

Б. М. ЯВОРСКИЙ, А. А. ПИНСКИЙ

# ОСНОВЫ ФИЗИКИ

---

ТОМ 1



УДК 530.10(075.4)

ББК 22.3

Я22

Яворский Б. М., Пинский А. А. **Основы физики:** Учебн. В 2 т. Т. 1. **Механика. Молекулярная физика. Электродинамика** / Под ред. Ю.И. Дика. — 5-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 576 с. — ISBN 5-9221-0382-2.

Данная книга является первой частью двухтомника, в котором основы физики излагаются на современной основе. Вопросы механики связаны с теорией относительности и соотношением неопределенностей; законы сохранения энергии, импульса и момента импульса — с принципами симметрии пространства и времени; основы термодинамики — с молекулярной статистикой и строением вещества; гидромеханика — с теорией ударных волн. От читателя требуется лишь основательное знание физики, алгебры и начал тригонометрии в объеме восьмилетней школы.

Для учащихся школ, гимназий, лицеев с углубленным изучением физикоматематических дисциплин, для подготовки к конкурсным экзаменам в вузы.

Табл. 26. Ил. 361.



# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	11
Как работать над книгой . . . . .	12

## Часть I

### Движение и силы

Глава 1. <b>Скорость</b> . . . . .	15
§ 1.1. Механическое движение (15). § 1.2. Система отсчета. Траектория (16). § 1.3. Прямолинейное движение. Закон движения (18). § 1.4. Равномерное движение (19). § 1.5. Переменное движение (20). § 1.6. Средняя скорость (22). § 1.7. Мгновенная скорость переменного движения (23).	
Глава 2. <b>Инерция</b> . . . . .	24
§ 2.1. Принцип инерции (24). § 2.2. Инерциальные системы отсчета (27). § 2.3. Принцип относительности (28). § 2.4. Преобразования Галилея (30). § 2.5. Классический закон сложения скоростей (31).	
Глава 3. <b>Скалярные и векторные величины</b> . . . . .	32
§ 3.1. Скалярные величины (32). § 3.2. Векторные величины (33). § 3.3. Некоторые операции над векторами (34). § 3.4. Разложение вектора на два слагаемых (37). § 3.5. Скорость — вектор (38). § 3.6. Сложение скоростей (39).	
Глава 4. <b>Ускорение</b> . . . . .	41
§ 4.1. Среднее и мгновенное ускорение (41). § 4.2. Прямолинейное переменное движение (41). § 4.3. Прямолинейное равнопеременное движение (42). § 4.4. График скорости при равнопеременном движении (43). § 4.5. Графическое вычисление перемещения (43). § 4.6. Перемещение и средняя скорость при равнопеременном движении (44). § 4.7. Равномерное движение материальной точки по окружности (46). § 4.8. Ускорение при равномерном движении материальной точки по окружности (47).	
Глава 5. <b>Сила</b> . . . . .	48
§ 5.1. Сила — мера взаимодействия тел (48). § 5.2. Упругие и пластические деформации (49). § 5.3. Сила — вектор (51). § 5.4. Сложение и разложение сил, приложенных к материальной точке (53).	
Глава 6. <b>Сила тяжести, вес и масса</b> . . . . .	54
§ 6.1. Сила тяжести. Вес (54). § 6.2. Свободное падение (56). § 6.3. Масса тела (57). § 6.4. Плотность вещества (58). § 6.5. Давление. Архимедова сила (59).	
Глава 7. <b>Основной закон динамики</b> . . . . .	61
§ 7.1. Сила и ускорение (61). § 7.2. Применения основного закона динамики (64). § 7.3. Невесомость (67). § 7.4. Система единиц (69). § 7.5. Международная система единиц (70).	

<b>Глава 8. Закон движения материальной точки и начальные условия . . . . .</b>	<b>71</b>
§ 8.1. Основная задача динамики (71). § 8.2. Движение материальной точки под действием силы тяжести (72). § 8.3. Численное решение основной задачи динамики (74). § 8.4. Движение тела под действием упругой силы (75). § 8.5. Величины, определяющие закон движения материальной точки (78).	
<b>Глава 9. Тяготение . . . . .</b>	<b>79</b>
§ 9.1. Открытие закона тяготения (79). § 9.2. Закон всемирного тяготения (81). § 9.3. Опыт Кавендиша (82). § 9.4. Определение расстояний от Солнца до планет (83). § 9.5. Гравитационное поле (84). § 9.6. Напряженность гравитационного поля (85). § 9.7. Гравитационное поле Земли (86). § 9.8. Влияние вращения Земли на ускорение свободного падения (88).	
<b>Глава 10. Электрические силы . . . . .</b>	<b>89</b>
§ 10.1. Электрический заряд (89). § 10.2. Закон Кулона (90). § 10.3. Единица заряда (92). § 10.4. Диполь (93). § 10.5. Электрическое поле. Напряженность (95). § 10.6. Поле точечного заряда и диполя (96).	
<b>Глава 11. Трение . . . . .</b>	<b>98</b>
§ 11.1. Внешнее и внутреннее трение (98). § 11.2. Трение покоя (99). § 11.3. Угол трения покоя (101). § 11.4. Трение скольжения (102). § 11.5. Трение качения (103). § 11.6. Движение тел под действием силы трения (104). § 11.7. Внутреннее трение (вязкость) (105). § 11.8. Движение тела в жидкости (106). § 11.9. Падение тела в жидкости или газе (109).	
<b>Глава 12. Теория относительности . . . . .</b>	<b>111</b>
§ 12.1. Скорость света и закон сложения скоростей (111). § 12.2. Основные постулаты специальной теории относительности (113). § 12.3. Относительность одновременности и длины (114). § 12.4. Релятивистские преобразования координат. Релятивистский закон сложения скоростей (117). § 12.5. Предельный характер скорости света (119). § 12.6. Преобразования Лоренца (120). § 12.7. Длина отрезка (121). § 12.8. Промежуток времени между двумя событиями (122). § 12.9. Промежуток времени между причиной и следствием. Интервал (123). § 12.10. Соотношение между релятивистской и ньютоновской механикой (125).	
<b>Глава 13. Импульс и сила в теории относительности . .</b>	<b>127</b>
§ 13.1. Релятивистский импульс (127). § 13.2. Основной закон динамики в теории относительности (128). § 13.3. Соотношение между ньютоновской и релятивистской динамикой (129).	
<b>Глава 14. Закон движения и соотношение неопределенностей . . . . .</b>	<b>131</b>
§ 14.1. Начальные условия и измерительная аппаратура (131). § 14.2. Соотношение неопределенностей (135). § 14.3. Соотношение неопределенностей и классическая механика (136).	

## Часть II

### Законы сохранения

<b>Глава 15. Закон сохранения импульса</b> . . . . .	140
§ 15.1. Замкнутая система тел (140). § 15.2. Закон сохранения импульса (141). § 15.3. Явление отдачи (143). § 15.4. Реактивное движение (144). § 15.5. Расчет запаса топлива (145). § 15.6. Центр масс (146). § 15.7. Движение центра масс (147). § 15.8. Релятивистский фактор (149).	
<b>Глава 16. Полная и кинетическая энергия</b> . . . . .	150
§ 16.1. Полная энергия тела (150). § 16.2. Кинетическая энергия (151). § 16.3. Энергия и импульс (152). § 16.4. Кинетическая энергия и работа (153). § 16.5. Мощность (155). § 16.6. Единицы энергии, работы и мощности (155). § 16.7. Импульс и энергия локализованной частицы (156).	
<b>Глава 17. Элементарная теория столкновений</b> . . . . .	158
§ 17.1. Что такое столкновение? (159). § 17.2. Абсолютно неупругий удар (160). § 17.3. Упругий удар (161). § 17.4. Замедление нейтронов (162). § 17.5. Давление потока частиц на стенку (163).	
<b>Глава 18. Консервативные силы и потенциальная энергия</b> . . . . .	165
§ 18.1. Работа переменной силы (165). § 18.2. Работа упругой силы (167). § 18.3. Работа кулоновской силы (168). § 18.4. Работа гравитационной силы (170). § 18.5. Консервативные силы (171). § 18.6. Потенциальная энергия упругих, кулоновских и гравитационных взаимодействий (172). § 18.7. Потенциал электростатического поля (174). § 18.8. Потенциал поля точечного заряда (175). § 18.9. Энергия электрического поля (176).	
<b>Глава 19. Закон сохранения энергии в ньютоновской механике</b> . . . . .	176
§ 19.1. Механическая энергия и ее сохранение (177). § 19.2. Механическая энергия и трение (177). § 19.3. Космические скорости (178). § 19.4. Потенциальные кривые (179). § 19.5. Потенциальная энергия и равновесие (182).	
<b>Глава 20. Внутренняя энергия</b> . . . . .	183
§ 20.1. Внутренняя энергия системы частиц (183). § 20.2. Изменение внутренней энергии при деформации тела (185). § 20.3. Изменение внутренней энергии тела при тепловых процессах (186). § 20.4. Изменение внутренней энергии при химических реакциях (187). § 20.5. Изменение внутренней энергии при ядерных реакциях (188).	
<b>Глава 21. Закон сохранения энергии</b> . . . . .	189
§ 21.1. Работа как мера изменения полной и внутренней энергии (189). § 21.2. Теплообмен (190). § 21.3. Количество теплоты (192). § 21.4. Первое начало термодинамики (193). § 21.5. Адиа-	

батически изолированная система (194). § 21.6. Закон сохранения энергии (195). § 21.7. Закон сохранения массы (195).

## **Глава 22. Закон сохранения момента импульса . . . . . 197**

§ 22.1. Особенности вращательного движения (197). § 22.2. Кинетическая энергия и момент инерции (198). § 22.3. Зависимость момента инерции от положения оси вращения (200). § 22.4. Момент силы (202). § 22.5. Условие равновесия тела, имеющего ось вращения (204). § 22.6. Момент импульса и основное уравнение динамики (205). § 22.7. Закон сохранения момента импульса (206). § 22.8. Аналогия между величинами и соотношениями между ними при поступательном и вращательном движениях (209).

## **Глава 23. Симметрия в природе и законы сохранения . 210**

§ 23.1. Законы сохранения как основные законы природы (210). § 23.2. Законы сохранения как принципы запрета (211). § 23.3. Законы сохранения и симметрия пространства-времени (212). § 23.4. Однородность времени и сохранение энергии (213).

## **Глава 24. Неинерциальные системы отсчета и тяготение . . . . . 214**

§ 24.1. Явления в ускоренно движущейся системе отсчета (214). § 24.2. Силы инерции (216). § 24.3. Особенности сил инерции (217). § 24.4. Пространство и время в неинерциальных системах отсчета (218). § 24.5. Принцип эквивалентности (221). § 24.6. Понятие о теории тяготения Эйнштейна (223). § 24.7. Парадокс близнецов (227).

# **Часть III**

## **Молекулярно-кинетическая теория газа**

## **Глава 25. Молекулярное движение . . . . . 230**

§ 25.1. Как измерили скорость движения молекул (230). § 25.2. Распределение молекул по скоростям (232). § 25.3. Длина свободного пробега молекулы (234). § 25.4. Диффузия (237). § 25.5. Закон диффузии (238). § 25.6. Разделение газовых смесей (239).

