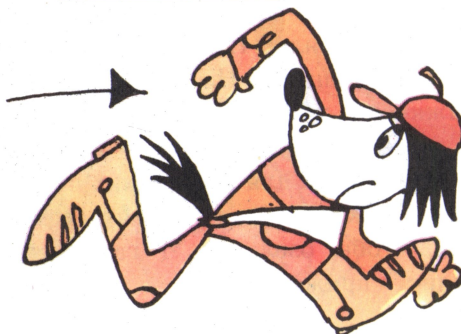
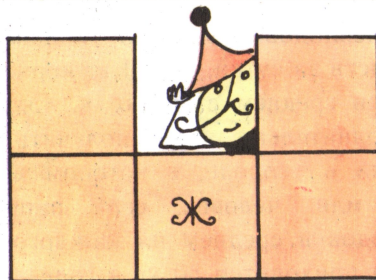
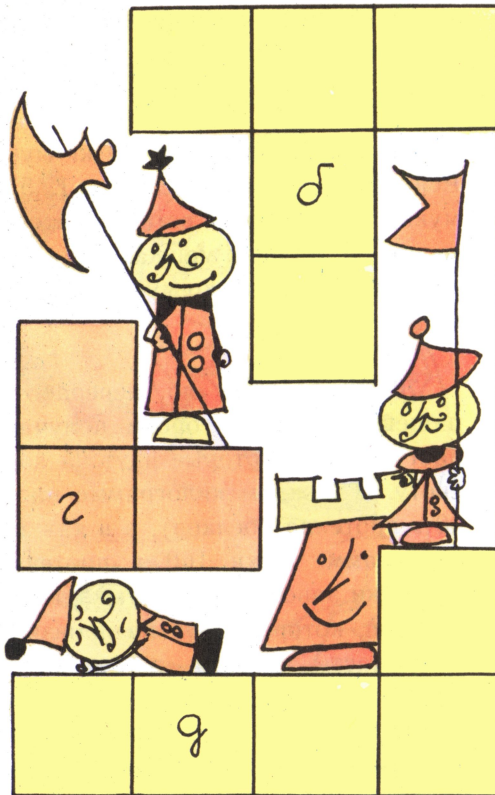
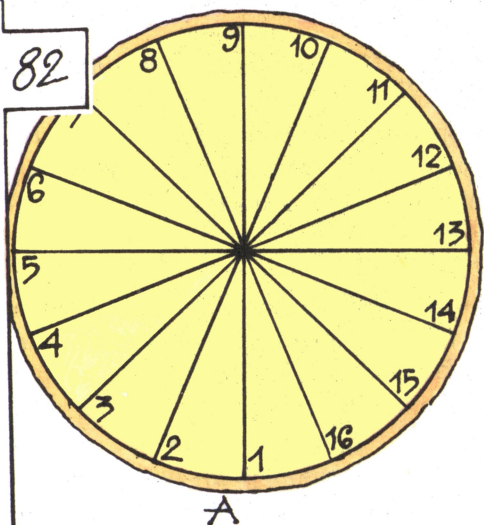
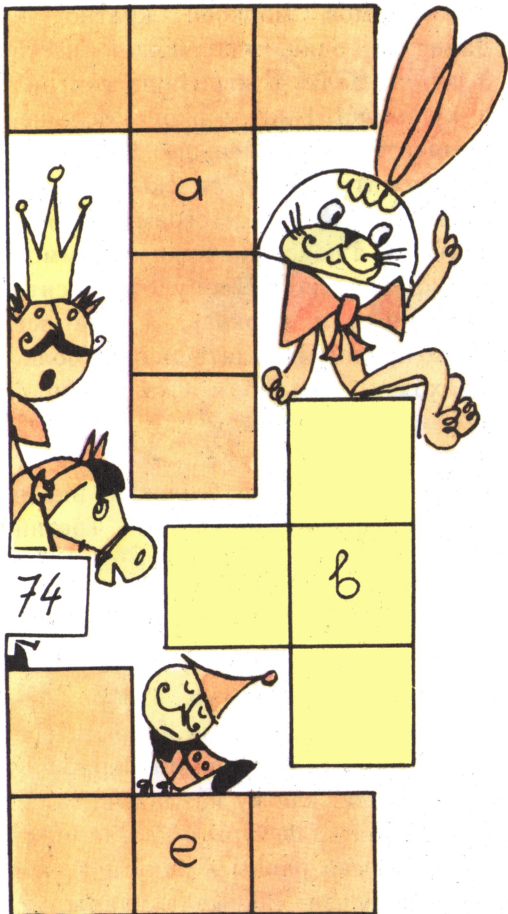
73. Один угол треугольника вдвое больше другого его угла. Третий угол в 2 раза больше суммы двух первых углов. Найдите углы треугольника.

74. Какой из фигур, изображенных на рисунке, можно накрыть все поля шахматной доски, придерживаясь правила: клетку накладывать на клетку, клетка фигуры и клетка шахматной доски равны и одну и ту же клетку нельзя накрывать дважды? (См. с. 66.)

75. Дан квадрат со стороной 1. Диагональ этого квадрата служит стороной другого квадрата. Во сколько раз площадь второго квадрата больше площади данного? Сделайте рисунок.

76. Металлический параллелепипед переплавили в куб. Найдите длину ребра куба, если размеры параллелепипеда $2 \times 5 \times 12,5$ дм.

77. Внешний угол равнобедренного треугольника в 3 раза больше внутреннего, смежного с ним. Найдите углы треугольника.



78. В треугольнике ABC $CA = CB$, $\angle ACB = 120^\circ$. $HB \perp BC$, $KB \perp BA$. Чему равен угол KBH ?

79. Докажите, что угол, который дополняет до прямого угла, меньший из смежных углов, равен полуразности смежных углов.

80. Найдите такие смежные углы α и β , чтобы выполнялось условие: $\varphi = 2\gamma$, где φ — угол смежный с α , а γ — угол смежный с β .

81. Ваня начал диктовать Мише условие задачи: «Разность двух углов прямоугольных треугольников равна 91° ...» Миша, не дослушав Ваню, отказался решать задачу, составленную Ваней. Почему?

82. Колесо имеет 16 спиц, они пронумерованы, как показано на рисунке.

а) Какой угол образуют между собой спицы первая и седьмая?

б) Когда колесо прокатилось без скольжения в сторону, указанную стрелкой, точкой касания стала 13-я отметка. Положение какой спицы относительно дороги займет спица 1?

в) Когда колесо катилось, спица 1 заняла положение, которое образует с ее первоначальным положением угол $67^\circ 30'$. Какая отметка на колесе будет точкой касания колеса дороги?

г) Диаметр колеса 1 м. На какое расстояние прокатилось колесо, если точкой касания стала отметка 9. А если точкой касания станет отметка 5?

83. а) Какую площадь имеет круг, длина окружности которого 3π м?

б) Длина окружности на 1 м больше ее диаметра. Какова площадь круга, ограниченного этой окружностью?

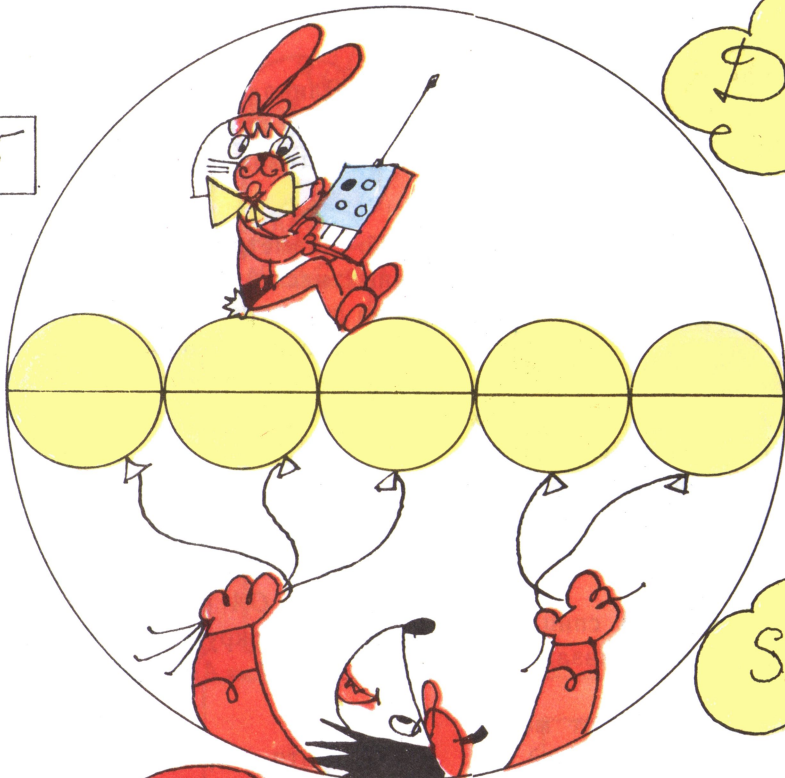
84. Длина одной окружности равна диаметру другой. Каково отношение длин таких окружностей?

85. Диаметр круга разбит на 5 равных частей и на каждой части, как на диаметре, построен круг. Найдите отношение площади данного круга к сумме площадей построенных кругов. (См. с. 68.)

86. На рисунке изображены окружности с общим центром и радиусами OA и OB . Длина окружности с радиусом OA равна 100 м. Чему равна длина окружности с радиусом OB , если $OA = AB$? (См. с. 68.)

87. Митя вырезал в голубятне оконце в форме равнобедренного треугольника, но у него нет планок для его облицовки. Обратился к товарищу: «Олег! Дай мне материал для облицовки окошка в форме равнобедренного треугольника со сторонами 5 и 2 дм». Олег не отказался помочь: «У меня есть хороший материал для этого. Сейчас пойду отрежу, сколько надо». Через некоторое время приносит планку длиной 9 дм. «Спасибо, Олег!» — поблагодарил Митя и, посмотрев на планку, попросил: «Только, будь добр, приладь наличники сам». «Так тому и быть», — сказал Олег и пошел оборудовать окошко. Как вы думаете, чем закончилась эта история?

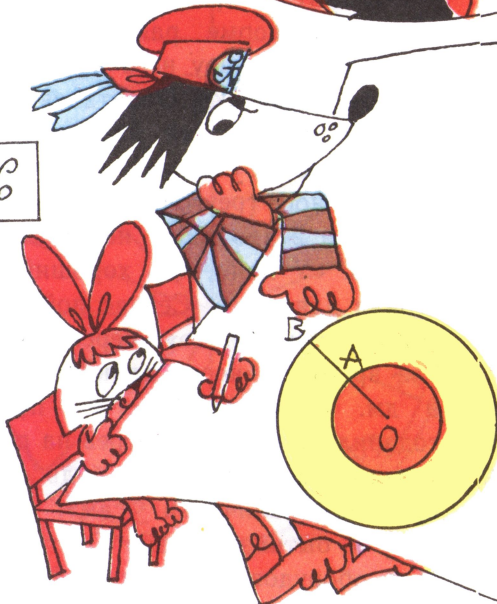
85



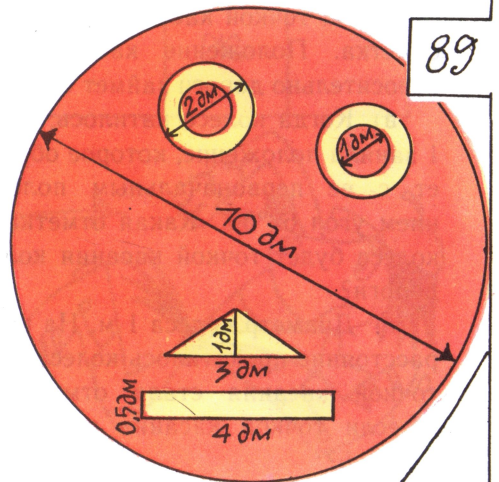
$$D = 5d$$

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

86



89



88. Существует ли треугольник, у которого две стороны, одна — 6 м, другая — 12 м, образуют тупой угол, а периметр этого треугольника 26 м?

89. Найдите площадь фигуры, окрашенной на рисунке в оранжевый цвет.

90. Периметр прямоугольного треугольника равен 15 дм. К катету этого треугольника приставлен треугольник, равный данному, так, что получился равнобедренный треугольник с периметром в $1\frac{2}{3}$ раза большим. Чему равна длина общего катета составленных треугольников?

91. На плоскости даны точки A и B . Что представляет собой геометрическое место точек, удовлетворяющих условию $AM + MB > AB$?

92. Две стороны треугольника имеют длины 15 м и 20 м, а третья сторона выражается числом, которое делится на 20. Найдите длину третьей стороны.

93. Две выпуклые фигуры не имеют общих точек. Отрезок соединяет две точки этих фигур. Докажите, что этот отрезок пересекает границы обеих фигур.

94. Даны две равные окружности с центрами O и O_1 и радиусом 1. Расстояние d между центрами этих окружностей определяется формулой $d = 2^n - 2$, где n принимает значение 1, 2 и 3. Как располагается одна окружность относительно другой в каждом случае?

95. Как построить равнобедренный прямоугольный треугольник по его гипотенузе?

96. Угол AOB равен 64° . Расстояния от точки M до биссектрисы этого угла и от точки M до стороны OA равны. Найдите угол AOM .

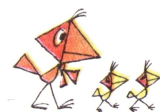
97. Из точки A проведены к окружности с центром O касательные AB и AC . B и C — точки касания. Найдите углы треугольника OBC , если $\angle BAC = 60^\circ$.

98. а) Как построить равнобедренный треугольник с углом 135° и с заданной длиной a равных сторон, имея лишь прямоугольный треугольник с углом 45° ?

б) Как построить равнобедренный треугольник с углом 135° , имея линейку и циркуль, если задана длина a одинаковых сторон?

99. Какое наибольшее и какое наименьшее может быть основание равнобедренного треугольника с периметром 100 м, если стороны должны иметь длины, кратные 5?

100. В окружности хорда AB стягивает дугу в 104° . Хорда CD параллельна AB и равна ей по длине. Найдите величину угла BCD .

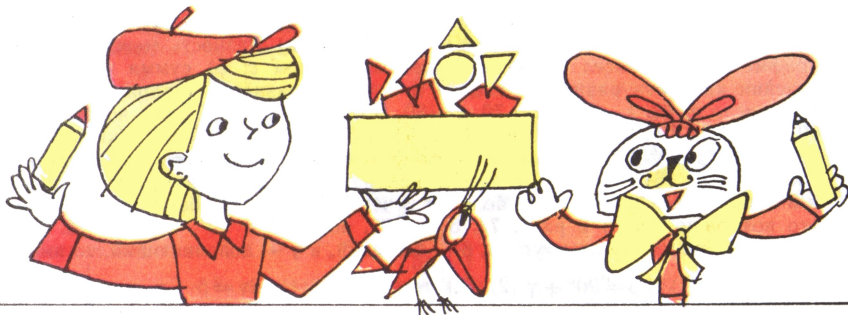


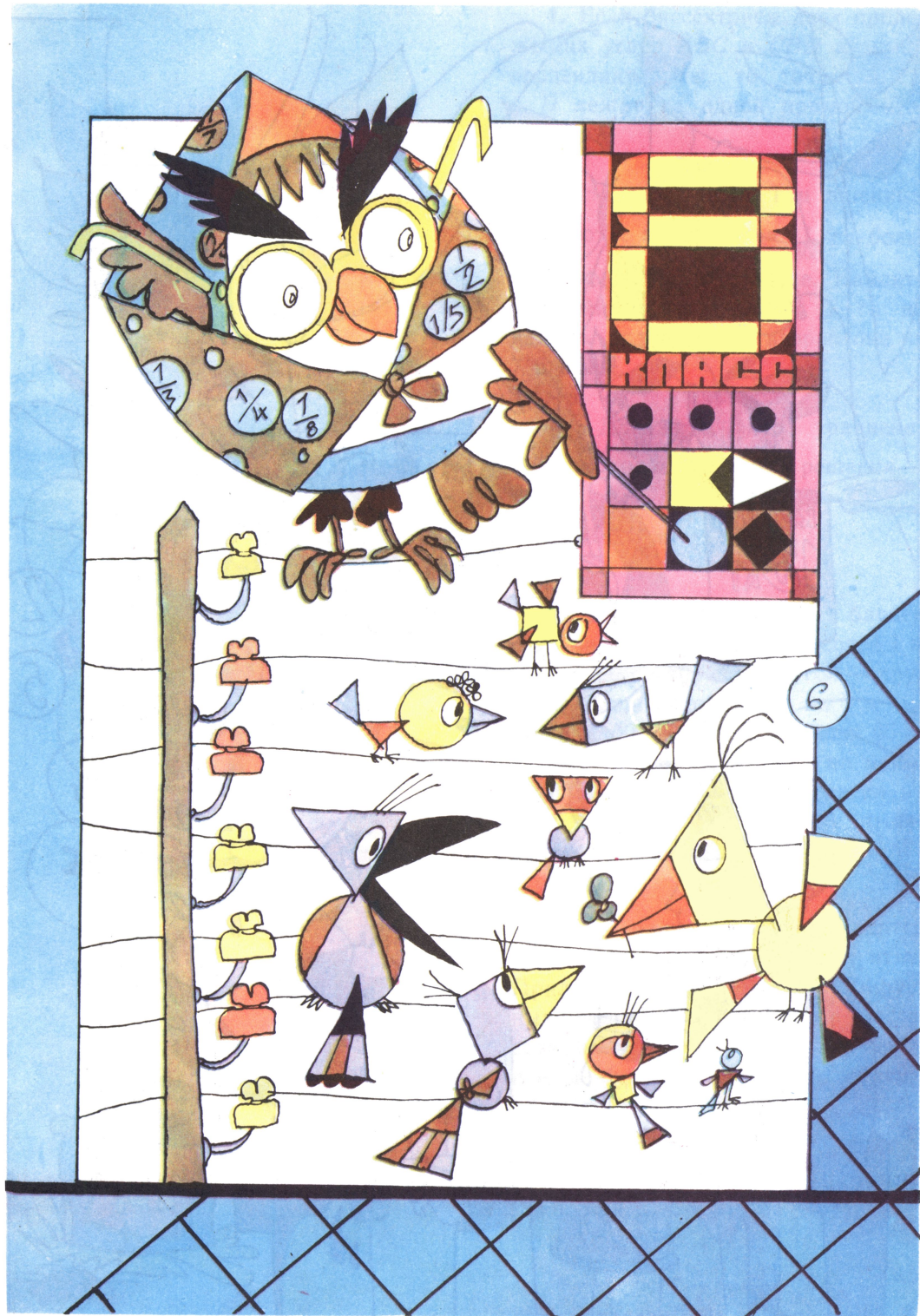


1. 1,8 л. 2. а) $z = \frac{9}{5}$, $z = -\frac{1}{5}$. б) $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$. 3. Петя находился внутри квадрата, вершины которого имеют координаты (1; 1), (2; 1), (2; 2) и (1; 2). Сене по его решению надо обследовать еще три квадрата, симметричных данному относительно осей координат и начала координат. 4. $k = 1$. 5. а) $(-2; -1)$, $(-2; 1)$, $(2; 1)$; $(2; -1)$, $y = -1$, $x = -2$, $y = 1$, $x = 2$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$. Возможен и ответ: $(-1; -2)$, $(1; -2)$; $(1; 2)$; $(-1; 2)$, $y = 2$, $y = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 2x$, $y = -2x$; 6) 1) $(0; 0)$, $(0; 6)$, $(2; 6)$, $(2; 0)$, 2) $y = 0$, $x = 0$, $y = 6$, $x = 2$, $y = 3x$, $y = -3x + 6$; 3) $y = 0$, $x = 0$, $x = -2$, $y = 6$, $y = -3x$, $y = 3x + 6$; 4) $y = 0$, $x = 0$, $x = -2$, $y = -6$, $y = 3x$, $y = -3x - 6$. 6. а) $(0; 2)$; б) $(2; 2)$; в) $(3; 2)$; г) $(0; 1)$; д) точки пересечения нет. 7. а) Умножив числитель и знаменатель на 45, получим $5(a \neq -3b)$; б) умножив числитель и знаменатель на $a^2b(a \neq 0, b \neq 0; a \neq 2)$, получим после упрощений $a(2 + a)$. 8. $-\frac{b}{1+a+b}$. При $a = 3$ и $b = -3$ полученное выражение не имеет смысла, так как не имеет смысла при этих данных исходное выражение. Кроме того, в условии должно соблюдаться и $A + 1 \neq 0$. 9. а) Пусть $\frac{t}{2-t} = k$, где k — целое число и $t \neq 2$, $t = 2k - kt$; $t = \frac{2k}{1+k}$. При k равном -3 , -2 , 0 и 1 t принимает целые значения 3 , 4 , 0 и 1 ; б) $t = \frac{8}{5k+1}$; при k равном -1 и 0 t принимает значения -2 и 8 ; в) $t = 5k$, где k — любое целое число. 10. Размеры боковых стенок — прямоугольные трапеции с основаниями 30 и 25 см и одной боковой

стороной, равной 15 см. Хватит. 11. $\approx 17\,600$. 12. Оба правы, если Зайцу 1,5 года, а Волку — 4,5 года. 13. Например: $\frac{90}{8+7} + \left(-\frac{4+6}{5}\right) + \frac{1+2}{3} = 5$. 14. $\frac{1}{15}$. 15. $(2n+2)^2 - (2n)^2 = 4(2n+1)$; $(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = 8n$, где n — натуральное число. 16. а) $m^{6n} - 1$; б) $2^x - 2^{x^2+1} + 1$. 17. Ошибка при переходе от равенства $(x-z)^2 = (y-z)^2$ к равенству $x-z=y-z$, что верно только при $x=y$. 18. Если 1-е число «сегодня», то «завтра» — 2-е, «послезавтра» — 3-е. $3^2 < 30$, $4^2 < 30$, $5^2 < 30$, $6^2 > 30$. Следовательно, наибольшее число, квадрат которого помещается в числе дней месяца 5. «Послезавтра» — 5-е, «завтра» — 4-е число. Встреча назначена на 5-е число, номер дома 81 $(5+4)^2$. Время встречи 9 часов. 19. $\frac{1}{2}$. 20. а) 1,1; б) не имеет смысла. 21. $7\frac{7}{8}$, $7\frac{7}{8}$, $5\frac{1}{4}$. 26. б) 32. 27. $2(1+2y)(1-2y)^2$. 28. Корень уравнения — 3. Нельзя делить обе части уравнения на выражение, содержащее переменную, если во множестве значений этого выражения входит число 0. 29. 140 %. 30. Квадрат каждого простого числа, большего двух, есть нечетное число. Сумма двух нечетных чисел есть число четное, а потому делится на 2. 31. Лишено смысла высказывание: «1 во столько раз больше —1, во сколько раз —1 больше 1». 32. Яиц 721. Из условия раскладывания яиц следует, что ячеек 360. Инкубатор рассчитан на выращивание $360 \cdot 7 = 2520$ перепелок. Выживают 2268 птенцов или 1134 пары, что даст прибыль 11 340 р. 33. Из условия следует, что в один пакет вмещается 7 яблок. Яблоко может быть любое число, которое при делении на 7 дает в остатке 4, т. е. $4+7(n-1)$, где n — натуральное число. 34. $2n-1+2n+1+2n+3=6n+3=3(2n+1)$. Сумма делится на 3, а на 2 не делится. 35. Предположим противное: a и b имеют общий делитель k . Тогда $a=kq_1$ и $b=kq_2$; $kq_1x+kq_2y=c$, $q_1x+q_2y=\frac{c}{k}$. Левая часть — целое число, значит, c должно делиться на k . Но c не имеет общего делителя с a и b . Противоречие. 36. Если предположить, что дробь $\frac{m-n}{m+n}$ сократимая, то m и n имеют общий делитель. 37. При k четном условие выполняется. При k нечетном множитель $k-3$ — четное число. 38. Например: $2^2(2^2+2^{2-2})+2^{2^2}(2^2+2^{2-2})+2^{2^2+2^{2-2}}+2^{2^2+2^{2-2}}$. 39. а) $k \neq 0$, $b \neq 0$; б) $k=0$, $b \neq 0$; в) $k \neq 0$, $b=0$, $x > 0$ (есть и другие варианты). 40. $\approx 114,8$ млн. га, 230 млн. т. 41. $k=9$. 42. Любая пара чисел, которая дает в сумме 1. 43. $a=4$, $b=2$. 44. а) $-\infty < x < +\infty$; б) $m \neq \frac{3}{2}$; г) $x \neq 5$, $x \neq -5$; д) $x \neq -2$, $x \neq -3$. 45. а) -3 ; 3; б) $x=0$. 46. а) $a > \frac{1}{5}$; б) $a < \frac{1}{5}$; в) $a = \frac{1}{5}$; г) нет таких значений. 47. $m=2$, $k=-\frac{8}{3}$. 48. $a_1=\frac{5}{4}$, $a_2=\frac{15}{4}$, $b_1=\frac{1}{6}$, $b_2=-\frac{11}{6}$. 49. 7, 8 и 9. 50. 30 р. 51. 120 л. 52. а) 50 р.; б) Коля внес 20 р., а Саша 30 р. 53. 20 см. 54. $6\frac{6}{7}$. 55. 20 к., 40 к., 1 р. 20 к. 56. 3, 4, 5. 57. $\frac{bcd}{bc-dc-bd}$. 58. (2,5; 2,5). 59. 1. 60. а) $k=3$; б) $k \neq 3$; в) нет таких значений. 61. $k \geq 0$. 62. $25^2 - k^2 6^2 = (25+6k)(25-6k)$. Откуда $k=4$. 63. $k^2 - k = k(k-1) = k(k-1)(k+1)$. Из трех последовательных натуральных чисел одно делится на 2 и одно на 3. 64. Из уравнения $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x = \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$ находим $x=84$. 65. 3. 66. а) 36; б) 1; в) 0,9. 67. а) $(5x-b)(1+5x)$; б) $b(1+b) \times (a^m+2)$; в) $x^2(x+1)$; г) $(x+y)(x-y+1)$. 68. а) Разность между средним арифметическим чисел a и b и утроенным числом c ; б) сумма частных от деления квадрата разности чисел a и b на их разность квадратов и числа c на число d . 69. $x-0,125x=70$, $x=80$. В одном мешке 80 кг, а во втором — 60 кг. 70. 11,2 т, 32 т, 3200 р., 210 т. 71. 1875. 72. 8 кг мяса и 9 кг моркови. 73. 20° , 40° , 120° . 74. в) Можно. Такую фигуру нужно наложить на шахматную доску 16 раз ($64:4=16$). За восемь накладываний будет покрыто 24 черных и 8 белых полей и за 8 — 24 белых и 3 черных. Итого 32 белых и 32 черных, что возможно. 75. В 2 раза. 76. 5 дм. 77. 45° , 45° и 90° . 78. 30° . 79. Если α — меньший из смежных углов, β — больший, а γ — дополняющий, то имеем: $\alpha = 90^\circ - \gamma$ (1) и $\beta = 90^\circ + \gamma$ (2). Вычтем из (2) (1): $2\gamma = \beta - \alpha$, $\gamma = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

80. $\alpha = \gamma$ и $\beta = \psi$ как вертикальные, а потому $\beta = 2\alpha$, $\alpha + 2\alpha = 180^\circ$; 60° и 120° 81. Разность любых двух углов прямоугольного треугольника не может быть больше прямого. 82. а) 135° ; б) 5-й; в) 4-е; г) 1,57 м; 2,36 м. 83. а) $2,25\pi \text{ м}^2$; б) $\frac{\pi}{(2\pi - 1)^2}$. 84. 1 : π . 85. 5 : 1. 86. 200 м. 87. Планки длиной 9 дм не хватит для облицовки окна, имеющего стороны 5 дм, 5 дм и 2 дм. 88. Нет, так как сторона, лежащая против тупого угла, в таком треугольнике не наибольшая. 89. $(23,5\pi - 3,5) \text{ дм}^2$. 90. 2,5 дм. 91. Вся плоскость, кроме отрезка AB . 92. 20 м. 93. Пусть F и F_1 — выпуклые фигуры, не имеющие общих точек. Пусть точка A принадлежит фигуре F , а точка B принадлежит фигуре F_1 . Предположим, что AB не пересекает границу F . Тогда точка B по определению выпуклой фигуры должна принадлежать фигуре F , что приводит к противоречию. Точно также доказывается, что AB пересекает границу F . 94. При $n = 1$ окружности совпадают, при $n = 2$ имеет место внешнее касание, при $n = 3$ — окружности не имеют общих точек. 95. Из середины отрезка, равного по длине гипотенузе, провести к нему перпендикуляр длиной, равной половине гипотенузы. 96. 16° . 97. 30° , 30° и 120° . 98. б) На прямой m выбираем точку A . Проводим перпендикуляр AB к m . Прямой угол делим пополам. На сторонах образовавшегося угла в 135° откладываем длины одинаковых сторон. 99. 40 м и 10 м 100. 90° или 76° в зависимости от того, как расположены точки C и D на окружности.







1. Если биссектрисы двух прилежащих углов ABC и CBD взаимно перпендикулярны, то точки A , B и D лежат на одной прямой. Докажите.

2. На одном поле 1 ц пшеницы снимают с площади на $\frac{7}{408}$ га большей, чем на втором поле. Найдите урожайность пшеницы с 1 га на каждом поле, если на втором она на 7 ц выше.

3. Докажите, что уравнение $\frac{2}{1-|x|} = 1$ не может иметь решения.

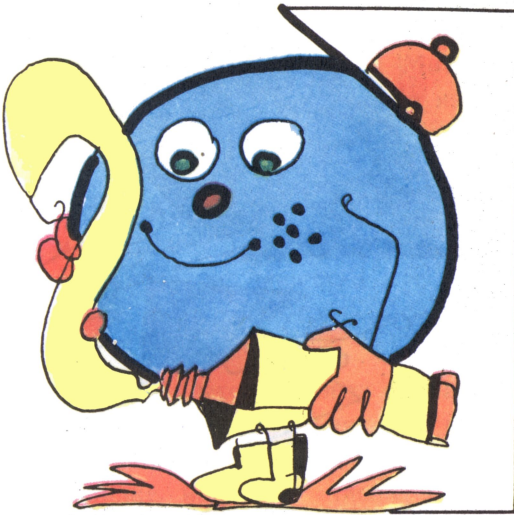
4. Вычислите: $\frac{49^2 - 29^2}{10 \cdot 156}$.

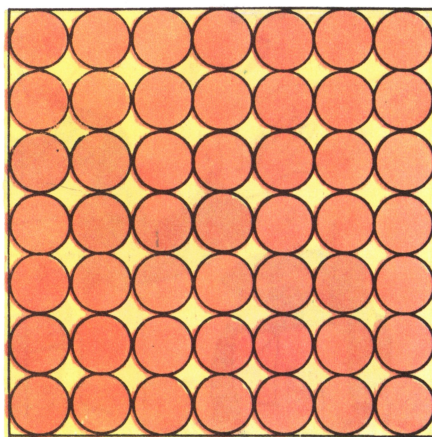
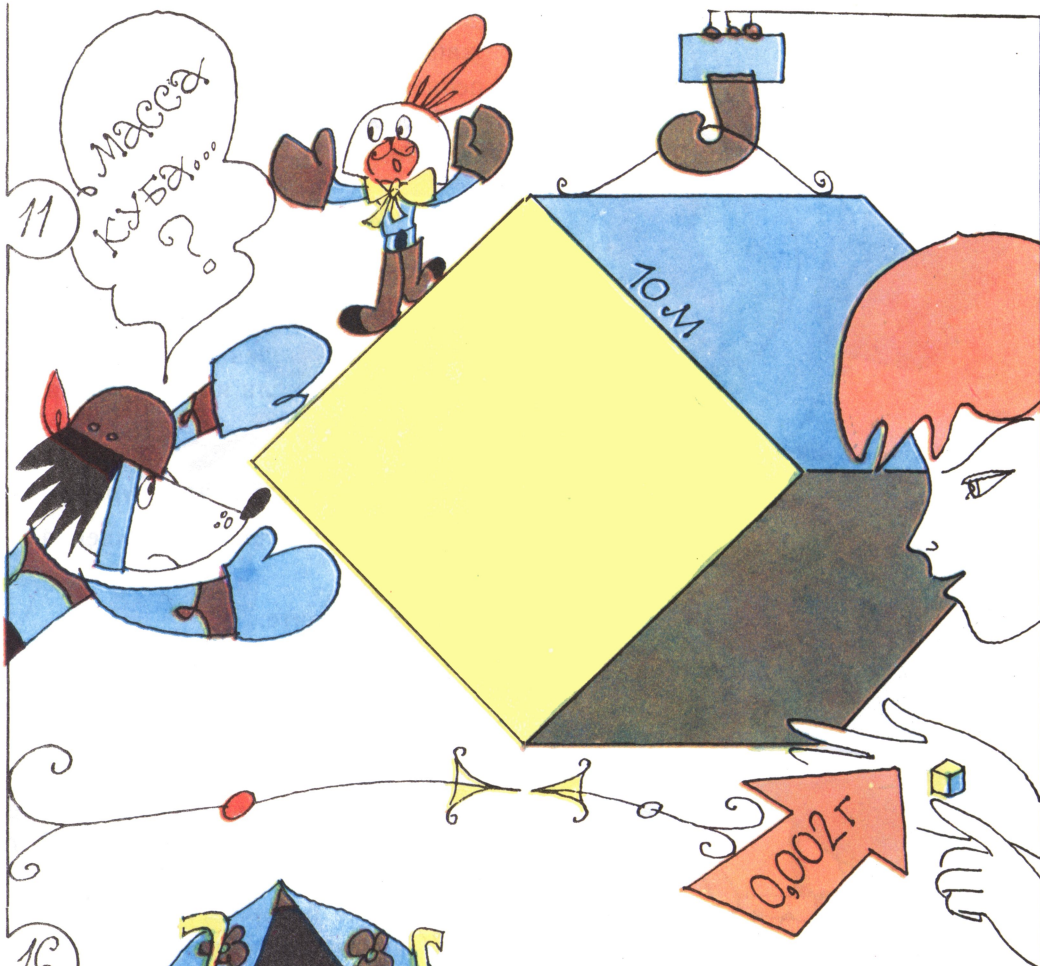
5. Миша и Саша красили барьер стадиона длиной 100 м и высотой 1 м (один одну сторону, другой — другую). Саша использовал на 1 м² не меньше 60 г, но не больше 65 г краски. Миша расходовал не менее 65 г, но не больше 70 г краски на 1 м². Хватит ли 13 кг краски, чтобы покрасить барьер?

6. На одну проволоку садятся 500 мелких или 250 крупных птиц. Прилетели 1700 мелких и 600 крупных птиц. Хватит ли им места, если натянули 7 таких проволок и птицы будут садиться достаточно плотно? (См. с. 73.)

7. Найдите целые решения неравенства: $|x-1| < 3$.

8. Дано: $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{k} < -\frac{1}{5}$. В каких пределах находится число k ?





9. На соревнованиях по стрельбе один стрелок имел попадания 3, 6, 7, 7, 6, 5, 4, 7, 6, 4, а другой — 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 5. Кто стрелял лучше, если качество стрельбы оценивать по среднему баллу попадания?

10. Петя и Митя размечали на местности треугольную площадку. Петя измерил ее периметр и послал Митю проверить результат его работы, выраженный целым числом метров. Митя, отмерив 56 метров одной стороны, длина которой 60 м, заявил, что Петя ошибся, и не стал продолжать измерение. Как Митя мог установить, что дальнейшее измерение бесполезно?

11. Куб с ребром 0,1 см имеет массу 0,002 г. Какова масса куба из такого же вещества и с ребром 10 м?

12. Имеется много одинаковых правильных треугольников. В вершинах каждого из них в произвольном порядке написаны числа 1, 2, 3. Треугольники сложили в стопку и нашли сумму чисел, попавших в каждый из трех углов стопки. Может ли оказаться, что в каждом углу стопки сумма чисел равна: а) 25; б) 50?

13. Два прыжка Волка или три прыжка Зайца составляют $(2 \pm \pm 0,02)$ м. Волк сделал 100 прыжков. В каких пределах находится расстояние, которое пробежал Волк? Сколько надо сделать прыжков Зайцу, чтобы пробежать расстояние в тех же пределах?

14. Петя придумал такое правило сокращения дроби $\frac{95}{29} = \frac{5}{2}$. Степень оно очень понравилось, и дробь $\frac{75}{27}$ он сократил по этому правилу. У кого из ребят ответ правильный? Найдите еще одну дробь, которую можно сократить по «Петинскому правилу».

15. Найдите хотя бы одно значение y , удовлетворяющее неравенству:

$$\underbrace{0,111\dots1}_{20 \text{ единиц}} < y < \underbrace{0,111\dots12}_{19 \text{ единиц}}$$

16. В квадрате со стороной 1 расположены 49 кругов одинакового, наибольшего в данном случае диаметра. Круги не накладываются один на другой. Сколько приблизительно кругов такого же диаметра могло бы поместиться на площади, не занятой кругами в квадрате?

17. Чтобы вычислить объем кучи грунта конической формы, используют приближенную формулу

$V = \frac{1}{20} L^3$, где $L = 2l$. Длина L измеряется перебрасыванием мерной ленты через вершину конуса (см. рис.). В приведенной таблице дана точная формула вычисления объема конуса. При помощи калькулятора заполните таблицу и убедитесь в полезности применения формулы для приближенных расчетов. (См. с. 78.)