## **Глава 26. Идеальный газ . . . . . 241**

§ 26.1. Давление газа (241). § 26.2. Идеальный газ (243). § 26.3. Температура (245). § 26.4. Термодинамическая температура и уравнение состояния идеального газа (247). § 26.5. Газовый термометр (248). § 26.6. Кельвин и градус Цельсия (249). § 26.7. Абсолютный нуль (251). § 26.8. Постоянная Авогадро и постоянная Больцмана (252). § 26.9. Распределение молекул в силовом поле (255). § 26.10. Барометрическое распределение (256).

## **Глава 27. Идеальный газ и первое начало термодинамики . . . . . 258**

§ 27.1. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа (259). § 27.2. Работа при расширении идеального газа (260). § 27.3. Первое начало термодинамики и теплоемкость газа (261). § 27.4. Изохор-

ный процесс (262). § 27.5. Изобарный процесс (263). § 27.6. Изотермический процесс (264). § 27.7. Адиабатный процесс (265). § 27.8. Теплоемкость двухатомного газа (268). § 27.9. Понятие о квантовой теории теплоемкости газов (270).

## **Глава 28. Второе начало термодинамики . . . . . 274**

§ 28.1. Квазистатические процессы (274). § 28.2. Обратимые процессы (275). § 28.3. Необратимость реальных тепловых процессов (277). § 28.4. Необратимость и статистика (278). § 28.5. Диффузия и термодинамическая вероятность (281). § 28.6. Термодинамическая вероятность и другие тепловые процессы (282). § 28.7. Термодинамическая вероятность и энтропия (284). § 28.8. Энтропия и теплообмен (285). § 28.9. Второе начало термодинамики (288). § 28.10. Статистический смысл второго начала термодинамики. Флуктуации (289). § 28.11. Броуновское движение и флуктуации (290). § 28.12. Броуновское движение и постоянная Больцмана (291).

## **Глава 29. Тепловые машины . . . . . 294**

§ 29.1. Тепловые машины и развитие техники (294). § 29.2. Тепловой двигатель (295). § 29.3. Схематическое устройство и энергетический баланс теплового двигателя (296). § 29.4. Тепловой двигатель и второе начало термодинамики (297). § 29.5. Цикл Карно (299). § 29.6. КПД реального двигателя (300). § 29.7. Обратный цикл Карно (301). § 29.8. Холодильная установка и тепловой насос (303).

## **Глава 30. Основы газовой динамики . . . . . 304**

§ 30.1. Термодинамические параметры движущегося газа (304). § 30.2. Уравнение неразрывности (305). § 30.3. Уравнение импульса (305). § 30.4. Уравнение Бернулли (306). § 30.5. Скорость распространения упругих возмущений (307). § 30.6. Учет сжимаемости газа. Число Маха (310). § 30.7. Конус Маха (310). § 30.8. Ударная головная волна (312). § 30.9. Волновое сопротивление (312). § 30.10. Сопло (314). § 30.11. Аналогия между соплом и тепловой машиной (315). § 30.12. Сопло Лавала (316). § 30.13. Реактивный двигатель (317). § 30.14. Крыло самолета (318). § 30.15. Давление в потоке жидкости (319). § 30.16. Учет вязкости (320).

# **Часть IV**

## **Молекулярные силы и агрегатные состояния вещества**

## **Глава 31. Молекулярные силы . . . . . 322**

§ 31.1. Плотность и сжимаемость вещества (322). § 31.2. Молекулярные силы (323). § 31.3. Электрическое происхождение молекулярных сил (324). § 31.4. График молекулярных сил (326). § 31.5. Потенциальная кривая молекулярного взаимодействия (328). § 31.6. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей (329).



<b>Глава 32. Дальний порядок</b> . . . . .	<b>333</b>
§ 32.1. Монокристалл (333). § 32.2. Поликристалл (335). § 32.3. Кристаллическая решетка. Дальний порядок (336). § 32.4. Дефекты упаковки и блочная структура кристалла (337). § 32.5. Движение дефектов и диффузия (339). § 32.6. Движение дислокаций и деформация кристалла (340).	
<b>Глава 33. Плотная упаковка частиц</b> . . . . .	<b>342</b>
§ 33.1. Типы кристаллических связей (342). § 33.2. Плотнейшая упа- ковка одинаковых шаров (344). § 33.3. Плотнейшие упаковки шаров с разными радиусами (346). § 33.4. Решетки, которые нельзя пред- ставить как упаковку шаров (347). § 33.5. Структура льда и во- ды (349). § 33.6. Полимеры (351).	
<b>Глава 34. Ближний порядок</b> . . . . .	<b>352</b>
§ 34.1. Особенности жидкого состояния (352). § 34.2. Структура жидкости и ее свойства (353). § 34.3. Среднее время оседлой жиз- ни (355). § 34.4. Диффузия в жидкостях (357). § 34.5. Вязкость жидкостей (358). § 34.6. Аморфные тела (360). § 34.7. Энергия поверхностного слоя и поверхностное натяжение жидкости (361). § 34.8. Давление под искривленной поверхностью жидкости (362). § 34.9. Капиллярные явления (364).	
<b>Глава 35. Пар</b> . . . . .	<b>365</b>
§ 35.1. Испарение (365). § 35.2. Насыщенный пар (367). § 35.3. Дав- ление насыщенного пара (368). § 35.4. Изотерма пара (371). § 35.5. Критическое состояние вещества (372). § 35.6. Влажность воздуха (374).	
<b>Глава 36. Фазовые переходы</b> . . . . .	<b>376</b>
§ 36.1. Изменение агрегатного состояния (376). § 36.2. Диаграм- ма перехода жидкость–газ (376). § 36.3. Диаграмма перехо- да кристалл–газ (377). § 36.4. Диаграмма перехода кристалл– жидкость (378). § 36.5. Диаграмма перехода кристалл–кри- сталл (379). § 36.6. Тройная точка (381). § 36.7. Изменение внут- ренней энергии и энтропии при фазовых переходах первого ро- да (381). § 36.8. Метастабильные состояния (385). § 36.9. Кон- денсация. Пересыщенный пар (386). § 36.10. Кипение. Перегретая жидкость (388). § 36.11. Сжижение газов (389). § 36.12. Сверхте- кущность гелия (392).	

## Часть V

### Электродинамика

<b>Глава 37. Поле неподвижных зарядов в вакууме</b> . . . . .	<b>396</b>
§ 37.1. Линии напряженности (396). § 37.2. Экипотенциальные по- верхности (397). § 37.3. Связь между напряженностью и потенциа- лом (399). § 37.4. Диполь в электрическом поле (400). § 37.5. Плос- кий конденсатор (402). § 37.6. Емкость (403). § 37.7. Энер- гия поля. Плотность энергии (404). § 37.8. Сила взаимодействия между пластинами конденсатора (404). § 37.9. Поток вектора на-	

пряженности. Теорема Гаусса (405). § 37.10. Проводник в электрическом поле (409). § 37.11. Определение заряда электрона (411).

## Глава 38. Диэлектрики . . . . . 413

§ 38.1. Электрическое поле при наличии диэлектрика (413). § 38.2. Вектор поляризации (414). § 38.3. Электрическая восприимчивость (415). § 38.4. Энергия поля в диэлектрике (416). § 38.5. Деформационная поляризуемость (417). § 38.6. Ориентационная поляризуемость (419).

## Глава 39. Постоянный ток . . . . . 421

§ 39.1. Стороннее поле. Напряжение и ЭДС (421). § 39.2. Сила тока и плотность тока (424). § 39.3. Закон Ома для однородного участка цепи (426). § 39.4. Спротивление (426). § 39.5. Закон Ома в дифференциальной форме (427). § 39.6. Закон Ома для неоднородного участка цепи и для замкнутой цепи (428). § 39.7. Закон Джоуля–Ленца (429). § 39.8. Зарядка и разрядка конденсатора (430). § 39.9. Правила Кирхгофа (431).

## Глава 40. Магнитное поле в вакууме . . . . . 433

§ 40.1. Взаимодействие токов. Магнитные силы (433). § 40.2. Закон преобразования для поперечного импульса и поперечной силы (434). § 40.3. Взаимодействие между движущимися зарядами (436). § 40.4. Вектор магнитного поля. Линии индукции (438). § 40.5. Магнитное поле проводника с током (439). § 40.6. Магнитный момент (441). § 40.7. Напряженность магнитного поля (444). § 40.8. Инвариантность электрического заряда (445).

## Глава 41. Заряды и токи в магнитном поле . . . . . 446

§ 41.1. Сила Лоренца (446). § 41.2. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле (448). § 41.3. Определение знака заряда элементарных частиц (449). § 41.4. Циклотрон (450). § 41.5. Энергия частицы и условие синхронизации (452). § 41.6. Синхрофазотрон (454). § 41.7. Ускорители на встречных пучках (457). § 41.8. Удельный заряд электрона (459). § 41.9. Удельный заряд иона (461). § 41.10. Проводник с током в магнитном поле (462). § 41.11. Рамка с током в магнитном поле (463).

## Глава 42. Магнетики . . . . . 464

§ 42.1. Три типа магнетиков (465). § 42.2. Магнитный момент атома (466). § 42.3. Величины, характеризующие магнитное поле в веществе (467). § 42.4. Диамагнетизм (469). § 42.5. Парамагнетизм (471). § 42.6. Ферромагнетизм. Точка Кюри (473). § 42.7. Гистерезис (475). § 42.8. Доменная структура ферромагнетиков (477). § 42.9. Опыт Эйнштейна и де-Гааза (480). § 42.10. Опыт Штерна и Герлаха (481). § 42.11. Спин электрона (483). § 42.12. Антиферромагнетизм (484).

## Глава 43. Электромагнитная индукция . . . . . 487

§ 43.1. Открытие Фарадея (487). § 43.2. Явление электромагнитной индукции и сила Лоренца (487). § 43.3. Электродвижущая сила индукции (490). § 43.4. Явление индукции в неподвижном проводнике (490). § 43.5. Напряженность индуцированного по-

ля (491). § 43.6. Электромагнитное поле и принцип относительности (492). § 43.7. Закон индукции Фарадея (493). § 43.8. Правило Ленца (495). § 43.9. Электромагнитная индукция и закон сохранения энергии (495). § 43.10. Самоиндукция (496). § 43.11. Энергия электромагнитного поля (497). § 43.12. Включение цепи с индуктивностью (499).

## **Глава 44. Электрическая проводимость, теплоемкость и теплопроводность твердых тел . . . . . 500**

§ 44.1. Экспериментальные основы электронной теории проводимости металлов (500). § 44.2. Эффект Холла (502). § 44.3. Электронный газ (505). § 44.4. Вывод закона Ома из электронной теории (507). § 44.5. Вывод закона Джоуля–Ленца (511). § 44.6. Работа выхода (513). § 44.7. Контактная разность потенциалов (515). § 44.8. Термоэлектричество (516). § 44.9. Теплоемкость (517). § 44.10. Теплоемкость металлов (521). § 44.11. Теплопроводность диэлектриков (521). § 44.12. Теплопроводность металлов (524).

## **Глава 45. Электрическая проводимость полупроводников . . . . . 526**

§ 45.1. Собственная электронная и дырочная проводимость полупроводников (526). § 45.2. Примесная электронная и дырочная проводимость полупроводников (530). § 45.3. Выпрямление на границе металл–полупроводник (532). § 45.4. Выпрямление на границе электронно-дырочного перехода (533). § 45.5. Транзистор (536). § 45.6. Фотосопротивления и полупроводниковые фотодиоды (539).

## **Глава 46. Электрическая проводимость электролитов . 542**

§ 46.1. Электролитическая диссоциация (542). § 46.2. Закон Ома и проводимость электролитов (543). § 46.3. Законы Фарадея (544). § 46.4. Гальванический элемент (546).

## **Глава 47. Ток в вакууме . . . . . 547**

§ 47.1. Термоэлектронная эмиссия (547). § 47.2. Диод и его характеристика (548). § 47.3. Триод и его характеристика (550). § 47.4. Электронно-лучевая трубка (552).

## **Глава 48. Ток в газах . . . . . 553**

§ 48.1. Ионизация и рекомбинация (553). § 48.2. Несамостоятельный разряд (554). § 48.3. Ударная ионизация (557). § 48.4. Счетчик Гейгера–Мюллера (558). § 48.5. Самостоятельный разряд. Плазма (560). § 48.6. Тлеющий разряд (561). § 48.7. Плазма в магнитном поле (563). § 48.8. МГД-генератор (565).

## **Предметный указатель . . . . . 568**

## Предисловие

В настоящее время на основе Закона об образовании в Российской Федерации происходит радикальная реформа системы общего среднего образования. Одна из основных задач реформы — учет индивидуальных особенностей учащихся, их интересов и способностей. С этой целью Законом предусмотрена дифференциация средней школы, особенно ее старшего звена. Появились лицеи, колледжи, гимназии, школы и классы с углубленным изучением физики, возможность подготовки к экзаменам на ученую степень бакалавра. Возникла потребность в учебных пособиях, где физика излагалась бы на гораздо более высоком уровне, чем это возможно в учебниках для массовой школы.

Этим требованиям удовлетворяет предлагаемый вниманию читателей двухтомник «Основы физики». Он представляет собой детально переработанный и существенно дополненный вариант двухтомника под тем же названием, который издавался на русском <sup>1)</sup>, английском <sup>2)</sup>, польском <sup>3)</sup>, испанском <sup>4)</sup> языках.

Книга пользовалась большой популярностью у учащихся физико-математических школ, участников физических олимпиад, у учителей и студентов, у абитуриентов при подготовке к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения.

В этом издании сохранена основная идея курса — органическое сочетание идей современной и классической физики. Релятивистские, квантовые и статистические представления формируются в начале и далее систематически используются по всему курсу. В этом издании уточнены некоторые понятия релятивистской физики, установлена их связь с квантовыми представлениями. Расширено использование квантовых идей, в частности, за счет введения одномерного уравнения Шредингера и следствий из него. Дополнены сведения о свойствах вещества — полупровод-

---

<sup>1)</sup> Яворский Б.М., Пинский А.А. Основы физики. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1969, 1974, 1981.

<sup>2)</sup> Yavorsky B.M., Pinsky A.A. Fundamentals of Physics. V. 1, 2. — Moscow: Mir Publishers, 1975, 1979, 1987.

<sup>3)</sup> Yaworski B.M., Piński A.A. Elementy Fizyki. T. 1, 2. — Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1977, 1979.

<sup>4)</sup> Yavorski B.M., Pinski A.A. Fundamentos de Física. V. 1, 2. — Moscu: Editorial Mir, 1983.

никах, явлениях сверхтекучести жидкого гелия и высокотемпературной сверхпроводимости. Заново написана глава об элементарных частицах с учетом последних достижений в этой области физики.

Авторы надеются, что читатели, изучившие физику по этой книге, приобретут глубокие и прочные знания в области этой сложной, но увлекательной науки.

*Б.М. Яворский, А.А. Пинский*

## **Как работать над книгой**

В книге принята определенная система ссылок на предыдущий материал в виде указаний либо на параграф, где он рассмотрен, либо на формулы, на основе которых ведется рассуждение. Если Вы этот материал не помните, то вернитесь к нему и повторите, лишь тогда вам станет ясен смысл нового. В тексте имеются указания и на последующие разделы или параграфы, где рассматриваемый материал будет использован или расширен и углублен. Это указывает на значение данного материала для дальнейшего изложения.

Для облегчения поиска необходимой информации — понятий, законов, явлений и т. п. — в пособии имеются подробное оглавление и предметный указатель. В них указаны страницы, где этот материал наиболее полно изложен либо встречается впервые. Дальнейшие ссылки можно найти в тексте.

В настоящее время все понятия и законы физики группируются вокруг фундаментальных теорий: ньютоновской механики и теории относительности, молекулярно-кинетической теории и принципов термодинамики, теории электромагнитного поля и электронной теории, теории колебаний, квантовой теории. Усвоение этих теорий способствует более глубокому пониманию сущности физических явлений и законов, позволяет с единых позиций обозреть огромный фактический материал. Вместе с тем усвоение фундаментальных теорий требует от изучающего данное пособие внимательного анализа отдельных положений, фактов и закономерностей и определения их места в системе физических теорий. При этом очень важно уяснить себе, является ли данное положение определением, экспериментальным фактом, логическим следствием или обобщением и т. п. Только при таком

отношении к изложенному материалу возможно его глубокое понимание, а оно является необходимым условием прочного усвоения физики.

Обратим внимание читателя на необходимость систематической и последовательной работы над пособием. Дело в том, что как по объему материала, так и по структуре данная книга существенно отличается от других пособий.

В книге материал изложен в логической последовательности, соответствующей основному замыслу, и в этой же последовательности он должен изучаться. Лишь внимательное чтение, разбор всех выкладок и их самостоятельный вывод, усвоение логики физических рассуждений приведет к истинному пониманию существа вопроса и автоматически, непроизвольно будет способствовать прочному запоминанию. В этом плане весьма полезно конспектирование материала, особенно той его части, которая обозначена в программе для поступающих в вузы. Определения и выводы старайтесь формулировать точно, сверяясь с текстом пособия, при этом речь идет, конечно, о точности по существу, а не о дословном совпадении формулировок.

При работе над пособием обратите внимание на описание опытов. Большинство опытов, рассмотренных в книге, — это фундаментальные эксперименты, послужившие основой для разработки той или иной физической теории.

Высокий теоретический уровень развития физики приводит к тому, что в ней весьма широко используются математические методы и очень многие положения выводятся из основных. Вместе с тем физика как часть естествознания является наукой экспериментальной. Эксперимент служит в ней как исходной базой, поставляющей фактический материал, так и методом проверки того или иного следствия теории. Тем самым эксперимент является критерием истины. С другой стороны, описание в книге ряда экспериментов имеет целью ознакомить читателя с многочисленными применениями физики на практике.

Физику нельзя изучить, не научившись решать задачи. Для закрепления знаний и совершенствования умения решать задачи можно воспользоваться рядом задачников, изданных в помощь поступающим в вузы. В частности, издан задачник <sup>1)</sup>, в котором все задачи и решения к ним согласованы с теоретическим материалом двухтомного пособия по объему понятий, порядку изложения, системе обозначений и т. п.

---

<sup>1)</sup> Пинский А.А. Задачи по физике. — М.: Физматлит, 1977, 2000.

Предварительно рассмотрите все примеры, разобранные в двухтомнике, это облегчит решение аналогичных задач. Следует учесть, что решение физических задач (исключая стандартные упражнения) — это творческая деятельность, плохо поддающаяся стандартизации и алгоритмизации. Поэтому не надо впадать в панику, если сразу задачу решить не удалось! Чаще всего это сигнал о поверхностном, формальном усвоении теории. Вернитесь еще раз к соответствующему разделу пособия и изучите его более внимательно. В трудных случаях не следует пренебрегать помощью преподавателя, товарищей, а также указаниями, которые имеются в конце задачника.

Желаем читателю успехов в работе над данным пособием!

*Б.М. Яворский, А.А. Пинский*

# Часть I

## ДВИЖЕНИЕ И СИЛЫ

---

### Глава 1

### СКОРОСТЬ

#### § 1.1. Механическое движение

1. Все тела, окружающие нас, от звезд и планет до таких мельчайших частиц, как атомы и их составные части, находятся в состоянии непрерывного движения. Простейшей формой движения является изменение положения тел друг относительно друга — *механическое движение*.

Механическое движение лежит в основе действия большинства механизмов и машин, в основе движения всех видов транспорта. Вместе с тем оно является и составной частью более сложных, немеханических процессов. Так, тепловые явления связаны с беспорядочным движением молекул; излучение света — с движением электронов в атомах; ядерные реакции — с движением и взаимодействием элементарных частиц (протонов, нейтронов, мезонов). Число этих примеров можно было бы умножить.

2. Для описания движения тела следует указать, как движутся все его точки.

Одним из видов движения тел является *поступательное движение*, при котором все точки тела движутся совершенно одинаково; прямая, соединяющая две произвольные точки тела, переносится параллельно самой себе (рис. 1.1). Очевидно, что для описания поступательного движения тела достаточно описать движение какой-либо одной его точки.

Другим простым видом движения является *вращательное движение*, при котором все точки тела описывают окружности в параллельных плоскостях, причем центры этих окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения (рис. 1.2).

3. При решении ряда задач механики можно отвлечься от формы и размеров тела и рассматривать тело как материальную

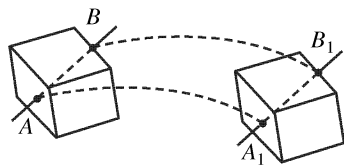


Рис. 1.1



точку. *Материальной точкой* называется тело, размерами которого можно пренебречь в данной задаче.

Естественно, что понятие материальной точки является абстракцией, что никаких материальных точек в природе нет.

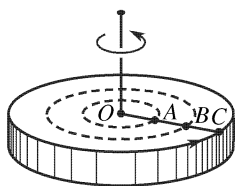


Рис. 1.2

Однако постановка ряда задач механики такова, что позволяет с успехом пользоваться этой абстракцией.

Действительно, если пассажира интересует, сколько времени нужно самолету, чтобы долететь из Москвы до Новосибирска, то совершенно не нужно знать характер движения отдельных частей самолета. В то же время нельзя пренебречь размерами и формой самолета, изучая такие явления, как взлет, посадка, сопротивление воздуха и т. п. Аналогично мы можем считать Землю и другие планеты точками, если нас интересует характер их движения вокруг Солнца. Однако если нужно выяснить причины смены дня и ночи или времен года, то Землю уже нельзя считать точкой, а следует учитывать ее размеры, вращение вокруг оси, наклон этой оси к плоскости орбиты и т. п.

Таким образом, одно и то же тело в одних задачах можно рассматривать как материальную точку, а в других задачах так поступать нельзя.

## § 1.2. Система отсчета. Траектория

1. Если рассмотреть явления, происходящие вблизи поверхности Земли, то мы убедимся в неравноценности различных направлений в пространстве. Так, тело, выпущенное из рук, всегда движется по вертикальному направлению вниз (примерно к центру Земли); свободная поверхность жидкости располагается в горизонтальной плоскости; для движения тела по вертикали вверх ему нужно сообщить начальную скорость, для движения же тела по вертикали вниз начальная скорость не нужна и т. д. Эта неравноценность различных направлений в пространстве вызвана тем, что Земля притягивает к себе тела.