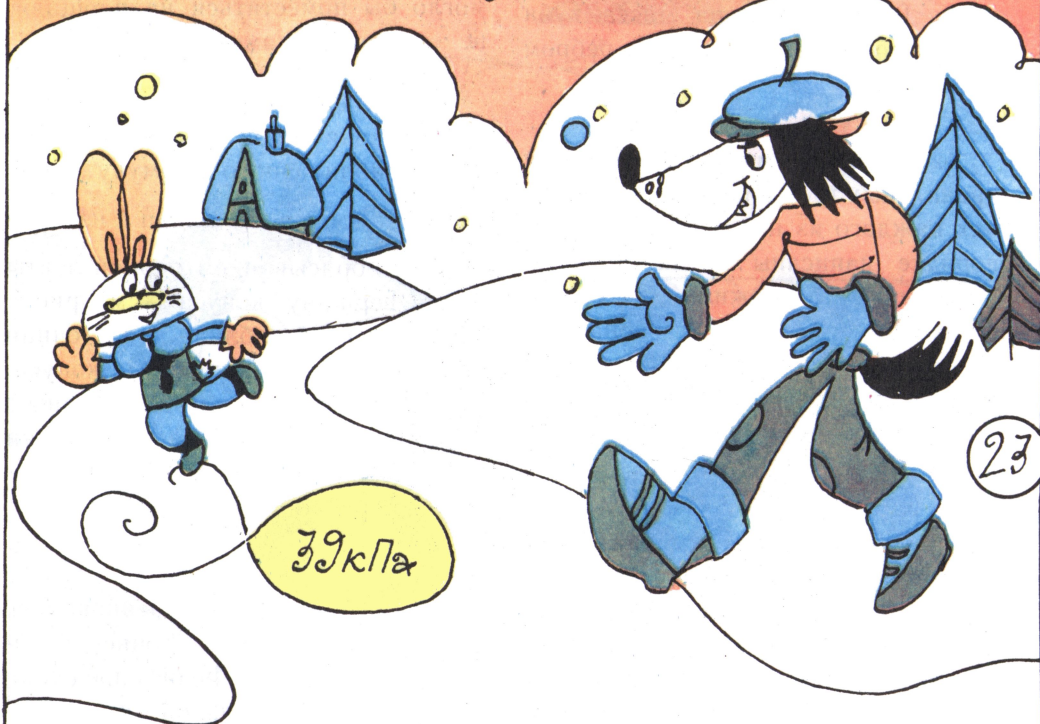
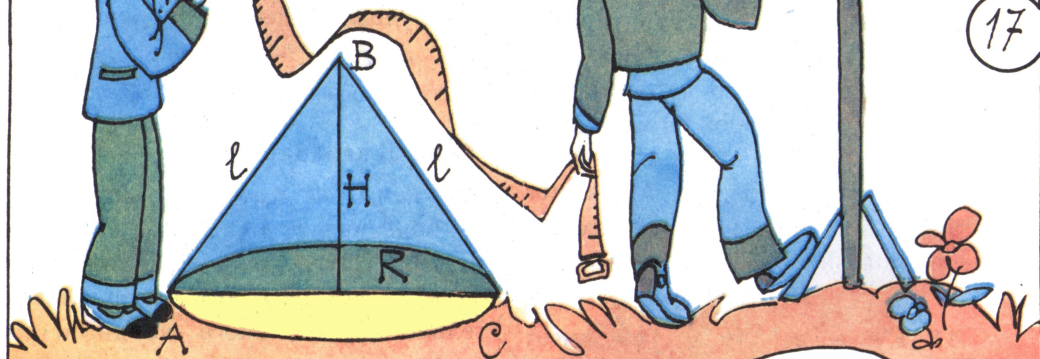
18. Федя и Нина соревновались в том, кто на «глаз» точнее определит расстояние. Федя определил, что длина футбольной площадки 100 м, а Нина — что длина классной доски 2 м. При контрольном

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

$$V_2 = \frac{1}{20} L^3$$

ℓ	5	5	10	10
R	3	4	6	8
H	4	3	8	6
V_1				
V_2				

17



39кПа

23

измерении оказалось, что длина площадки 105 м, а длина доски 1,8 м. У кого результат измерения лучше?

19. Двое делили лакомства, которые находились в пакетах с различной массой. Первому достались пакеты с массами P_1 и P_2 , второму пакеты с массами P_3 и P_4 ; массы находились в пределах: $1,1 < P_1 < 1,2$, $1,4 < P_2 < 1,5$, $1,3 < P_3 < 1,4$ и $1,0 < P_4 < 1,1$. Кому досталось больше? Второй поменял свой пакет P_4 на пакет P_2 . Выиграл ли он? Затем первый отдал пакет P_1 и взял взамен пакет P_2 . Кто теперь получил больше?

20. Степа демонстрировал Пете доказательство: « $20 = 20$, $25 - 5 = 16 + 4$; $\frac{1}{4} - 5 + 25 = 16 + 4 + \frac{1}{4}$. Не возражаешь?» — «Нет!» — отвечает Петя. «Дальше: $(\frac{1}{2} - 5)^2 = (4 + \frac{1}{2})^2$; $\frac{1}{2} - 5 = 4 + \frac{1}{2}$; $-5 = 4$! А теперь?» — «Возражаю, — отвечает Петя. — Обратись, Степа, к учебнику и повтори ...» Что посоветовал повторить Петя?

21. Упростите $\sqrt{(-1)^n a + (-1)^{n+1}(a-b) - (-1)^n b}$, где n — натуральное число.

22. Как изменится величина дроби $\frac{2a^2b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, если a и b уменьшить в 2 раза?

23. Заяц, убегая от Волка, забежал на тонкий лед, который может выдержать давление не более 39 кПа. Убежит ли Заяц от Волка, если его масса 4 кг, масса Волка 20 кг, а площади их ступней соответственно равны 6 см² и 12 см²?

24. Между какими целыми числами находится значение выражения: $\frac{2}{2+\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3}$?

25. Упростите $\sqrt{17 - 2\sqrt{70}}$.

26. Выполните действия $\frac{a-3b}{6} + \frac{3b-2a}{3} - \frac{a+b}{4}$.

27. Маня собрала клубники в два раза больше, чем ее младший брат, а мама собрала столько, сколько брат и сестра вместе. Сколько клубники собрал каждый, если все вместе собрали 6 кг?

28. Найдите точки пересечения графика функции $y = 2x + 3 - \frac{1}{3} \times \times (x-1)$ с осями координат.

29. Младший брат попросил у старшего рубль на билет в кино. Старший сказал: «Ты получишь число копеек, равное обратному числу, составляющему 96 % от значения выражения $a^{-4} \cdot a^8 \cdot b^{-1} \cdot b^2$, которое оно получит при $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{3}$ ». Какую сумму обещал дать старший брат?

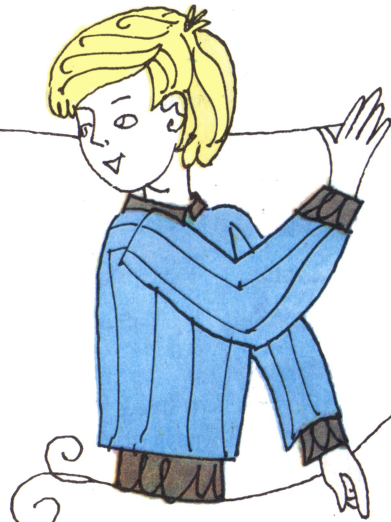
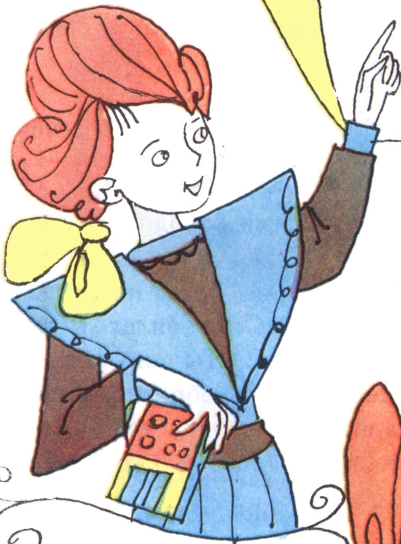
30. Ежеминутные выбросы в атмосферу вредных веществ при производстве нитратов находились в пределах решения неравенства $\frac{a-1}{a-2} \leq 0$, где величина a выражена в кубических метрах. После внедрения более совершенных фильтров эти выбросы стали находиться в пределах решения неравенства $\frac{2a-1}{3a-2} \leq 0$. Вычислив среднее арифме-



32

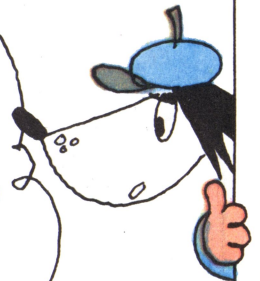


$$y = |x| + 3,$$
$$-\frac{1}{2}y - 1 < 1$$



40

$$a5^2 = a(a+1) \quad 100 + 25$$



тическое пределов выбросов в том и другом случаях, найдите уменьшение выбросов вредных веществ за час работы предприятия.

31. Найдите наибольшее целое отрицательное значение x , удовлетворяющее неравенству $\sqrt{x^2 - 2x + 1} > 5$.

32. Сколько решений имеет система:
$$\begin{cases} y = |x| + 3, \\ -\frac{1}{2}y - 1 < 1? \end{cases}$$

33. Число $\frac{2}{3}$ заменили его приближенным значением 0,6. Сколько процентов составляет ошибка при такой замене?

34. Найдите области убывания и возрастания функции $y = x^2 - 1$. Каково множество значений этой функции?

35. Докажите тождественность выражений

$$1\frac{1}{2}a \sqrt{\frac{b}{3a}} \text{ и } \frac{1}{2} \sqrt{3ab}.$$

36. Вычислите $\sqrt{4a^2 - 12ab + 9b^2}$ при $a=1$ и $b=2$.

37. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - 1} = 1;$

б) $(2a + 1)^2 - 11(2a + 1) + 10 = 0.$

38. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны $-2p$ и $1\frac{1}{2}p$.

39. Число $\overline{a2}$ умножили на разность его цифр и получили 84. Найдите это число.

40. Возведите в квадрат число $\overline{a5}$. Сформулируйте правило возведения в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 5. Найдите по этому правилу квадраты чисел 85; 9,5; 4,5; 0,35.

41. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} \overline{ab} \cdot a = 12, \\ ab = 2. \end{cases}$$

42. Вместо звездочки запишите такое выражение, чтобы дробь $\frac{0,01x^2 - 0,2b^m x + *}{0,1x - b^m}$ можно было сократить, и выполните сокращение.

43. В пассажирском поезде всего 26 вагонов. $\frac{1}{2}$ вагонов для пассажиров с плацкартными местами, $\frac{1}{3}$ — с купейными, $\frac{1}{12}$ — с мягкими и $\frac{1}{12}$ — общими. Сколько каких вагонов в поезде? В каком случае задача имеет решение?

44. Вычислите:

а) $\frac{x^3 - x^2}{(x - 1)^2}$ при $x = 0,9;$

б) $\frac{(a - b)^3}{a^2 - b^2}$ при $a = 1\frac{1}{17}$ и $b = -\frac{1}{17}.$

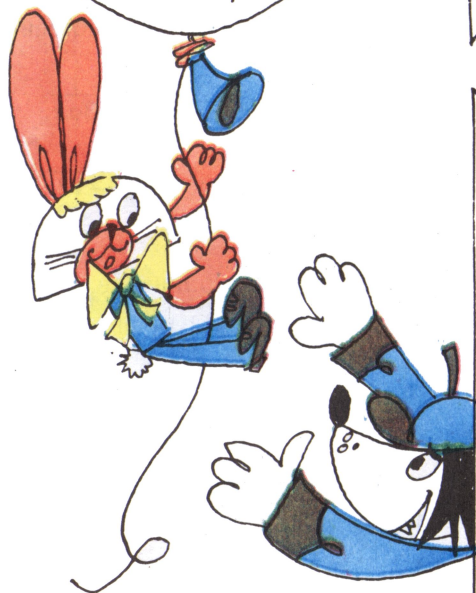
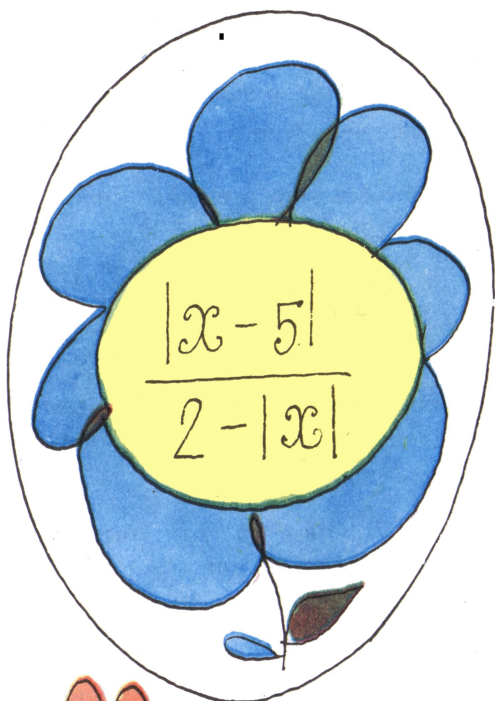
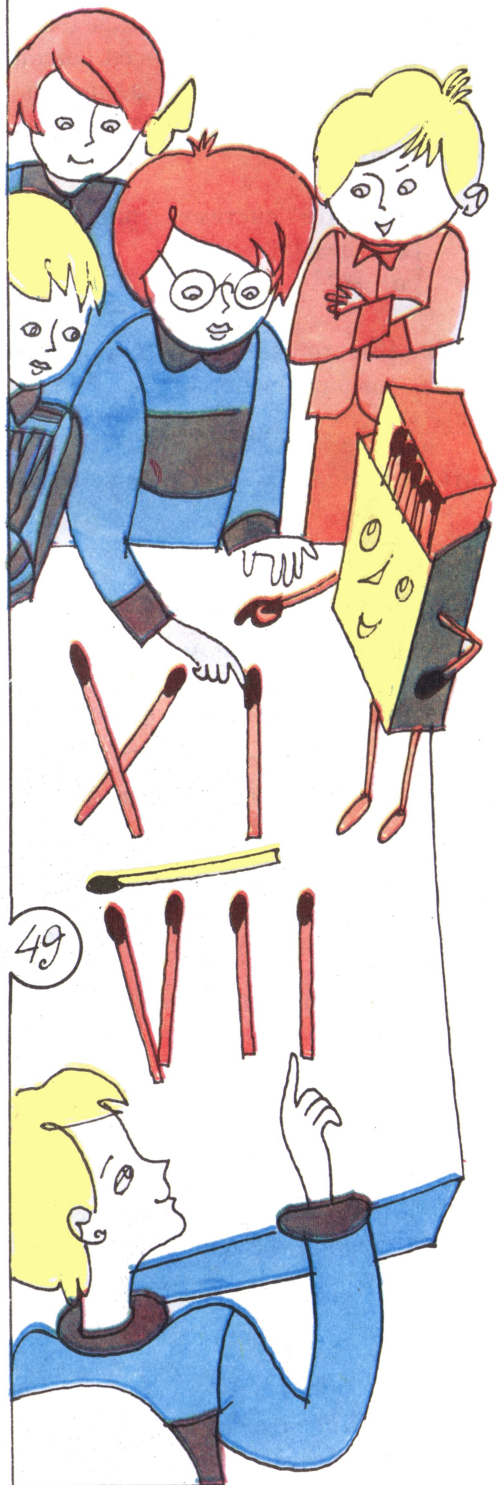
45. а) Решите уравнение

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \text{ относительно переменной } a.$$

б) Это же уравнение решите относительно переменной n . Вычислите n , если $S = 93$, $a = 3$, $q = 2$.

46. Уравнение $S = \frac{(2a + d(n + 1))n}{2}$

решите относительно переменной n и вычислите n , если $a = 1$, $d = 2$, $S = 15$.



47. Уравнение $(x^3 - 1)^2 - x^3 + 1 = 0$ решите двумя способами, применив способ введения вспомогательной переменной.

48. Докажите, что уравнение $x^2 + (2k + 1)x + 2n + 1 = 0$, где n и k — целые числа, не имеет корней.

49. Дробь $\frac{XI}{VII}$ сложена из спичек.

Переложите одну спичку так, чтобы полученная дробь по своему числовому значению была целым числом, большим 10.

50. Петя говорит Степе: «Смотри внимательно: доказываю, что $3 < 1 : 6 < 18$. Не возражаешь? $6(\pi - 3,14) < 18(\pi - 3,14)$; $6\pi - 18,84 < 18\pi - 56,52$; $56,52 - 18\pi < 18,84 - 6\pi$; $18(3,14 - \pi) < 6(3,14 - \pi)$; $3,14 - \pi \neq 0$, $18 < 6$; $3 < 1$. Ну-ка, что ты думаешь?» А вы что думаете по поводу такого доказательства Пети?

51. При каких условиях верно равенство: $\sqrt{x^2 - kx + 1} = 1 - x$?

52. Найдите все целые решения неравенства:

- а) $|x| \leq 1$; б) $|x + 1| \leq 1$;
в) $|1 - x| \leq 1$; г) $|x| < 2$;
д) $|x - 1| \leq 1$; е) $|4 + x| < 1$.

53. Найдите значения выражений:

- а) $\frac{|x|}{x}$; б) $\frac{x}{|x|}$; в) $\frac{|x + 1|}{x + 1}$;
г) $|x| + 2x$; д) $2|x| - x$;
е) $\frac{|2x|}{x}$; ж) $|x| : 2x$; з) $\frac{2|x| - x}{x}$.

54. Найдите область определения выражения: $\frac{1}{1 - \frac{1}{|x + 1|}}$.

55. а) Может ли дробь $\frac{|x - 5|}{x - 5}$ быть отрицательной?

б) При каких значениях x дробь $\frac{|x - 5|}{2 - |x|}$ не больше нуля?

56. Значение выражения $y - x$ равно 3. Найдите значения выражений:

- а) $x - y$; б) $(x - y)^2$; в) $(y - x)^3$;
г) $|x - y|$; д) $\frac{|x - y|}{x - y}$.

57. Найдите сумму $|x - 1| + |x + 1|$, если:

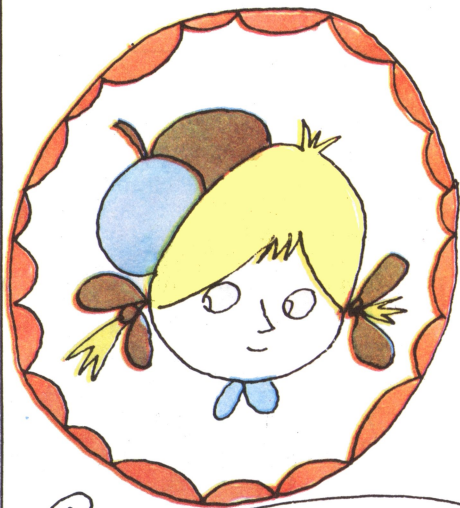
- а) $x < -1$; б) $-1 < x < 0$;
в) $x = 0$; г) $0 < x < 1$; д) $x > 1$.

58. На координатной плоскости дана точка $M(a; b)$. Как относительно точки M расположены точки $M_1(a + 1; b + 1)$ и $M_2(a - 1; b - 1)$?

59. Разложите на множители: $a(b + c)^2 + b(c + a)^2 + c(a + b)^2 - 4abc$.

60. Найдите три последовательных нечетных числа, сумма квадратов которых выражается четырехзначным числом, состоящим из одинаковых цифр.

61. На сторонах равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой a построены квадраты. Центры этих квадратов



МѦНѦ

+ ТѦНѦ

67

$$\frac{\text{МАНѦ} + \text{ТАНѦ}}{\text{АНѦ}}$$

$$\frac{\text{МАНѦ} + \text{ТАНѦ}}{\text{АНѦ}}$$

$$\frac{\text{МАНѦ} + \text{ТАНѦ}}{\text{АНѦ}}$$

$$\frac{\text{МАНѦ} \cdot \text{ТАНѦ}}{\text{АНѦ}}$$

$$\frac{\text{МАНѦ} \cdot \text{ТАНѦ}}{\text{АНѦ}}$$

$$\frac{\text{МАНѦ} : \text{ТАНѦ}}{\text{АНѦ}}$$

$$\frac{\text{МАНѦ} : \text{ТАНѦ}}{\text{АНѦ}}$$

$$\frac{\text{МАНѦ} : \text{ТАНѦ}}{\text{АНѦ}}$$



68

$$\frac{\text{АА} \times \text{НЕТ} \times \text{А}}{\text{НЕТМИРА} + \text{НЕТМИРА}}$$

$$\frac{\text{АА} \times \text{АА}}{\text{МИРАА} + \text{МИРАА}}$$

соединены между собой отрезками. Найдите площадь полученного треугольника.

62. Сколько решений имеет система $\begin{cases} 5-x=y, \\ 5-y=|x|? \end{cases}$

Может ли решением этой системы быть пара отрицательных чисел?

63. а) Допишите в нужном месте цифру, чтобы уравнение $89x - 89 = -801$ имело корень 1.

б) Ваня по невнимательности дописал одну лишнюю цифру в уравнении $1001 - 13x = 910$. Решив уравнение и сверившись с ответом, он увидел, что его результат в 10 раз меньше правильного. Какой должен быть правильный ответ и какую лишнюю цифру дописал Ваня?

64. При каких значениях переменной y равны нулю дроби:

а) $\frac{y(y-1)(y+1)}{1-y}$; б) $\frac{5y^2-45}{y+3}$?

65. Решите уравнение:

а) $\frac{10x-x^2}{x-1}=0$; б) $\frac{2}{x}x=1$.

66. Сократите дробь:

$$\frac{6m+10n-12m^2-20mn}{3m+5n+3m^2+5mn}.$$

67. Маня, Таня и Аня вели запись результатов игры. Запись оказалась в виде дроби:

$$\frac{\text{МАНЯ} + \text{ТАНЯ}}{\text{АНЯ}}.$$

Аня: — Мы сегодня на уроке учили сокращение дробей. Давайте под буквами наших имен пони-

мать числа, а сами имена — как произведение этих чисел, и будем сокращать эту дробь.

Девочкам эта идея понравилась, и они провели различные сокращения. Всего набралось 8 случаев (см. рис.) Какие из сокращений правильные, какие неправильные и почему?

68. Мальчики позаимствовали игру у девочек и сделали свои записи (см. рис.). Правильно ли выполнены сокращения?

69. Докажите тождество:

$$\frac{4-n^2}{2:n+1}=n(2-n) \quad (n \neq -2, n \neq 0).$$

70. При каком условии возможно равенство: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, если $a \geq 0, c \geq 0, b > 0, d > 0$?

71. Трехзначное число умножили на сумму его цифр. Потом взяли трехзначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, и тоже умножили на сумму его цифр, а произведение получили такое же самое. Найдите первоначальное число.

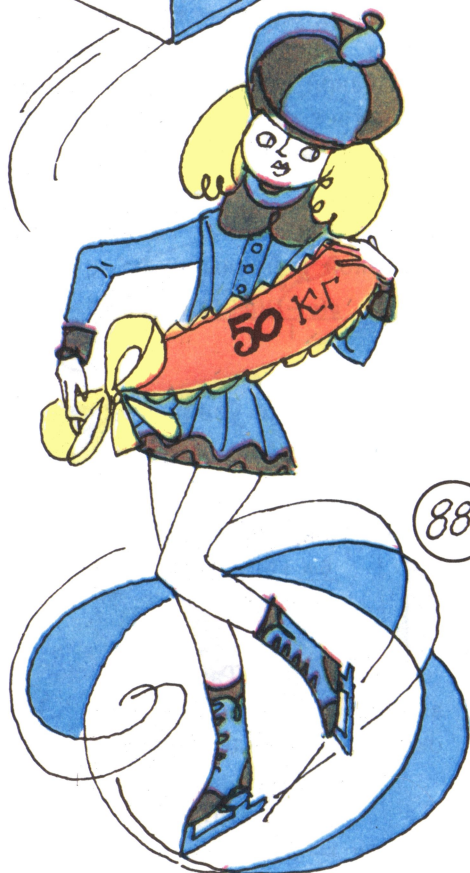
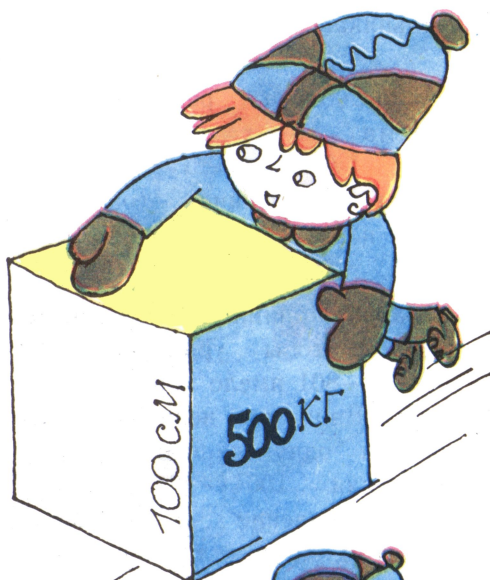
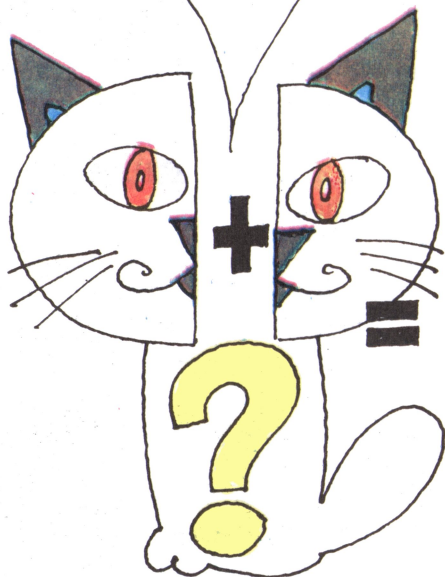
72. Докажите, что при любом натуральном n число $n(n-3) \times (n^2-3n+2)$ делится на 24.

73. Если сложить цифры двузначного числа, то получится 13, а если в нем переставить цифры в обратном порядке и из полученного числа вычесть первое число, то получится 27. Найдите двузначное число.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} =$$

$$= \frac{a+c}{b+d}$$

70



88

74. Представьте в виде произведения: а) $1 - b^{2n}$; б) $n^8 - 1$;
в) $\frac{1}{4}a^2 - 81$; г) $0,01 - 100 y^2$.

75. Возведите в степень:

а) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$;

б) $\left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2$.

76. Сумма двух натуральных чисел 145, а наименьшее общее кратное их 174. Найдите эти числа.

77. Могут ли стороны прямоугольного треугольника иметь такие длины, которые выражаются нечетными натуральными числами?

78. Покажите, что наименьшее значение выражения $x^2 + 2x - 10$ есть отрицательное число, и найдите его.

79. При каком наименьшем значении a верно неравенство $\frac{a-2}{b} < 0$, если $b < 0$?

80. Найдите такие k и p в системе
$$\begin{cases} kx + y = 5 \\ y - px = 1, \end{cases}$$
 чтобы решением системы была пара чисел $(1\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3})$.

81. а) Найдите такое k в уравнении $2x + kx = 3$, чтобы это уравнение имело целые решения.

б) При каком k уравнение $3kx - k = 5$ имеет положительные решения?

в) При каком k уравнение $5x + 2k = 3$ имеет отрицательные решения?

г) Найдите такое k в уравнении $x^2 - 6x + k = 0$, чтобы один корень его был квадратом другого.

д) При каком значении k уравнение $x^2 - kx + 6 = 0$ имеет корень 3?

82. Найдите пару чисел, удовлетворяющих равенству:

$$(\overline{\text{МИР}})^2 - (\overline{\text{РИМ}})^2 = \\ = \overline{\text{М}} \cdot \overline{\text{М}} \cdot \overline{\text{И}} \cdot \overline{\text{И}} \cdot \overline{\text{И}} \cdot \overline{\text{Р}} \cdot \overline{\text{Р}} \cdot \overline{\text{Р}} \cdot \overline{\text{Р}}.$$

83. Найдите пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 45.

84. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 3$.

85. Удовлетворяет ли значение выражения $\sqrt{(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})^2}$ неравенству $\sqrt{x^2 - 8x + 16} < 2$?

86. Проверьте, является ли число 2 корнем уравнения

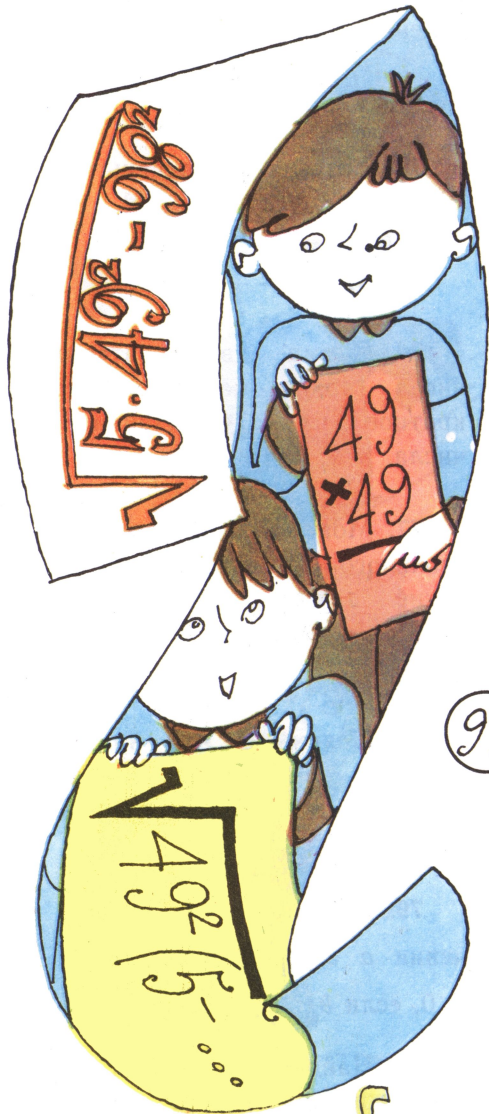
$$\frac{x^2 - 6x + 8}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = 0.$$

87. Докажите, что уравнение $x^2 + 4x + 3 = 4x - (2 - x^2)^2$ не имеет решения.

88. Куб с массой 500 кг и ребром 100 см лежит на льду. Рядом стоит девочка, масса которой 50 кг. Сравните давление куба и девочки на лед, если длина конька 25 см, толщина — 2 мм.

89. Назовите условия, при которых уравнения $\sqrt{x+1} = A$ и $x+1 = A^2$ имеют одни и те же решения.

94



97



90. При каком b уравнение $(x+2)^2 = x^2 + 3x + b + x$ имеет бесконечное множество решений?

91. Решите уравнения:

- а) $5 : 0,2x = 2\frac{1}{2} : 6$; б) $x^2 + y^2 = 0$;
в) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$.

92. Цветной телевизор вместе с упаковкой стоит 655 р. Сам телевизор дороже упаковки на 645 р. Сколько стоит телевизор?

93. Учащиеся класса должны были ежедневно собирать по 100 кг макулатуры. В первый день задание было перевыполнено. На второй день собрано макулатуры больше, чем в первый на столько же процентов, на сколько было перевыполнено задание в первый день. За два дня было собрано 231 кг макулатуры. На сколько процентов класс перевыполнял задание по сбору макулатуры каждый день?

94. Зависимость между расходом воды, диаметром трубы и скоростью течения воды в трубе определяется формулой $Q = \frac{9\pi D^2 v}{10}$, где Q — расход воды, D — диаметр трубы и v — скорость течения. В каких единицах надо задать диаметр трубы и скорость течения, чтобы величина Q определялась в л/с? Найдите расход воды Q в л/с, если $D = 1000$ мм и $v = 3,2$ м/с. Вычисления выполните обычным способом и с помощью калькулятора.

95. Найдите сумму: $3,187 \cdot 10^6 + 256,0 \cdot 10^4$.

96. Что больше: а) $\sqrt{0,7^3}$ или $\sqrt{0,7^5}$; б) 943^{10} или 100^{15} ; в) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ или $\sqrt{\sqrt{169}}$?

97. Ваня и Миша (каждый самостоятельно) вычислили значения выражений $\sqrt{5 \cdot 49^2 - 98^2}$ и $\sqrt{27^2 + 81^2}$ без калькулятора с точностью до 0,1, а Степа с калькулятором. Степа потратил времени в 3 раза меньше, чем Ваня, а Ваня вычислил значения в 4 раза быстрее, чем Миша. Во сколько раз быстрее нашел результат Степа, чем Миша? Как вычислял Ваня и как вычислял Миша, если техника вычислений у обоих одинакова и оба не ошиблись?

98. Ира выполнила сложение корней по такому правилу: $\sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$. Какой закон выполнения действий она нарушила? Петя на калькуляторе вычислил относительную погрешность вычисления Иры. Какой результат получил Петя?

99. Докажите неравенство $\sqrt{50} + \sqrt{10} > \sqrt{99}$.

100. Составьте пропорцию из чисел a , b , c и b , если $b^2 = ac$.

101. Даны положительные числа a и b . Докажите неравенства:

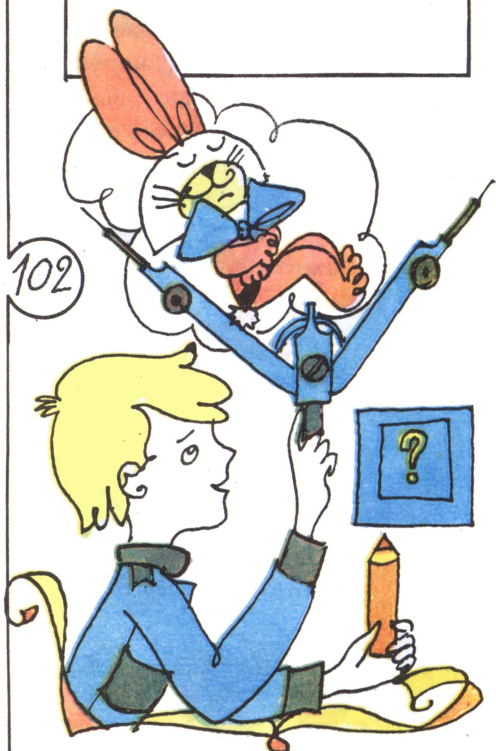
- а) $\frac{a+b}{2} \geq ab$; б) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$;
в) $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

102. а) Пусть a и b — стороны прямоугольника. Тогда полупериметр будет $a+b$, а площадь — ab .



$$p = 8$$

$$ab = 4$$



102



103

$$P = S$$



$$2(a+b) =$$

$$= ab$$

На конкретном примере проверьте правильность неравенства $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для прямоугольника. Выразите словами зависимость между числом, выражающим полупериметр прямоугольника, и числом, выражающим его площадь.

б) Докажите, что прямоугольник, у которого периметр 8 м, а площадь 4 м², может быть только квадратом.

в) Стороны прямоугольника a и b меняют свои значения, но его площадь (произведение сторон) остается постоянным. При каком условии периметр прямоугольника наименьший?

г) Стороны прямоугольника a и b меняют свои значения, но его полупериметр (сумма a и b) остается постоянным. При каком условии площадь (произведение ab) будет наибольшей? Конкретно рассмотрите прямоугольник с полупериметром равным 20 м.

д) Дана функция $y = nx + \frac{k}{x}$ ($n > 0$, $k > 0$, $x > 0$). Используя результаты предыдущих упражнений, докажите, что эта функция имеет наименьшее значение и найдите его.

103. Найдите прямоугольники, у которых периметр и площадь выражаются одним и тем же натуральным числом единиц соответствующих величин.

104. Коэффициент подобия фигур равен $\frac{1}{2}$, а разность площадей этих фигур составляет 99 м². Найдите площади фигур.

105. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника составляет 10 % суммы внутренних его углов. Сколько сторон имеет многоугольник?