На весьма значительном расстоянии как от Земли, так и от других планет и звезд мы обнаружили бы, что *в пространстве, свободном от больших тел, все направления равноценны*. Мы говорим, что *свободное пространство изотропно*, т. е. в нем нет выделенных направлений, обладающих особыми свойствами.

Точно так же равноценны все точки пространства, если вблизи этих точек нет больших тел типа планет или звезд. *Свободное про-*

странство однородно, т. е. в нем нет точек, обладающих особыми свойствами.

2. Однородным является также время. А именно, любые явления, происходящие в одних и тех же условиях, но в разные моменты времени, протекают совершенно одинаково. Действительно, если сегодня маленький шарик падает с высоты 6 м за 1,1 с, то в этой же лаборатории с этой же высоты он падал столько же времени и месяц назад, и год назад, и столько же времени его падение будет продолжаться 1000 лет спустя.

3. Как мы убедимся далее, из факта однородности времени, однородности и изотропности свободного пространства вытекает ряд важных следствий (см. гл. 23). Одно из них мы можем учесть уже сейчас: раз пространство однородно и изотропно, то невозможно определить положение материальной точки относительно пространства.

Однако вполне возможно определить положение одного тела относительно другого. Например, положение лампочки в комнате полностью задается ее расстоянием от пола и расстояниями до двух взаимно перпендикулярных стен. С помощью такой же тройки чисел можно определить положение любого другого тела, находящегося как внутри комнаты, так и вне ее.

Неподвижное тело, относительно которого определяется положение всех остальных тел, называется *телом отсчета*. С телом отсчета обычно связывают три взаимно перпендикулярные прямые — *оси координат* (рис. 1.3). Положение точки характеризуется координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

*Системой отсчета* называется система координат, связанная с телом отсчета, и совокупность синхронизированных часов, помещенных в разных точках системы координат. Метод синхронизации часов будет рассмотрен в § 12.3.

В принципе любое тело может служить телом отсчета, однако не все системы отсчета могут оказаться одинаково удобными. Так, движение автомобиля удобнее рассматривать в системе отсчета, связанной с Землей, а не с Солнцем или Луной. Наоборот, движение планет удобнее рассматривать в системе отсчета, связанной именно с Солнцем, а не с Землей или другой планетой, — законы движения планет будут

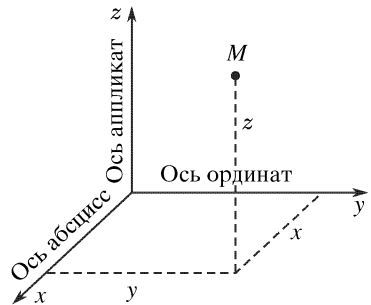


Рис. 1.3

описываться проще. Некоторые критерии выбора системы отсчета будут рассмотрены ниже.

4. Движущаяся точка описывает в заданной системе отсчета линию, которая называется *траекторией*. Так, если зажечь прут и быстро вращать его в воздухе, особенно в темной комнате, то отчетливо будет видна траектория движения уголька на конце прутка. Форма траектории зависит от выбора системы отсчета. Действительно, пусть тело падает в вагоне, который движется относительно Земли. Тогда траектория этого тела относительно вагона будет прямой линией, относительно же Земли это будет кривая (при отсутствии сопротивления воздуха — парабола). То же самое можно сказать о траектории, которую описывает какая-либо точка пропеллера движущегося самолета. В системе координат, связанной с самолетом, эта точка движется по окружности; в системе же координат, связанной с Землей, она движется по винтовой линии.

Таким образом, понятие формы траектории имеет *относительный смысл*. Нельзя говорить о форме траектории вообще; речь может идти лишь о форме траектории в заданной системе отсчета (системе координат).

### § 1.3. Прямолинейное движение. Закон движения

1. Пусть в некоторой системе отсчета материальная точка движется по прямой. Тогда удобно направить вдоль этой траектории одну из осей координат, например ось абсцисс. В каждый момент времени движущаяся точка будет иметь вполне определенную координату. А это значит, что координата движущейся точки есть функция времени:  $x = f(t)$ . Вид этой функции и есть *закон движения*.

2. Для того чтобы экспериментально определить закон движения, необходимо, чтобы движущаяся точка каким-либо образом оставляла метки на оси координат.

Пусть, например, нас интересует закон движения эскалатора метрополитена. Для этого можно было бы вдоль стены натянуть бумажную ленту, а стоящему на лестнице экспериментатору дать в руки прибор, который через равные промежутки времени (например, через каждую секунду) наносил бы на ленту метки. Результат эксперимента можно свести в табл. 1.1:

Таблица 1.1

Момент времени $t$ , с	1	2	3	4	5	6	7	8
Координата $x$ , м	1,75	2,50	3,25	4,00	4,75	5,50	6,25	7,00

Этот эксперимент не позволяет надежно определить положения точки в промежуточные моменты времени. Однако можно подобрать такую функцию  $x = f(t)$ , значения которой при  $t = 1; 2; 3$  и т. д. были бы  $x = 1,75; 2,50; 3,25$  и т. д. Нетрудно убедиться, что это будет линейная функция  $x = 1 + 0,75t$ . Предполагая, что характер движения не менялся в процессе нашего исследования, мы имеем право считать, что и для всех остальных моментов времени, лежащих в интересующих нас пределах, координата вычисляется по этому же закону.

Заметим, что чем меньше будут промежутки времени между двумя последовательными метками, тем больше оснований полагать, что наше предположение о характере закона движения близко к истине. Поэтому при экспериментальном изучении закона движения некоторого тела существенную роль играет объем информации: чем больше мы получим меток и чем меньше будут промежутки времени между двумя соседними метками, тем более точно можно определить закон движения.

3. Предположение, что характер движения не менялся в процессе исследования, имеет принципиальное значение. Действительно, пусть к концу десятой секунды человек, стоявший до этого неподвижно на ступеньке эскалатора, решил ускорить спуск и стал шагать по ступенькам вниз. Естественно, что характер его движения существенно изменился, и мы уже не вправе пользоваться найденным ранее законом движения для моментов времени после десятой секунды (от начала эксперимента).

Таким образом, экспериментально найденным законом движения можно пользоваться только в том интервале времени, в течение которого проводилось исследование. Экстраполяция (т. е. применение найденного закона для более широкого интервала времени) возможна лишь после дополнительного исследования, позволяющего установить, что характер движения не изменился.

### § 1.4. Равномерное движение

Движение материальной точки называется *равномерным*, если координата точки является линейной функцией времени:

$$x = vt + x_0, \quad (1.1)$$

где  $v$  и  $x_0$  — скорость движения и начальная координата соответственно.

2. Закон движения очень наглядно изображается с помощью *графики*. Для этой цели строим на плоскости систему координат,

откладывая на оси абсцисс время  $t$ , а на оси ординат — переменную координату точки (например,  $x$ ). Откладывая по обеим осям соответствующие значения переменных, взятые из табл. 1.1, проводим в этих точках перпендикуляры к осям координат. Линия, плавно соединяющая точки пересечения, и есть *график движения*. Поскольку в равномерном движении координата является линейной функцией времени, то графиком этого движения служит прямая (рис. 1.4).

3. Полагая в законе движения  $t = 0$ , имеем  $x = x_0$ . Это начальная координата, т. е. расстояние от движущейся точки до начала координат в начальный момент времени.

Следует особо обратить внимание на смысл понятия *начальный момент времени*. Это никоим образом не начало движения, а *начало эксперимента по исследованию данного движения*.

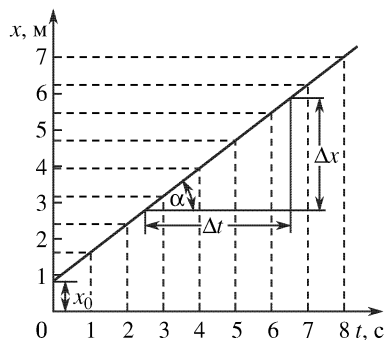


Рис. 1.4

Что же касается момента начала движения, то он нас не всегда интересует, а иногда и вовсе не может быть установлен. Так, астроном, исследующий закон движения метеорита, обнаруживает метеорит только тогда, когда он войдет в сравнительно плотные слои атмосферы и раскалится. Это и будет начальный момент — начало наблюдения, но отнюдь не начало движения метеорита.

То же относится к движению других небесных тел (планет, комет), к движению космических частиц через измерительную аппаратуру, к движению самолета или ракеты, когда их обнаружит радиолокатор, и т. п.

## § 1.5. Переменное движение

1. Всякое неравномерное движение называется переменным. Рассмотрим переменное движение на двух примерах: тела, падающего с некоторой высоты, и тела, брошенного вертикально вверх. В обоих случаях мы имеем дело с прямолинейным, но неравномерным, т. е. переменным движением.

Пусть маленький и достаточно тяжелый шарик падает вдоль оси аппликат. Метки на координатной оси можно получить, например, с помощью моментальной фотографии, открывая затвор

аппарата через равные промежутки времени. Результаты эксперимента сведем в табл. 1.2:

Таблица 1.2

Момент времени $t$ , с	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Координата $z$ , м	0,049	0,196	0,431	0,784	1,22	1,76	2,40	3,14	3,97	4,90

Построив график движения, мы видим, что он — не прямая линия, а парабола; закон движения имеет вид  $z = 4,9t^2$  (рис. 1.5).

2. Если с помощью описанной методики исследовать характер движения тела, брошенного вертикально вверх, то результаты эксперимента сведутся в табл. 1.3:

Таблица 1.3

Момент времени $t$ , с	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Координата $z$ , м	0	1,74	3,14	4,12	4,70	4,90	4,70	4,12	3,14	1,74	0

Движение здесь также прямолинейное переменное. Закон движения имеет вид  $z = 9,8t - 4,9t^2$ . На графике закон движения изобразится параболой (рис. 1.6).

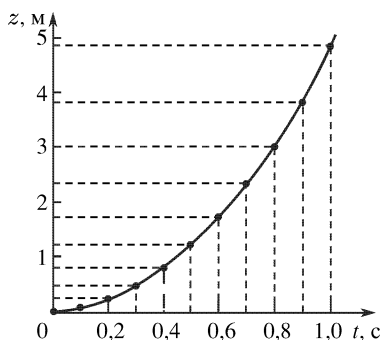


Рис. 1.5

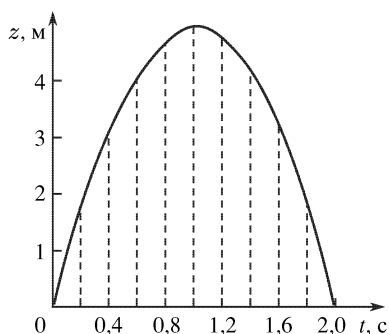


Рис. 1.6

3. Следует обратить внимание на принципиальное отличие графика движения от траектории. *Траектория* — это кривая, по которой материальная точка движется в системе отсчета; *график* — это кривая на чертеже, соединяющая изображающие точки в плоскости координата–время.

Шарик, падающий с некоторой высоты, и шарик, брошенный вертикально вверх, движутся по траектории одинаковой формы — по прямой линии, а графики у них различные вследствие неодинакового характера движения.

### § 1.6. Средняя скорость

1. Рассмотрим случай, когда материальная точка движется вдоль какой-либо оси координат все время в одном направлении.

*Перемещением* материальной точки за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  называется отрезок  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

Заметим, что если точка движется все время в одном и том же направлении, то пройденный путь равен абсолютной величине перемещения:  $\Delta s = |\Delta x|$ . Если же точка движется сначала в одном направлении, а затем, остановившись, начинает двигаться в обратном направлении (например, в случае колебательного движения или движения тела, брошенного вертикально вверх), то пройденный путь равен сумме абсолютных величин перемещений в том и другом направлениях:  $\Delta s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots$ .

Для примера обратимся опять к случаю движения тела, брошенного вертикально вверх. Выберем моменты времени  $t_1 = 0,8$  с и  $t_2 = 1,4$  с — им соответствуют координаты  $x_1 = 4,70$  м и  $x_2 = 4,12$  м (см. табл. 1.3). Перемещение

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4,12 - 4,70 = -0,58 \text{ м.}$$

Знак минус указывает, что перемещение направлено в сторону, противоположную направлению оси координат. Пройденный же путь будет значительно больше, ибо движущаяся точка в момент времени  $t = 1,0$  с достигла наибольшей высоты  $x_{\text{макс}} = 4,90$  м, а затем стала падать вниз. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta s &= |x_{\text{макс}} - x_1| + |x_2 - x_{\text{макс}}| = \\ &= |4,90 - 4,70| + |4,12 - 4,90| = 0,20 + 0,78 = 0,98 \text{ м.} \end{aligned}$$

2. *Средней скоростью* движения за данный промежуток времени называется физическая величина, численно равная отношению перемещения к промежутку времени:

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.2)$$

Направление средней скорости совпадает с направлением перемещения.

*Единица скорости* определяется как скорость такого движения, при котором перемещение материальной точки за единицу времени составляет единицу длины:

$$[v] = \frac{[x]}{[t]}. \quad (1.3)$$

Здесь квадратные скобки указывают единицу величины.

В Международной системе единиц (сокращенно СИ — русская транскрипция; в латинской транскрипции SI — сокращенное обозначение слов System International) единицей перемещения является метр (м), а единицей времени — секунда (с), следовательно, единицей скорости будет м/с.

3. В переменном движении значение средней скорости существенно зависит от выбора промежутка времени, в течение которого двигалось тело. Так, в случае свободного падения, который был рассмотрен выше, средняя скорость в промежутке от  $t_1 = 0,1$  с до  $t_2 = 0,2$  с (см. табл. 1.2)

$$v_{\text{ср}} = \frac{0,196 - 0,049}{0,2 - 0,1} = \frac{0,147}{0,1} = 1,47 \text{ м/с},$$

в промежутке времени от  $t_1 = 0,7$  с до  $t_2 = 0,8$  с средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{3,14 - 2,40}{0,8 - 0,7} = \frac{0,74}{0,1} = 7,4 \text{ м/с},$$

а от  $t_1 = 0,7$  с до  $t_2 = 1,0$  с

$$v_{\text{ср}} = \frac{4,90 - 2,40}{1,0 - 0,7} = \frac{2,50}{0,3} = 8,33 \text{ м/с}.$$

И только *при равномерном движении средняя скорость — постоянная величина*, не зависящая от выбора промежутка времени. Действительно, здесь  $x_1 = vt_1 + x_0$ ,  $x_2 = vt_2 = x_0$  и средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{vt_2 + x_0 - vt_1 - x_0}{t_2 - t_1} = v.$$

4. Для оценки числового значения средней скорости на практике иногда пользуются следующим определением: средняя скорость равна отношению пройденного пути ко времени движения. Подчеркнем, что определенная таким образом средняя скорость является скаляром, а не вектором.

### § 1.7. Мгновенная скорость переменного движения

1. Во многих случаях нас интересует не средняя скорость движения тела за определенный промежуток времени, а *скорость тела в данный момент*, или *мгновенная скорость*. Например, если тело ударяется о преграду, то сила, с которой оно в этот момент действует на преграду, определяется скоростью в момент удара, а не средней скоростью; дальность полета снаряда и форма его траектории определяются скоростью в момент запуска, а не средней скоростью и т. п. Так как средняя скорость, согласно (1.2), равна  $v_{\text{ср}} = \Delta x / \Delta t$ , то чем меньше промежуток времени  $\Delta t$ , тем меньше средняя скорость отличается от интересующей нас мгновенной скорости.

Определим мгновенную скорость  $v$  как *предел, к которому стремится средняя скорость за бесконечно малый промежу-*



ток времени:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.4)$$

В математике такой предел называется *производной* <sup>1)</sup>. Следовательно, мгновенная скорость есть производная от координаты по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = x'(t). \quad (1.5)$$

2. Поскольку средняя скорость равномерно движущейся материальной точки является постоянной величиной, а пределом постоянной величины является сама эта величина, то и *мгновенная скорость равномерно движущейся материальной точки является постоянной величиной*.

Итак, равномерное движение можно определить как движение с постоянной скоростью.

Как видно из графика (см. рис. 1.4), скорость равномерного движения численно равна тангенсу угла наклона графика к оси времени:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = K \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $K$  — размерный коэффициент, равный отношению масштабов единиц перемещения (ось ординат) и времени (ось абсцисс). Движению с большей скоростью будет соответствовать график с более крутым наклоном.

На графиках переменного движения (см. рисунки 1.5 и 1.6) мгновенная скорость численно равна тангенсу угла между касательной к графику и осью абсцисс.

## Глава 2 ИНЕРЦИЯ

### § 2.1. Принцип инерции

1. Основной задачей механики является изучение движения тел в той или иной системе отсчета и причин, определяющих характер этих движений. Необходимо выяснить, при каких условиях тело движется по прямолинейной или криволинейной траектории, равномерно или неравномерно, ускоренно или замедленно.

<sup>1)</sup> Производная функция  $y = f(x)$  обозначается через  $dy/dx$  либо через  $y'(x)$ .

Опыт показывает, что при взаимодействии тел характер их движения меняется. Так, падающее тело, соприкоснувшись с Землей, либо останавливается — и тогда его движение прекращается, либо подпрыгивает вверх — и тогда направление его скорости меняется на противоположное; покоящееся относительно Земли тело само никогда не начнет двигаться, оно выходит из состояния покоя и начинает перемещаться только под действием какого-либо другого тела. Число этих примеров, естественно, можно было бы умножить.

2. Однако из правильного вывода о том, что взаимодействие тел приводит к изменению скорости их движения, некоторые мыслители древности, например Аристотель, сделали ложное заключение, что само движение тел есть результат их взаимодействия с другими телами.

Одна из причин, которая привела их к такому неверному выводу, заключалась в том, что они считали Землю абсолютно неподвижным центром Вселенной. Вследствие этого они считали покой относительно Земли естественным состоянием тел, а движение — временным, вынужденным состоянием, являющимся результатом действия внешних сил. Правда, при этом возникали и определенные трудности, например при объяснении движения брошенного камня или стрелы, вылетевшей из лука: ведь здесь нет тел, которые бы все время подталкивали камень или стрелу! И вот для объяснения этих явлений античные ученые предлагали различные произвольные гипотезы, лишь бы сохранить свое основное предположение о вынужденном происхождении движения.

3. В конце XVI в. две задачи выдвинули вновь проблему движения. Прежде всего с развитием артиллерии нужно было найти законы движения снарядов. Затем в связи с возникновением гелиоцентрической системы Коперника стало ясно, что Земля является не центром Вселенной, а рядовой планетой, обращающейся наряду с другими планетами вокруг Солнца. Отсюда неизбежно вытекал вывод, что планеты (а значит, и другие тела) движутся сами по себе, ибо совершенно невероятно, чтобы Земля и другие планеты что-то все время подталкивало в течение миллиардов лет.

Кроме того, нужно было объяснить, почему мы не чувствуем вращения Земли, а также почему, оторвавшись от Земли, например подпрыгнув, мы опускаемся в ту же точку Земли.

Первое правильное, хотя и неполное решение проблемы движения было дано Галилеем в начале XVII в. И лишь 50 лет спустя Ньютон смог найти четкую формулировку трех основных зако-

нов движения, что явилось основой для создания классической механики.

4. Для правильного решения проблемы движения следовало прежде всего отвлечься от всяких внешних воздействий и сформулировать проблему так: что произойдет с телом, если оно перестанет взаимодействовать с другими телами? Здесь на помощь должен прийти *мысленный эксперимент*, идея которого и была выдвинута Галилеем. Действительно, во всяком реальном эксперименте на Земле мы не можем освободить тело от действия силы тяжести и силы трения. Однако можно поставить вопрос так: а что произойдет, если мы эти силы, хотя бы и мысленно, станем постепенно уменьшать?

Если тележка движется по песку, она быстро остановится; на куске стекла она будет двигаться значительно дольше, хотя и здесь в конце концов тоже остановится. А что если стекло станет абсолютно гладким? Очевидно, тележка будет сама по себе двигаться неограниченно долго.

Вот эта-то идея мысленного эксперимента над телом, которое свободно от всяких внешних воздействий, и позволила Галилею прийти к идее *инерциального* движения тела. И хотя сам Галилей и ошибался, считая, что по инерции тело может не только двигаться равномерно и прямолинейно, но и равномерно двигаться по окружности (последнее неверно!), его идея позволила Ньютону правильно сформулировать *закон (принцип) инерции*, который называют также *первым законом Ньютона*.

*Если данное тело не взаимодействует с окружающими телами, то скорость его движения не меняется ни по модулю, ни по направлению, т. е. оно движется прямолинейно и равномерно.*

Инерционное движение есть движение по кратчайшему расстоянию, ибо в свободном пространстве кратчайшим расстоянием между двумя точками является прямая линия.

Если же мы говорим о том, что некое тело покоится, то это не абсолютный покой, а покой лишь в данной системе отсчета, которая сама движется относительно других тел.

5. Именно благодаря инерции, подпрыгнув вверх в движущемся вагоне, мы опускаемся на то же самое место. Действительно, находясь на полу равномерно движущегося вагона, мы имеем с ним одинаковую скорость. Подпрыгнув вертикально вверх, мы сохраняем горизонтальную скорость неизменной, ибо в этом направлении на нас ничто не действует. А потому, пройдя по горизонтали одинаковый с вагоном путь, мы возвращаемся в ту же точку, от которой отделились в момент прыжка. Буквально то же

самое можно сказать и относительно нашего движения совместно с Землей.

Благодаря инерции движутся брошенные тела. Действительно, в момент броска мы сообщаем камню некоторую скорость. И если бы камень не испытывал сопротивления воздуха и притяжения Земли, он двигался бы, сохраняя эту скорость неизменной по величине и направлению. Взаимодействие же камня с воздухом и Землей приводит к замедлению его движения, искривлению траектории и в конечном счете к его остановке.

## § 2.2. Инерциальные системы отсчета

1. Формулировка принципа инерции, предложенная в предыдущем параграфе, не может быть признана полной. Действительно, там идет речь о движении тела, но ничего не сказано о той системе отсчета, в которой совершается движение. Между тем нам известно, что говорить о форме траектории, а также о скорости можно лишь относительно некоторой системы отсчета, так как, например, траектория, прямолинейная в одной системе отсчета, может оказаться криволинейной в другой системе.