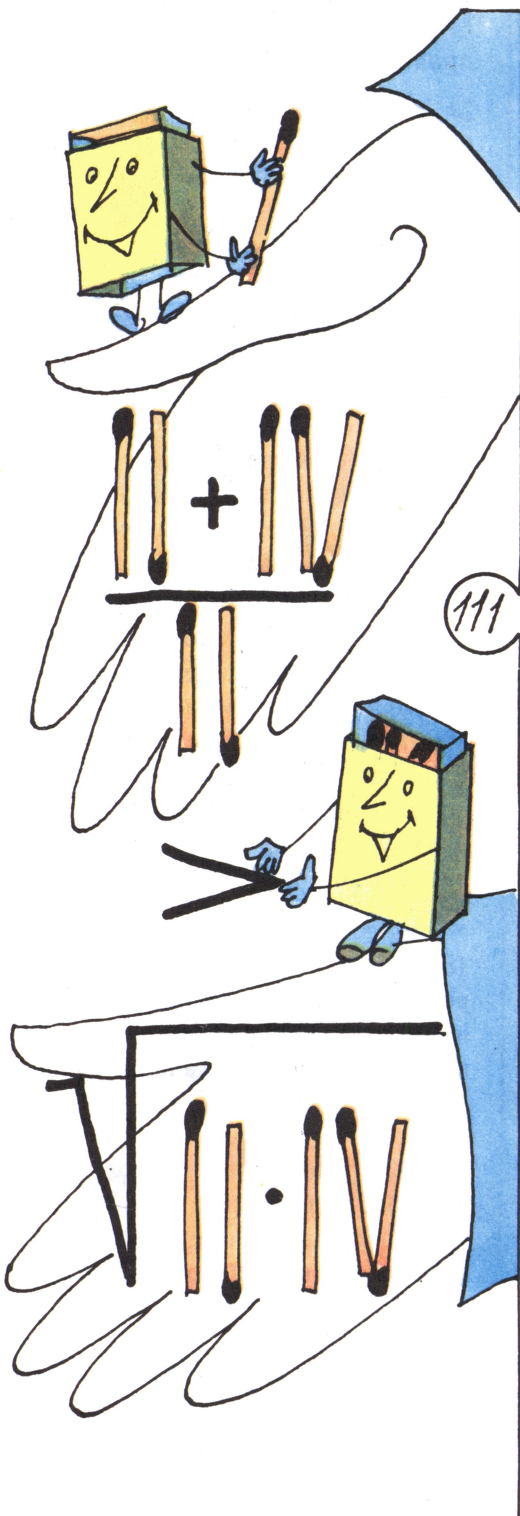
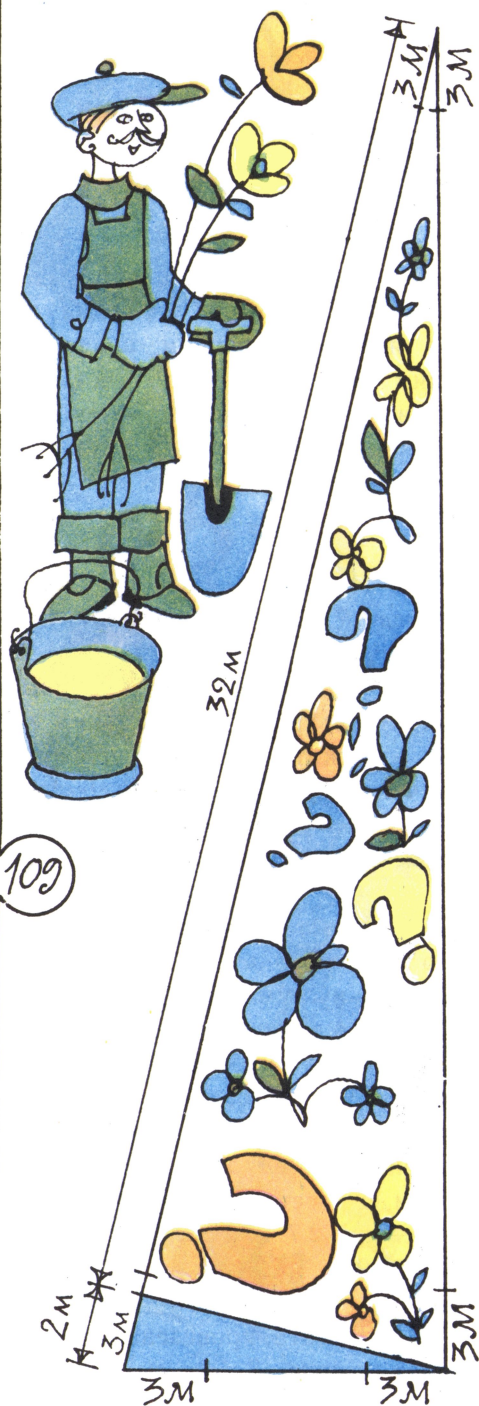
106. Какова длина хорды, перпендикулярной диаметру, если она делит диаметр на отрезки длиной 2 см и 8 см?

107. Определите углы треугольника, если известно, что один его угол является средним арифметическим углов некоторого четырехугольника, а другой — средним арифметическим острых углов некоторого прямоугольного треугольника.

108. Из точки полуокружности радиуса R опущен перпендикуляр на диаметр, разделивший его на части в отношении 4 : 9. Составьте квадратное уравнение, корнями которого служат длины среднего арифметического и среднего геометрического образовавшихся частей диаметра.

109. Участок в виде прямоугольного треугольника надо по периметру обсадить кустами жасмина с условием, что в каждой вершине участка должен быть посажен куст. Сколько потребуется кустов для этого, если гипотенуза участка делится проведенной к ней высотой на части 2 м и 32 м, а расстояние между кустами не меньше 2,7 м и не больше 3 м? (См. с. 92.)

110. Высота, проведенная к гипотенузе, равна $3\sqrt{3}$ см. Найдите радиус окружности, описанной около



треугольника, если один из отрезков, на которые высота делит гипотенузу, равен 3 см.

111. Неравенство сложено из спичек $\frac{II+IV}{II} > \sqrt{II \cdot IV}$. Верно ли оно? Не нарушая смысла неравенства, переключиванием двух спичек преобразуйте его в другое верное неравенство.

112. Найдите множество значений b , при которых будут верны неравенства: а) $\frac{5+b}{2} > \sqrt{5b}$;

б) $\frac{10-b}{2} \geq \sqrt{-10b}$. При каком b имеет место равенство?

113. Чему равно процентное отношение среднего арифметического двух чисел к их среднему геометрическому, если одно число в четыре раза больше другого?

114. Не решая систем, установите, какая из них не имеет решения:
а) $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=100; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=20, \\ xy=90. \end{cases}$

115. Используя неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, постройте отрезок длиной $\sqrt{3}$ см.

116. а) Среднее арифметическое двух чисел равно 7. Одно из чисел 5. Какое второе число?

б) Меньшее основание трапеции 2, а средняя линия имеет длину 10. Какова длина большего основания?

117. Среднее геометрическое двух чисел равно 3. Одно из чисел 2. Найдите другое число.

118. Найдите среднее арифметическое оснований трапеции, у которой площадь равна 100 м^2 , а высота имеет длину 5 м.

119. Найдите тройку натуральных чисел a , b и c , которые удовлетворяют равенству $a^2 + 2ab + b^2 = 4c^2$.

120. Найдите целое значение k , большее единицы, при котором выражение является полным кубом:

а) ka^3 ; б) kb^6 ; в) kx^{-k} ; г) a^{2k-1} ; д) $ka^n \cdot a^k$; е) $k(a^k)^5$.

121. Чему равен коэффициент подобия двух треугольников, если:

а) меньшие стороны этих треугольников равны $\sqrt{18}$ и $\sqrt{2}$;

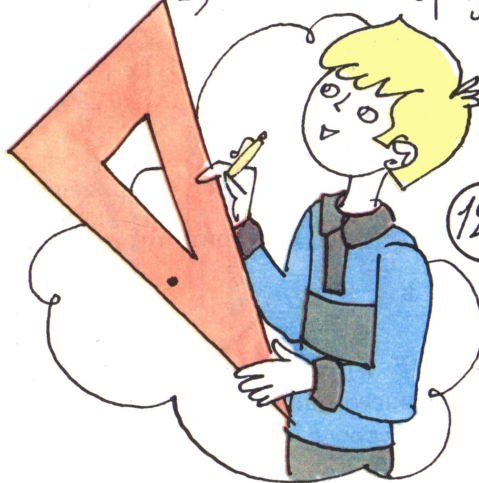
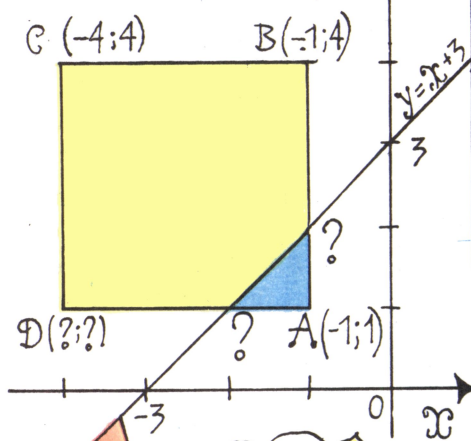
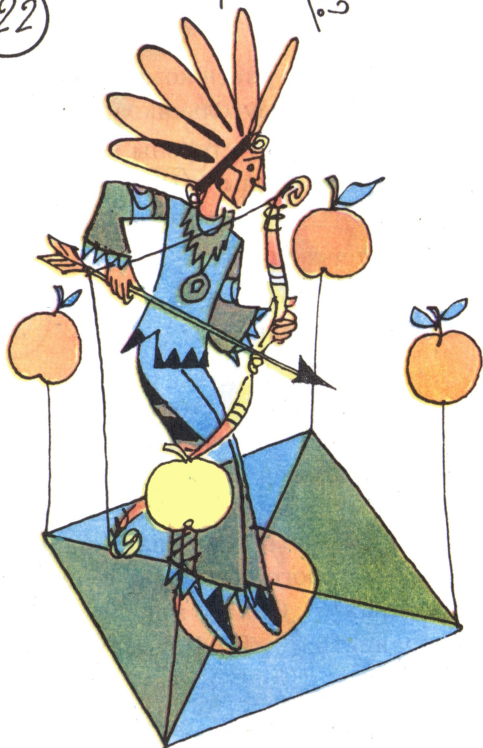
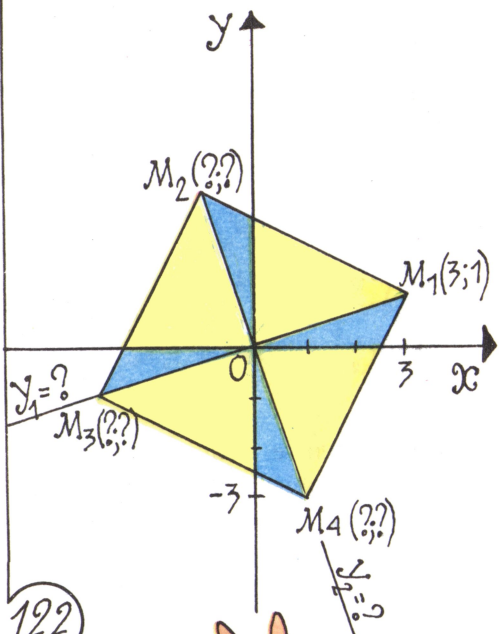
б) $P_1 = 3P_2$, где P_1 и P_2 — периметры треугольников;

в) $S_1 = 2S_2$, где S_1 и S_2 — площади треугольников?

122. Стрелок стоит в начале условной системы координат на местности и должен по очереди поразить четыре мишени, находящиеся на круговом стенде в вершинах квадрата, центр которого совпадает с началом координат. Одна мишень имеет координаты (3; 1). (См. с. 94.) Найдите:

а) координаты остальных мишеней;

б) уравнения прямых, на которых расположены стрелок и каждая из мишеней.



123. На координатной плоскости даны точки $A(7; 9)$ и $B(3; 5)$. Точка M принадлежит отрезку AB . Найдите AM , если $AM : MB = 2 : 3$.

124. Дано уравнение окружности $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$. Найдите координаты центра и радиус окружности.

125. а) Прямая проходит через точки $A(1; 1)$ и $B(-2; 0)$. Найдите угловой коэффициент этой прямой.

б) Графики уравнений $y + 2x = 3$, $2x - y = 1$ и $y = kx$ пересекаются в одной точке. Докажите, что прямая $y = kx$ пересекает ось Ox под углом 45° .

126. Точки $A(-1; 1)$, $B(-1; 4)$ и $C(-4; 4)$ служат вершинами квадрата. Найдите: а) координаты четвертой вершины; б) координаты точек пересечения прямой $y = x + 3$ со сторонами квадрата; в) длину отрезка прямой $y = x + 3$, находящегося внутри квадрата.

127. Найдите координаты точек пересечения окружности $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ и прямой $y = x - 1$.

128. Точки $A(-1; a)$ и $B(1; a)$ служат вершинами квадрата. (См. с. 96.)

а) Найдите координаты двух других вершин.

б) При каком a стороны квадрата пересекают ось Ox ?

129. Прямая проходит через точку $(0; 5)$ и через середину отрезка, концы которого имеют координаты $(1; 1)$ и $(5; 6)$. Составьте уравнение прямой.

130. Катет имеет длину 3, гипотенуза — 5. Чему равен косинус угла между высотой, проведенной к гипотенузе, и другим катетом?

131. Косинус угла равен $\frac{7}{15}$. Чему равен котангенс этого угла?

132. Упростите выражение:

а) $\frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}$; б) $\frac{\sin x + \cos x}{1 + 2 \sin x \cos x}$;

в) $\frac{1 - \sin^2(90^\circ - x)}{\sin x}$.

133. Учащийся нашел выражение для стороны треугольника: $a = b(\cos 44^\circ - \cos 43^\circ)$ (b — другая сторона треугольника). Правильный ли у него ответ?

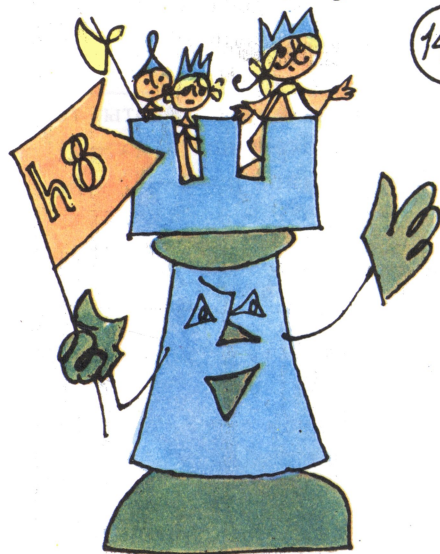
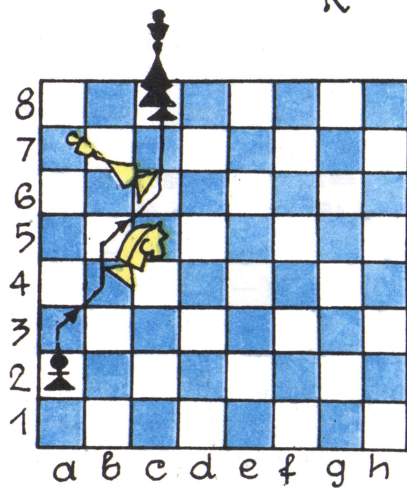
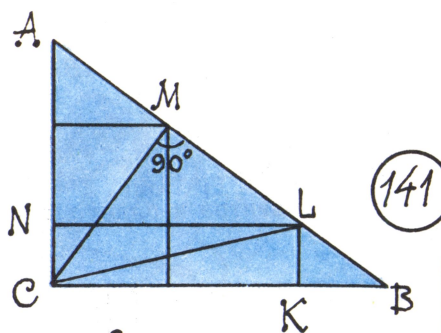
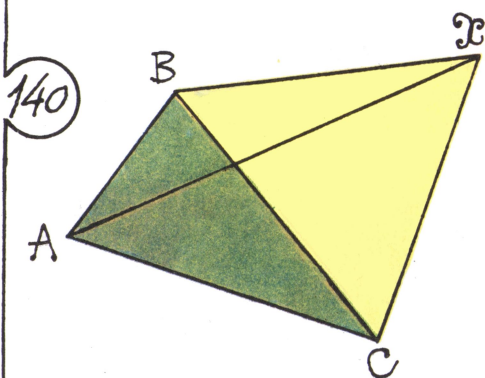
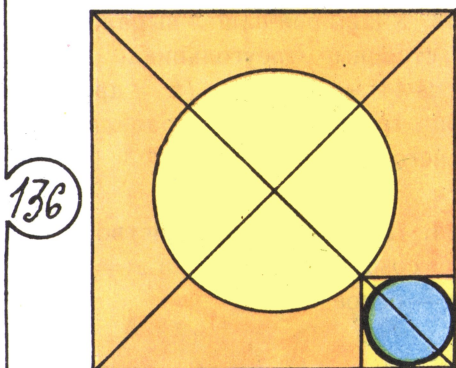
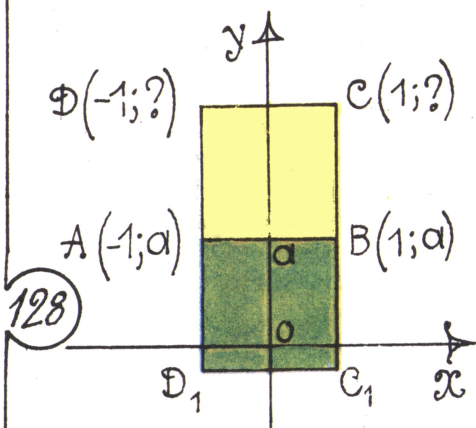
134. Докажите неравенство $\sin^2 \alpha > \cos \alpha (1 - \cos \alpha)$ если $\alpha \neq 2\pi k$, где k — целое число.

135. Докажите, что при любом α неравенство $|\sin \alpha| + |\cos \alpha| < 1$ будет неверным.

136. Из квадрата 2×2 м вырезали круг, длина окружности которого 4 м. Центр круга совпадает с центром квадрата. Из оставшегося материала вырезали четыре маленьких квадрата так, что их углы совпадают с прямыми углами оставшейся от большого квадрата части. Какова наибольшая длина радиуса маленьких кругов, которые можно вырезать из этих квадратиков? (См. с. 96.)

137. Постройте график функции

$$y = ||x| - 1|.$$



138. Докажите, что периметр четырехугольника, вершины которого лежат на серединах сторон выпуклого четырехугольника, больше половины периметра данного четырехугольника.

139. В тупоугольном треугольнике стороны выражаются четными числами. Длины двух сторон, образующих тупой угол, равны 6 м и 12 м. Найдите периметр треугольника.

140. Точка, взятая вне треугольника, соединена отрезками с его вершинами. Докажите, что сумма длин этих отрезков больше полупериметра треугольника.

141. В прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см впишите прямоугольник с наименьшей диагональю так, чтобы его угол совпал с углом треугольника, и найдите площадь прямоугольника с точностью до 1 см^2 , а при помощи калькулятора — с точностью до $0,0001 \text{ см}^2$.

142. а) Найдите расстояние между центрами полей b3 и g7 на шахматной доске 8×8 дм.

б) Чёрная пешка дважды поражала фигуры противника и прошла в ферзи. Какой путь прошла пешка? Размеры поля такие, как и в задаче а). Путь фигуры считать от центра до центра клетки.

в) Конь с поля a1, побывав на каждой горизонтали один раз, попал на восьмую горизонталь. Какой путь прошёл конь? Путь коня за один ход считать не по прямой, а по правилу его хода.

г) Может ли конь с поля a1, побывав на всех клетках по одному разу, попасть на поле h8?

143. Около равностороннего треугольника опишите квадрат так, чтобы обе фигуры имели общую вершину. (См. с. 98.)

144. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и медиане катета.

145. Через данную точку в круге проведите хорду данной длины.

146. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ симметричны относительно прямой l . $\angle C = 90^\circ$ (см. рис.). Найдите расстояние OO_1 между центрами окружностей, вписанных в эти треугольники, если $BC = 3 \text{ см}$, $AC = 4 \text{ см}$, $BQ = 5 \text{ см}$ и $AC \parallel l$. (См. с. 98.)

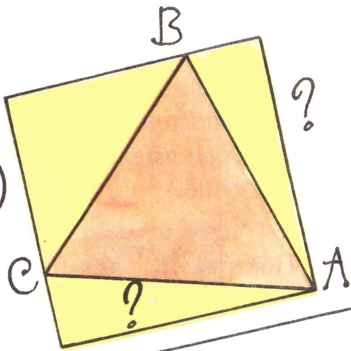
147. Установите знак разности: $\sin 163^\circ - \cos 127^\circ$.

148. Найдите значение выражения
$$\frac{2\sin(180^\circ - \alpha) + 3\cos(90^\circ - \alpha)}{5\sin(90^\circ + \alpha)}$$
 при $\alpha = 60^\circ$.

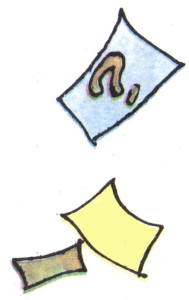
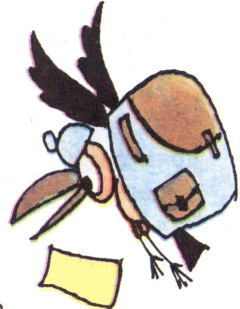
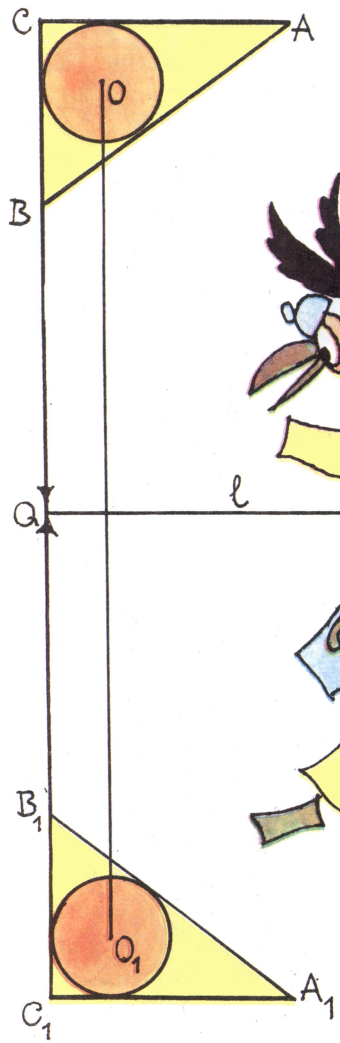
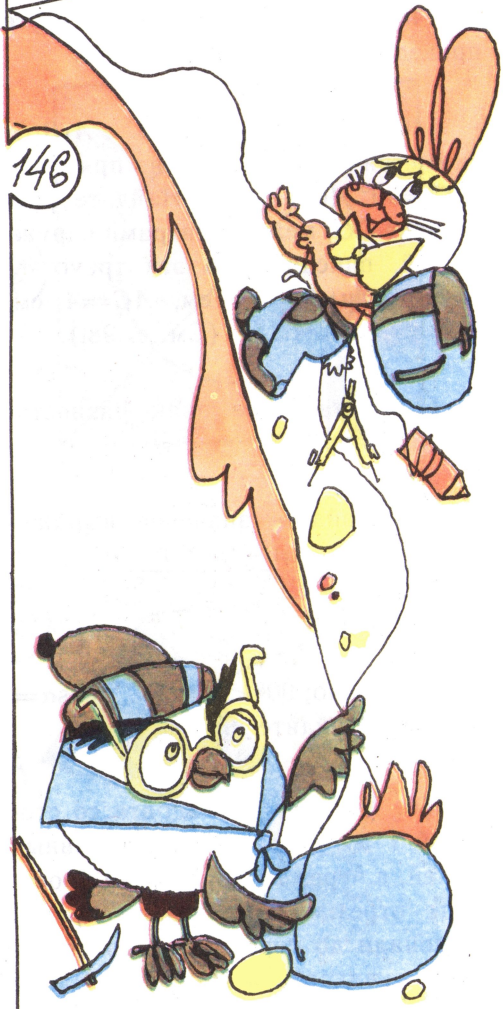
149. Дано: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\cos \alpha = -0,6$. Найдите $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$.

150. Диагональ квадрата со стороной 1 дм разделена на 6 равных частей, и через точки деления проведены отрезки параллельно другой диагонали до пересечения со сторонами квадрата. Найдите длину каждого полученного отрезка. Установите, на какие части разделилась

143



146



отрезками каждая сторона квадрата, считая от вершин квадрата до каждого из отрезков. (См. с. 100.)

151. а) Могут ли быть пропорциональны числам 1, 2 и 3 величины внешних углов треугольника?

б) Как относятся между собой величины внешних углов треугольника, если величины внутренних углов пропорциональны числам 1, 2 и 3?

152. Петя и Степа мастерили кольцо для баскетбольной игры. Диаметр мяча 20 см, а «зазор» между мячом и кольцом должен быть 1 см. Какой длины надо взять металлический стержень для изготовления кольца, чтобы оно соответствовало требованиям игры?

153. Два катета двух прямоугольных треугольников равны. Докажите геометрически и аналитически, что у того треугольника, у которого второй катет меньше второго катета другого треугольника, гипотенуза тоже меньше его гипотенузы.

154. Из всех точек окружности проведены в одном направлении отрезки параллельные и равные одному и тому же заданному отрезку. Найдите геометрическое место концов этих отрезков.

155. Докажите, что обратная величина квадрата высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, равна сумме обратных величин квадратов катетов.

156. Петя и Степа, находясь в вершинах двух многоугольников, проводили съемки их планов на местности. Пете пришлось сделать на 3 визирования больше по диагоналям, чем Степе. Докажите, что число сторон многоугольника у одного четное, а у другого — нечетное. Вычислите число сторон многоугольников у каждого, если их сумма равна 17.

157. Отношение суммы внутренних углов к сумме внешних у одного многоугольника равно 5, а у другого — 10. Чему равно отношение числа диагоналей этих многоугольников?

158. Величина одного из углов треугольника равна 30° . Докажите, что длина стороны, противолежащей этому углу, равна радиусу описанной около треугольника окружности.

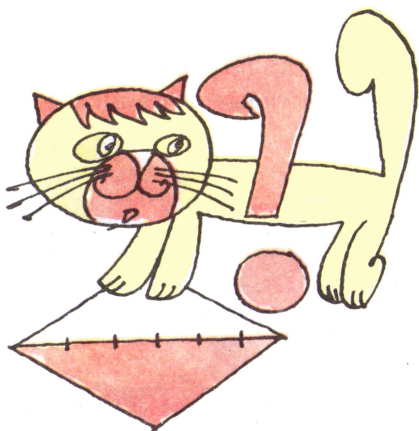
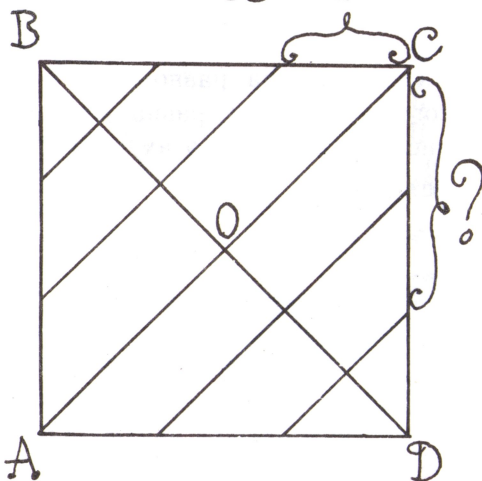
159. Даны прямая и точка, не лежащая на прямой. Найдите точки, равноудаленные от прямой и данной точки.

160. Постройте треугольник по стороне a , углу B и высоте h , проведенной к стороне a .

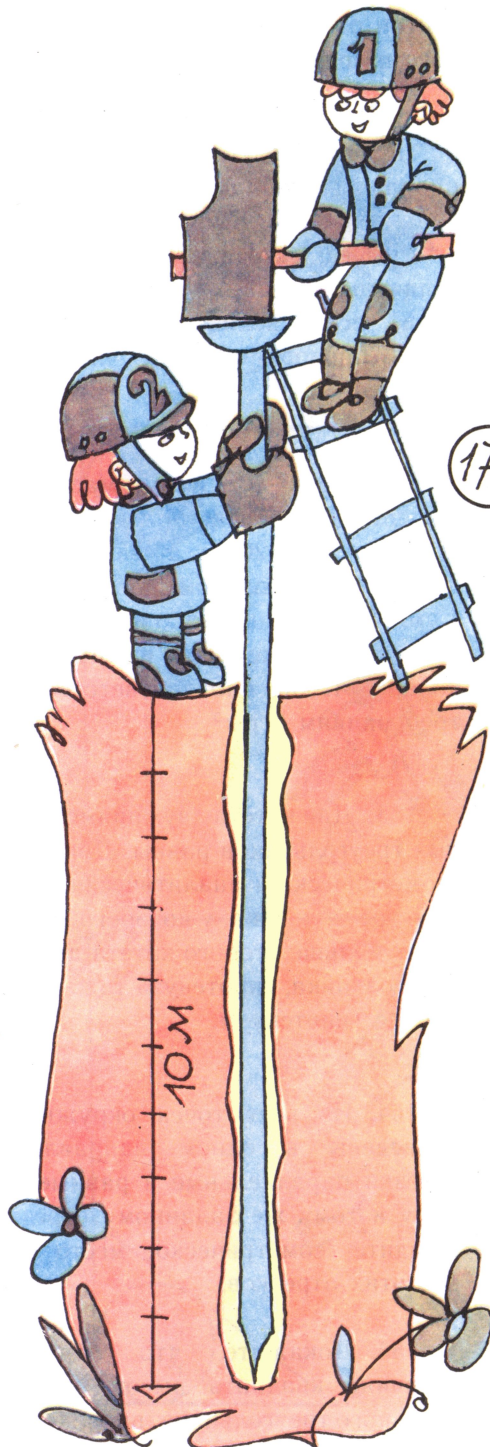
161. Выделите целую часть из дроби:

$$\text{а) } \frac{2n}{n-2}, \text{ б) } \frac{x^2-4x+b}{x-2}.$$

150



170



162. Решите уравнение:

а) $1 + \frac{13-x}{19-x} = \frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x}} = \frac{1}{2}$.

163. Дана сумма $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \dots$ всего $x-1$ слагаемое.

Докажите, что сумма этих дробей меньше единицы.

164. Выделите полный квадрат в трехчлене $x + \sqrt{x} + 3$.

165. Докажите, что сумма $293^3 + 121^3$ делится на 9.

166. Простое или составное число $2^{1989} + 1$?

167. а) Докажите, что сумма $1! + 2! + 3! + 4! + 5!$ не может быть точным квадратом ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$).

б) Докажите, что сумма факториалов от 1 до n при $n \geq 3$ делится на $1! + 2! + 3!$. Непосредственным вычислением проверьте делимость $1! + 2! + 3! + 4! + 5!$ на $1! + 2! + 3!$

168. Сократите дроби:

а) $\frac{a(p-k)^3 - b(p-k)^3}{c(k-p)^3}$;

б) $\frac{(-p-k)^3 : 2}{(k+p)^3}$;

в) $\frac{5[k-p]^2 - 3(p-k)^2}{2(k-p)^2}$;

г) $\frac{(-p-k)^2}{(p+k)^2 : 2}$;

д) $\frac{-2(a^3 + b^3)}{-(a+b)^3 + 3a^2b + 3ab^2}$.

169. Докажите, что не существует целых чисел a и b , при значениях которых было бы правильным равенство $a^2 + 1986 = b^2$.

170. Мастер с помощником взялись пробить скважину глубиной 10 м. За первый метр платили 5 р., а за каждый следующий на 3 р. больше.

а) Сколько стоит работа по пробивке скважины?

б) Сколько получит каждый, если зарплата мастера относится к зарплате помощника, как 3 : 2?

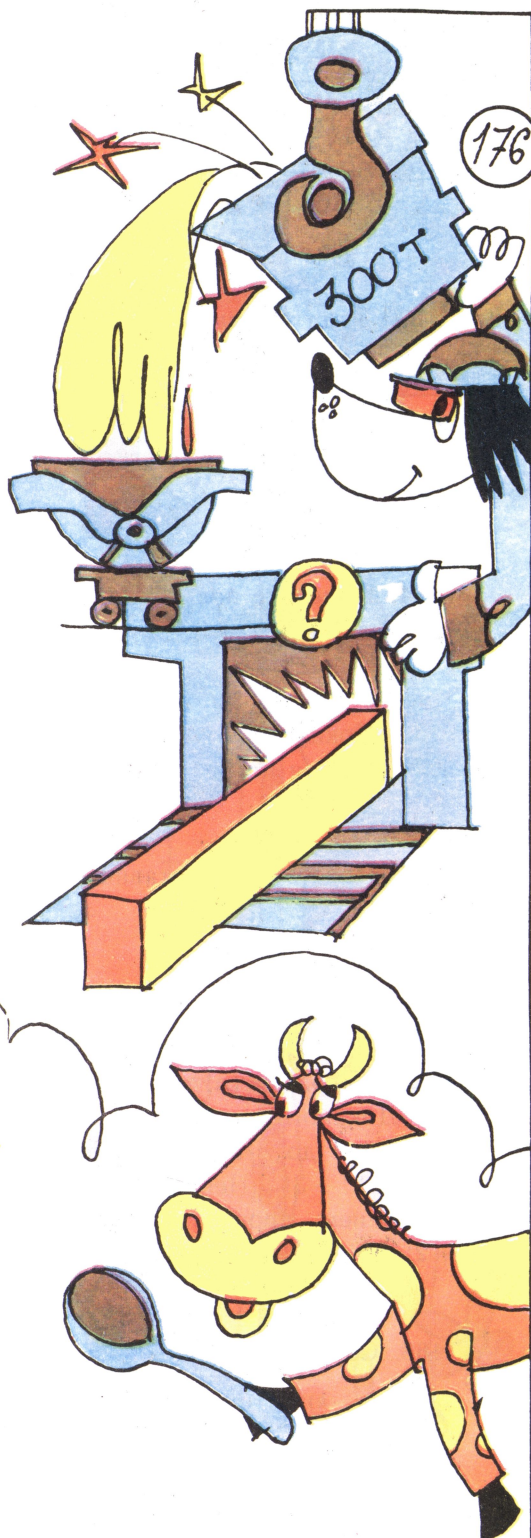
171. Бригада бурильщиков по договору получает за первый километр бурения 800 р., а за каждый следующий — на 10 % больше, чем за первый. Сколько денег получит бригада за бурение скважины глубиной 6 км?

172. Решите уравнение:
 $x^2 - 4|x| + 4 = 0$.

173. Сократите дроби:

а) $\frac{0,1\sqrt{63} - 0,3\sqrt{14}}{0,01(1 - \sqrt{2})}$;

б) $\frac{5\sqrt{10} - 2,5\sqrt{8}}{\sqrt{5} - 1}$; в) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{35}}{\sqrt{6} - \sqrt{14}}$.



174. Благодаря внедрению роботов, завод в следующей пятилетке будет выпускать за смену на 7 тепловозов больше. Сколько тепловозов будет выпускать за смену завод в следующей пятилетке, если затрата времени на изготовление одного тепловоза уменьшится на $\frac{14}{15}$ часа? (Продолжительность смены считать равной 8 ч.)

175. Завод перерабатывает за год 28 800 т пищевых отходов. Из отходов изготавливают пасту и муку в отношении 1 : 4. Один килограмм пасты равноценен 0,33 кормовым единицам, а 1 кг муки соответственно 1,03 кормовым единицам. Чтобы произвести 100 кормовых единиц, требуется 1 м² посевной площади. Сколько гектаров посевных площадей экономится в результате переработки отходов этим заводом?

176. Решите задачи с помощью калькулятора.

а) Внедрение в металлургии технологии непрерывного литья и прокатки стали, разработанной в СССР, позволило сократить цикл производства с пяти месяцев до трех часов. Во сколько раз внедрение новой технологии повышает производительность труда при производстве проката? (Производство непрерывное, в месяце считать 30 дней.)

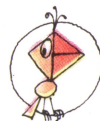
б) С одной тонны плавки старым традиционным методом получали $33\frac{1}{3}\%$ проката от объема плавки,

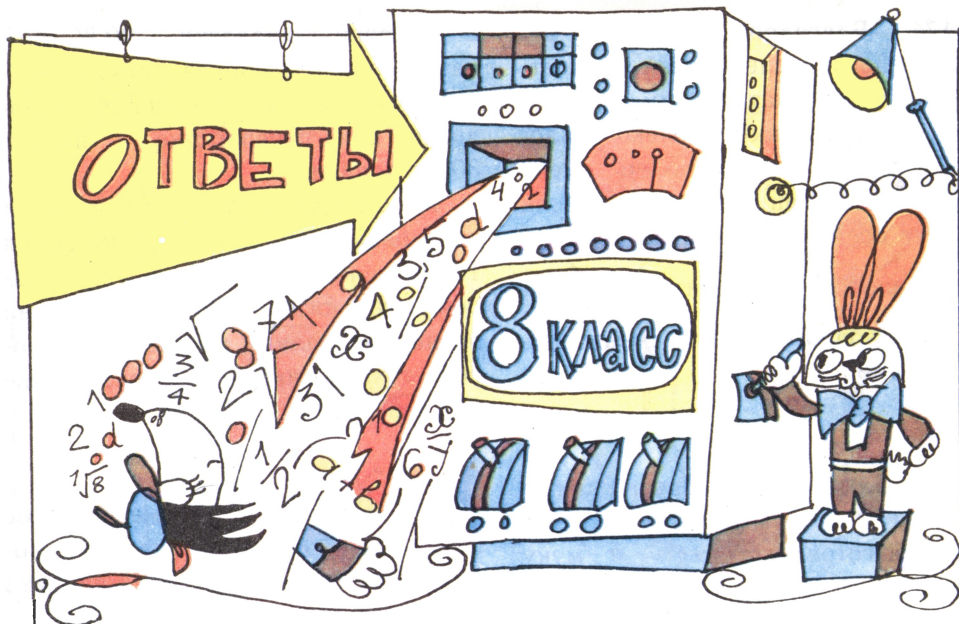
а по новой технологии — 90 % проката. Сравните производство проката цехом по старой и новой технологии при переработке в прокат 300 т плавки.

в) Для получения 1 т проката по новой технологии расходуется 105 кг условного топлива, а при старой технологии — 1000 кг. Какова экономия топлива от внедрения новой технологии при производстве 300 т проката.

177. Найдите геометрическое место точек, из которых две противоположные стороны данного квадрата видны под одинаковым углом.

178. Докажите, что при каждом целом k выражение $\frac{k^5}{120} - \frac{k^3}{24} + \frac{k}{30}$ есть тоже целое число.





2. 17 ц и 24 ц. 3. Считая, что $x \neq \pm 1$, освободим уравнение от знаменателя и придем к выводу: модуль есть отрицательное число 4. $\frac{78 \cdot 20}{156 \cdot 10} = 1$. 5. Общие расходы краски находятся в пределах $12,5 < p < 13,5$, что дает основание считать: краски хватит. 6. Хватит. 7. $-1, 0, 1, 2, 3$. 8. $-5 < k \leq 4$. 10. Зная результат измерения, полученный Петей, Митя мог принять решение прекратить измерения после того, как увидел, что часть только одной стороны составляет половину периметра треугольника. Следовательно, Петя получил результат 112 м, который и сообщил Мите. На самом деле, его результат должен быть больше 120 м. Петя ошибся больше, чем на 8 м. 11. 2000 т 13. $99 \text{ м} < l < 101 \text{ м}$ 150 прыжков 14. $\frac{95}{19}$. 15. Например, $0, \underline{111} \dots$ 17. 16. Диаметр одного круга $\frac{1}{7}$.