Поэтому необходимо видоизменить формулировку принципа инерции, введя явные указания на характер системы отсчета, относительно которой данное движение рассматривается. Принцип инерции более точно формулируется так:

*Существуют системы отсчета, относительно которых все тела, не взаимодействующие с другими телами, движутся прямолинейно и равномерно. Системы отсчета, удовлетворяющие этому принципу, называются инерциальными системами.*

2. Понятие инерциальной системы отсчета является абстракцией, реализуемой на практике лишь с некоторой степенью приближения. Действительно, всякая система отсчета связана с какими-то телами, а все тела в природе в той или иной степени взаимодействуют друг с другом. Поэтому невозможно указать строго инерциальные системы отсчета; можно лишь указать системы, которые для данного круга рассматриваемых вопросов могут считаться инерциальными. Естественно, что вопрос о том, является ли данная система отсчета инерциальной, может быть решен только экспериментально.

Практика показала, что в первом приближении можно считать систему отсчета, связанную с Землей, инерциальной системой. А именно, существует целый круг явлений, на ход которых вращение Земли не влияет. Эта система отсчета называется *геоцентрической* (от греческого *gē* — Земля).

Так, вращение Земли практически не влияет на работу всевозможных механизмов и машин, на движение различных видов транспорта. Оно не влияет на ход тепловых, химических и ядерных реакций, а также на электромагнитные процессы, происходящие в генераторах, электродвигателях, трансформаторах, радиопередатчиках и приемниках; оно не влияет на распространение электромагнитных волн, на световые и звуковые явления. Следовательно, при описании всех этих физических процессов можно с большой степенью точности считать геоцентрическую систему отсчета инерциальной.

3. Вместе с тем существует и ряд явлений, вызванных вращением Земли вокруг своей оси и движением Земли вокруг Солнца. Поскольку оба этих движения не являются прямолинейными и равномерными, то они вызывают эффекты, невозможные в инерциальных системах отсчета.

Так, наблюдая ночью за небосводом, мы заметим, что вся система звезд вращается вокруг оси, проходящей через Полярную звезду и центр Земли. С точки зрения геоцентрической системы отсчета здесь следует найти какой-то механизм взаимодействия между Землей и всеми звездами, позволяющий объяснить причину искривления их траекторий. Далее, планеты совершают довольно сложные движения по небосводу. Двигаясь в некотором направлении, планета вдруг останавливается, затем перемещается назад и, описав петлю, начинает двигаться в первоначальном направлении.

Многочисленные попытки объяснить наблюдаемое движение небесных светил в геоцентрической системе отсчета, предпринятые Аристотелем, Птолемеем и другими исследователями, оказались несостоятельными. Правильную теорию движения небесных тел дали Коперник, Галилей и Кеплер, связав систему отсчета не с Землей, а с Солнцем. Эта система отсчета называется *гелиоцентрической* (от греческого *hēlios* — Солнце). Она является в значительной степени более инерциальной, чем геоцентрическая система отсчета.

### § 2.3. Принцип относительности

1. Инерциальных систем (с той степенью приближения, которая указана выше) имеется бесчисленное множество. *Любая система отсчета, которая движется прямолинейно и равномерно относительно некоторой инерциальной системы, тоже является инерциальной.*

Действительно, пусть в некоторой системе отсчета тело движется по инерции. Следовательно, его скорость не меняется ни по модулю, ни по направлению. В другой системе отсчета, которая движется относительно первой прямолинейно и равномерно, наше тело будет иметь другую скорость, но опять-таки постоянную по модулю и направлению. Следовательно, вторая система отсчета в такой же мере инерциальна, как и первая.

Так, системы отсчета, связанные с вагоном или судном, движущимся равномерно и прямолинейно относительно Земли, будут в такой же мере инерциальными, как и система отсчета, связанная с Землей.

2. Опыт показывает, что на судне, движущемся прямолинейно и равномерно относительно Земли, так же легко двигаться по любому направлению, как и на Земле. При выстреле из пистолета пуля летит столько же времени от носа к корме, сколько и от кормы к носу. Тело, выпущенное из рук, падает вертикально вниз (разумеется, относительно судна; относительно Земли оно движется по параболической траектории). Вода, налитая в какой-либо сосуд, имеет горизонтальную поверхность, как и на Земле.

Из этих и многих иных явлений следует, что никакой механический эксперимент не позволяет нам выделить из совокупности инерциальных систем какую-либо одну преимущественную систему отсчета. Отсюда вытекает, что не может быть речи об абсолютном покое или абсолютном движении тел, а можно говорить лишь об их относительном движении в какой-либо инерциальной системе отсчета.

Этот основной закон природы называется *принципом относительности Галилея*. Его можно сформулировать следующим образом:

*Во всех инерциальных системах отсчета законы механики одинаково справедливы; или, короче, все инерциальные системы отсчета равноправны.*

Анализ принципа относительности, проделанный Эйнштейном, привел его в 1905 г. к выводу, что этот принцип является одним из самых фундаментальных законов природы; он применим не только к механическим, но и к любым другим явлениям — тепловым, электромагнитным, оптическим и т. п. Это позволило Эйнштейну сформулировать общий принцип относительности, называемый часто *принципом относительности Эйнштейна*:

*Во всех инерциальных системах отсчета все законы природы одинаковы.*

Этот принцип является одной из основ современного физического миропонимания.

## § 2.4. Преобразования Галилея

1. В ньютоновской механике мы имеем дело с относительно малыми скоростями. Действительно, самые большие скорости, с которыми движутся макроскопические тела, — это скорости планет, метеоров, космических кораблей. Они не превышают нескольких десятков километров в секунду, что много меньше скорости света в вакууме  $c = 300\,000$  км/с.

Если координаты некоторой материальной точки заданы в одной инерциальной системе отсчета, то можно вычислить координаты этой же точки в любой другой инерциальной системе, движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно. Точная форма соответствующих преобразований координат будет выведена в § 12.7. Здесь же мы рассмотрим так называемые *преобразования Галилея*, которые позволяют связать между собой координаты некоторой материальной точки в двух разных инерциальных системах отсчета при скоростях движения, много меньших скорости света.

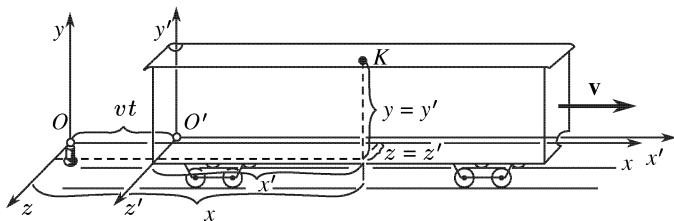


Рис. 2.1

2. Свяжем одну систему отсчета для определенности с Землей, а вторую — с вагоном, который движется относительно Земли равномерно и прямолинейно со скоростью  $v$ . Для простоты рассуждений направим одну из осей координат (например, ось абсцисс) вдоль направления движения вагона (рис. 2.1). Из рисунка видно, что аппликаты и ординаты точки  $K$  в обеих системах координат совпадают:  $z' = z$  и  $y' = y$ . Абсциссы же отличаются на отрезок  $OO' = vt$ . Отсюда преобразования Галилея примут вид

$$z' = z, \quad y' = y, \quad x' = x - vt. \quad (2.1)$$

3. Чтобы убедиться, что преобразования Галилея удовлетворяют принципу относительности, рассмотрим, каков будет их вид, если вагон считать неподвижным, а Землю — перемещающейся в обратном направлении со скоростью  $V$ . Абсолютные величины скоростей  $V$  и  $v$  совпадают, направления же их проти-

воположны; следовательно,  $V = -v$ . Рассуждения, совершенно аналогичные вышеизложенным, приводят к формулам

$$z = z', \quad y = y', \quad x = x' + vt. \quad (2.2)$$

Итак, преобразования Галилея взаимны: любая из инерциальных систем отсчета может быть условно принята за неподвижную, а преобразования к любой другой инерциальной системе производятся по тем же формулам, но с учетом знака относительной скорости системы. А это и означает, что данные преобразования согласуются с принципом относительности.

4. Перемещения точки в разных системах координат различны. Действительно, пусть в момент  $t_1$  материальная точка имела координату  $x_1$ , а в момент  $t_2$  — координату  $x_2$ . Перемещение точки в системе отсчета, связанной с Землей:

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Перемещение этой же точки в системе отсчета, связанной с вагоном:

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1) = \Delta x - v\Delta t. \quad (2.3)$$

Соответственно

$$\Delta x = \Delta x' + v\Delta t. \quad (2.4)$$

5. Однако длина отрезка в обеих системах отсчета сохраняется. Действительно, *длиной отрезка* (рис. 2.2) называется *разность координат его конца и начала, измеренных одновременно*:  $l = x_2 - x_1$  при  $t_2 = t_1$ , т. е.  $\Delta t = 0$ . Тогда из (2.3) или (2.4) следует

$$l = l'. \quad (2.5)$$

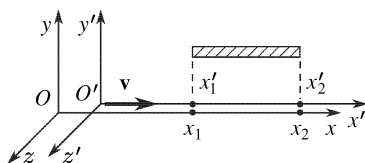


Рис. 2.2

Этот результат представляет совершенно очевидным, и на первый взгляд даже не ясно, зачем это нужно было выводить. Смысл вывода станет ясен ниже (§ 12.8).

## § 2.5. Классический закон сложения скоростей

1. Пусть материальная точка движется равномерно вдоль оси абсцисс со скоростью  $v = \Delta x / \Delta t$ . Найдем скорость этой же точки в другой инерциальной системе отсчета  $v' = \Delta x' / \Delta t$ . Для этой цели воспользуемся формулой (2.3). Разделив обе части равенства



на  $\Delta t$ , получим

$$v' = u - v, \quad (2.6)$$

или

$$u = u' + v. \quad (2.7)$$

Это и есть *классический закон сложения скоростей* для рассматриваемого частного случая.

2. Классический закон сложения скоростей хорошо подтверждается при скоростях движения, много меньших скорости света.

Так, если вагон движется относительно Земли со скоростью 80 км/ч, а пассажир идет по вагону в том же направлении со скоростью 6 км/ч, то скорость пассажира относительно Земли составит 86 км/ч. Если река имеет скорость течения 2 м/с, а скорость парохода относительно воды 8 м/с, то при движении парохода против течения его скорость относительно Земли составит 6 м/с, а при движении по течению — 10 м/с.

3. Логические соображения, положенные в основу вывода преобразований Галилея, представляются самоочевидными, а следствия, получаемые из этих преобразований, такие, как неизменность длины отрезка в разных системах отсчета, закон сложения скоростей и т. п., отлично оправдывались в экспериментах при тех скоростях движений, с которыми имели дело ученые в течение примерно трех столетий после работ Галилея и Ньютона. Постепенно сложилось представление, что эти преобразования должны быть справедливы для любых физических явлений. И только в конце прошлого века было обнаружено, что применение представлений ньютоновской механики к явлениям, связанным с распространением света, приводит к ряду противоречий. В гл. 12 мы покажем, как возникли эти противоречия и как они были устранены в теории относительности.

## Глава 3

# СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

### § 3.1. Скалярные величины

*Скаляром* называется величина, которой в любой системе отсчета соответствует определенное число, зависящее от выбора системы единиц. Например:

$$l = 3 \text{ м} = 300 \text{ см} = 3000 \text{ мм}.$$

Числовое значение скалярной величины обратно пропорционально единице измерения. Символически это можно записать так:

$$a[A] = a'[A'] \quad \text{или} \quad \frac{a}{a'} = \frac{[A']}{[A]}, \quad (3.1)$$

где  $[A]$  и  $[A']$  — единицы скалярной величины,  $a$  и  $a'$  — ее числовые значения.

Примерами скалярных величин могут служить: время, длина, площадь, объем, температура, масса, работа, энергия.

Любая алгебраическая операция над скалярными величинами также дает скаляр.

Заметим, что если некоторое выражение, составленное из скалярных величин, находится под знаком неалгебраической (трансцендентной) функции, то оно является отвлеченным числом. К такого рода функциям относятся показательная, логарифмическая, тригонометрическая функции. Например, если координата  $x$  выражена в метрах ( $[x] = \text{м}$ ), то выражение  $y = a^{kx}$  имеет смысл только в том случае, если  $[k] = \text{м}^{-1}$ . Аналогично выражение  $x = A \cos \omega t$  имеет смысл только при  $[\omega] = \text{с}^{-1}$ .

### § 3.2. Векторные величины

1. *Вектором* называется величина, которой в любой системе отсчета соответствует *направленный отрезок*. Вектор характеризуется абсолютной величиной (модулем), направлением и точкой приложения его начала. Векторными величинами являются, например, скорость, сила.

Вектор, начало которого совпадает с началом координат, а конец определяет положение некоторой материальной точки, называется *радиусом-вектором* этой точки (рис. 3.1).

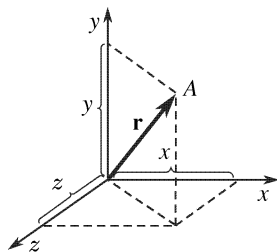


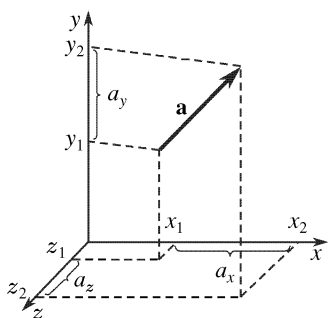
Рис. 3.1

Векторы принято обозначать малыми латинскими буквами с горизонтальной стрелкой вверху ( $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и т. д.) или жирными буквами ( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , ...). Радиус-вектор принято обозначать буквой  $\mathbf{r}$ .

2. Любой вектор может быть спроецирован на оси координат.

Проекции вектора  $\mathbf{a}$  на оси координат обозначаются соответственно через  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ , где индекс характеризует ось, на

которую проецируется вектор (рис. 3.2). Из чертежа видно, что



$$\begin{aligned} a_x &= x_2 - x_1, \\ a_y &= y_2 - y_1, \\ a_z &= z_2 - z_1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $x_1, y_1, z_1$  — координаты начала вектора,  $x_2, y_2, z_2$  — координаты его конца.

Проекциями радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  являются координаты его конца, поскольку координаты его начала равны нулю:

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z. \quad (3.3)$$

3. *Абсолютной величиной* вектора или его модулем называется скаляр, равный длине отрезка, изображающего этот вектор. Обозначается он символом  $|\mathbf{a}|$  или просто  $a$ . Пользуясь теоремой Пифагора, имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| = a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Модуль радиуса-вектора

$$|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.5)$$

### § 3.3. Некоторые операции над векторами

1. *Суммой двух векторов является новый вектор, проекции которого суть суммы соответствующих проекций слагаемых.* Если проекциями слагаемых векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  являются  $a_x, a_y, a_z$  и  $b_x, b_y, b_z$ , то из определения суммы следует, что

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (3.6)$$

если  $c_x = a_x + b_x, c_y = a_y + b_y, c_z = a_z + b_z$ .

Из этого определения вытекает ряд важных следствий.

*Переместительный закон сложения:*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \quad (3.7)$$

Действительно, для проекций, как для любых чисел, переместительный закон безусловно справедлив.

Аналогично доказывается *сочетательный закон сложения*:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \quad (3.8)$$

*Правило многоугольника*: чтобы сложить несколько векторов, например  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$ ,  $\mathbf{a}_4$  и  $\mathbf{a}_5$ , нужно начало второго слагаемого совместить с концом первого, начало третьего — с концом второго и т. д. Затем строится новый вектор, начало которого совпадает с началом первого слагаемого, а конец — с концом последнего (рис. 3.3). Этот замыкающий вектор  $\mathbf{b}$  и будет искомой суммой:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5.$$

Для доказательства этого следствия расположим два вектора  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  в плоскости  $xy$ , причем начало вектора  $\mathbf{a}_2$  совместим

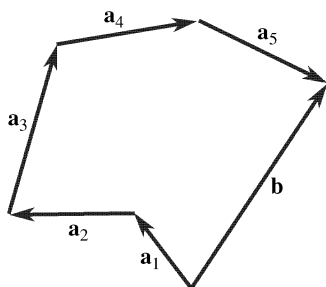


Рис. 3.3

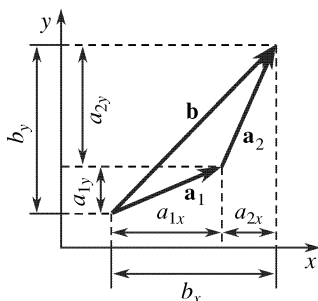


Рис. 3.4

с концом вектора  $\mathbf{a}_1$  (рис. 3.4). Соединив начало  $\mathbf{a}_1$  с концом  $\mathbf{a}_2$ , получим вектор  $\mathbf{b}$ , который по определению и является искомой суммой. Из чертежа видно, что проекции вектора  $\mathbf{b}$  на оси координат являются суммами соответствующих проекций векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  на эти же оси.

Для нескольких векторов можно воспользоваться *сочетательным законом сложения*.

Заметим, что сумму двух векторов можно построить и по *правилу параллелограмма* (рис. 3.5). Однако при построении суммы нескольких векторов правило многоугольника более удобно.

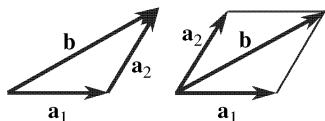


Рис. 3.5

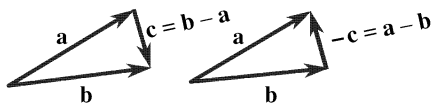


Рис. 3.6

2. Разностью двух векторов называется вектор, построенный следующим образом: совмещаются начала уменьшаемого **b** и вычитаемого **a** векторов (рис. 3.6). Тогда вектор **c**, проведенный от конца вычитаемого вектора к концу уменьшаемого, и есть искомая разность:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}. \quad (3.9)$$

В проекциях

$$c_x = b_x - a_x, \quad c_y = b_y - a_y, \quad c_z = b_z - a_z.$$

Доказательство непосредственно вытекает из правила многоугольника, поскольку  $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b}$ .

3. Произведением вектора **a** на скаляр *k* является новый вектор **b**, проекции которого в *k* раз больше соответствующих проекций вектора **a**. Из этого определения следует, что

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a}, \quad (3.10)$$

если  $b_x = ka_x$ ,  $b_y = ka_y$ ,  $b_z = ka_z$ . Для целого положительного *k* это прямо следует из закона сложения векторов.

При умножении вектора на положительный скаляр его направление не меняется, модуль же нового вектора возрастает в *k* раз:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{k^2 a_x^2 + k^2 a_y^2 + k^2 a_z^2} = \\ &= k \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = ka. \end{aligned}$$

4. Частным от деления вектора **a** на скаляр  $k \neq 0$  является новый вектор **b**, проекции которого в *k* раз меньше соответствующих проекций вектора **a**. Итак, из определения следует, что

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}}{k},$$

$$\text{если } b_x = \frac{a_x}{k}, \quad b_y = \frac{a_y}{k}, \quad b_z = \frac{a_z}{k}.$$

Предоставляем читателю самостоятельно показать, что при делении вектора на положительный скаляр его направление не меняется, модуль же уменьшается в *k* раз.

5. Скалярным произведением двух векторов **a** и **b** называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha. \quad (3.11)$$

Поскольку косинус — четная функция, то значение скалярного произведения не зависит от того, в каком направлении отсчитывается угол  $\alpha$  — от вектора **a** к вектору **b** или наоборот.

Очевидно также, что скалярное произведение двух векторов коммутативно:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

6. *Векторным произведением* двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется вектор  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , перпендикулярный плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и образующий с ними правовинтовую систему (рис. 3.7 а). Числовое значение вектора  $\mathbf{c}$  равно произведению модулей сомножителей на синус угла  $\alpha$  между ними:

$$c = ab \sin \alpha. \quad (3.12)$$

Угол  $\alpha$  отсчитывается по кратчайшему направлению от первого сомножителя ко второму. Поскольку синус — нечетная функция,

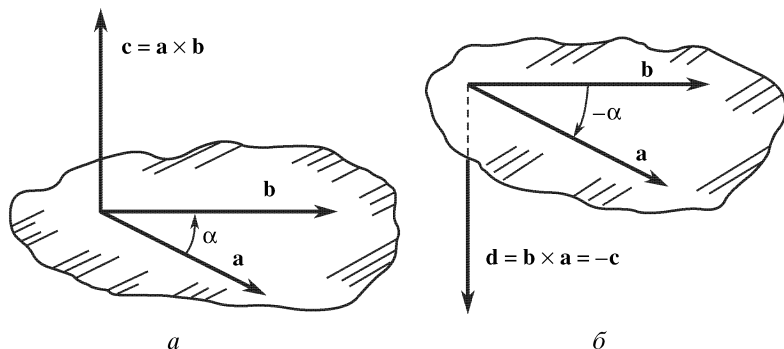


Рис. 3.7

а при изменении порядка сомножителей знак угла меняется, то при этом меняется и знак векторного произведения. Итак, векторное произведение не коммутативно (рис. 3.7 б):

$$\mathbf{d} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{c}.$$

### § 3.4. Разложение вектора на два слагаемых

1. Разложить вектор  $\mathbf{a}$  на два слагаемых — значит найти такие два вектора  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , чтобы  $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ . В этом случае  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{a}$  образуют *замкнутый треугольник* (правило многоугольника).

Эта задача является неопределенной: на отрезке длиной  $a$  можно построить бесчисленное множество треугольников, две стороны которых являются модулями искомых векторов (рис. 3.8). Задача станет определенной, если будут заданы некоторые дополнительные условия.

2. На практике часто встречается задача о разложении данного вектора  $\mathbf{a}$  на два слагаемых вектора, направления которых

параллельны некоторым прямым. Эта задача является вполне определенной.