20 единиц

Площадь такого круга $\frac{\pi}{4 \cdot 49}$. Площадь 49 кругов $\frac{\pi}{4}$. Площадь, не занятая кругами, составит $1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4 - \pi}{4}$. На этой площади поместилось бы $\frac{4 - \pi}{4} : \frac{\pi}{4 \cdot 49} = \frac{49(4 - \pi)}{\pi} \approx 13$ кругов. 18. Федя получил значительно лучший результат, чем Нина. Погрешность его «измерения» составляет $\approx 5\%$, а у Нины — $\approx 11\%$. 19. Первому. После обмена P_4 на P_2 , второй получит больше. После обмена P_1 на P_2 оба получили примерно одинаково. 20. Переход от равенства $\left(\frac{1}{2} - 5\right)^2 = \left(4 + \frac{1}{2}\right)^2$ к равенству $\frac{1}{2} - 5 = 4 + \frac{1}{2}$ неправилен. Надо: $\left|\frac{1}{2} - 5\right| = \left|4 + \frac{1}{2}\right|$. Петя советовал повторить тождество $\sqrt{a^2} = |a|$. 21. При n — четном, $n + 1$ — нечетное. При n — нечетном, $n + 1$ — четное. В обоих случаях результат равен 0. 22. Уменьшится в 4 раза. 23. Да. 24. Данное выражение равно $3(2 - \sqrt{3}) \approx 3 \cdot 0,27 = 0,81$; $0 < 0,81 < 1$, $0 < \frac{2}{2 + \sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} < 1$. 25. $\sqrt{10} - \sqrt{7}$. 27. 1, 2 и 3 кг 28. $(0, 3\frac{1}{3})$ и $(-2, 0)$. 29. 50 к 30. Выбросы сокра-

тятся на 55 м^3 . 31. — 5. 32. При $-4 < y < 3$ решения нет, при $y = 3$ — одно решение, при $y > 3$ — два. 33. 10 %. 34. Область убывания $(-\infty; 0)$, возрастания $(0; +\infty)$. Множество значений $[-1; +\infty)$. 36. 4. 37. а) 2; б) 0 и 4,5. 38. $2x^2 + px - 6p^2 = 0$. 39. 42. 40. $(a5)^2 = (10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25$. Правило: цифру десятков умножить на число на единицу больше и к произведению приписать справа 25. 41. $a = 1$, $b = 2$. 42. b^{2m} ; если $0,1x \neq b$, то $0,1x = b^m$. 43. Задача имеет решение, если учесть два служебных вагона в пассажирском поезде. 44. а) $-8,1$; б) $1 \frac{72}{289}$. 45. а) $a = \frac{S(q-1)}{q^n - 1}$ ($q \neq 1$); б) $n = 5$. 46. -5 и 3 . 47. 1-й способ: $x^3 - 1 = z$; 2-й способ: $x^3 = u$. 48. $2n + 1$ — нечетное число и является произведением корней этого уравнения. Значит, корни — нечетные числа. Тогда сумма корней должна быть четным числом. Второй же коэффициент есть число нечетное. Противоречие. 49. $\frac{X1}{\sqrt{1}}$.

50. При сокращении неравенства на $3,14$ — π знак неравенства следует поменять на знак противоположного смысла, т. к. $3,14 - \pi < 0$. 51. При $k = 2$ и $x \leq 1$. 52. а) -1 ; 0; 1; б) -2 ; -1 ; 0; в) 0; 1; 2; г) -1 ; 0; 1; д) 0; 1; 2; е) -4 . 53. а), б) 1 при $x > 0$ и -1 при $x < 0$; в) 1 при $x > -1$ и -1 при $x < -1$; г) $3x$ при $x \geq 0$ и x при $x < 0$; ж) $\frac{1}{2}$ при $x > 0$ и $-\frac{1}{2}$ при $x < 0$; з) 1 при $x > 0$ и -3 при $x < 0$. 54. $x \neq -2$, $x \neq -1$; $x \neq 0$. 55. а) При $x < 5$; б) при $x < -2$ и $x > 2$. 56. а) -3 ; б) 9; в) 27; г) 3; д) -1 . 57. а) $-2x$; б), в), г) 2; д) $2x$. 58. Точки M_1 и M_2 — центрально-симметричны относительно точки M . 59. $(a + c)(b + c)(a + b)$. 60. 41, 43, 45. 61. $S_A = \frac{1}{2}a^2$. 62. Бесконечное множество. Нет. 63. а) $89x - 890 = -801$; б) лишняя цифра 0. 64. а) -1 ; 0; б) 3. 65. а) 0; 10; б) -2 ; 1. 66. $\frac{2(1-2m)}{1+m}$, $m \neq -1$, $m \neq -\frac{5}{8}$. 67. Правильное сокращение 3-го, 5-го и 8-го выражений. 68. Оба выражения сокращены правильно. 70. При $a = 0$, $c = 0$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. 71. Условию удовлетворяет любое число вида $\overline{ab\overline{a}}$ ($a \neq 0$). 73. 58. 74. а) $(1 + b^k)(1 - b^k)$; б) $(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)(n^4 + 1)$. 75. а) $3,5 + \sqrt{6}$; б) $\frac{1}{4}(2^{2x+2} - 2^{x+2} + 1)$. 76. Из условия $a + b = 145$ заключаем, что одно из чисел четное, другое — нечетное. Числа a и b должны содержать делители НОК. $174 = 2 \cdot 3 \cdot 29$. 2 и 3 не могут быть общими делителями. 2, потому что одно из чисел нечетное, 3, потому что тогда бы и сумма 145 делилась на 3. Общий делитель 29. Искомые числа 58 и 87. 77. Нет. Если длины катетов выражаются нечетными числами, то сумма их квадратов четным числом. Следовательно, гипотенуза не может быть выражена нечетным числом. Самостоятельно докажите, что существуют прямоугольные треугольники, длины сторон которых выражаются четными числами. 78. $x^2 + 2x - 10 = x^2 + 2x + 1 - 11 = (x + 1)^2 - 11$. Наименьшее значение при $x = -1$ равно -11 . 79. $a > 2$. 80. $k = 2$, $p = 1$. 81. а) Уравнение имеет целые решения, если k взаимно простое число с коэффициентом при x , т. е. нечетное число. Пусть $k = 7$. Тогда $2x + 7y = 3$. Пара $(5; -1)$ является его частным решением. Целые решения этого уравнения могут быть получены по формулам $x = 2 + 7t$ и $y = -1 - 2t$, где t — целое число. Проверьте пригодность формул для $t = 10$ и $t = -3$; б) при $k < -5$ и при $k > 0$; в) $k > 1,5$; г) -27 и 8; д) 5. 82. 321 и 123. 83. Пусть n_1 и n_2 — такие натуральные числа, что $n_1^2 - n_2^2 = 45$ или $(n_1 - n_2)(n_1 + n_2) = 3 \cdot 15 = 5 \cdot 9 = 1 \cdot 45$. Имеем системы:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = 15; \\ n_1 - n_2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} n_1 + n_2 = 9; \\ n_1 - n_2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} n_1 + n_2 = 45; \\ n_1 - n_2 = 1, \end{cases}$$

решение которых дает числа 9 и 6, 7 и 2, 23 и 22. 84. $|x - 3| \leq 3$, $-3 \leq x - 3 \leq 3$,

$0 \leq x \leq 6$. 85. $\sqrt{(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \approx 2,3$. Решением неравенства есть $2 < x < 6$. Удовлетворяет. 86. Нет. 87. Уравнение приводится к невозможному равенству $x^2 + 3 = -(2 - x^2)^2$. 89. $x \geq -1$ и $A > 0$. 90. $b = 4$. 91. а) 60; б) (0; 0); в) $(-2; 1)$. 92. 650 р. 93. 10 %. Из уравнения $2(100 + 100x) + (100 + 100x)x = 231$ находим два корня, из которых пригоден корень 0,1. 94. Диаметр в дециметрах, а скорость в дм/с . $\approx 43\,000 \text{ л/ч}$. 96. б) $943 < 1000$ или $943 < 10^3$, $943^{10} < 10^{30}$. $943^{10} < 100^{15}$. 97. Ваня мог обогнать Мишу в счете благодаря применению рациональных способов решения: $\sqrt{5 \cdot 49^2 - 98^2} = \sqrt{49^2(5 - 4)} = 49$; $\sqrt{27^2 + 81^2} = \sqrt{27^2(1 + 3^2)} = 27\sqrt{10} \approx 27 \cdot 3,2 \approx 86,4$. 98. Нарушается закон о порядке выполнения действий. Извлечение корня — действие

высшей ступени и должно быть выполнено раньше, чем сложение. Ошибка Иры составляет 25 %. 99. После возведения в квадрат $60 + 2\sqrt{500} > 99$, $2\sqrt{25 \cdot 20} > 39$, $10\sqrt{20} > 39$, что очевидно. 101. в) После возведения в квадрат неравенство приводится к виду $(a-b)^2 \geq 0$. 102. б) Пусть стороны прямоугольника a и b . Согласно условию имеем систему $\begin{cases} ab=4, \\ a+b=4. \end{cases}$

Решение ее дает $a=b=2$; в) при $a=b$, что следует из условия $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, в котором равенство имеет место при $a=b$. Но тогда величина $\frac{a+b}{2}$ (чет-

верть периметра) наименьшая; д) заметим, что $nx \cdot \frac{k}{x} = nk$ (постоянная величина), а поэтому правильно $\frac{nx + \frac{k}{x}}{2} \geq \sqrt{nk}$. Наименьшее значение y имеет при

$nx = \frac{k}{x}$ или $nx^2 = k$, $x^2 = \frac{k}{n}$, $x = \sqrt{\frac{k}{n}}$, $y_{\min} = n \sqrt{\frac{k}{n}} + \frac{k}{\sqrt{\frac{k}{n}}} = \sqrt{kn} + k \sqrt{\frac{n}{k}} = 2\sqrt{kn}$. 103. Существуют два прямоугольника со сторонами 3 и 6;

4 и 4. 104. 33 и 132 м². 105. 22. 106. 8 см. 107. 90°, 45°, 45°. 108. $13x^2 - 25Rx + 12R^2 = 0$. 109. 27 кустов. 110. 6 см. 111. Одно из решений $\frac{II+VI}{II} >$

$> \sqrt{II \cdot VI}$. 112. а) $b > 0$, $b \neq 5$; б) $b \leq 0$. 113. 125 %. 115. $\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 1}$. Отложим от точки на прямой отрезок длиной 4 см. На этом отрезке, как на диаметре, опишем полуокружность. Отложим от конца диаметра отрезок длиной 3 см и через его конец проведем перпендикуляр к диаметру до пересечения с полуокружностью. 116. а) 9; б) 18. 117. 4,5. 118. 20 м. 119. Равенству удовлетворяет

любая тройка чисел, находящихся в соотношении $c = \frac{a+b}{2}$. 120. а) 27, 216, ... - 27, ..., в) любое число, являющееся кубом целого числа; г) k может быть вычислено по формуле: $k = \frac{3t+1}{2}$, где $t=2n-1$ и n — натуральное число;

д) $ka^4a^k = ka^{4+k}$; $\frac{4+k}{3} = t$. Откуда: $k=3t-4$, где t — целое число. Условию будет удовлетворять $k=(3t-4)^3$. Например, при $t=4$ $k=512$ и $512 \cdot a^{516} = (8a^{172})^3$; е) $k = \left(-\frac{3t}{5}\right)^3$. где $t=5n$, n — натуральное число. 121. а) и б) 3;

в) $\sqrt{2}$. 122. $(-1; 3)$, $(-3, -1)$, $(1; -3)$, $y = \frac{1}{3}x$. $y = -3x$. 123. $1,6\sqrt{2}$.

124. $(1; 2)$; 2. 125. а) $\frac{1}{3}$; б) сначала решите систему $y+2x=5$ и $x-y=1$.

126. $(-4; 1)$; б) $(-2, 1)$, $(-1; 2)$; в) $\sqrt{2}$. 127. $(1+\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $(1-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. 128. $C(1, a+2)$, $D(-1; a+2)$ или $C_1(1; a-2)$, $D_1(-1; a-2)$. При $a=0$ вершины A и B лежат на оси Ox , при $a=-2$ точки C и D лежат на Ox . При $0 < a < 2$ стороны квадрата пересекают Ox . 129. $2y+x-10=0$. 130. 0,6.

131. $\frac{7\sqrt{11}}{44}$. 132. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{\sin x + \cos x}$; в) $\sin x$. 133. Нет. 135. Обе части неравенства положительны, а потому $|\sin \alpha|^2 + |\cos \alpha|^2 + 2|\sin \alpha||\cos \alpha| < 1$ или

$2|\sin \alpha||\cos \alpha| < 0$, что неверно 136. $4=2\pi R$, $2R = \frac{4}{\pi}$; $d = \left(2\sqrt{2} - \frac{4}{\pi}\right) : 2$; $2r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi}$, $r = \frac{\pi - \sqrt{2}}{2\pi}$, $r \approx 275$ мм. 138. Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон данного, есть параллелограмм (докажите). Его периметр $p=d_1+d_2$, где d_1 и d_2 — диагонали данного четырехугольника. Применяя неравенство треугольника, имеем $d_1+d_2 >$

$> \frac{P}{2}$, где P — периметр данного четырехугольника. 139. Если c — длина третьей стороны, то $6 < c < 18$ и c может иметь длину 8, 10, 12, 14, 16. Из этих значений пригодны 14 м и 16 м. Периметр треугольника равен 32 м или 34 м. 140. Используя неравенство треугольника, имеем $x+z > a$, $x+y > c$, $y+z > b$, где a, b и c длины сторон, а x, y и z — расстояние от точки до вершин.

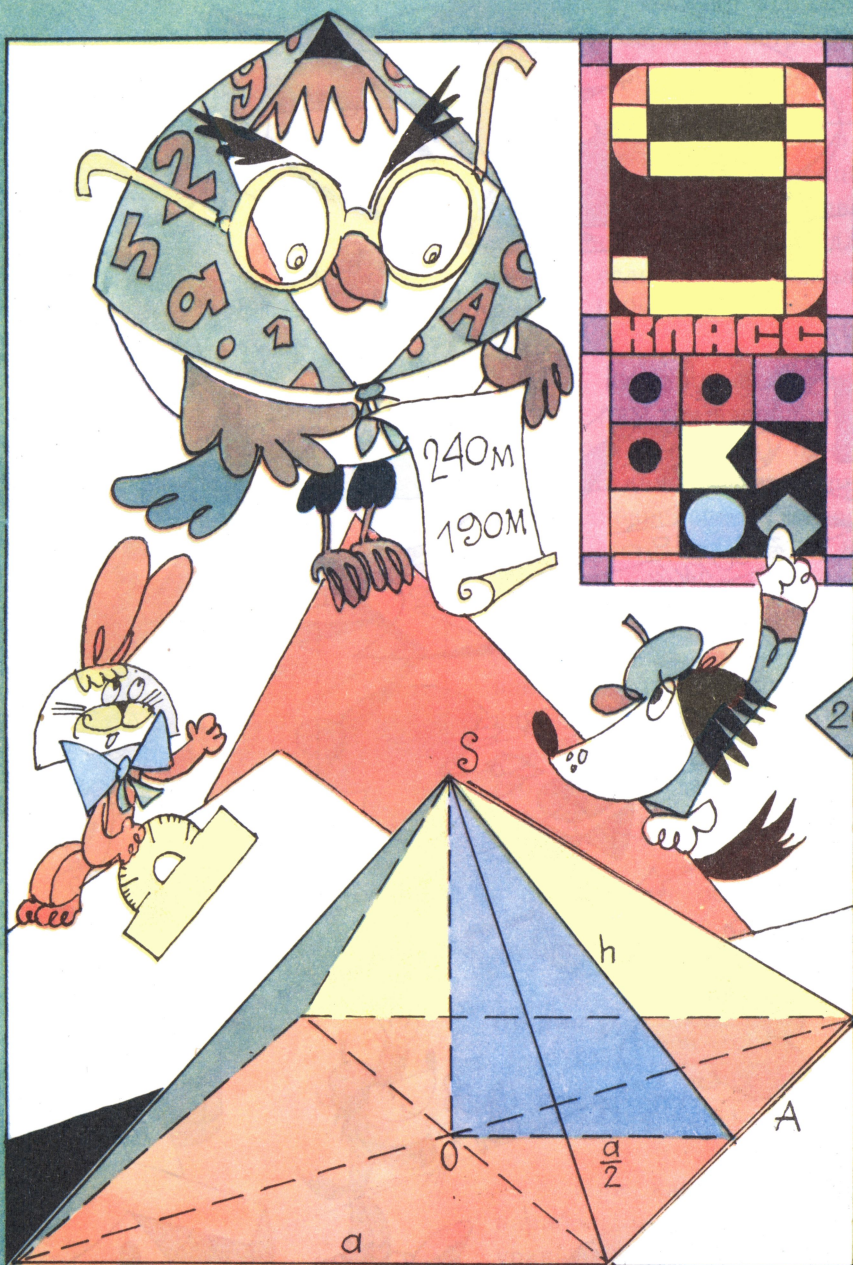
Сложив почленно неравенства, получим $2x + 2y + 2z > a + b + c$ или $x + y + z > p$. **141.** $AB=6$, $BC=8$, $AC=10$, $BM \perp AC$. BM — наименьшая возможная диагональ. $BM=4,8$ см. Стороны прямоугольника 3,84 и 2,88 см. Его площадь 11,0592 см². **142.** а) $8\sqrt{41}$ дм; б) $16\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$ дм; в) за один ход конь проходит расстояние $8 \times 3 = 24$ дм. Чтобы попасть на 8-ю горизонталь, ему надо преодолеть путь $24 \times 8 = 192$ дм; г) нет. Поля а1 и h8 черные. На черное поле h8 конь должен попасть 63 ходом. Нечетными ходами он попадает на белые поля. **143.** С общей вершины провести лучи под углами 15° к сторонам треугольника. Через две другие вершины треугольника провести перпендикуляры к этим лучам до взаимного пересечения. **144.** Вначале строится треугольник по сторонам $\frac{1}{2}c$; $\frac{1}{6}c$ и $\frac{2}{3}m$, где c и m — заданные отрезки. Затем треугольник достраивается до прямоугольного треугольника. **145.** Произвольно строится хорда заданной величины. Радиусом, равным расстоянию от центра до этой хорды, описывается концентрическая окружность. Любая касательная к этой окружности имеет длину a . Из точки в круге проводятся касательные к этой окружности и продолжают до пересечения с данной окружностью. Задача имеет два решения, если $OA > r$, где OA — расстояние от центра до данной точки. Одно решение, если $OA = r$ и решения нет, если $OA < r$. **146.** 14 см.

147. Плюс. **148.** $\sqrt{3}$. **149.** 0,8 и $-\frac{4}{3}$. **150.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ дм, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ дм, $\frac{1}{3}$ дм, $\frac{2}{3}$ дм.

151. а) Нет. При таких данных один из внешних углов равен 180° ; б) $5:4:3$. **152.** Увеличение длины любой окружности на 1 м влечет удлинение радиуса окружности на одну и ту же величину, что следует из равенства $2\pi R - 2\pi r = 1$; $R - r = \frac{1}{2\pi}$ м $\approx \frac{100}{6,78} \approx 16$ см. Кольцо должно иметь диаметр 22 см, и длину проволоки надо взять равной 69,08 см. **153.** Если совместить равные катеты, то гипотенузы — наклонные, проведенные из одной точки и имеют разные проекции на прямую. **154.** Окружность того же радиуса, но со смещенным центром на заданный отрезок. **155.** Равенство $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ сводится к равенству $a^2b^2 = h^2(a^2 + b^2)$, что верно, т. к. $a^2b^2 = c^2h^2$. **156.** Пусть m и n — числа сторон многоугольников Пети и Степы. Из одной вершины можно провести диагоналей $m-3$ и $n-3$, соответственно. По условию $(m-3) - (n-3) = 3$ или $m-n=3$; m и n — натуральные числа. Разность между натуральными числами может быть нечетным числом, если одно из них четное, а другое — нечетное. **157.** Из $\frac{180^\circ(n-2)}{360^\circ} = 5$; $n=12$, а из $\frac{180^\circ(m-2)}{360^\circ} = 10$, $m=22$. В первом многоугольнике всего диагоналей $\frac{12(12-3)}{2} = 6 \cdot 9 = 54$, а в другом $\frac{22 \cdot (22-3)}{2} = 11 \cdot 19 = 209$. **158.** Если описать окружность около треугольника с углом в 30° , то этот угол будет вписанным, а дуга, на которую он опирается, равна 60° . Если провести радиусы в концы стороны, стягивающей дугу в 60° , то получим равнобедренный треугольник. **159.** Построить окружность, которая имела бы центр в данной точке и касалась бы данной прямой, и провести диаметр, параллельно прямой. Концы этого диаметра удовлетворяют условию. **160.** Откладываем a на прямой. Строим угол, равный B , с вершиной в конце отрезка так, чтобы отрезок лежал на стороне угла. На расстоянии h проводим прямую, параллельную a . Пересечение этой параллельной со стороной угла даст третью вершину искомого треугольника. **161.** а) $\frac{2n-4+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$ ($n \neq 2$); б) $x-2 + \frac{b-4}{x-2}$ ($x \neq 2$). **162.** а) 15; б) 4. **163.** Рассмотрим сумму $x-1$ дробей вида $\frac{1}{x+1}$. Эта дробь больше каждого слагаемого, кроме первого. Сумма таких дробей дает $\frac{x-1}{x+1}$, что меньше единицы. Сумма дробей из условия по-прежнему меньше единицы. **164.** $(\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2 + 2\frac{3}{4}$. **165.** $293^3 + 121^3 = 414(293^3 - 293 \cdot 121 + 121^3)$. 414 делится на 9. Значит, и сумма кубов делится на 9. **166.** 1989 кратно 3, значит, сумма кубов — составное число. **167.** Сумма последних цифр слагаемых дает 13. Число, у которого последняя цифра 3,

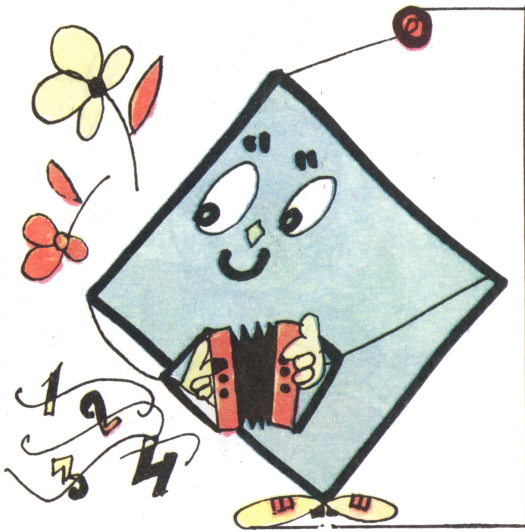
не может быть квадратом целого числа; б) каждое последующее слагаемое, начиная с 41, содержит делитель 31. **168.** а) $\frac{b-a}{c}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 1; г), д) 2. **169.** $1986 = b^2 - a^2$; $2 \cdot 3 \cdot 331 = (b-a)(b+a)$. Системы $\begin{cases} a+b=993, \\ a-b=2, \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=662, \\ a-b=3, \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=331, \\ a-b=6 \end{cases}$ не имеют целых решений. **170.** а) 185; б) 111 р. и 74 р. **171.** 6000 р. **172.** -2 и 2. **173.** а) $30\sqrt{7}$; б) $5\sqrt{2}$; в) $\sqrt{2,5}$. **174.** Из уравнения $\frac{8}{x} - \frac{8}{x+7} = \frac{14}{15}$, получаем один пригодный для ответа корень 5. 12 тепловозов. **175.** 25 га. **177.** Оси симметрии квадрата, перпендикулярные сторонам и лучи двух других осей за пределами квадрата. **178.** $\frac{1}{120}(k - 2)(k - 1)k(k + 1)(k + 2)$. Произведение пяти последовательных чисел делится на 120.







1. По беговой дорожке одновременно стартовали два физкультурника. Первый, имея большую скорость, добежал до конца дорожки, повернул обратно, встретил второго через 5 мин после начала бега и добежал до старта на $1\frac{1}{3}$ минуты позже, чем второй до конца дорожки. Какова скорость первого физкультурника и какова длина дорожки, если второй бежал со скоростью 150м/мин?



2. С аэродромов A и B на аэродром C (все три аэродрома находятся на одной прямой) одновременно вылетают два самолета и прибывают тоже одновременно. Скорость самолета, вылетевшего из A , 800 км/ч. Через 40 минут с аэродрома A вылетает сверхзвуковой самолет, скорость которого 1200 км/ч, и прибывает в C одновременно с первыми двумя. Какова скорость самолета, вылетевшего из B , и чему равно расстояние от B до C , если расстояние от A до B равно 400 км?

3. Найдите область определения

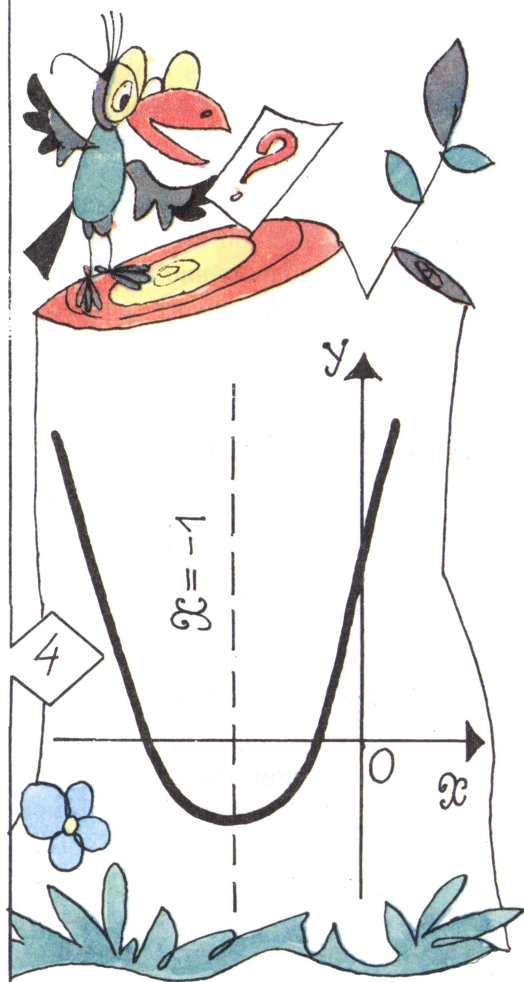
функции: а) $y = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 2x + 1}}$;

б) $y = \sqrt{\frac{1}{x^2 - 8x + 15}}$;

в) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 + x + 1}}$.

4. При каком значении a ось параболы $y = x^2 + 2ax + a^2 + b$ имеет уравнение $x = -1$? (См. с. 112.)

5. Найдите расстояние между осью параболы $y = x^2 - x - 6$ и осью Oy .



6. На координатной плоскости найдите геометрическое место точек, координаты которых связаны уравнением $\left|\frac{x}{y}\right| - 6\left|\frac{y}{x}\right| + 5 = 0$.

7. а) Найдите те целые значения x , при которых $x^2 + 2x - 3$ есть простое число.

б) Найдите такие целые значения x , при которых значение $x^2 + 2x - 3$ делится на 9.

8. Найдите такие значения k , при которых график функции $y = x^2 + 2x + 21 + k$ имеет одну общую точку с осью Ox .

9. В геометрической прогрессии дано: $b_1 = \sqrt{5}$, $b_3 = 2\sqrt{5}$. Найдите знаменатель прогрессии.

10. Найдите сумму членов прогрессии 2, 4, 8, ... от b_k до b_{k+4} .

11. Докажите, что дроби $\frac{3}{a}$, $\frac{6}{b}$, $\frac{12}{c}$ образуют геометрическую прогрессию при условии, что знаменатели a , b , c также образуют геометрическую прогрессию.

12. Сумма 101 члена арифметической прогрессии, у которой первый член 2, равна 404. Найдите сумму первых 51 члена такой прогрессии.

13. Выведите условие, при котором числа, образующие арифметическую прогрессию, могут выражать длины сторон треугольника.

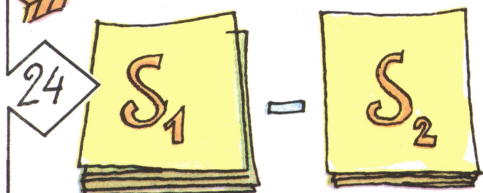
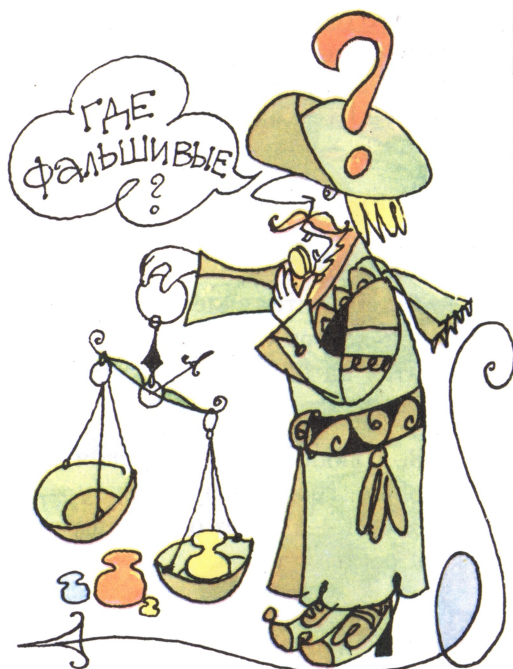
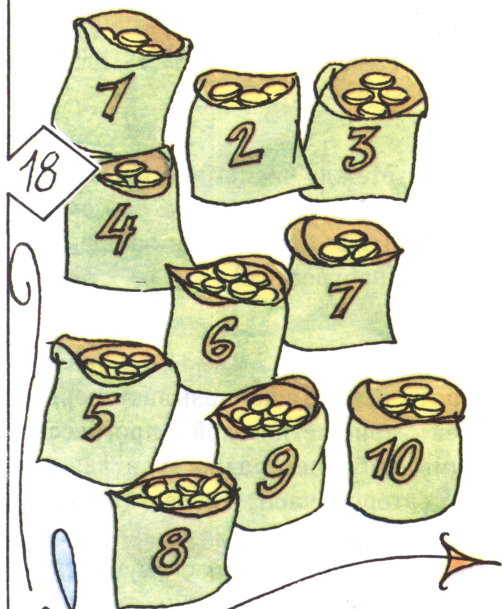
14. В последовательности заданы члены a_7 , a_{17} , a_{20} . Можно ли по этим данным установить, что эти члены принадлежат последовательности, которая является арифметической прогрессией?

15. Между числами m и k вставьте такие три числа, чтобы они вместе с данными образовали арифметическую прогрессию.

16. Маша и Дима условились играть так: Маша называет первый член арифметической прогрессии. Дима выбирает разность и записывает второй член. Тогда Маша выбирает знаменатель и записывает третий член, который с двумя записанными образует также геометрическую прогрессию. Далее Дима подбирает разность и записывает четвертый член, образующий с тремя предыдущими арифметическую прогрессию, и т. д. Проиграет тот, кто не найдет следующего члена. Как играть каждому, чтобы не проиграть?

17. Существуют ли различные геометрические прогрессии, у которых первые и девятые члены равны -2 ?

18. Есть 10 мешков разной массы с произвольным числом монет. В девяти мешках монеты настоящие (одна весит 10 г), а в одном мешке — все монеты фальшивые (по 11 г каждая). Как одним взвешиванием на весах с гирями определить, в каком мешке фальшивые монеты? (См. с. 114.)



$= 15? 12?$

19. Дано b_1 и q . Найдите произведение всех членов геометрической прогрессии от b_{k-2} до b_{k+4} .

20. Дан ряд чисел: $0, \frac{7}{2}, 13, \frac{63}{2}, 62, \frac{215}{2}, 171$. Составьте функцию натурального аргумента, для которой эти числа являются ее частными значениями.

21. Некто за две минуты сообщил новость двум жителям поселка. Те двое, каждый через две минуты, сообщили новость еще двоим, а те через две минуты каждый еще двоим и т. д. Через сколько времени новость узнают все 4094 жителя поселка?

22. Сумма первых n членов последовательности выражается формулой $S=3n^2$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

23. Выведите условие, при котором целочисленный прямоугольный треугольник имеет стороны, длины которых образуют арифметическую прогрессию. (Целочисленный — такой, у которого длина каждой стороны есть целое число.)

24. На 17 карточках написаны все числа от 1 до 17. Можно ли эти карточки разложить на две стопки так, чтобы сумма чисел в одной стопке на 15 превышала сумму чисел другой? А может ли сумма одной стопки превышать сумму другой на 12?

25. Вычислите сумму $1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^6$.

26. Половина стороны основания пирамиды Хеопса (Гиза, Египет), высота ее и апофема образуют геометрическую прогрессию. Найдите высоту пирамиды, если сторона основания квадрата пирамиды 240 м, а апофема 190 м. (В данной задаче размеры несколько округлены. На самом деле, сторона основания пирамиды 233 м, а апофема 183,3 м. С помощью калькулятора вычислите высоту пирамиды при ее действительных размерах.) (См. с. 109.)

27. Бригада бурильщиков должна была пробурить за определенный срок скважину глубиной 2000 м. По расценкам первый метр бурения стоит 80 к., а каждый следующий — на 2 % больше. Перейдя на подряд, бригада вдвое сократила срок бурения, за что ей дополнительно была начислена премия в сумме 10 % общей стоимости работ. Сколько денег получила бригада за бурение скважины?

28. При каком условии выражение $x^{\frac{m+n}{2}}$ является целой рациональной функцией?

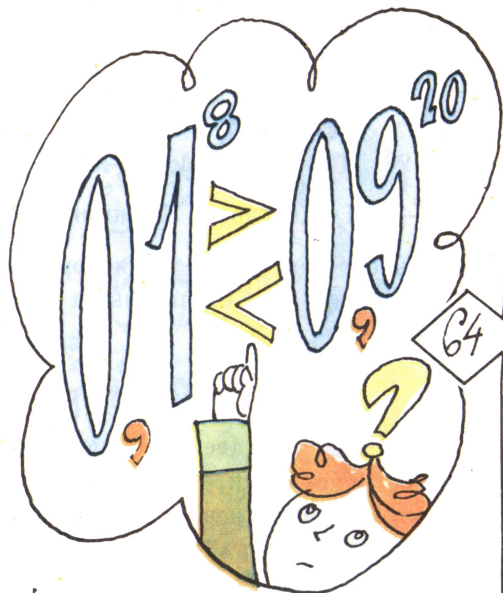
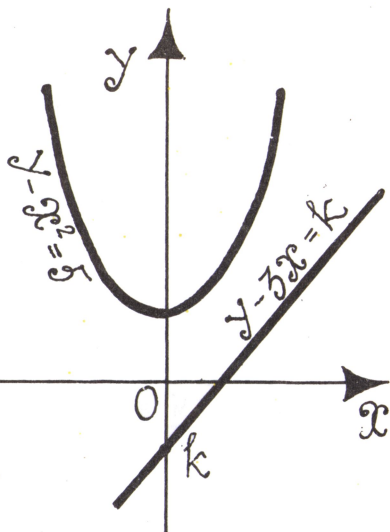
29. Найдите множество решений неравенства $\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < 0,3^x < \sqrt[3]{\frac{100}{9}}$.

30. Найдите область определения функции:

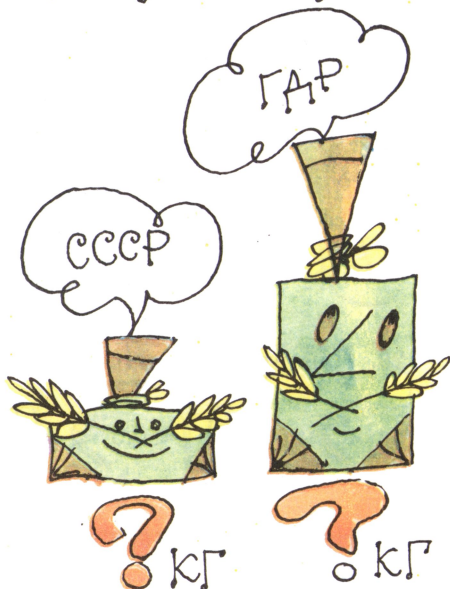
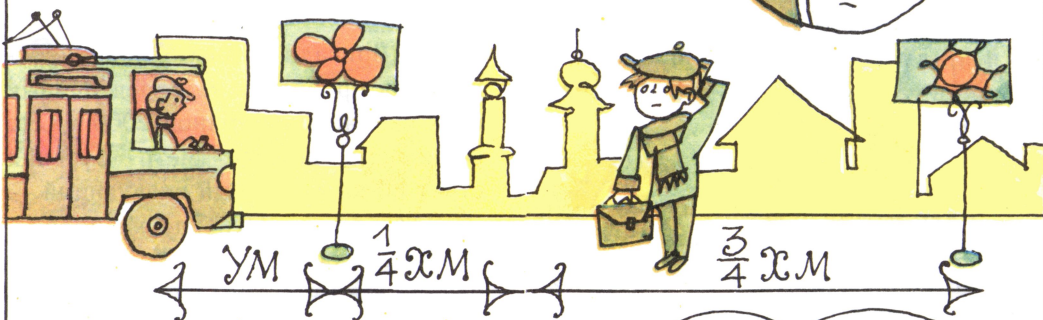
а) $y = \sqrt{(7x^2 - x + 10)(x^2 - 1)}$;

35

45



64



65

б) $y = \frac{1}{(x+10)^2}$; в) $y = \sqrt{\frac{x-5}{x^2+4}}$;
 г) $y = \frac{x}{|x-2|} - \sqrt{9-x}$.

31. При каких значениях a неравенство $x^2 + 2x + a^2 - \frac{1}{8} > 0$ верно при всех действительных значениях x ?

32. Найдите произведение чисел $0,1 \cdot 0,02 \cdot 0,003 \cdot \dots \cdot 0,00000000010$. Ответ запишите в стандартном виде.

33. Дана функция $y = (a^2 - 2a + 1)^n$, где n — натуральное число. Установите, какое из значений функции больше: при $a=2$ и $n=7$ или при $a=0,5$ и $n=10$.

34. Решите неравенство $(z-1)^{10} > (z-1)^9$.

35. Петя утверждал, что система:
$$\begin{cases} y - x^2 = 5, \\ y - 3x = k, \end{cases}$$
 где k — постоянное число, имеет одно или два решения. Дима утверждал, что система при некоторых k может и не иметь решения. Кто прав?

36. С помощью калькулятора вычислите значения выражений $\sqrt[3]{1-x}$ и $\sqrt[3]{1+x}$ при $x=0,07$, применяя приближенные формулы $\sqrt[3]{1-x} \approx 1 - \frac{x}{3}$ и $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$.

37. Даны функции $y = x + 1$ и $y = -x + 3$. Вычислите:

а) площадь треугольника, образованного графиками этих функций и осью Oy ;

б) площадь четырехугольника, образованного графиками функций и осями Oy и Ox .

38. Решите неравенство:

а) $\sqrt{1+x} > \sqrt[3]{1-2x}$;
 б) $\sqrt{1+x} < \sqrt[3]{1-2x}$.

39. Дано равенство: $\frac{20n-15}{9n^2-4} = \frac{x}{3n+2} + \frac{y}{3n-2}$. Докажите, что нет целых значений x и y , при которых это равенство верно.

40. Найдите x из промежутка $[0; 180^\circ]$, если $|\sin x| - |\cos x| = 0$.

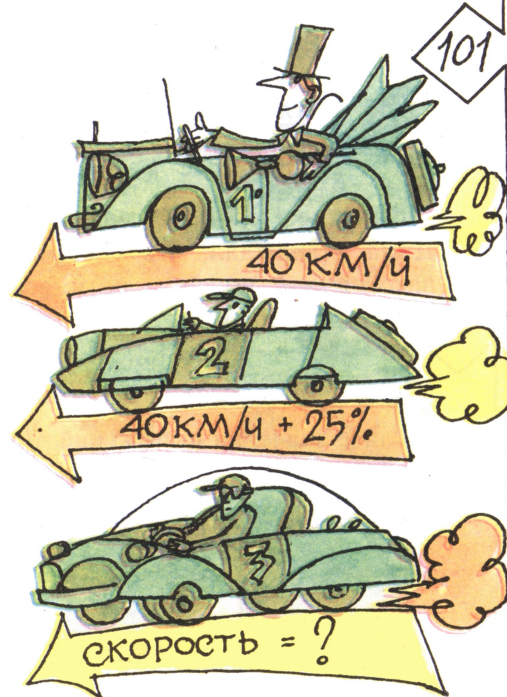
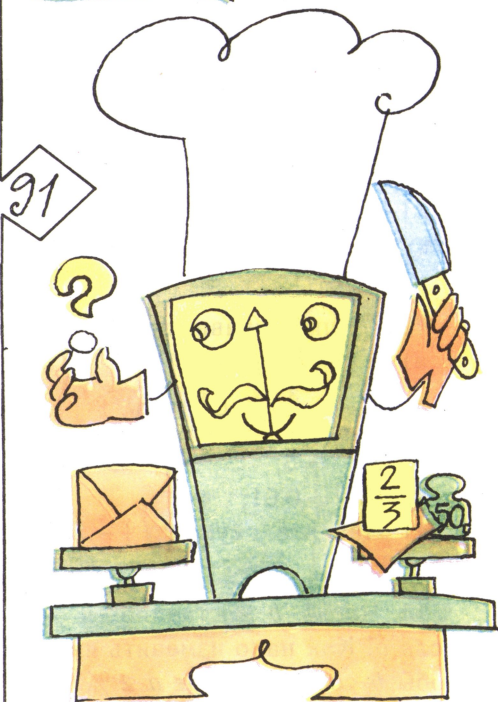
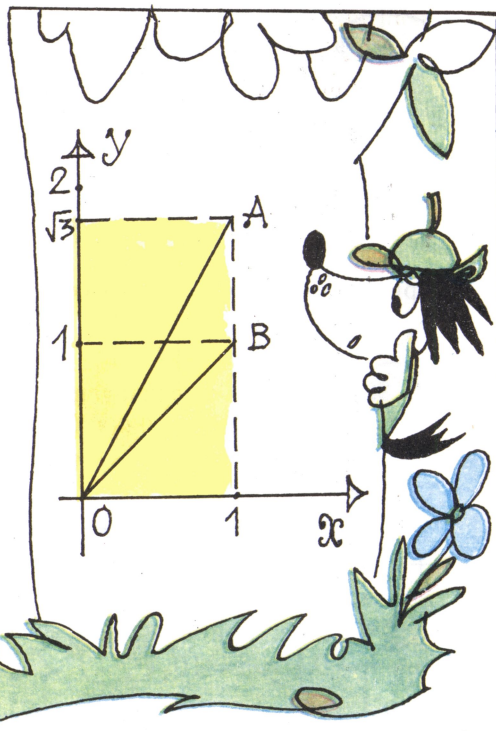
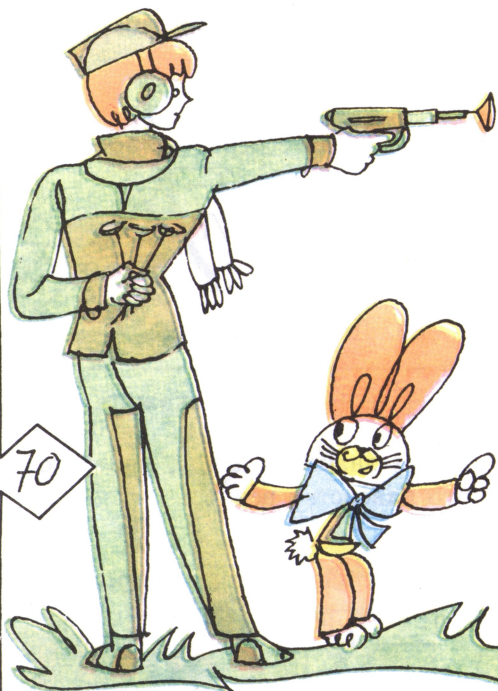
41. Величина $[x]$ (целая часть числа x) удовлетворяет неравенству $[x] \leq x < [x] + 1$, а величина $\{x\}$ (дробная часть) такова, что $0 \leq \{x\} < 1$. Постройте графики функций: а) $y = [x]$; б) $y = \{x\}$; в) $y = [x] + \{x\}$; г) $y = [\sin x]$ на промежутке $[0^\circ; 360^\circ]$.

42. Решите уравнение:

а) $[x]^2 - 5[x] + 4 = 0$;
 б) $\{x\}^2 - \frac{3}{4}\{x\} + \frac{1}{8} = 0$;
 в) $25^{\{x\}} = 5$;
 г) $10^{\{x\}} = 0,01$;
 д) Найдите сумму $[-5,63] + \{-0,348\}$.

43. Число b составляет 1 % от числа a . Как надо изменить число a , чтобы b составляло от a 2 %?

44. Воздушный лайнер пролетел расстояние от A до B и обратно со средней скоростью 600 км/ч. Какова



была скорость лайнера на обратном пути, если она на 250 км/ч больше, чем скорость, с которой он летел от A до B .

45. Не дождавшись троллейбуса, Петя решил идти к следующей остановке. Пройдя $\frac{1}{4}$ пути, мальчик увидел, что к остановке, с которой он ушел, приближается троллейбус. Если Петя побежит к любой из этих остановок, то в обоих случаях успеет сесть в троллейбус. С какой скоростью должен бежать Петя, если скорость троллейбуса 20 км/ч? (См. с. 116.)

46. « $\frac{1}{25}p = 4k$. Извлекая из обеих частей равенства корень квадратный, получим $\frac{1}{5}p = 2k$ ». Считаете ли вы правильным такое рассуждение?

47. Решите неравенство:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

48. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1(x_1 + x_2 + x_3) = 1, \\ x_2(x_1 + x_2 + x_3) = 3, \\ x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 5. \end{cases}$$

49. Степа утверждал, что уравнение $9x + 27 = 8x + 24$ не имеет решения: «На основании распределительного закона имеем $9(x+3) = 8(x+3)$. После сокращения имеем $9 = 8$ ». — «Твои рассуждения будут правильными, если в исходном уравнении заменить x на x^2 », — сказал Петя. Кто из ребят прав?

50. В числе $\overline{1abcd}$ цифры a, b, c образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Найдите все пятизначные числа, удовлетворяющие этому условию и кратные 18.

51. В колхозе 750 га земли разделены на четыре участка для различных культур. Найдите площади этих участков, если площади первого и второго участков пропорциональны числам 5 и 7, третий участок больше четвертого на 150 га, а площадь второго есть среднее арифметическое между площадями первого и третьего участков.

52. Найдите допустимые значения для x в выражении $\sqrt{x^2 - |x - 6|}$.

53. Число \overline{aabb} — точный квадрат. Найдите это число.

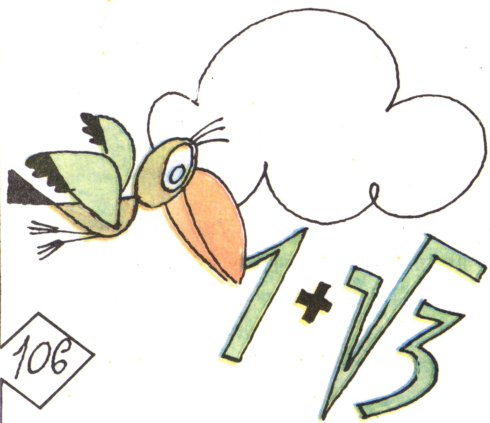
54. Найдите числа, удовлетворяющие равенству: $\sqrt{\overline{МИР}} = \overline{ИМ}$.

55. Постройте график функции $y = \sqrt{25 - x^2}$ и составьте уравнение прямой, имеющей одну общую точку с графиком и: а) параллельной Ox ; б) параллельной прямой $y = -x$.

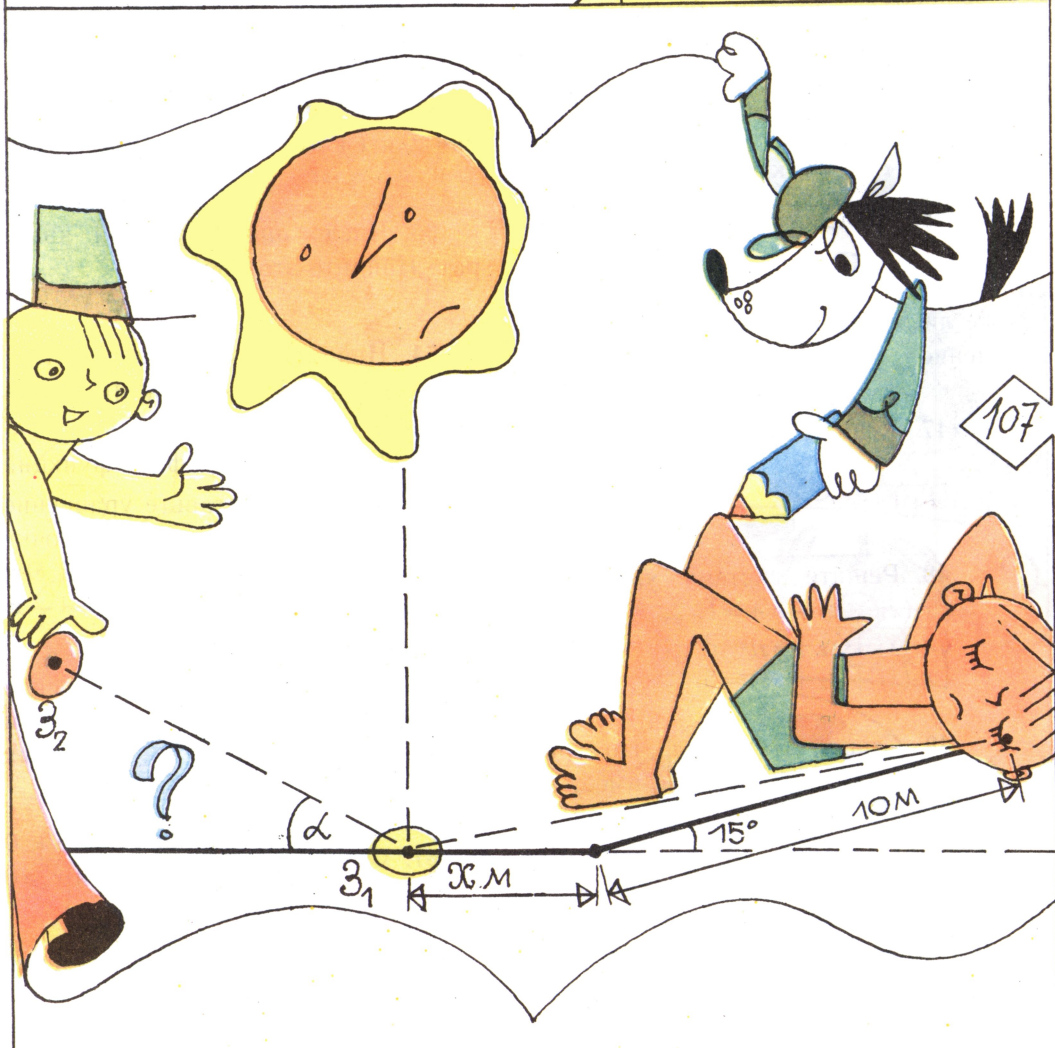
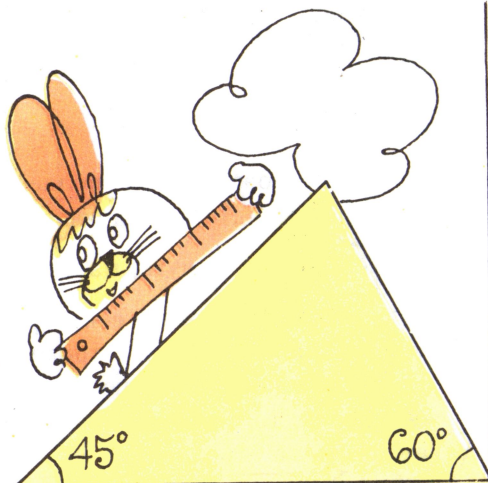
56. Докажите, что уравнение $x^2 + (2k+1)x + 2n+1 = 0$, где k и n — целые числа, не имеет целых корней.

57. Функцию $y = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x < 0, \\ x^2, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$ представьте одной формулой.

58. Какое наибольшее значение может иметь дробь $\frac{10}{x^2 - 2x + 11}$?



106



107

59. Найдите целые значения k , при которых трехчлен $5x^2 + kx - 30$ имеет целые корни.

60. Дан трехчлен $kx^2 + k_1x + k_2$ ($k \neq 0$).

а) Найдите такие целые k, k_1, k_2 , чтобы этот трехчлен был полным квадратом.

б) Докажите, что если коэффициенты k, k_1 и k_2 образуют геометрическую прогрессию, то квадратный трехчлен не может быть полным квадратом.

61. Определите коэффициенты k, k_1 и k_2 , при которых трехчлен $kx^2 + k_1x + k_2$ раскладывается на множители $(x-3)$ и $(x+2)$.

62. Каким должен быть коэффициент k , чтобы уравнения $x^3 + kx + 1 = 0$ и $x^4 + kx^2 + 1 = 0$ имели общий корень?

63. Что представляет собой фигура, координаты всех точек которой удовлетворяют уравнениям $x = \pm \sqrt{9 - y^2}$?

64. Что больше: $0,1^8$ или $0,9^{20}$?

65. В Болгарии в 1988 г. на 1 га пашни расходовали минеральных удобрений на 200 кг меньше, чем в Великобритании. Подобные расходы в СССР и ГДР были преде-

лами решения системы
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - 3 \geq 58, \\ x - 6 \leq 333. \end{cases}$$

В Великобритании расходовали на 41 кг (на 1 га) больше, чем в ГДР. Найдите расходы минеральных удоб-

рений в этих четырех странах по состоянию на 1988 г. и постройте секторные диаграммы, производя расчеты с помощью калькулятора. (См. с. 116.)

66. Острый угол треугольника равен 75° . Высота, проведенная к стороне, прилежащей к этому углу, равна ее половине. Определите остальные углы треугольника.

67. Решите графически неравенство:

$$\text{а) } \frac{3x-2}{3-x} \geq 0; \text{ б) } \frac{x-2}{2x+5} < 0.$$

68. Чему равны коэффициенты a и c в уравнении $ax^2 - 5,2x + c = 0$, если $a = c$?

69. Задача на вычисление числа сторон выпуклого многоугольника свелась к решению уравнения $x^2 - 153x - 141 = 0$. Есть ли смысл решать уравнение?

70. Стрелок находится в условном начале координат. Первый выстрел он сделал по мишени, расположенной в точке $(1; \sqrt{3})$. Второй выстрел ему пришлось делать по той же мишени, которая сместилась в точку $(1; 1)$. На какой угол понадобилось изменить направление выстрела? Найдите уравнения прямых, на которых находились стрелок и мишени. (См. с. 118.)

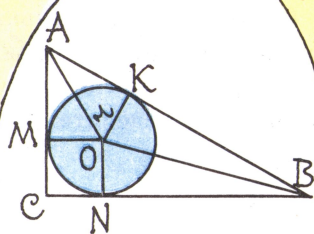
71. Докажите неравенство:

$$\text{а) } \operatorname{tg}(-30^\circ) < 0;$$

$$\text{б) } \frac{1}{2} \geq \sin x \cos x;$$

$$\text{в) } \frac{\cos 13^\circ + 0,5}{2} > \sqrt{\sin 77^\circ \cdot \cos 60^\circ}.$$

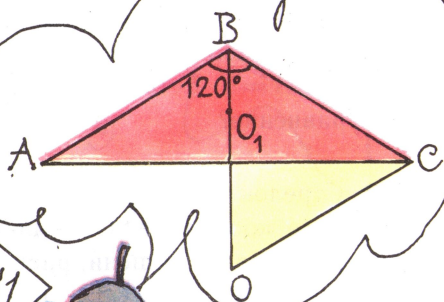
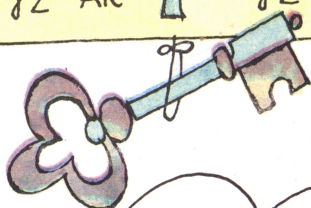
109



$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{AK}$$

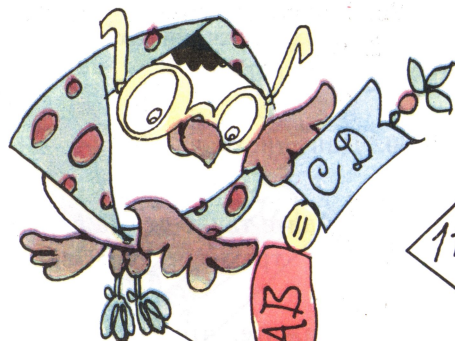


$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{BK}$$

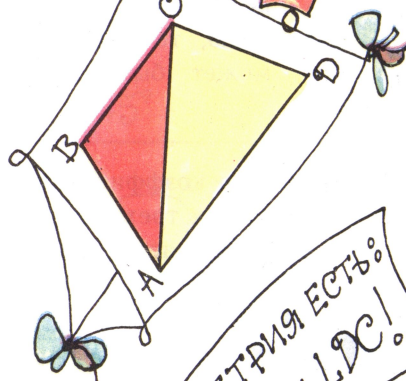


111

$$AB = BC = R$$

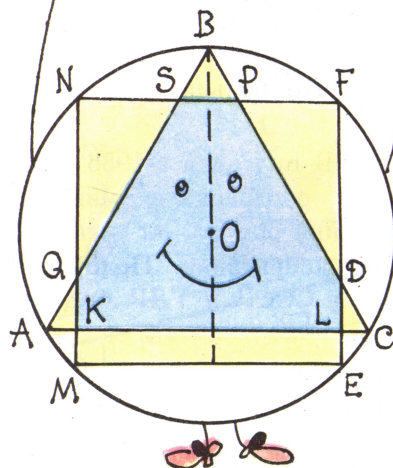


115



СИММЕТРИЯ ЕСТЬ:
 $\triangle ABK = \triangle CBK$

118



72. Постройте угол α , если $\operatorname{ctg} \alpha = -2$. Вычислите $\cos \alpha$.

73. Найдите пределы изменения числовых значений выражений:

- а) $2^{\frac{1}{1+\sin x}}$ ($0 \leq x \leq 90^\circ$);
 б) $2^{\sin x}$; в) $(3^{-1} \cdot 3^2)^{\cos x}$;
 г) $(5^{0,8} \cdot 5^{-\frac{4}{5}})^{\sin x}$; д) $4^{\sin^2 x + \cos^2 x}$;
 е) $2\sin x - 1$; ж) $\sin x + \cos x$, если $0^\circ < x < 45^\circ$.

74. Сравните значения выражений: а) $20^{\sin 45^\circ}$ и $20^{\sin 60^\circ}$; б) $10^{\cos 30^\circ}$ и $10^{\cos 45^\circ}$; в) $2^{\frac{1}{\pi}}$ и $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3$;
 г) $3^{2-\sqrt{5}}$ и $\sin 90^\circ$; д) $a^{\cos 90^\circ}$ и $(\sqrt{3})^{-1}$ ($a \neq 0$).

75. Постройте график функции:
 $y = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$.

76. Сколько корней имеет уравнение, если $x \in [0^\circ; 180^\circ]$:

- а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\cos x = a$, где $a = \sin 30^\circ + \cos 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ - \cos 0^\circ$.

77. Постройте график функции
 $y = [x] + 1$; $y = \{x\} + 1$.

78. Примените графический способ для сравнения величин дробей $\frac{49}{73}$ и $\frac{487}{911}$. Проверьте результат сравнения с помощью калькулятора.

79. По формулам найдите по четыре значения a_n , если аргумент принимает значения 1, 2, 3, 4:

- а) $a_n = \sin \frac{180^\circ}{n}$;
 б) $a_n = \frac{8}{n} - \cos(45^\circ n)$.

80. При помощи единичного круга установите истинность равенства: $|\sin 225^\circ| = \sin 45^\circ$.

81. Выражение $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ где a_1, a_2, b_1 и b_2 — числа, называется определителем второго порядка. Этот определитель имеет значение, равное числовому значению выражения: $a_1 b_2 - a_2 b_1$.

а) Вычислите:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} -1,5 & -7 \\ 2\frac{1}{2} & 2\frac{1}{3} \end{vmatrix}; \quad 20 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

б) Докажите, что

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

и $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot k;$

в) Составьте алгоритм вычисления $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$;

г) Подсчитайте число операций для вычисления на ЭВМ выражения:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$$

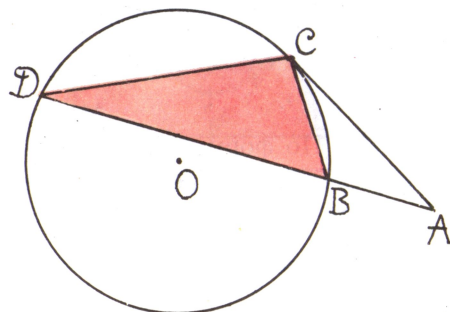
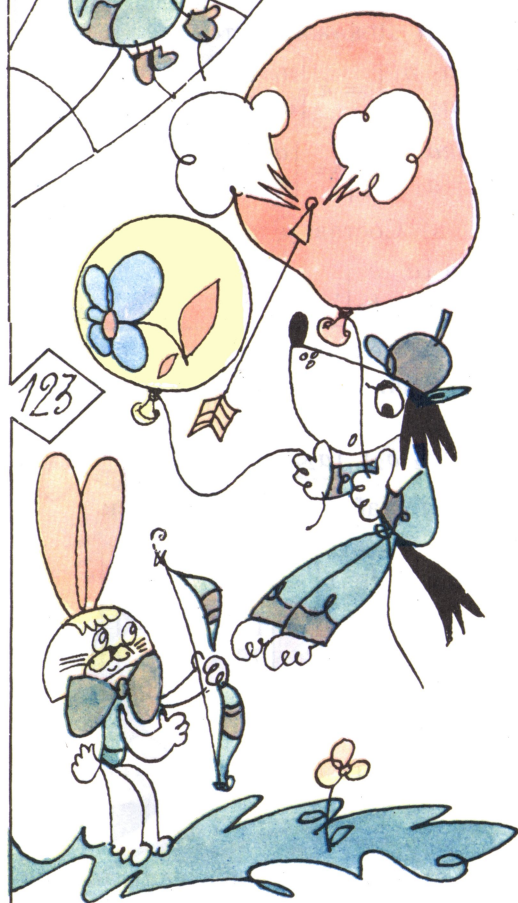
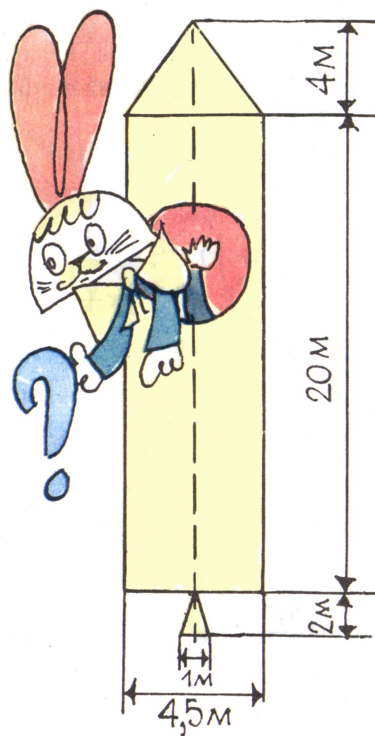
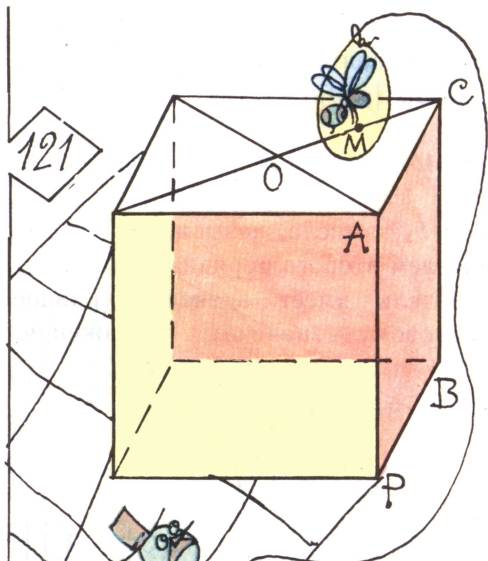
д) Найдите определители:

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -\operatorname{ctg} x \\ \operatorname{ctg} x & 1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \cos x & 1 \end{vmatrix};$$

$$4 \sin^2 \frac{x}{3} \begin{vmatrix} \cos \frac{x}{3} & 1 \\ 1 & \cos \frac{x}{3} \end{vmatrix};$$

е) Составьте определитель, значение которого 120; 0;



ж) Решите систему

$$\begin{cases} 2x + 4y = 18, \\ 3x - 2y = 11. \end{cases}$$

Вычислите определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 18 & 4 \\ 11 & -2 \end{vmatrix};$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}.$$

Найдите частные: $\frac{\Delta x}{\Delta}$ и $\frac{\Delta y}{\Delta}$.

Сравните с результатом, полученным после решения системы. Сделайте вывод. Проверьте вывод на других примерах.

82. Дана сумма: $\frac{1}{n+5} + \frac{1}{n+6} + \frac{1}{n+7} + \dots$ всего $n+3$ слагаемых. Докажите, что сумма этих дробей меньше единицы.

83. а) Выделите полный квадрат в трехчлене $\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} + 5$.

б) Выделите целую часть дроби $\frac{4m^2 - 12m + 19}{2m - 3}$.

84. Разложите на множители $x^2 - 8px + 7p$.

85. Вычислите $y - \frac{x}{3}$, где x и y — решение системы $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7, \end{cases}$ удовлетворяющее условиям $x > 0$, $y > 0$.

86. Решите уравнение: $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}} = 2$.

87. К некоторому задуманному двузначному числу, оканчивающемуся нулем, приписали это же число. Образовалось новое число, и из этого нового числа вычли квадрат задуманного числа. Разность разделили на 4 % от квадрата задуманного числа. В частном получилась половина задуманного числа, а в остатке задуманное число. Какое это число?

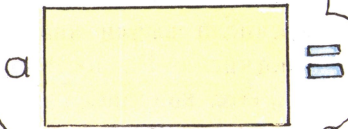
88. В газгольдере емкостью 10^3 м^3 , наполненном на $\frac{1}{5}$ этой емкости, содержится смесь воздуха и вредного газа двадцатипроцентной концентрации. В газгольдер через две трубы одновременно начали поступать до полного его заполнения нейтральный и вредный газы в отношении 7 : 1. Возможен ли выброс в атмосферу образовавшейся смеси, если концентрация вредного газа не должна превышать 15 %?

89. Является ли число, 28 % которого составляют 4,2, решением неравенства $\frac{x+1}{1-3x} < 2$?

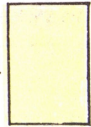
90. Первый член арифметической прогрессии равен 3, а сумма первых 11 членов равна 55. Найдите разность прогрессии.

91. Сережа положил на чашу весов кусок масла, а Ваня на другую чашу $\frac{2}{3}$ такого куска и для равновесия еще гирию 50 г. Какую часть куска должен снять Ваня, чтобы установилось равновесие, если Сережа снял 90 г масла? (См. с. 118.)

129

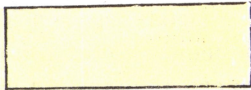


b



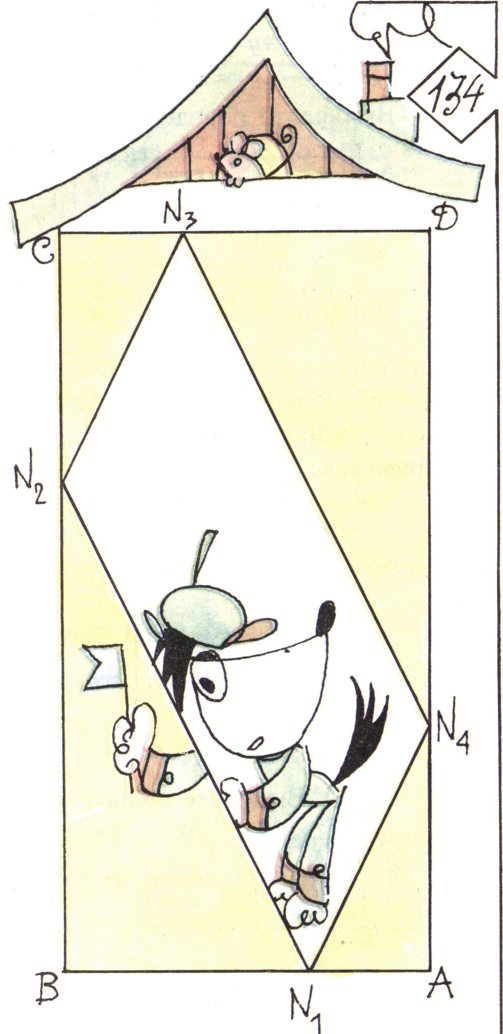
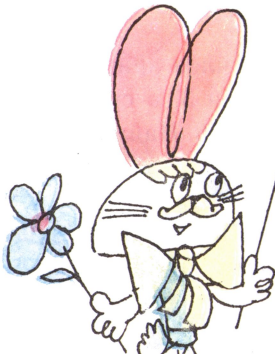
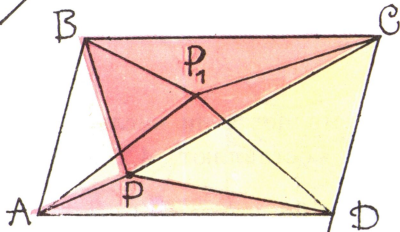
x

+

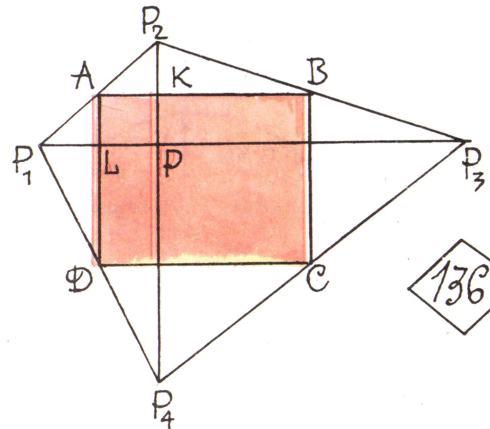


b

131



134



136

92. Докажите неравенство:

$$\frac{3}{m} + \frac{m^2}{9} > \frac{1}{3} + \frac{1}{m} (m > 0).$$

93. Постройте график функции:

$$y = 2|x + 4| - 1.$$

94. В уравнении $ax^2 - 5x + 6 = 0$ определите a , если известно, что $x_1 : x_2 = 2 : 3$.

95. Число членов геометрической прогрессии четное. Сумма всех членов прогрессии в 3 раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии.

96. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{\frac{y-1}{x+2}} + \sqrt[n]{\frac{x+2}{y-1}} = 2, \\ x + y = 12. \end{cases}$$

97. При некоторых значениях p уравнение $x^2 + 3x + 3 + p(x^2 + x) = 0$ имеет равные корни. Найдите эти значения p и составьте квадратное уравнение, один из корней которого в $\sqrt{3}$ раза больше большего значения p , а другой — в $\sqrt{3}$ раза меньше меньшего значения p .

98. Найдите область определения

функции: а) $y = \sqrt{\frac{1}{x} - 1} +$

$$+ \sqrt{-x^2 + 8x - 7};$$

б) $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 5};$

в) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 6x + 8}}.$

99. Вычислите без таблиц:

$$\frac{3\sin^2\alpha + 12\sin\alpha \cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \sin\alpha \cos\alpha - 2\cos^2\alpha}, \text{ если } \operatorname{tg}\alpha = 2.$$

100. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 5. Найдите двузначное число.

101. Две автомашины выехали одновременно из одного пункта и едут в одном направлении. Первая машина едет со скоростью 40 км/ч, а скорость второй составляет 125 % скорости первой. Через 30 мин из того же пункта в том же направлении выехала третья автомашина, которая обогнала вторую на 1,5 часа позже, чем первую. Какова скорость третьей машины? (См. с. 118.)

102. Решите графически систему

уравнений:
$$\begin{cases} y = 7 - |x|, \\ y = \frac{|4 - x^2|}{4}. \end{cases}$$

103. Найдите x из равенства:

$$\frac{9\frac{1}{6} - 1\frac{9}{14} - \frac{1}{30} \cdot 3\frac{1}{3} + \frac{1}{63}}{\frac{19}{96} + \left(8\frac{4}{15} - x\right) : 0,8 - 1\frac{1}{2} : 2,25} = 3\frac{5}{7}.$$

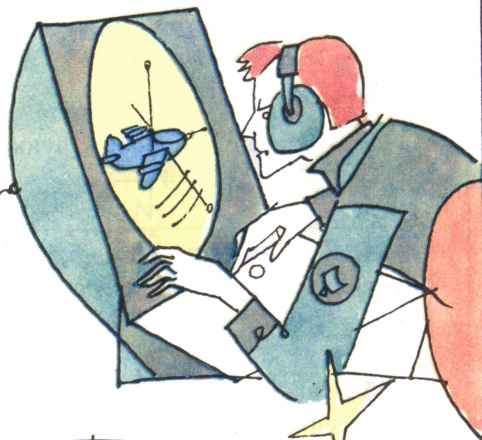
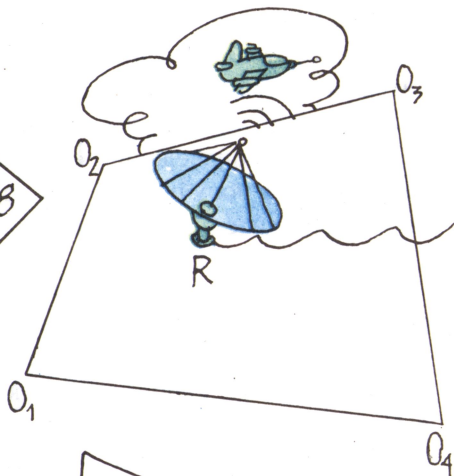
104. Найдите x без калькулятора:

$$1\frac{358}{495} : 94\frac{7}{9}x = 1\frac{13}{99} : 0,21.$$

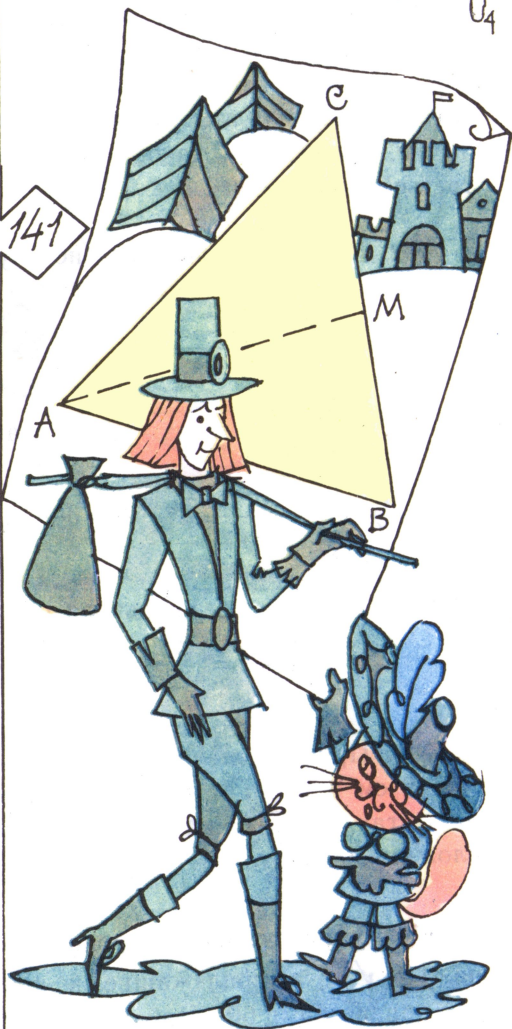
105. Прямоугольник со сторонами 16 см и 9 см разрежьте на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

106. В треугольнике сторона равна $1 + \sqrt{3}$, а прилежащие к ней углы равны 45° и 60° . Найдите сумму квадратов двух других сторон. (См. с. 120.)

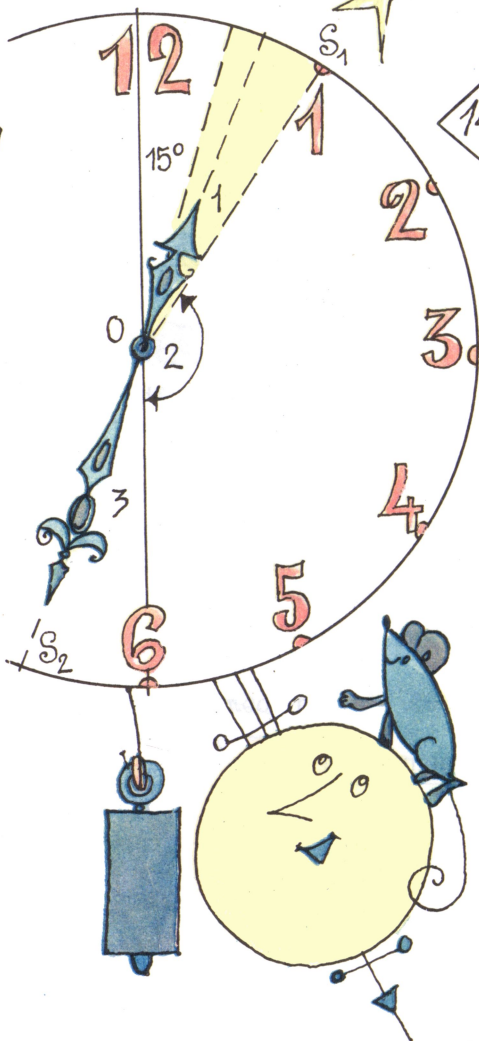
138



141



142



107. Петя дремал на склоне холма уклоном в 15° , длина которого 10 м. Степа, имея два зеркала, решил разбудить его солнечным «зайчиком». На каком расстоянии от подножия холма он должен установить на поверхности земли одно зеркало и под каким углом направить луч другого, чтобы осуществить задуманное? (См. с. 120.)

108. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна $8\sqrt{3}$. Определите боковую сторону этой трапеции, если известно, что острый угол при основании трапеции 60° .

109. Найдите углы прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанной около него окружности относится к радиусу вписанной как 5 : 2. (См. с. 122.)

110. Постройте треугольник, если даны точка пересечения его высот, точка пересечения его медиан и одна из вершин.

111. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 120° . Определите отношение радиусов вписанного и описанного кругов. (См. с. 122.)

112. Дан треугольник с вершинами $A(2; 3)$, $B(4; 3)$ и $C(3; 5)$. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного.

113. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла C . Известно, что $AD=4$ и $BD=3$. Найдите высоту, проведенную из вершины угла C .

114. Определите площадь равнобокой трапеции, у которой основания 10 см и 26 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.

115. Какие углы может иметь равнобокая трапеция, если известно, что она разбивается диагональю на два равнобедренных треугольника? (См. с. 122.)

116. В окружности проведены хорды AB и AC . Через точку A проведена касательная к окружности, а через точку B — прямая, параллельная касательной и пересекающая прямую AC в точке D . Докажите, что $AB^2 = AC \cdot AD$.

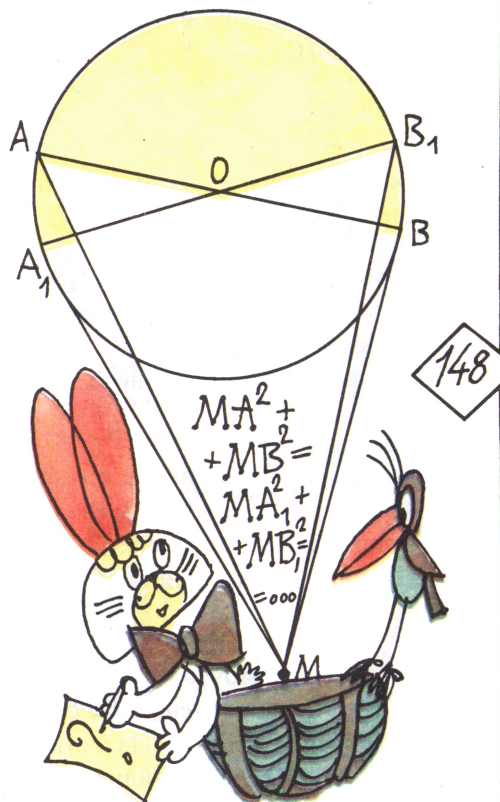
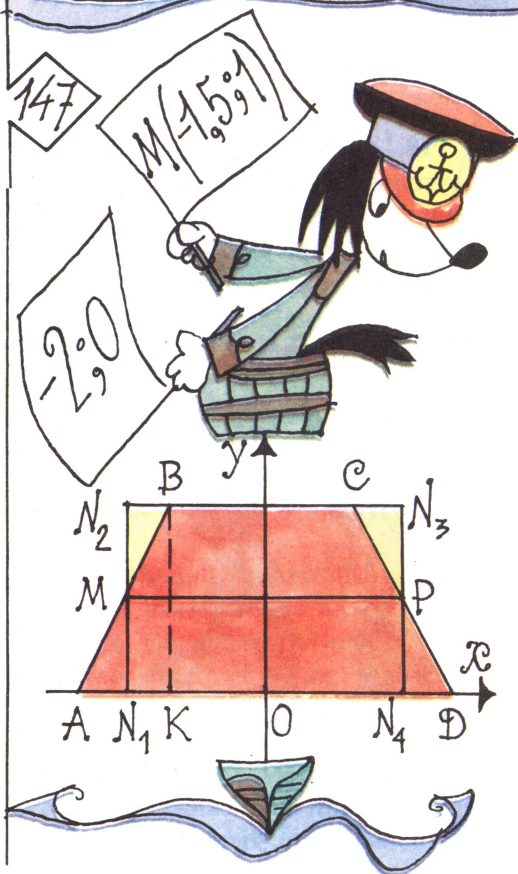
117. В ромб, который разделяется диагональю на два равносторонних треугольника, вписан круг, радиус которого равен $\sqrt{3}$. Найдите сторону ромба.

118. Квадрат и равносторонний треугольник вписаны в окружность радиуса R так, что одна из сторон квадрата параллельна одной из сторон треугольника. Вычислите площадь общей части квадрата и треугольника. (См. с. 122.)

119. Площадь равнобокой трапеции равна 36, а острый угол равен 45° . Большее основание трапеции равно 13. Найдите меньшее основание.

120. Диагонали параллелограмма разбивают его на четыре треугольника. Найдите отношение площади каждого из них к площади параллелограмма.

121. В середине полудиagonали верхней грани куба сидит муха. Паук может перемещаться по ребрам и



диагоналям граней. Какой он должен избрать путь, чтобы быстрее добраться от вершины P нижней грани до мухи? (См. с. 124.)

122. Можно ли построить треугольник, если за длины его сторон взять: длину диагонали куба с ребром a , длину диагонали его грани и длину отрезка, равного $a\sqrt{10}$?

123. Задача-шутка. Волк и Заяц решили путешествовать на воздушных шарах. Нашли в справочнике формулу для объема шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Приняли $\pi \approx 3$ и рассчитали, что для уравнивания 1 кг массы необходимо 3 дм³ газа. Смастерили соответственно своим массам шары. Легко отталкиваясь от земли, начали перемещаться по движению воздуха. Волку показалось этого мало, он отобрал шар у Зайца и присоединил к своему. Вместо свободного парения его понесло вверх. У Зайца был лук. Стрелой он пробил шар Волка, тот начал падать и угодил в речку. «Ну, Заяц, погоди! Если бы не ты, побывал бы я в космосе!» Рассчитайте, во сколько раз радиус шара Волка был больше радиуса шара Зайца, если масса Зайца 4 кг, а масса Волка 20 кг.

124. Как разделить двумя прямыми на три равновеликие трапеции: а) квадрат; б) прямоугольник; в) трапецию?

125. По размерам, указанным на рисунке, найдите площадь осевого сечения ракеты. (См. с. 124.)

126. Из точки вне окружности проведены к ней секущая длиной 12 см и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Найдите длину касательной. (См. с. 124.)

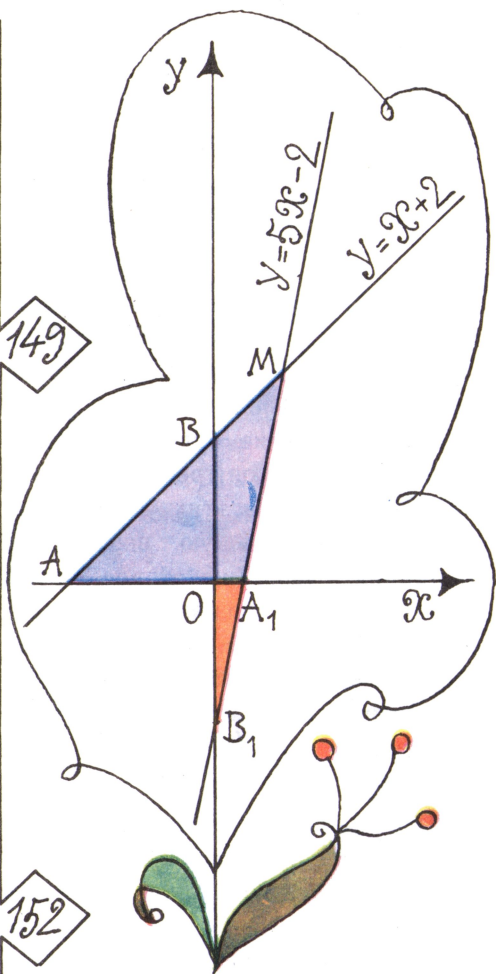
127. Петя исполнял роль директора стадиона. Он дал задание Степе разбить участок треугольной формы со сторонами 9 м и 10 м: «На этом участке будет выступать сам Топтыгин. А он требует широты. Так ты исходи из этих условий, но обеспечить наибольшую возможную площадь». Через некоторое время Степа доложил, что разбита площадка на 40 м². «Иди, подумай и выполни задание лучше», — сказал Петя. Почему Петя забраковал работу Степы?

128. Найдите геометрическое место точек, которое образуют вершины всех треугольников с данным основанием, а высоты h удовлетворяют условию $0 < h \leq a$, где a — длина общего основания.

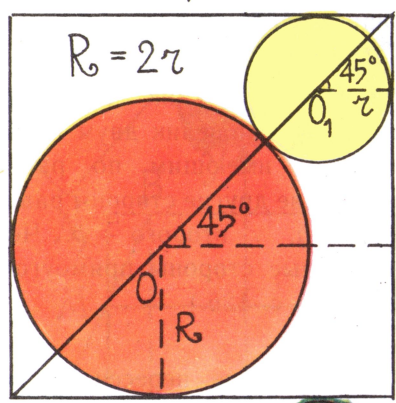
129. Прямоугольник со сторонами a и b равновелик двум прямоугольникам, имеющим по равной стороне, а две другие стороны равны: у одного a , у второго — b . Чему равны равные стороны прямоугольников? (См. с. 126.)

130. O — точка пересечения медиан треугольника. Эта точка соединена с вершинами треугольника. Найдите отношение площади каждого из трех полученных треугольников к площади данного.

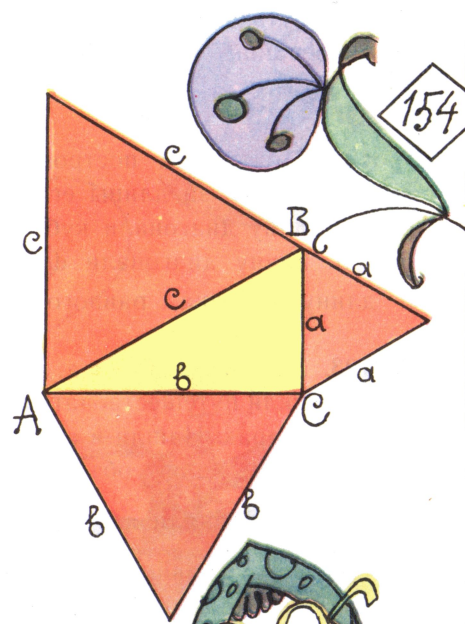
149



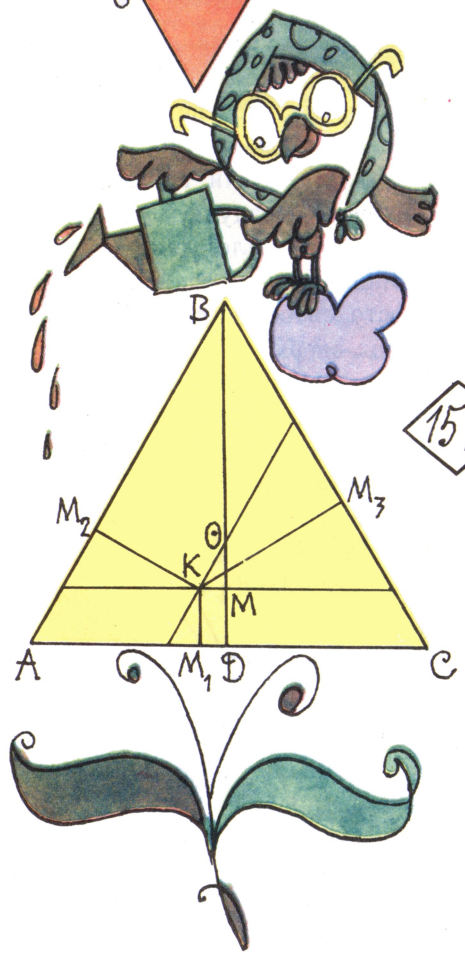
152



154



157



131. Внутри параллелограмма $ABCD$ дана точка P , которая свободно перемещается, не выходя за контуры параллелограмма и постоянно соединена с его вершинами. Как будет изменяться сумма площадей треугольников BPC и APD ? (См. с. 126.)

132. Докажите теорему: если сумма площадей квадратов, построенных на смежных сторонах прямоугольника, равна удвоенной площади прямоугольника, то прямоугольник квадрат.

133. Как от данного треугольника отрезать $\frac{5}{9}$ его площади?

134. Стороны прямоугольника $ABCD$ длиной 3 м и 6 м разделили точками в отношении 1:2, 2:1, 1:2 и 2:1, начиная со стороны $AB=3$ м и идя по периметру по часовой стрелке. Точки деления последовательно соединили отрезками. Найдите вид и площадь полученного четырехугольника. (См. с. 126.)

135. Как от данной трапеции отрезать треугольник, площадь которого составляет $\frac{1}{5}$ ее площади?

136. Внутри прямоугольника взята точка P . Постройте точки, симметричные точке P относительно сторон прямоугольника, и соедините их последовательно отрезками. Докажите: а) стороны образованного четырехугольника проходят через вершины прямоугольника; б) площадь четырехугольника в два раза больше площади прямоугольника. (См. с. 126.)

137. Сумма двух внешних углов треугольника в 5 раз больше суммы смежных с ними углов. Какова величина третьего внутреннего угла?

138. Четыре оборонных объекта расположены в вершинах выпуклого многоугольника. Радарную установку необходимо разместить так, чтобы сумма путей прохождения лучей установки до всех четырех объектов была наименьшей. Где ее нужно разместить? (См. с. 128.)

139. С помощью циркуля и линейки разделите на три равные части угол в 54° .

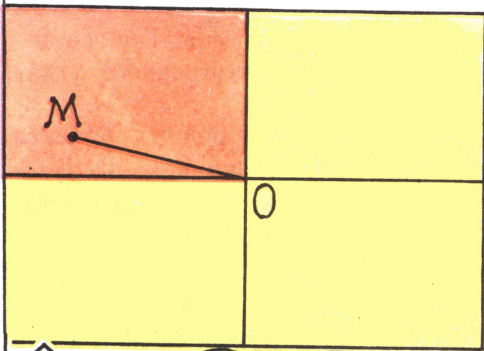
140. α , β , γ — величины углов треугольника. Какого вида этот треугольник, если:

- а) $\alpha + 2\beta = 90^\circ$;
- б) $\alpha < \beta - \gamma$.

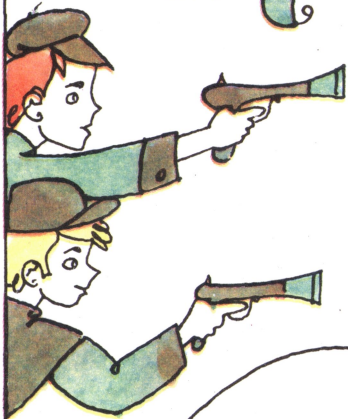
141. Вы находитесь на местности в вершине A равнобедренного треугольника ABC , но не знаете, какие из его сторон равны. Из точки A видны вершины B , C и середина $BC—M$. Не отходя далеко от A , как узнать: а) равны ли AC и AB ? б) если $AB \neq AC$, то какой путь, ABM или ACM , короче? (См. с. 128.)

142. В некоторые моменты часовая и минутная стрелки направлены на центрально симметричные точки относительно центра циферблата. Какой час приблизительно будут показывать часы в такой момент в первый час после полудня? (См. с. 128.)

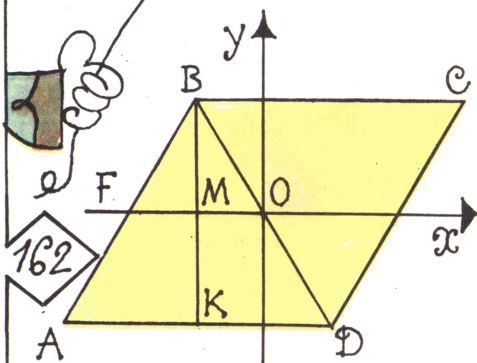
143. На открытой местности, на разном расстоянии от реки, по одну сторону от нее расположены пионер-



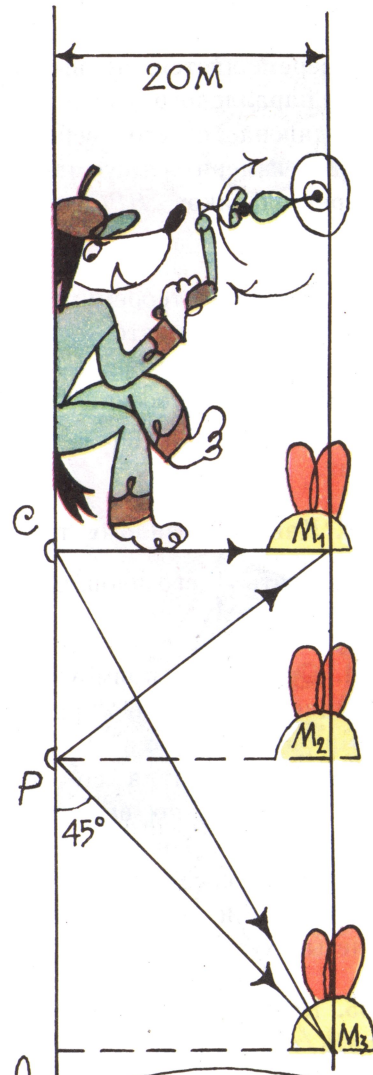
161



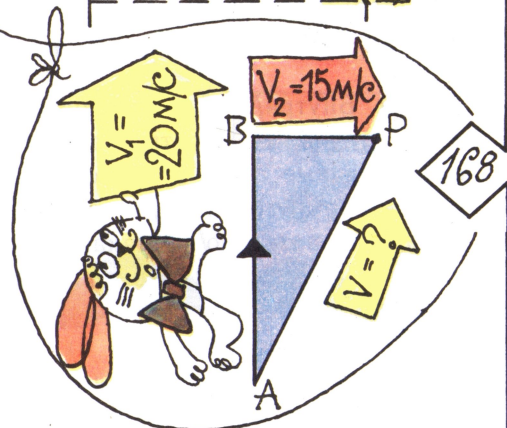
15M



162



165



168

ские лагеря T_1 и T_2 . Петя и Степа находятся в лагере T_1 и должны передать на лодку, которая будет проходить мимо, коробки с мультфильмами, а с лодки получить коробки с новыми фильмами и отнести их в лагерь T_2 . Где выгоднее встретить лодку? (Условия для причаливания везде одинаковые.) Степа советовал идти перпендикулярно к речке. Петя после раздумий и некоторых измерений нашел лучшее решение. Какое решение нашел Петя? (См. с. 130.)

144. Постройте прямоугольник, если дано: центр его симметрии, точка, принадлежащая его стороне, и длина диагонали.

145. Угол между высотами ромба, проходящими через центр симметрии, равен 45° . Длина высоты 2 см. Как построить ромб по этим данным?

146. Ось симметрии трапеции совпадает с Oy . Две вершины ее имеют координаты $(-1; 1)$ и $(-2; -1)$. Найдите координаты двух других вершин и координаты концов средней линии, не прибегая к построению.

147. Ось симметрии трапеции совпадает с Oy , большее ее основание лежит на Ox и имеет длину 4. Один конец средней линии имеет координаты $(-1,5; 1)$. На этой же координатной плоскости расположен по одну сторону от Ox с трапецией равновеликий ей прямоугольник. Сторона прямоугольника лежит на Ox , оси симметрии прямоугольника и трапеции совпадают. Найдите: а) координаты другого конца средней линии; б) координаты вершин

трапеции; в) координаты вершин прямоугольника. (См. с. 130.)

148. а) Точка M лежит на окружности и соединена отрезками с концами произвольного диаметра. Найдите сумму квадратов длин этих отрезков, если длина радиуса окружности равна $\sqrt{5}$ см.

б) Точка M лежит вне окружности и соединена с концами произвольного диаметра. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M до концов любого диаметра есть величина постоянная. (См. с. 130.)

149. На координатной плоскости заданы прямые $y=x+2$ и $y=5x-2$, которые вместе с осью Ox образуют треугольник AA_1M . M — точка пересечения прямых, A и A_1 — точки пересечения их с осью Ox . (См. с. 132.)

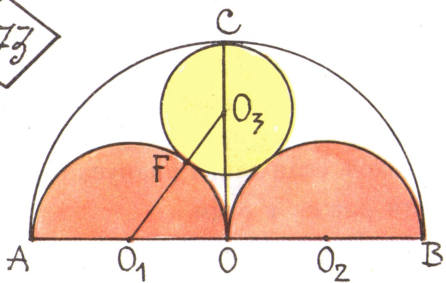
а) Найдите координаты точки M .

б) Среди прямых $y=x+1,5$, $y=-x-1$, $y=5x$, $y=x+5$, $y=5x-3$, $y=-x+2$, $y=4x+5$. Найдите: 1) те, которые отсекают от треугольника AA_1M треугольник ему подобный; 2) те, которые отсекают от треугольника BB_1M , где B и B_1 — точки пересечения прямых с осью Oy , треугольник ему подобный.

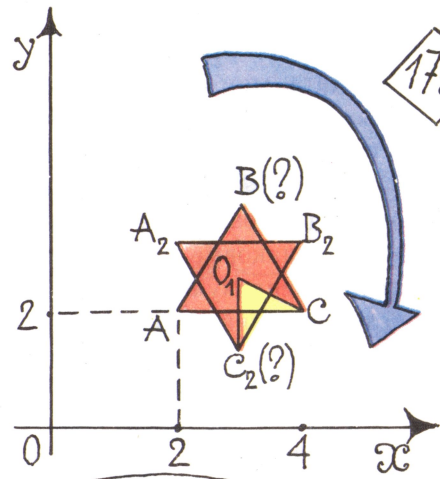
150. Разность наименьших сторон подобных треугольников равна 1 м, а периметр одного из них составляет $\frac{3}{5}$ периметра другого. Найдите стороны, разность которых задана.

151. Углы треугольника относятся как $1:2:3$. Как построить треугольник, подобный данному, чтобы радиус окружности, описанной около него, был равен 5 см?

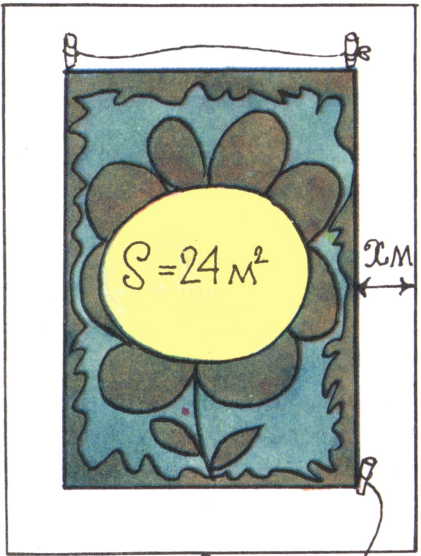
173



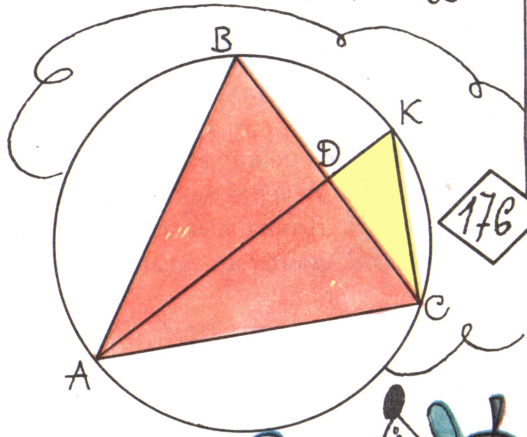
175



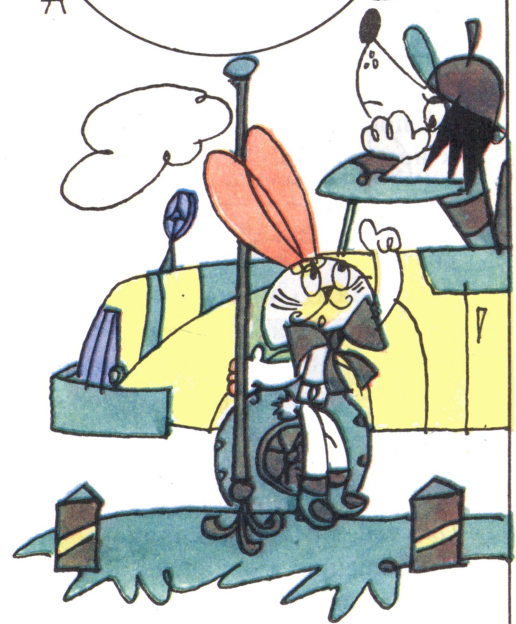
8M



176



174



152. В квадрат со стороной 1 м вписаны два круга так, что каждый внешне касается другого и двух сторон квадрата, а центры их лежат на диагонали. Найдите радиусы кругов, если коэффициент их подобия равен 2. (См. с. 132.)

153. Докажите, что если диагональ равнобедренной трапеции делит ее на два равнобедренных треугольника, то эти треугольники не могут быть подобными.

154. На сторонах прямоугольного треугольника построены равносторонние треугольники. Коэффициент подобия треугольников, построенных на катетах, равен k . Найдите коэффициент подобия треугольников, построенных на гипотенузе и на одном из катетов. (См. с. 132.)

155. Диагонали прямоугольника уменьшили в три раза. Будет ли полученный прямоугольник подобен данному?

156. Треугольник, образованный полудиagonалями и меньшей стороной одного прямоугольника, подобен треугольнику, образованному полудиagonалями и меньшей стороной другого прямоугольника. Подобны ли эти прямоугольники?

157. Внутри правильного треугольника найдите такую точку, расстояния от которой до сторон треугольника пропорциональны числам 1, 2 и 3. (См. с. 132.)

158. Через основание биссектрисы проведена прямая, параллельная

стороне треугольника, имеющей длину 10 см. Найдите внутренний отрезок этой прямой, если другая, прилежащая к биссектрисе сторона, равна 8 см.

159. Площадь квадрата, построенного на диагонали прямоугольника, в два раза больше площади прямоугольника. Докажите, что прямоугольник — квадрат.

160. Петя перерисовал из учебника в масштабе $1 : 2$ прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и углом 60° и предложил Степе вычислить площадь перерисованного треугольника. Степа рассуждал так: «Длина гипотенузы уменьшилась в два раза и стала равной 4 см. Угол тоже уменьшился в два раза и стал равным 30° . Поэтому катет, лежащий против него, будет равным 2 см. Теперь найдем другой катет, воспользовавшись теоремой Пифагора, а затем и площадь». Какой ответ получил Степа? Найдите ошибки в рассуждениях Степы.

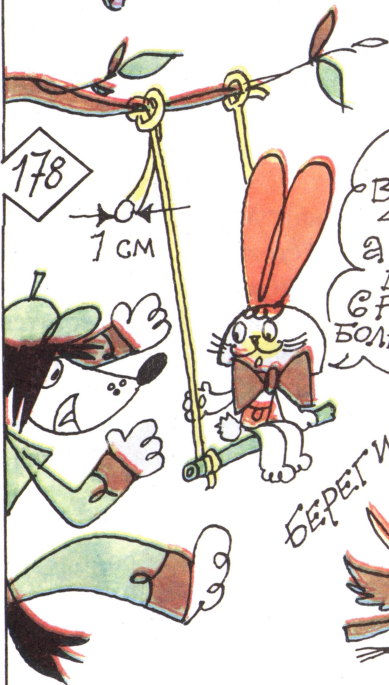
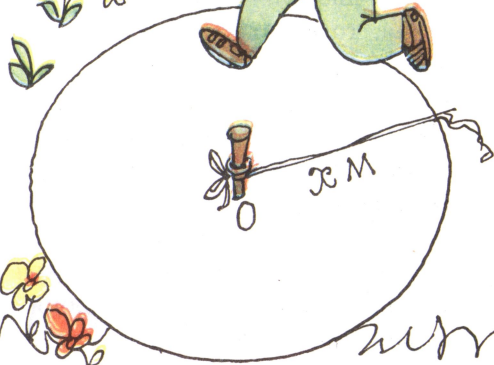
161. Точка M внутри прямоугольника отстоит от меньших его сторон на 1 см и 6 см, а от больших — на 2 см и 3 см. Поместится ли внутри прямоугольника окружность с центром в центре симметрии прямоугольника и с радиусом, равным расстоянию до данной точки? (См. с. 134.)

162. Центр симметрии ромба совпадает с началом координат, а ось Oy перпендикулярна сторонам ромба. Угол ромба 60° , а меньшая диагональ равна 2. Найдите координаты вершин ромба. (См. с. 134.)

СОБЛЮДАТЬ
ОДИНАКОВУЮ
СКОРОСТЬ!!!

177

ЖЮРИ



178

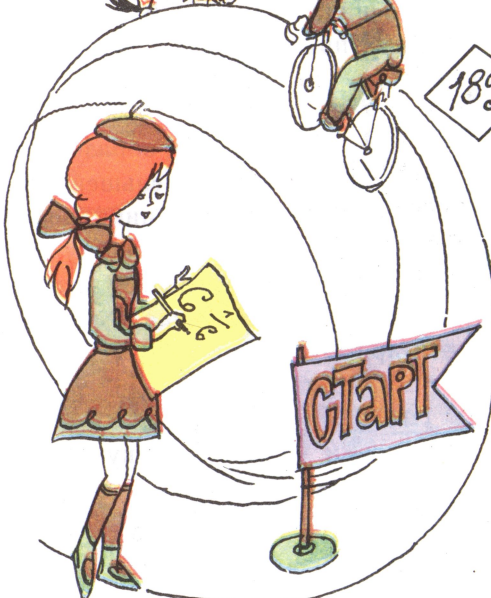
7 CM

Я
ВЕШУ
4 КГ,
А ТЫ
В
СРАЗ
БОЛЬШЕ.

БЕРЕГИСЬ!



189



163. Высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки, пропорциональные числам 16 и 25. В каком отношении делит гипотенузу биссектриса прямого угла?

164. По высоте h найдите площадь равностороннего треугольника.

165. Петя и Степа стреляли по мишени, которая двигалась по прямой, параллельной линии их расположения. Расстояние между стрелками 15 м. Расстояние до линии движения мишени — 20 м. Первый выстрел был сделан тогда, когда мишень была на ближайшем расстоянии от Степы. Второй — тогда, когда направление на мишень у Пети составляло 45° с линией расположения стрелков. С какого расстояния стрелял Петя первый и второй раз? Мог ли поразить мишень Степа вторым выстрелом, если дальность полета пули из пневматического оружия 40 м? (См. с. 134.)

166. Катеты имеют длины 1 и 2. Найдите радиус круга, вписанного в этот треугольник.

167. Катет имеет длину 6 м и равен радиусу описанной около этого треугольника окружности. Вычислите второй катет.

168. Точка A двигалась по прямой в течение 5 с со скоростью 20 м/с, затем повернула под прямым углом и двигалась до пути P еще 5 с, но уже со скоростью 15 м/с. С какой скоростью должна двигаться другая точка с того же места, что и A , но прямо на пункт P , чтобы прибыть туда одновременно с точкой A ? (См. с. 134.)

169. Катет и гипотенуза соответственно равны $4\frac{2}{7}$ и $4\frac{5}{7}$ см. Гипотенузу увеличили на 1 см, катет не изменяли. Как изменится второй катет?

170. Докажите, что если все стороны прямоугольного треугольника увеличить на 1 см, то новый треугольник уже не будет прямоугольным.

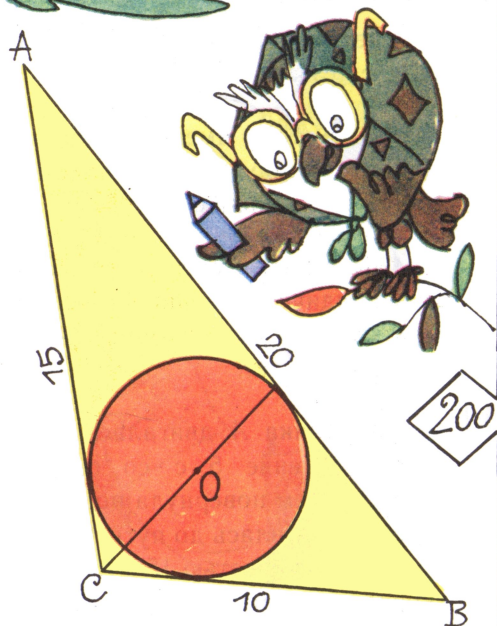
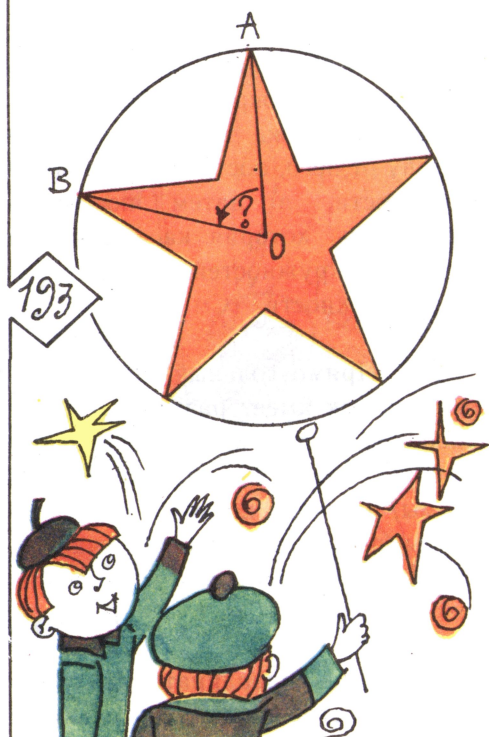
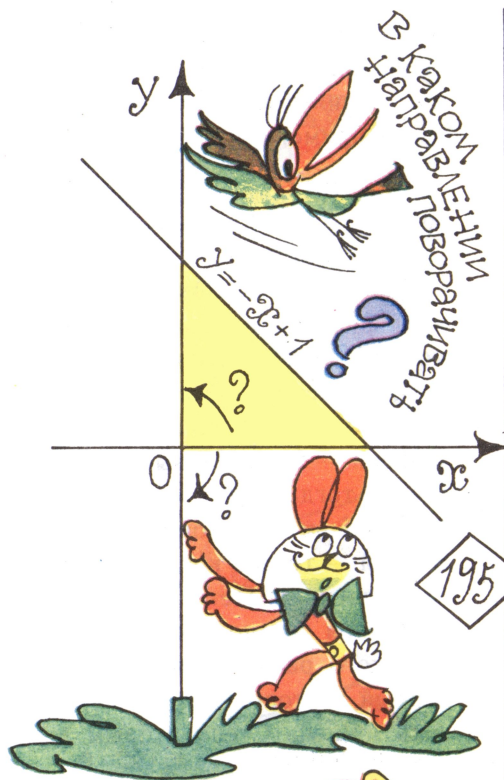
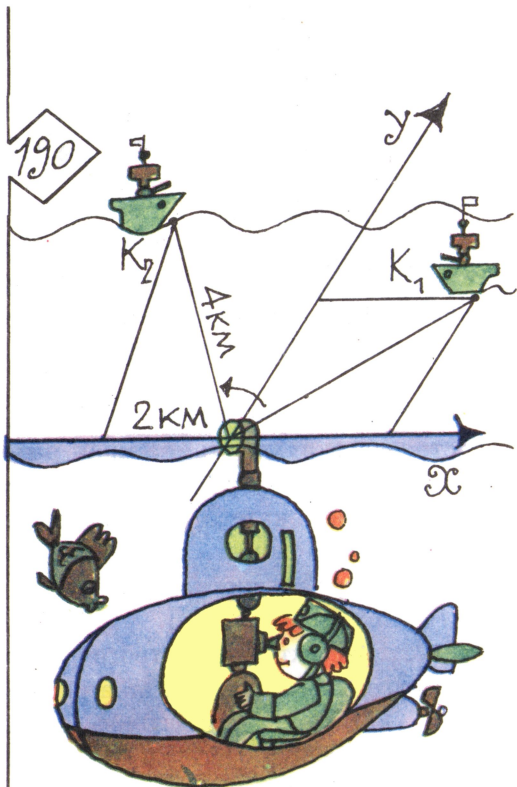
171. На катете, как на диаметре, построена окружность, которая разделила гипотенузу в отношении 1 : 4. Длина катета, на котором построена окружность, 1 см. Найдите второй катет и гипотенузу.

172. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника разделила катет в отношении 1 : 2. Найдите длину биссектрисы, если другой катет имеет длину 3 см.

173. На отрезке длиной 6 см построена полуокружность, на половинах этого же отрезка по ту же сторону от него, построены две полуокружности, а затем построена окружность, которая касается всех трех полуокружностей. Найдите радиус окружности. (См. с. 136.)

174. Прямоугольный приусадебный участок имеет размеры 6×8 м. Посредине участка предполагают разбить газон тоже прямоугольной формы, площадь которого составляла бы половину площади участка. Какой ширины должна быть дорожка вокруг газона? (См. с. 136.)

175. Даны координаты двух вершин равностороннего треугольника:



$A(2; 2)$ и $C(4; 2)$. Найдите: а) ординату третьей вершины B ; б) координаты вершин треугольника $A_1B_1C_1$, который симметричен треугольнику ABC относительно Ox ; в) координаты вершин треугольника $A^1B^1C^1$, симметричного ABC относительно Oy ; г) координаты вершин треугольника $A_2B_2C_2$, который получается при повороте по ходу часовой стрелки треугольника ABC около его центра на угол 60° . (См. с. 136.)

176. В окружность вписан $\triangle ABC$. Медиана AD продолжена до пересечения с окружностью в точке K . Вычислите длину медианы AD , если $BC=8$ см и $DK=2$ см. (См. с. 136.)

177. Петя и Степа заспорили о том, кто из них обойдет больший по площади участок за 12 мин. Условились идти с одинаковой скоростью, а форму участка каждый мог выбрать, какую хотел. Степа знал, что из всех прямоугольников с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат, а потому решил идти по периметру квадрата. Петя рассуждал иначе. Он забил в землю кол, замерил часть отмеренной Степой стороны квадрата, привязал... Что дальше делал Петя, установите сами и ответьте на вопросы: а) Какой путь выбрал Петя? б) Какую часть стороны он замерил? в) У кого площадь участка получится больше? (См. с. 138.)

178. Заяц раскачивался на качелях. Диаметр поперечного сечения веревки качелей 1 см, и она выдерживает нагрузку не более 50 Н. Масса Зайца 4 кг. Пришел Волк:

«А ну прочь, Заяц! Я буду качаться!» — и стянул Зайца с качелей. Сможет ли покачаться на качелях Волк, если его масса в 6 раз больше массы Зайца? (См. с. 138.)

179. а) Луч AB сонаправлен с лучом CD . Сколько существует параллельных переносов, которые отображают луч CD на луч AB ?

б) Сколько существует параллельных переносов, которые отображают луч CD в луч AB ?

в) Лучи AB и CD противоположно направлены. Сколько существует параллельных переносов, отображающих CD на AB ?

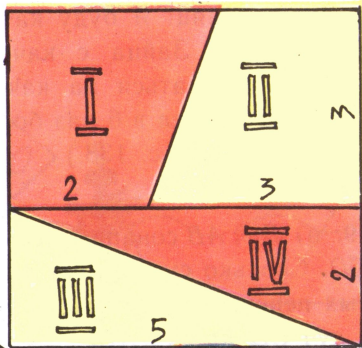
180. Дано два выпуклых многоугольника. В одном из них на две стороны больше, чем в другом, а сумма внутренних углов в два раза больше. Сколько сторон имеют многоугольники?

181. Докажите, что, имея достаточное количество монет достоинством в 3 к. и 5 к., можно уплатить любую сумму, большую 7 к.

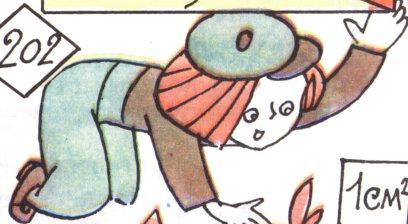
182. В треугольнике ABC из вершины k противоположным сторонам проведены отрезки AD и CF . $FD=3$ м, $AC=6$ м. Можно ли утверждать, что AD и CF являются медианами треугольника ABC ?

183. Дано: $\overline{a} - \overline{kb} = 2\overline{a}$. При каком условии это возможно?

184. Дано: $\overline{b}(4; \frac{4}{\sqrt{3}})$. Какой угол образует вектор \overline{b} с осью Ox ?

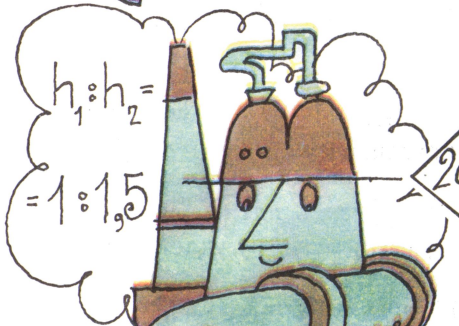
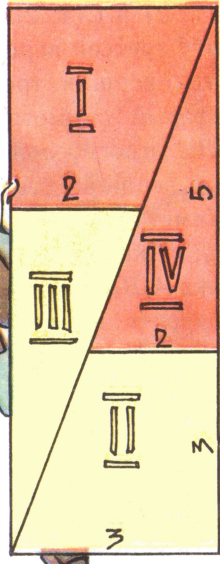
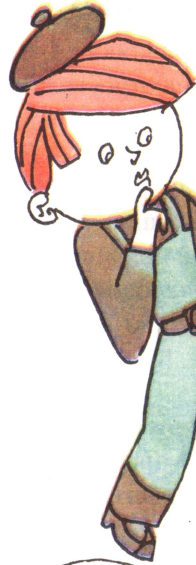
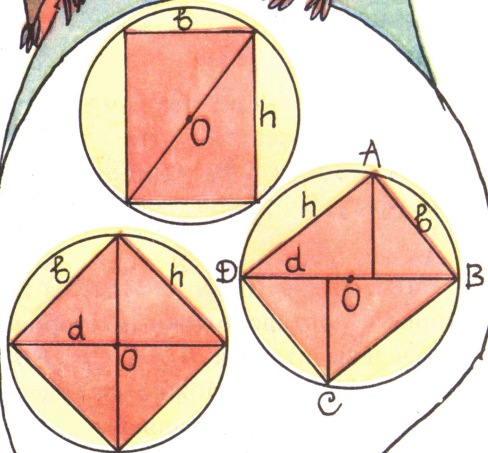
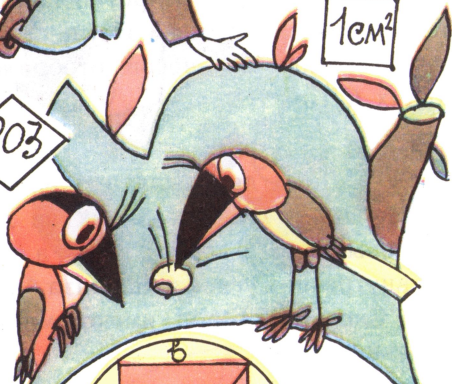


202



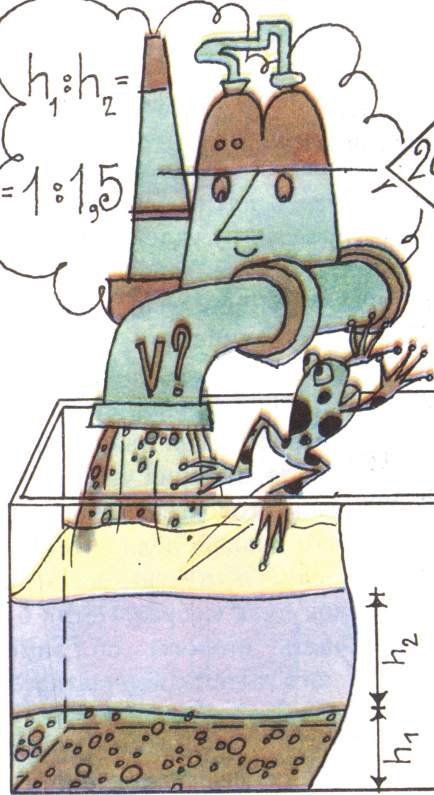
1cm²

203



$$h_1 : h_2 = 1 : 1,5$$

204



h_1
 h_2

185. Дано $\vec{b}(x; 2,5)$ и угол между вектором \vec{b} и Ox , равный 30° . Выразите \vec{b} через составляющие по координатным осям.

186. $ABCD$ — трапеция. MN — средняя линия. M — середина AB . Найдите сумму $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CN} + \overline{NM}$.

187. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано $AB=BC$, $\angle B=106^\circ$, $\angle A_1=\angle C_1=37^\circ$. Подобны ли эти треугольники?

188. В прямоугольном треугольнике длина гипотенузы 5, а высота, проведенная к ней, имеет длину $\sqrt{6}$. Найдите проекции катетов на гипотенузу и сами катеты.

189. Степа ехал на велосипеде по круговому треку и проехал с какого-то момента $6\frac{1}{6}$ круга в одном направлении, а затем $3\frac{1}{3}$ круга в обратном. Сколько градусов содержит дуга трека, концами которой являются начальное и конечное положение Степы на дорожке?

190. Катер K_1 заметили с подводной лодки в точке $K_1(3; 3)$ относительно условной системы координат с началом в месте расположения перископа лодки. Второй катер K_2 заметили на расстоянии 4 км во второй четверти в точке с абсциссой — 2. Сколько румбов составляет угол, под которым видны оба катера? (1 румб $=11^\circ 15'$). (См. с. 140.)

191. Миша и Ваня разбивали клумбу для цветов. Миша держал один конец веревки длиной 3 м, а Ва-

ня, натягивая веревку за другой конец, ходил по окружности.

а) Какой путь пройдет Ваня, если Миша повернется на угол в 40 румбов?

б) На какой угол повернется Миша, если Ваня пройдет по окружности 157 м?

192. Две вершины квадрата имеют координаты $(2; 2)$ и $(-2; 2)$. Центр квадрата совпадает с началом координат. Квадрат повернули на 45° вокруг его центра. Какие координаты имеют его вершины в новом положении?

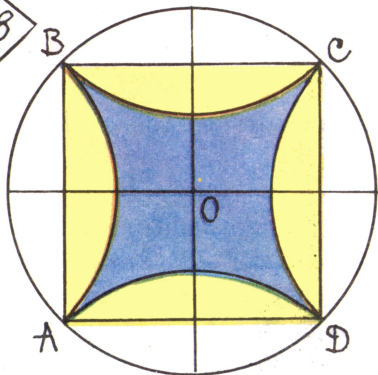
193. Найдите наименьший угол, на который надо повернуть правильную пятиконечную звезду около ее центра, чтоб она совпала сама с собой? (См. с. 140.)

194. Днепропетровск и Хабаровск находятся на одной параллели. В Хабаровске астрономами было отмечено прохождение созвездия через меридиан. На какое наименьшее число градусов от этого момента должна повернуться Земля, чтобы это созвездие прошло через меридиан Днепропетровска, если между этими городами 7 часовых поясов?

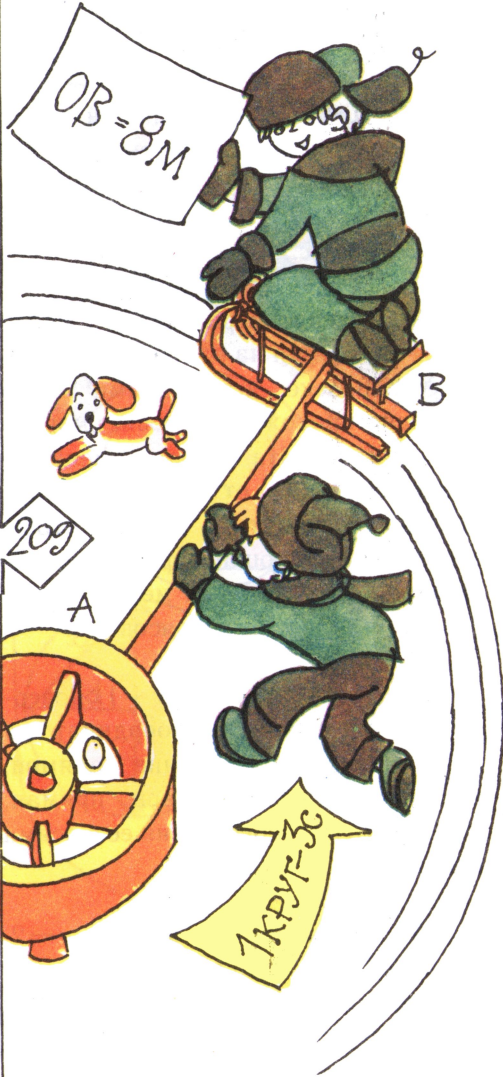
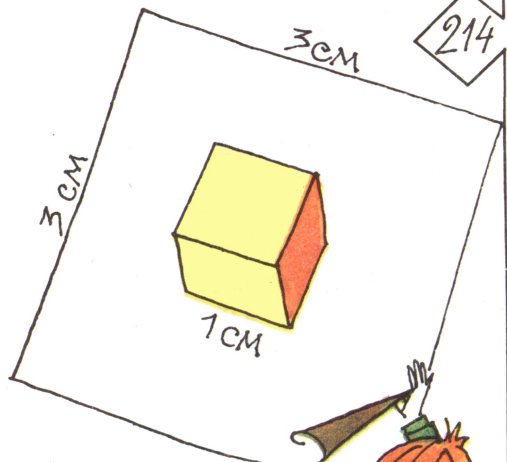
195. Прямую $y = -x + 1$ повернули вокруг начала координат на 90° . Найдите уравнение прямой, в которую отобразилась прямая, а также точки пересечения ее с осями координат. (См. с. 140.)

196. Даны прямые $y = x$ и $y = 2$. На какой угол надо повернуть вокруг их точки пересечения прямую $y = x$, чтобы она совпала с прямой $y = 2$?

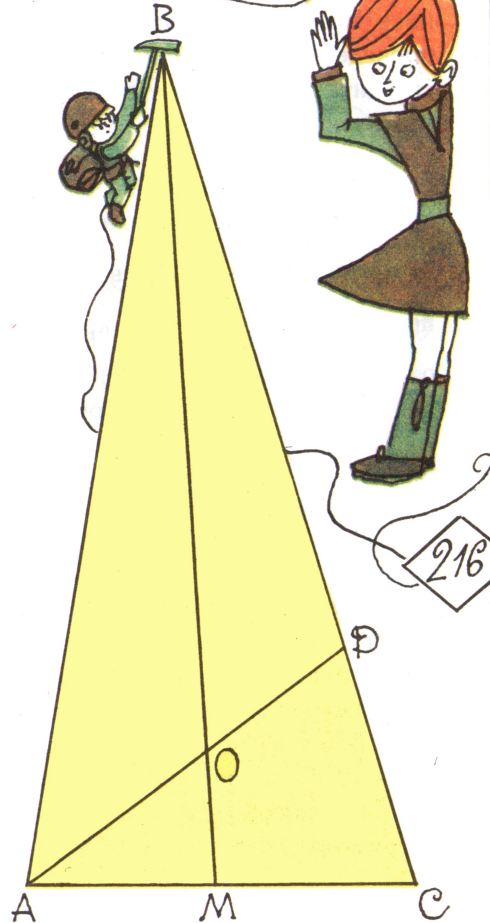
208



214



209



216

197. Два вписанных угла имеют общую вершину. Один из них опирается на дугу, составляющую $\frac{1}{3}$ окружности, а другой — на дугу в $\frac{1}{4}$ окружности. Во сколько раз один из углов больше другого?

198. Хорда перпендикулярна диаметру и делит его на части, пропорциональные числам 1 и 3. В каком отношении разделится этой хордой окружность?

199. Окружность с радиусом 5 см вписана в прямоугольный треугольник с гипотенузой 25 см. Найдите периметр этого треугольника.

200. Дан треугольник ABC со сторонами: $AB=20$ см, $BC=10$ см, $AC=15$ см. В каком отношении делит биссектрису угла C центр окружности, вписанной в треугольник? (См. с. 140.)

201. В прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вписана окружность. Найдите расстояния от центра окружности до вершин треугольника.

202. Петя сказал Степе: «Квадрат со стороной 5 см разбиваю на части. Смотри! Из этих четырех частей составляю прямоугольник. Найди площадь квадрата и площадь прямоугольника». Степа нашел: « $S_{\text{кв}}=5^2=25 \text{ см}^2$; $S_{\text{пр}}=3 \cdot 8=24 \text{ см}^2$. И удивился: — Куда же девался 1 см^2 ?» Объясните причину исчезновения 1 см^2 площади. (См. с. 142.)

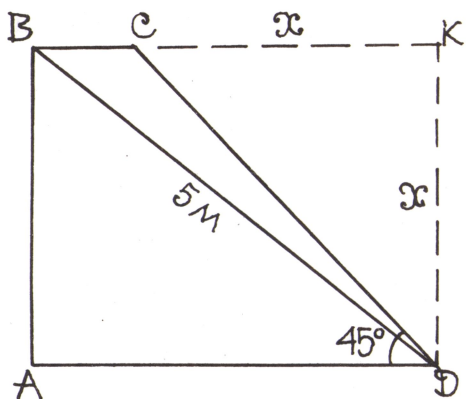
203. Из бревна можно изготовить брусы, имеющие различные поперечные сечения. Установлено, что на

изгиб лучше всего «работает» брус, для которого выдержано соотношение $d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$. На практике расчеты производят так: диаметр бревна DB делят на три равные части и из точек деления проводят перпендикуляры к диаметру. Точки пересечения перпендикуляров с окружностью соединяют с концами диаметра и получают лучшее сечение. Вычислите площадь поперечного сечения самого надежного бруса, который можно изготовить из бревна диаметра 9 дм и сравните его размеры с теоретически рассчитанным брусом. (См. с. 142.)

204. Для очистки воды на производстве применяют отстойники параллелепипедной формы. Используемая вода такова, что каждый час из нее оседает 1 м^3 вредных для природы веществ. Какого объема должен быть отстойник для производства, которое сбрасывает отработанную воду в течение 14 часов в сутки, для недельной непрерывной работы, если для эффективного оседания вещества необходимо, чтобы отношение высоты жидкости к высоте осевшего вещества было бы равным $1,5 : 1$? (См. с. 142.)

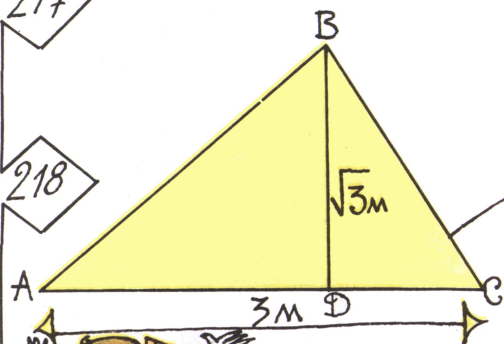
205. Угол между диагоналями прямоугольника равен 30° . Квадрат имеет сторону, равную половине диагонали прямоугольника. Докажите, что квадрат и прямоугольник равновеликие.

206. Вычислите площадь сегмента, который отсекается от круга стороной правильного треугольника, вписанного в круг, если длина стороны 3 см.

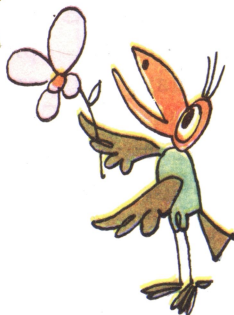
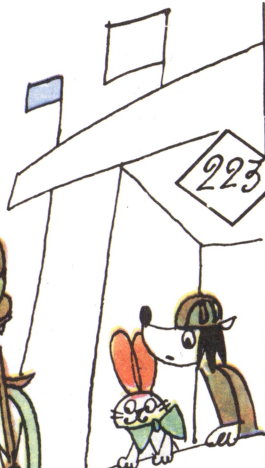
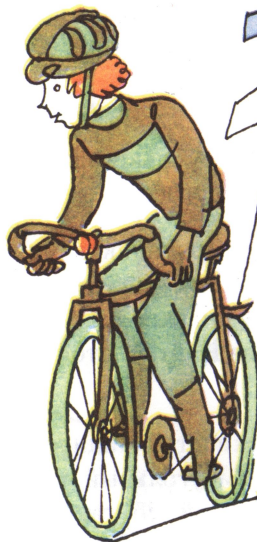
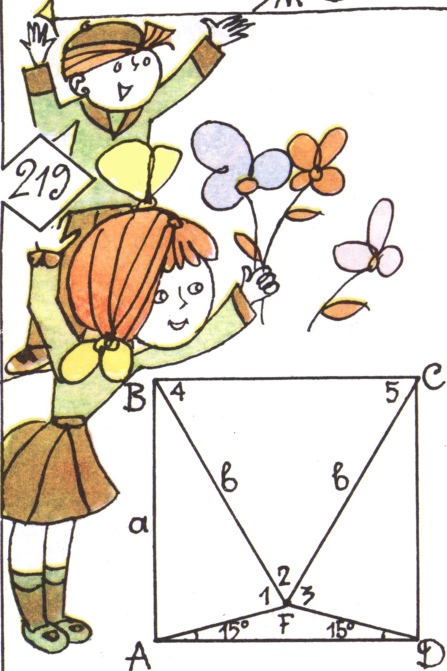


217

218



219



R

0

207. Найдите отношение площади сектора с дугой 60° к площади треугольника, дополняющего соответствующий сегмент до сектора.

208. В круг вписан квадрат, сторона которого $2\sqrt{2}$. Относительно каждой стороны квадрата, как оси симметрии, построен сегмент, симметричный тому, который отсекается стороной квадрата от круга. Вычислите площадь образованной розетки. (См. с. 144.)

209. Зимой мальчики устроили карусель. Какова линейная скорость салазок B , если $OB=8$ м, а мальчик, который вращает малое колесо, обегает окружность за три секунды? Во сколько раз линейная скорость мальчика меньше линейной скорости салазок, если $OA=2$ м? (См. с. 144.)

210. Как построить круг, площадь которого в два раза меньше площади круга с радиусом 2 м?

211. Как построить прямоугольный треугольник по его катету и радиусу вписанной в этот треугольник окружности?

212. На сторонах параллелограмма со сторонами a и b и углом 60° построены вне параллелограмма равносторонние треугольники. Докажите, что сумма площадей треугольников больше площади параллелограмма не меньше, чем в два раза.

213. Какую наименьшую площадь может иметь трапеция, описанная около круга с радиусом R ?

214. Можно ли завернуть куб с ребром 1 см в лист бумаги 3×3 см? (См. с. 144.)

215. Вписанный и центральный углы опираются на одну и ту же дугу. Найдите углы, если разность между ними составляет $16^\circ 48'$.

216. Прямая AD делит медиану BM треугольника ABC в отношении $5:1$, считая от вершины B . В каком отношении AD делит площадь треугольника ABC ? (См. с. 144.)

217. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и B прямые, угол при вершине D равен 45° , длина стороны $BC=1$ м, длина диагонали BD равна 5 м. Найдите площадь четырехугольника.

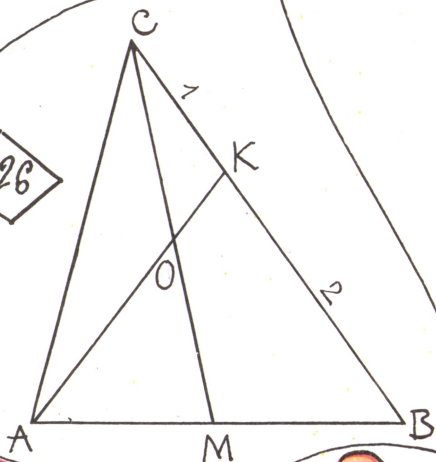
218. В треугольнике ABC сторона AC имеет длину 3 м, высота BD , проведенная к стороне AC , имеет длину $\sqrt{3}$ м. Длина отрезка AD равна BC . Найдите длину стороны AB .

219. В квадрате $ABCD$ при вершинах A и D построены углы по 15° . Точка F пересечения их сторон соединена с вершинами B и C . Докажите, что треугольник BFC — равносторонний.

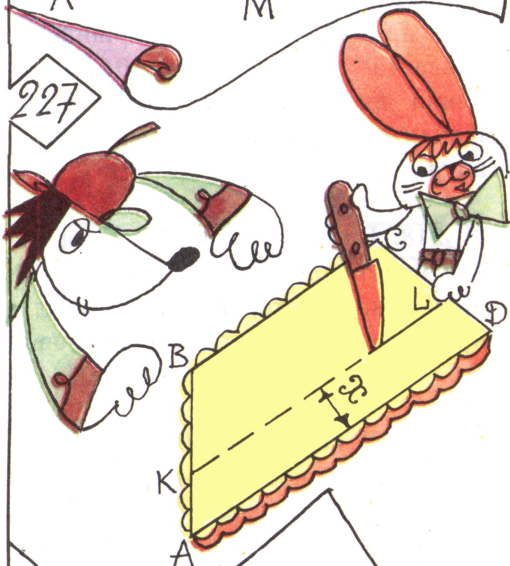
220. В остроугольном треугольнике ABC наибольшая из высот AH равна медиане BM . Докажите, что $\angle ABC < 60^\circ$.

221. Из точки B на окружности с радиусом 12 см проведены хорды: $BA=12$ см и $BC=12\sqrt{3}$ см. Найдите длину хорды AC .

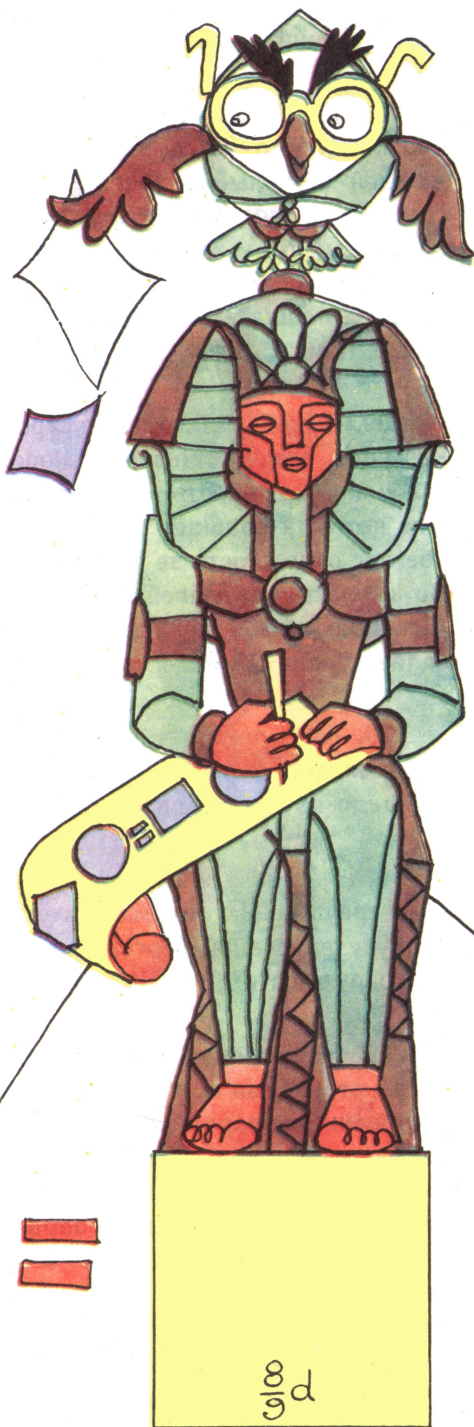
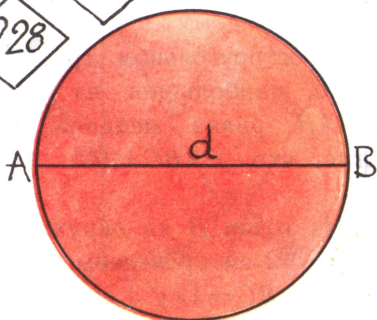
226



227



228



222. Определите вид треугольника, сторонами которого служат стороны правильных треугольника, четырехугольника и шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

223. а) Петя и Степа одновременно и с одинаковой угловой скоростью начинают движение на велосипедах по дорожкам, являющимся концентрическими окружностями, из точек, принадлежащих одному радиусу окружностей. Степа едет по окружности с радиусом R , а Петя — по окружности с радиусом в 2 раза большим. Диаметр колеса велосипеда Пети в 1,5 раза больше диаметра колеса велосипеда Степы. За одинаковое ли время они объедут свои дорожки при таких условиях? Колесо чьего велосипеда сделает за полный круг больше оборотов и во сколько раз?

б) Петя и Степа начинают одновременно двигаться из одного места в одном направлении по внутренней дорожке. Оба делают столько же оборотов педалей в единицу времени, сколько делали, когда двигались по разным дорожкам. Кто быстрее совершит малый круг?

в) Как изменится время движения каждого мальчика по внешней дорожке, если они будут двигаться на тех же условиях? (См. с. 146.)

224. На координатной плоскости заданы векторы: $\vec{a}(0; 3)$, $\vec{b}(-2; 0)$, $\vec{c}(2; -3)$. Задайте координаты векторов, противоположно направленных данным.

225. Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны. Верно ли, что $\vec{a} = \vec{b}$?

Дайте геометрическую иллюстрацию к задаче.

226. В $\triangle ABC$ проведены медиана CM и отрезок AK , который точкой K делит сторону BC в отношении $2 : 1$, считая от вершины B . В каком отношении медиана CM делит отрезок AK ?

227. Основания трапеции 5 дм и 3 дм, а высота её 2 дм. На каком расстоянии от большего основания надо провести прямую, параллельную основаниям, чтобы разделить трапецию на равновеликие части?

228. Древние египтяне, заменяя площадь круга площадью квадрата, принимали за его сторону $\frac{8}{9}$ диаметра круга. С помощью калькулятора вычислите относительную погрешность при такой замене.

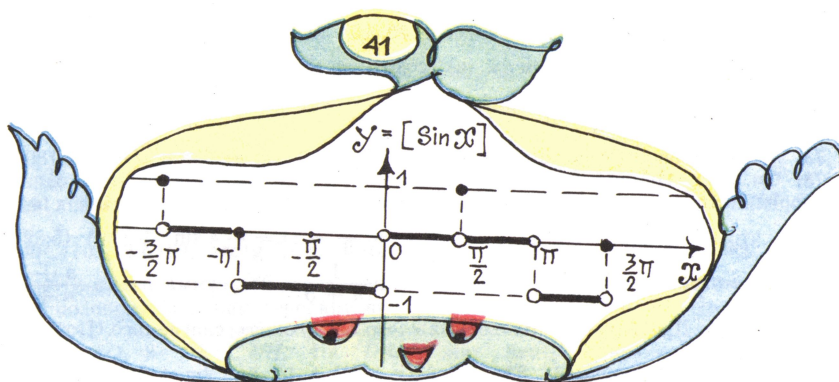




1. 250 м/мин, 1000 м. 2. 600 км/ч, 1200 км. 3. а) $x \neq -1$; б) $x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$; в) $x \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$. 4. $a = 1$. 5. $\frac{1}{2}$. 6. Прямые $y = x$ и $y = -x$ без точки $(0; 0)$. 7. а) Представим трехчлен $x^2 + 2x - 3$ в виде $(x + 3)(x - 1)$. Чтобы произведение было простым числом, надо чтобы один из множителей был 1 или -1 , а второй — простое число. Это достигается при x равном -4 , $-2, 0$ и 2 ; б) чтобы произведение $(x + 3)(x - 1)$ делилось на 9, достаточно, чтобы один из множителей делился на 9 или оба делились на 3. Положим $x + 3 = 9k$, где k — целое число, $x = 9k - 3$. Полагая $x - 1 = 9t$, получим $x = 1 + 9t$, где t — целое число. По этим формулам получим целые значения x , при которых квадратный трехчлен делится на 9. Случай, когда каждый множитель делится на 3, проанализируйте самостоятельно. 8. $k = -20$. 9. $b_2^2 = 10$, $b_2 = \sqrt{10}$, $q = b_2$; $b_1 = \sqrt{10}$; $\sqrt{5} = \sqrt{2}$. 10. $b_k = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$. Принимая b_k за первый член прогрессии, найдем сумму пяти членов: $S_5 = \frac{2^k(2^5 - 1)}{2 - 1} = 31 \cdot 2^k$. 11. Чтобы дроби образовали геометрическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\left(\frac{6}{b}\right)^2 = \frac{3}{a} \cdot \frac{12}{c}$; $\frac{36}{b^2} = \frac{36}{ac}$. Откуда $b^2 = ac$. Это соотношение означает, что числа a , b и c образуют геометрическую прогрессию. 12. $a_{51} = \frac{a_1 + a_{101}}{2}$; $404 = \frac{a_1 + a_{101}}{2} \cdot 101$; $404 = a_{51} \cdot 101$, $a_{51} = 4$; $S_{51} = \frac{a_1 + a_{51}}{2} \cdot 51$, $S_{51} = \frac{2 + 4}{2} \cdot 51 = 153$. 13. Пусть в треугольнике $a > b > c$.

Пусть a , b и c образуют арифметическую прогрессию с разностью d . Тогда прогрессию можно представить так: c , $c + d$, $c + 2d$. По неравенству треугольника $c > (c + 2d) - (c + d)$ $c > d$. Вывод: числа, которые являются длинами сторон треугольника, могут образовать арифметическую прогрессию, разность которой меньше меньшей стороны треугольника. 14. Нет; для того, чтобы члены последовательности a_7 , a_{10} , a_{17} и a_{20} принадлежали арифметической прогрессии, необходимо, но недостаточно, чтобы выполнялось равенство $a_{10} - a_7 = a_{20} - a_{17}$. 16. Существует последовательность, удовлетворяющая условию игры: -1 ; -1 ; -1 ; ... Арифметическая прогрессия, если считать разность равной 0; геометрическая прогрессия, если считать знаменателем 1.

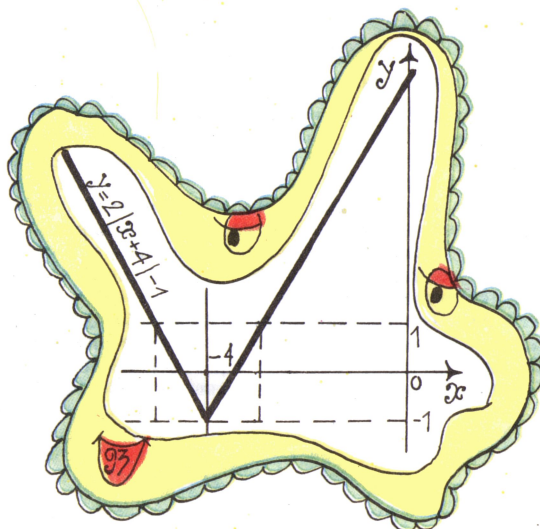
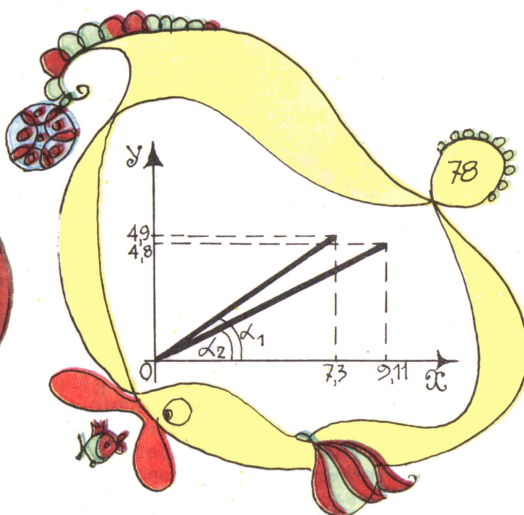
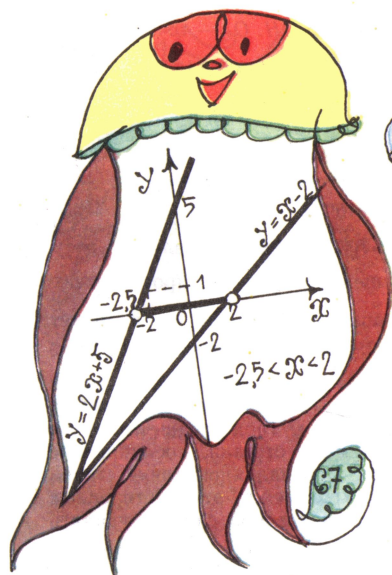
17. $-2, 2, -2, 2, \dots$ ($q = -1$) и $-2, -2, -2, \dots$ ($q = 1$). 18. Пронумеровать мешки. Из первого взять одну монету, из другого — 2 монеты, из третьего — 3 и т. д. Из 10 мешков будет взято 55 монет. Вес настоящих 550 г. Излишек над этой массой укажет номер мешка. 19. $(b_1 q^k)^7$. 20. $f(n) = \frac{n^3 - 1}{2}$.
21. $4094 - \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1}$, $n = 11$. Через 22 мин. 22. Составим выражение для суммы $n + 1$ члена этой последовательности: $S_{n+1} = 3(n + 1)^2$. Разность $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$, $a_{n+1} = 3(n + 1)^2 - 3n^2 = 3(2n + 1)$. Последнее выражение при натуральном n задает арифметическую прогрессию с первым членом 9 и разностью 6: $6n + 3 = 9 + 6(n - 1)$. 23. Если стороны треугольника $a, a + d, a + 2d$, то $(a + 2d)^2 = a^2 + (a + d)^2$. Откуда $a = 3d$. Наименьшая сторона должна составлять три разности прогрессии. Треугольников, удовлетворяющих условию, бесконечно много: 3, 4, 5 (египетский треугольник), 9, 12, 15; 15, 20, 25 и т. д. 24. Да. Нет. Рассмотрим второй случай. Сумма чисел на всех карточках $\frac{1 + 17}{2} \cdot 17 = 153$. Пусть x — сумма чисел первой кучки (целое число), а y — сумма чисел второй кучки карточек (тоже целое число). Легко показать, что система $\begin{cases} x - y = 12, \\ x + y = 15 \end{cases}$ не имеет целых решений. К результату можно прийти и таким рассуждением: сумма чисел кучек — нечетное число. Значит, в одной кучке сумма — четное число, а в другой — нечетное. Разность 12 можно получить тогда, когда в обеих кучках суммы либо четные числа, либо нечетные. 25. 1111111. 26. 150 м. 27. 36 942 р. 40 к. 28. При условии, что m и n оба четные или оба нечетные. Причем $m + n > 0$. 29. $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{2}$. 30. а) $|x| > 1$; б) $x \neq -10$; в) $x > 5$; г) $x < 2$ и $2 < x \leq 9$. 31. При $a > \frac{3}{4}\sqrt{2}$ и при $a < -\frac{3}{4}\sqrt{2}$. 32. $3,6288 \times 10^{-50}$. 33. При $a = 2$ и $n = 7$. 34. $z \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. 35. При $k < 2\frac{3}{4}$ нет решения, при $k = 2\frac{3}{4}$ — одно решение, при $k > 2\frac{3}{4}$ — два.
37. 1 и 3,5. 38. а) $x \in (0; +\infty)$; б) $x \in [-1; 0)$. 39. Система $\begin{cases} 3(x + y) = 20, \\ 2(x - y) = 15 \end{cases}$ не имеет целых решений. 40. 45° и 135° . 41. в) $y = [x] + \{x\} = x$; г) см. рис. 42. а) $1 \leq x < 2$ и $4 \leq x < 5$; б) $\frac{1}{4} + n$ и $\frac{1}{2} + k$, где n и k целые числа; в) $x = \frac{1}{2} + t$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) \emptyset ; д) $-5,348$. 43. По условию имеем равенства $b = 0,01a$ и $b = 0,02a_1$. Один из множителей увеличился в 2 раза. Чтобы произведение не изменилось, надо, чтобы $a_1 = \frac{1}{2}a$. 44. 750 км/ч. 45. Из системы $\begin{cases} \frac{y}{20} = \frac{x}{4V}, \\ \frac{y + x}{20} = \frac{3x}{4V} \end{cases}$ находим $V = 10$ км/ч. 47. $n > 0$ и $n < -1$. 48. Сло-



жив почленно все уравнения системы, получим $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 9$. Откуда $|x_1 + x_2 + x_3|^2 = 3$. Рассмотрим случай $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. Из первого уравнения имеем $3x_1 = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$. Из второго найдем $x_2 = 1$ и из третьего $x_3 = \frac{5}{3}$. Аналогично получаем второе решение. 49. Степа неправильно применил второе свойство уравнений. Нельзя делить обе части в уравнении на выражение $x + 3$, во множество значений которого входит число 0. Выражение $x^2 + 3$ во множестве значений не содержит 0. 50. Число кратное 2 и 9. Из этого заключаем, что цифра $d = 0, 2, 4, 6, 8$. Составим все возможные арифметические прогрессии из трех неотрицательных чисел и с разностью 2, старший член которых не больше 9:

$$\begin{array}{lll} 1) 0, 2, 4 & S_1 = 6; & 4) 3, 5, 7 & S_4 = 15; \\ 2) 1, 3, 5 & S_2 = 9; & 5) 4, 6, 8 & S_5 = 18; \\ 3) 2, 4, 6 & S_3 = 12; & 6) 5, 7, 9 & S_6 = 21. \end{array}$$

Добавим к каждой сумме первую цифру числа 1. Получим суммы: 1) $S_1^1 = 7$; 2) $S_2^1 = 10$; 3) $S_3^1 = 13$; 4) $S_4^1 = 16$; 5) $S_5^1 = 19$; 6) $S_6^1 = 22$. К каждой сумме S^1 добавим возможные значения d . Видим, что $d \neq 0$, $d \neq 4$ и $d \neq 6$. Искомые числа: 10 242, 13 572, 11 358, 14 688. 51. 150, 210, 270 и 120 га. 52. $x \geq 2$ и $x < -3$. 53. Заметим, что \overline{aabb} кратно 11. $\overline{aabb} = 11 \cdot \overline{a0b}$. Число $\overline{a0b}$ тоже делится на 11. Частное от деления $\overline{a0b}$ на 11 есть двузначное число, точный квадрат и сумма цифр которого равна 10. Иначе средняя цифра трехзначного числа не будет нулем. Таким числом является 64. Искомое число $11 \cdot 11 \cdot 64 = 7744$. 54. Единственным трехзначным числом, удовлетворяющим условию, есть 729. $\sqrt{729} = 27$. 55. $y = 5$ и $y = -x \pm 5\sqrt{2}$. 56. $2k + 1$ — нечетное число и сумма двух целых чисел. Следовательно, один корень четный, другой — нечетный. Но тогда произведение корней должно быть четное число, а оно нечетное. 57. $y = x|x|$. 58. Дробь имеет наибольшее значение, когда знаменатель наименьший. $y_{\min} = 10$ при $x = 1$, что следует из равенства $y = (x - 1)^2 + 10$. Наибольшее значение дроби 1. 59. Пусть x_1 и x_2 — целые корни уравнения. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{k}{5}$. Дробь $-\frac{k}{5}$ должна быть целым числом. Это возможно при $k = -25, -5, 5$ и 25. Другие значения k , кратные 5, не удовлетворяют условию $x_1 \cdot x_2 = -6$. 60. а) Троек чисел, удовлетворяющих условию, можно найти бесконечное множество (1, 2, 1), (9, 6, 1) и т. д.; б) если $kx^2 + k_1x + k_2$ полный квадрат, то его корни равны $x_1 = x_2 = -\frac{k_1}{2k}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{k_2}{k}$, $(-\frac{k_1}{2k})^2 = \frac{k_2}{k}$; $(-\frac{k_1}{2k})^2 = \frac{k_1^2}{4k^2}$; $\frac{k_1^2}{4k^2} = \frac{k_2}{k}$; $k_1^2 = 4kk_2$, $k_1 = \sqrt{4kk_2} = k = 2\sqrt{kk_2}$. С другой стороны, k как средний член геометрической прогрессии равен $\sqrt{kk_2}$. Противоречие. 61. Из равенства $(x - 3)(x + 2) = kx^2 + k_1x + k_2$ или $x^2 - x - 6 = kx^2 + k_1x + k_2$ находим $k = 1$, $k_1 = -1$ и $k_2 = -6$. 62. При $k = -2$ уравнение имеет общий корень 1. $x^3 + kx + 1 = x^4 + kx^2 + 1$, $x(x^2 + k) = x^2(x^2 + k)$; $x = x^2$. Откуда $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, $x = 0$ — непригодное. 63. Окружность с радиусом равным 3. 64. $(0,9)^{20} > (0,1)^8$. 65. СССР — 122 кг, Болгария — 180 кг, ГДР — 339 кг, Великобритания — 380 кг. 66. $75^\circ, 75^\circ, 30^\circ$. 67. б) См. рис. 68. 5 и $-\frac{1}{5}$. 69. Уравнение целых решений не имеет. 70. 15° . 71. 6) $1 \geq 2 \sin x \cos x$, $\sin 2x \leq 1$, что верно при любом x ; в) $\cos 13^\circ = \sin 77^\circ$. 72. $|\cos \alpha| = \frac{2}{\sqrt{5}}$. 73. а) $[\sqrt{2}; 2]$; б) $[\frac{1}{2}; 2]$; в) $[\frac{1}{3}; 3]$; г) 1; д) 4; е) $[-3; 1]$; ж) $(1; \sqrt{2})$. 75. После упрощения функция приводится к $y = 3$. 76. а) 30° и 150° ; б) 180° . 78. См. рис. Приняв дроби за тангенсы углов и построив углы в одной координатной плоскости, с некоторой приближенностью можно прийти к выводу, что $\frac{49}{73} > \frac{487}{911}$. 81. д) $4 \sin^2 \frac{x}{3} (\cos^2 \frac{x}{3} - 1) = -4 \sin^4 \frac{x}{3}$; ж) (5; 2). 82. Рассмотрим сумму $n + 3$ дробей вида $\frac{1}{n+5}$. Эта сумма равна $\frac{n+3}{n+5}$ и меньше 1. Дробь $\frac{1}{n+5}$ больше каждого следующего слагаемого. Поэтому данная сумма меньше 1. 83. а) $(\sqrt[4]{x} + 1)^2 + 4$; б) $2m - 3 + \frac{10}{2m - 3}$.

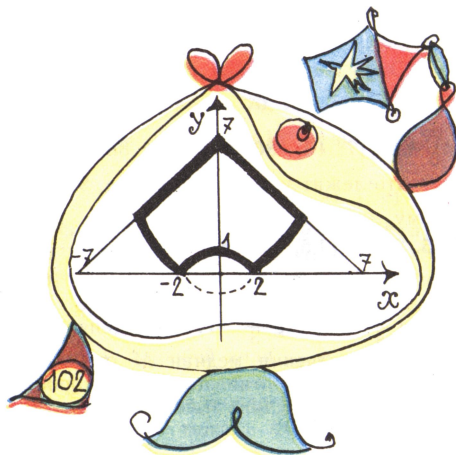


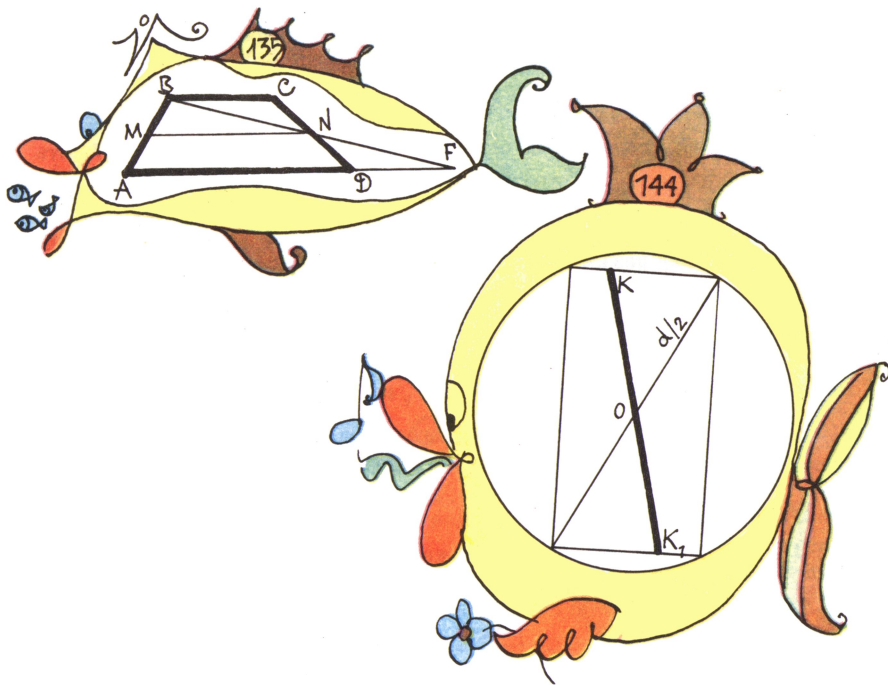
84. $(x - p)(x - 7p)$. 85. $(17; 10)$. 86. 1. 87. 50. 88. 14 %. Возможен. 89. Да.
 90. 0,4. 91. $\frac{9}{10}$ куса, что лежит у него на тарелке. 92. Неравенство сводится к эквивалентному ему $m^2 - 3m + 6 > 0$, которое верно при любом m .
 93. См. рис. 94. 1. 95. 2. 96. $(4,5; 7,5)$. 97. $x^2 - 4(\sqrt{3} + 1)x - 3 = 0$. 100. 23.
 101. 60 км/ч. 102. См. рис. 103. $x = 6\frac{7}{24}$. 104. $3,375 \cdot 10^{-3}$. 106. 10. 107. 2 м;
 30°. 108. 4. 109. $\arctg \frac{3}{4}$ и $\arctg \frac{4}{3}$. 110. Соединив заданную вершину A треугольника с точкой пересечения медиан M отрезком и продолжив его на половину, получим середину противоположной стороны D . Проведем еще луч AO , где O — точка пересечения высот (ортоцентр). Далее проводим $DH \perp AO$ и $DK \perp DH$. На DK лежит центр описанной окружности.

Строим точку O_1 , симметричную точке O относительно DH . O_1 — точка окружности. 111. $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3})$. 112. $\frac{1}{2}$. 113. 3,36. 114. 216 см². 115. 72° и 108°.

116. Докажите подобие треугольников ABC и ABD . 117. 4. 118. $\frac{1}{6}R^2(9\sqrt{2} + 2\sqrt{6} - 6\sqrt{3})$. 119. 5. 120. $\frac{1}{4}$. 121. Путь $P \rightarrow A \rightarrow O \rightarrow M$ короче пути $P \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow M$. Первый равен $\frac{a(4 + 3\sqrt{2})}{4}$, второй — $\frac{a(8 + \sqrt{2})}{4}$. Произведите расчеты и придете к неравенству $2 > \sqrt{2}$. Решением является путь $P \rightarrow C \rightarrow M$, равный $\frac{5}{4}a\sqrt{2}$. Такое перемещение паука не противоречит условию. Рекомендуем рассмотреть задачу при условии, что паук может перемещаться свободно по граням куба. 122. Нет. Неравенство $a\sqrt{10} < a\sqrt{2} + a\sqrt{3}$ неправильное. 123. $\sqrt[3]{5}$ раза. 124. а), б), в) Средние линии этих фигур разделить на три равные части и через точки деления провести прямые так, чтобы они не пересекались внутри фигуры (под средними линиями в прямоугольнике и квадрате следует понимать отрезки, соединяющие середины противоположных сторон). 126. 6. 127. При заданной длине сторон наибольшая площадь треугольника равна 45 м². Угол между этими сторонами должен быть прямым. 128. Полоса шириной $2a$, из которой следует удалить прямую, содержащую общее основание треугольников. 129. $\frac{ab}{a+b}$. 130. $\frac{1}{3}$.

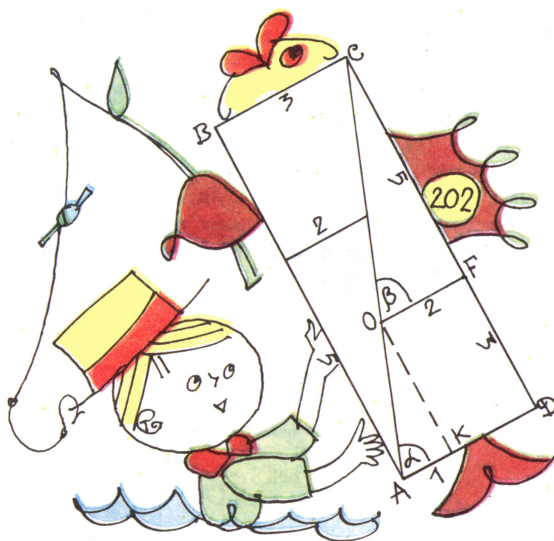
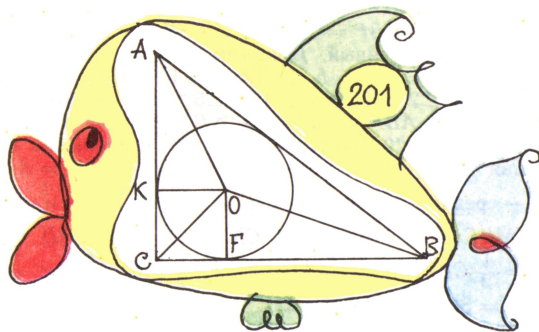
131. Сумма постоянна и равна половине площади параллелограмма. 132. По условию должно выполняться равенство $a^2 + b^2 = 2ab$. Откуда $a = b$. 133. Одну из сторон треугольника разделим на 9 равных частей. Точки деления соединим с противоположной вершиной. Все 9 треугольников равновеликие, а площадь пяти из них составляет $\frac{5}{9}$ площади данного. 134. Параллелограмм, его площадь 8. 135. Сначала трапецию превратить в равнобедренный треугольник, затем поступить, как и в задаче 133 (см. рис.). 136. $\triangle P_1AL = \triangle P_2AK$ (по двум катетам). $\angle P_1AL + \angle P_2AK = 90^\circ$, $\angle P_1AP_2$ — развернутый. Многоугольник $P_1P_2P_3P_4$ состоит из симметричных треугольников, половина из них составляет площадь прямоугольника. 137. 120°. 138. В точке пересечения диагоналей четырехугольника. 139. Дополнить угол в 54° до прямого. Дополняющий угол в 36° разделить пополам. Дуга в 18° три раза откладывается на дуге угла в 54°. 140. а) Из данного равенства имеем $\alpha = 90^\circ - 2\beta$. Подставив значение α в равенство $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, получим $\gamma - \beta = 90^\circ$, $\gamma > 90^\circ$. Треугольник тупоугольный; б) из данного равенства имеем $\alpha + \gamma < \beta$. Добавим к обеим частям неравенства по β , получим $\alpha + \gamma + \beta < 2\beta$ или $180^\circ < 2\beta$ или $90^\circ < \beta < 180^\circ$. Треугольник тупоугольный. 141. Отложим на сторонах от вершины A небольшой длины равные





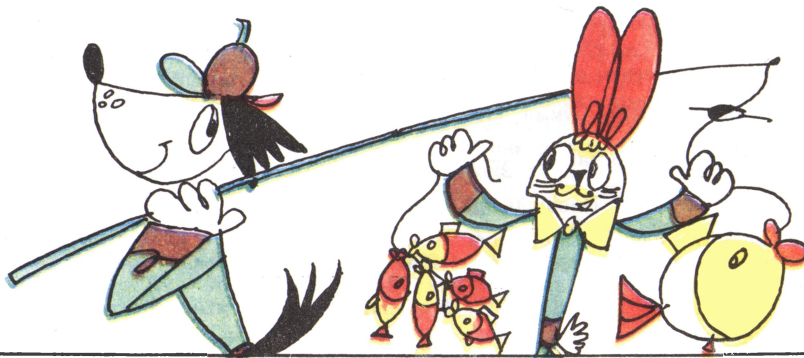
отрезки AK и AN (при помощи палки, например). Затем разделим KN пополам. Пусть O — середина. Палку, поставленную вертикально в точке O , свизируем на M . Если A , O и M находятся на одной прямой, то $AB = AC$. Если M окажется левее луча AO , тогда AM — медиана, а AO — биссектриса $\angle A$. Известно, что если из одной вершины треугольника провести высоту, медиану и биссектрису, то основание биссектрисы будет находиться между основаниями медианы и высоты в неравнобедренном треугольнике. $HC < HB$. Тогда следует $AC < AB$ (меньшей проекции соответствует меньшая наклонная, проведенная из той же точки к той же прямой). 142. За 1 мин конец минутной стрелки описывает дугу $360^\circ : 60 = 6^\circ$, а конец часовой — дугу в $30^\circ : 60 = 0,5^\circ$. Концы стрелок будут направлены на центрально-симметричные точки, если $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Пусть минутная стрелка опишет дугу угла 3 за x мин. Тогда $\angle 1 = 15^\circ - 0,5^\circ x$, $\angle 2 = 150^\circ$, $\angle 3 = 6^\circ x$, $15^\circ - 0,5^\circ x + 150^\circ + 6^\circ x = 180^\circ$. $x = 2 \frac{8}{11}$ мин. Часы будут показывать ≈ 12 ч 33 мин. 144. Пусть O — центр симметрии прямоугольника, K — точка его стороны (см. рис.). Построим точку K_1 , симметричную K относительно O . Через K и K_1 проведем параллельные. Затем строим окружность $(O; \frac{d}{2})$. Пересечение окружности с параллельными прямыми даст вершины искомого прямоугольника. 145. Построим две прямые, пересекающиеся под углом 45° . От точки пересечения на всех четырех лучах отложим отрезки $\frac{1}{2}h$. К отрезкам в концах проведем перпендикулярные к ним прямые до взаимного их пересечения. 146. (1; 1), (2; -1), (-1,5; 0) и (1,5; 0). 147. а) (1,5; 1); б) (-2; 0), (-1; 2), (1; 2) и (2; 0), в) (-1, 5; 0), (-1,5; 2), (1,5; 2), (1, 5; 0). 148. а) 20; б) построим точку M_1 , симметричную точке M относительно центра окружности O , и соединим M_1 с концами диаметра A и B . Полученный четырехугольник — параллелограмм (диагонали делятся пополам). Какое бы положение ни занимал диаметр AB , расстояние OM не меняется. Значит, все полученные параллелограммы будут иметь диагонали одной и той же длины. MA и MB — стороны этого параллелограмма. Потому $AB^2 + MM_1^2 = 2(MA^2 + MB^2)$. 149. а) (1; 3); б) 1) и 3); в) 1), 2) и 3). 150. 2,5 и 1,5 м.

151. Треугольник с заданным отношением углов имеет углы 30° , 60° и 90° . Для построения подобного треугольника строим окружность с радиусом 5 см, через конец диаметра проводим хорду под углом 60° . 152. $r = \frac{1}{3} \sqrt{2} \times (\sqrt{2} - 1)$, $R = \frac{2}{3} \sqrt{2} (\sqrt{2} - 1)$. 154. $\sqrt{1+k^2}$ и $\frac{1}{k} \sqrt{1+k^2}$. 155. Будет, если угол между диагоналями останется без изменений. 156. Да. 157. Эта точка находится на $\frac{1}{6}$ высоты треугольника, считая от стороны. 158. $4\frac{4}{9}$ см. 160. $2\sqrt{3}$ см². Ответ правильный, но рассуждения ошибочны. Угол в 60° не уменьшится в 2 раза, как считает Степа. Тогда и два других угла должны уменьшиться в два раза и стать равными 45° и 15° , чего он не учел, а потому случайно получил верный ответ. 161. Нет. 162. $A\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $C\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $D\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$. 163. 4 : 5. 164. $\frac{\sqrt{3}}{3}h^2$. 165. $PM = 25$ м, $CM_3 = \sqrt{400 + 1225} = \sqrt{25 \cdot 16 + 25 \cdot 49} = 5\sqrt{65}$. $PM_3 = 20\sqrt{2}$, $5\sqrt{65} > 40$. Когда мишень находилась в точке M_3 , пули Степы не могли достичь цели. 166. $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$. 167. $6\sqrt{3}$. 168. 12,5 м/с. 169. Увеличится в $\frac{10\sqrt{3}}{9}$ раз. 170. Для этого надо доказать, что равенство $(a+1)^2 + (b+1)^2 = (c+1)^2$ невозможно. После упрощений приходим к $2a + 2b + 1 = 2c$, но $a + b > c$, $2a + 2b > 2c$. Подавно $2a + 2b + 1 > 2c$. 171. 2 см и $\sqrt{5}$ см. 172. $2\sqrt{3}$ см. 173. 1 см. 174. 1 м. 175. а) $2 + \sqrt{3}$ или $2 - \sqrt{3}$; б) $A_1(2; -2)$, $B_1(4; -2)$, $C_1(3; -2 - \sqrt{3})$ или $C_1(3; -2 + \sqrt{3})$; в) $A_2(-2; 2)$, $C_2(-4; 2)$, $B_2(-3; 2 + \sqrt{3})$ или $B_2(-3; 2 - \sqrt{3})$; г) $C^1(3; 2 - \frac{1}{3}\sqrt{3})$, $A^1(2; 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$, $B^1(4; 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$. 176. Соединить точку K с точкой C (или B). Далее использовать подобные треугольники. 8 см. 177. Пусть длина стороны квадрата, которую выбрал Степа, равна a м. Тогда ему предстоит пройти $4a$ м, а площадь a^2 м². Петя решил идти по окружности, радиус которой он рассчитал так: $4a = 2\pi R$, $R = 2a : \pi$. Площадь круга, который обойдет Петя, равна $\pi \cdot \frac{4a^2}{\pi^2} = \frac{4a^2}{\pi} = 4a^2 \cdot 0,32 = 1,28 a^2$, т. е. такая площадь на 28 % больше площади, которую обойдет Степа. 178. Нет. Веревка оборвется. 179. а) Один; б) сколько угодно; в) ни одного. 180. 4 и 6. 182. Нет. 183. При $k = 1$ и $\bar{b} = -\bar{a}$. 184. 60° . 185. $\bar{b} = 2,5\sqrt{3}\bar{i} + 2,5\bar{j}$. 186. $\frac{1}{2}\overline{AB}$. 187. Да. 188. 2 и 3; $\sqrt{10}$ и $\sqrt{15}$. 189. 60° . 190. $6\frac{2}{3}$ румба. 191. а) 23,6 м; б) 3000° . 192. $(0; 2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}; 0)$, $(0; -2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}; 0)$. 193. 72° . 194. 105° . 195. $y = x + 1$. 196. 45° . 197. $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. 198. 1 : 2. 199. 60 см. 200. 4 : 5. 201. $AB = 10$ (см. рис.) $2p = 24$, $p = 12$, $S = 24$; $S = pr$, $r = 24 : 12 = 2$ (см), $KA = 4$, $FB = 6$, $OA = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. $OB = 2\sqrt{10}$, $OC = 2\sqrt{2}$. 202. См. рис. Проведем $OK \parallel AB$, $\text{tg} \alpha = 3$, $\text{tg} \beta = 2,5$, $\text{tg} \alpha \neq \text{tg} \beta$, $\alpha \neq \beta$. Но $OF \parallel AK$ и должно быть равенство $\alpha = \beta$. Значит, OA и OC не дополняющие одна другую полупрямые. Фигуры накладываются одна на другую. 203. $AB^2 = 9 \cdot 3$, $AB = 3\sqrt{3}$, $AD^2 = 9 \cdot 6$, $AD = 3\sqrt{6}$, $S_{ABCD} = 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{6} = 27\sqrt{2}$ (дм²), $BD : h : b = 9 : 3\sqrt{6} : 3\sqrt{3} = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$, что и согласуется с теоретическими расчетами. 204. Из условия следует, что производство непрерывное, а потому объем осадков равен $1 \text{ м}^3 \times 14 \times 7 = 98 \text{ м}^3$. Кроме того, для лучшего оседания вредных веществ жидкости в отстойнике должно быть в 1,5 раза больше, чем осадков, т. е. $98 \text{ м}^3 \cdot 1,5 = 147 \text{ м}^3$. Объем отстойника должен составлять не менее 250 м^3 . 205. Пусть d — диагональ прямоугольника. По формуле $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \alpha$, где d_1 и d_2 — диагонали параллелограмма, а α — угол между ними, находим площадь



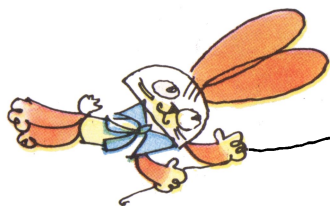
прямоугольника $\frac{1}{4}d^2$ 206. Площадь сектора $\frac{1}{3}\pi R^2$. Из равенства $a_3 = R\sqrt{3}$, $3 = R\sqrt{3}$, $R = \sqrt{3}$. Площадь сектора π . Площадь треугольника, дополняющего сегмент до сектора, равна $\frac{3}{4}\sqrt{3}$. Площадь сегмента $(\pi - 0,75\sqrt{3})$ см². 207. $2\pi : 3\sqrt{3}$. 208. $4(4 - \pi)$. 209. ≈ 16 м/с. 4 раза. 210. Радиус окружности следует взять равным $\sqrt{2}$ м. Отрезок $\sqrt{2}$ м является диагональю квадрата со стороной 1 м. 211. В прямой угол впишем окружность данного радиуса. От вершины прямого угла на его стороне откладываем отрезок равный a . С конца его радиусом $a - r$ описываем окружность. Точка ее пересечения с окружностью, вписанной в угол, будет точкой касания гипотенузы. 212. Сумма площадей треугольников равна $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2)$. Площадь параллелограмма $\frac{ab}{2}\sqrt{3}$. Отношение площадей равно $\frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. 213. Площадь трапеции равна $2Rm$, где m — средняя линия. При $m \rightarrow 2R$, площадь трапеции $\rightarrow 4R^2$. При $m = 2R$ трапеция вырождается в квадрат. 214. Нельзя. 215. $16^\circ 48'$ и $33^\circ 36'$. 216. Проведем $MK \parallel AD$. MK — средняя линия в треугольнике CAD , а потому $DK = KC$. $DC : DB = 2 : 5$. $S_{\triangle CAD} : S_{\triangle DAB} = 2 : 5$. 217. Дополнить четырехугольник до прямоугольника, применить теорему косинусов. $7,5$ см². 218. $\sqrt{7}$ см. 219. $\angle AFD = 150^\circ$,

$\angle BAF = \angle CDF = 75^\circ$. $\triangle ABF = \triangle CDF$, $\angle AFB = \angle DFC$, $BF = CF$, $\angle 5 = \angle 4$, $\triangle BFC$ — равнобедренный. Докажем, что он равносторонний. Пусть сторона квадрата a , $BF = FC = b$. 1) Если $\angle 1 > 75^\circ$, то $a > b$ в $\triangle ABF$ и $a < b$ в $\triangle BFC$, т. к. $\angle 2 < 60^\circ$, а $\angle 4 = \angle 5 > 60^\circ$. Противоречие; 2) если $\angle 1 < 75^\circ$, то $a < b$ в $\triangle ABF$, но $a > b$ в $\triangle BFC$. Снова противоречие. Остается принять, что $a = b$. 220. Пусть в $\triangle ABC$ BC наименьшая сторона. Тогда AH — наибольшая высота. По условию $AH = BM$ ($CM = AM$). Проведем $MF \parallel AH$. FM — средняя линия $\triangle ACH$. $FM = \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2} BM$. Из этого следует, что $\angle MBC = 30^\circ$. Проведем $CK \perp AB$ ($CK < AH$ по условию) и $MN \parallel CK$. $MN = \frac{1}{2} CK$. $MN < \frac{1}{2} AH$, $MN < \frac{1}{2} BM$. $\frac{MN}{BM} < \frac{1}{2}$, $\sin \varphi < \frac{1}{2}$, $\varphi < 30^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ + \varphi < 60^\circ$. 221. Проведем радиусы OA , OB , OC . $\triangle AOB$ равносторонний. $\angle BOC = 120^\circ$ и $\angle OBC = 30^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$. Хорда AC — диаметр. $AC = 24$ см. 222. Прямоугольный, что следует из правильности равенства $a_3^2 = a_1^2 + a_2^2$. 223. а) Да. В $1\frac{1}{3}$ раза больше; б) из того, что оба делают прежнее число оборотов в единицу времени, заключаем, что их линейные скорости остаются тоже прежними, но путь для Пети сокращается вдвое. Значит, он малый круг объедет в два раза быстрее, чем Степа. 224. $(0; 3)$; $(2; 0)$; $(-2; 3)$. 225. Если векторы перпендикулярны, то $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Это равенство верно при $\vec{a} = \vec{b}$. Разность $\vec{a} - \vec{b}$ в этом случае нулевой вектор. Но тогда о перпендикулярности векторов речи быть не может. Следовательно, утверждение ошибочное. С другой стороны $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$. Откуда следует, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Имеет место теорема: Чтобы векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы у векторов \vec{a} и \vec{b} были бы равны модули. 226. $1:3$. 227. $(5 - \sqrt{17})$ дм. 228. $\approx 0,6\%$.



СОДЕРЖАНИЕ

К читателю	3
5-й класс	5
Ответы	24
6-й класс	27
Ответы	48
7-й класс	51
Ответы	70
8-й класс	73
Ответы	104
9-й класс	109
Ответы	150





Учебное издание

ГРИЦАЕНКО НИКОЛАЙ ПЕТРОВИЧ

НУ-КА, РЕШИ!

Для среднего школьного возраста

Заведующий редакцией математики и физики
Н. Е. Зубченко.

Художественный редактор *В. А. Пузанкевич.*

Технические редакторы *Л. Б. Ланцман,*

В. Н. Зайцева.

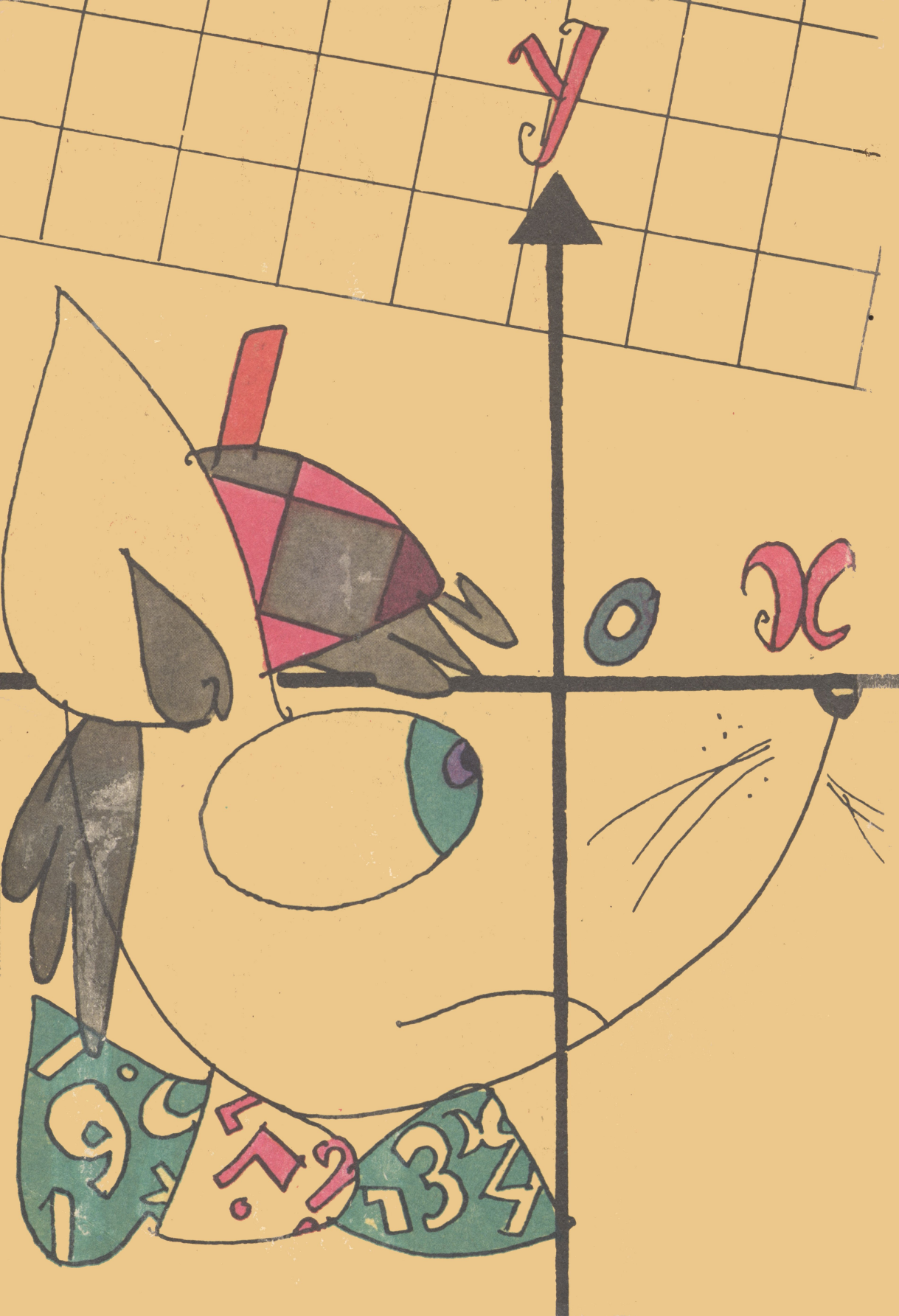
Корректор *В. П. Пуха.*

ИБ № 6720

Сдано в набор 25.12.89. Подписано в печать
14.12.90. Формат 70×100/16. Бумага офсетная
№ 1. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 13. Усл. кр.-отт. 53,30. Уч.-изд. л. 12,52.
Тираж 60 000 экз. Изд. № 32931. Заказ 0-104.
Цена 1р. 30 к.

Издательство «Радянська школа».
252053, Киев, Ю. Коцюбинского, 5.

Книжная фабрика «Коммунист».
310012, Харьков, Энгельса, 11.





1 р. 30 к.