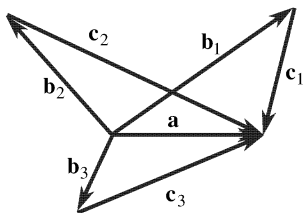


Рис. 3.8

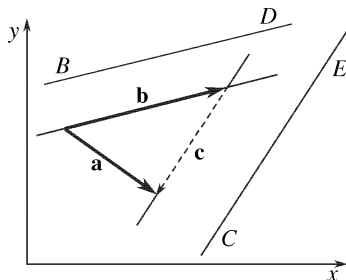


Рис. 3.9

Через концы отрезка **a** проведем две прямые линии, параллельные заданным прямым *BD* и *CE*, определяющим направление векторов **b** и **c** (рис. 3.9). В получившемся треугольнике строим два вектора так, что начало первого совпадает с началом вектора **a**, а его конец — с найденной вершиной треугольника; начало же второго вектора совпадает с вершиной треугольника, а конец — с концом вектора **a**. Это и будут искомые векторы **b** и **c**. Действительно, они направлены параллельно заданным прямым, а их сумма, по правилу многоугольника, равна первоначальному вектору:  $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$ .

### § 3.5. Скорость — вектор

1. Пусть материальная точка движется по прямолинейной траектории, не совпадающей с осями координат. В момент времени  $t_1$  положение материальной точки определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}_1$ , в момент  $t_2$  — радиусом-вектором  $\mathbf{r}_2$  (рис. 3.10).

Определим вектор перемещения:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (3.13)$$

Тогда и средняя скорость, очевидно, является вектором:

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1}. \quad (3.14)$$

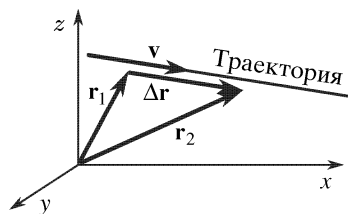


Рис. 3.10

В самом деле, при делении вектора  $\Delta \mathbf{r}$  на скаляр  $\Delta t$  получается новый вектор, направление которого совпадает с направлением перемещения. Следовательно, векторы скорости и перемещения имеют одинаковые направления.

Мгновенная скорость прямолинейно движущейся точки

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) \quad (3.15)$$

также является вектором, совпадающим по направлению с вектором перемещения.

Итак, *скорость прямолинейно движущейся точки есть вектор, направленный вдоль траектории.*

2. При движении материальной точки по криволинейной траектории мы сохраним определения средней и мгновенной скорости (3.13) и (3.14). В этом случае векторы перемещения и средней скорости направлены по хорде, соединяющей две точки траектории, соответствующие положению материальной точки в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  (рис. 3.11). В случае, когда  $\Delta t \rightarrow 0$ , направление хорды стремится к направлению касательной. В пределе бесконечно малый вектор перемещения и вектор мгновенной скорости совпадут с направлением касательной.

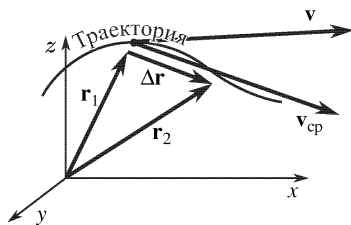


Рис. 3.11

Итак, *при движении материальной точки по криволинейной траектории вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории.*

3. Проекция вектора перемещения:

$$\Delta r_x = x_2 - x_1 = \Delta x, \quad \Delta r_y = y_2 - y_1 = \Delta y, \quad \Delta r_z = z_2 - z_1 = \Delta z.$$

Отсюда — соответствующие проекции вектора мгновенной скорости:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t), \quad v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = y'(t),$$

$$v_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} = z'(t). \quad (3.16)$$

Модуль мгновенной скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (3.17)$$

### § 3.6. Сложение скоростей

1. Поскольку в ньютоновской механике скорость является вектором, то операция сложения скоростей сводится к сложению соответствующих проекций скорости. Следовательно, ско-



рости складываются по правилу многоугольника (или параллелограмма).

Так, пусть человек движется по платформе со скоростью  $\mathbf{u}$ , составляющей угол  $\alpha$  с одной из сторон платформы. Сама же платформа движется со скоростью  $\mathbf{v}$  относительно Земли (рис. 3.12). Найдем модуль и направление скорости человека  $\mathbf{w}$  относительно

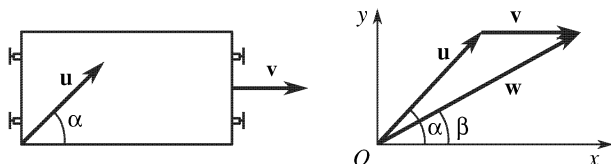


Рис. 3.12

Задачу можно решить так. Проекции вектора  $\mathbf{u}$ :

$$u_x = u \cos \alpha, \quad u_y = u \sin \alpha,$$

соответствующие проекции вектора  $\mathbf{v}$ :

$$v_x = v, \quad v_y = 0,$$

отсюда

$$w_x = u_x + v_x = u \cos \alpha + v, \quad w_y = u_y + v_y = u \sin \alpha.$$

Модуль скорости человека относительно Земли:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{u^2 \cos^2 \alpha + 2uv \cos \alpha + v^2 + u^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

а ее направление определяется соотношением

$$\sin \beta = \frac{w_y}{w} = \frac{u \sin \alpha}{w}. \quad (3.19)$$

Этот же результат можно получить с помощью теоремы косинусов.

2. Движение человека относительно платформы называется *относительным*, движение платформы относительно Земли — *переносным*, а движение человека относительно Земли — *сложным* движением.

Итак, в ньютоновской механике *скорость сложного движения равна векторной сумме скоростей относительного и переносного движений*:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}. \quad (3.20)$$

Выражение (3.20) представляет собой *классический закон сложения скоростей в векторном виде*.

В теории относительности, как будет показано в § 12.5, скорости складываются по более сложным правилам, и выражением (3.20) там пользоваться нельзя.

## Глава 4 УСКОРЕНИЕ

### § 4.1. Среднее и мгновенное ускорение

1. *Средним ускорением* за данный промежуток времени называется физическая величина, численно равная отношению изменения скорости к промежутку времени.

Пусть в момент времени  $t_1$  материальная точка имела мгновенную скорость  $\mathbf{v}_1$ , а в момент  $t_2$  — скорость  $\mathbf{v}_2$ . Тогда, согласно определению,

$$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

Из определения очевидно, что ускорение является вектором. Направление вектора ускорения зависит от характера движения материальной точки. Это будет дальше рассмотрено подробнее.

*Мгновенным ускорением* называется физическая величина, численно равная пределу, к которому стремится среднее ускорение за бесконечно малый промежуток времени, т. е. производная от вектора скорости по времени:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}'(t). \quad (4.2)$$

2. Единицей ускорения  $[a] = [v]/[t]$  в Международной системе единиц (СИ) служит метр на секунду в квадрате ( $\text{м/с}^2$ ).

### § 4.2. Прямолинейное переменное движение

1. Если материальная точка движется по прямолинейной траектории, то векторы скорости и ускорения направлены вдоль этой же прямой, меняется лишь модуль скорости. Среднее и мгновенное ускорение вычисляются так:

$$a_{\text{ср}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t). \quad (4.4)$$

2. Переменное движение называется *ускоренным*, если скорость материальной точки все время возрастает по модулю, т. е.

для любого  $t_2 > t_1$  справедливо условию  $v_2 > v_1$ . Примером может служить движение тяжелого шарика, свободно падающего с небольшой высоты.

Соответственно *замедленным* называется движение точки, скорость которой все время убывает по модулю: для любого  $t_2 > t_1$  справедливо условие  $v_2 < v_1$ . Примером может служить движение тяжелого шарика, брошенного вертикально вверх (до остановки).

Из определений (4.3) и (4.4) вытекает, что в случае ускоренного движения материальной точки ускорение выражается положительным числом, в случае замедленного движения — отрицательным. Это означает, что в первом случае векторы скорости и ускорения совпадают по направлению, во втором же направление ускорения противоположно направлению скорости.

### § 4.3. Прямолинейное равнопеременное движение

1. Движение материальной точки называется *равнопеременным*, если его мгновенная скорость является линейной функцией времени:

$$v = v_0 + at, \quad (4.5)$$

где  $v_0$  и  $a$  — постоянные величины. Заметим, что в § 4.3–4.5 величины  $v$ ,  $v_0$  и  $a$  суть не модули, а проекции скорости и ускорения на направление траектории. Поэтому данные величины могут иметь как положительное, так и отрицательное значения.

Здесь  $v_0$  имеет смысл *начальной скорости*. Действительно, при  $t = 0$  скорость  $v = v_0$ , где под  $t = 0$  понимается момент времени, когда началось наблюдение за движением материальной точки. Этот момент, вообще говоря, не совпадает с моментом начала движения, который часто вообще неизвестен (см. § 1.4). Вместе с тем не исключен случай, когда моменты начала наблюдения и начала движения совпадут (например, если включить секундомер в тот момент, когда мы выпускаем камень из рук и он начинает падать). В этом частном случае  $v_0 = 0$  и  $v = at$ .

2. Выясним смысл  $a$  в выражении (4.5). Дифференцируя (4.5) и учитывая, что  $v_0$  и  $a$  — постоянные величины, получим

$$v'(t) = a.$$

Итак, в случае равнопеременного движения величина  $a$ , входящая в выражение (4.5), есть мгновенное ускорение.

Это позволяет по-новому определить понятие равнопеременного движения. *Равнопеременным* называется движение с постоянным ускорением.

### § 4.4. График скорости при равнопеременном движении

Чтобы построить график скорости, отложим на оси абсцисс мгновенные значения времени, на оси ординат — соответствующие им значения мгновенной скорости. Линия, соединяющая полученные точки, и является *графиком* скорости.

Графиком скорости в случае равнопеременного движения является прямая, отсекающая на оси ординат значение начальной скорости (рис. 4.1). Тангенс угла наклона графика численно равен ускорению:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_2 - v_1}{t_1 - t_2} = a.$$

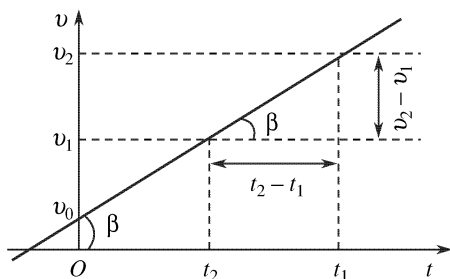


Рис. 4.1

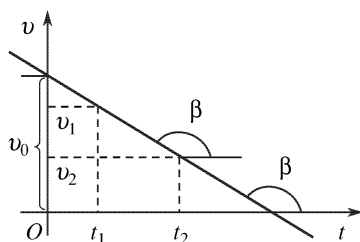


Рис. 4.2

В случае ускоренного движения график скорости образует с осью абсцисс острый угол (рис. 4.1), а в случае замедленного движения — тупой (рис. 4.2).

### § 4.5. Графическое вычисление перемещения

1. Соотношение между перемещением и пройденным путем было рассмотрено в § 1.6 на примере точки, движущейся вдоль оси абсцисс. Это соотношение справедливо и в том случае, когда точка движется по произвольной траектории.

На графике скорости равномерного движения (рис. 4.3) произведение  $vt$  есть площадь заштрихованного прямоугольника. Следовательно, перемещение  $l = l_2 - l_1 = v(t_2 - t_1) = vt$  численно равно площади этого прямоугольника (при соответствующем выборе масштаба).

Этот вывод можно обобщить на случай произвольного переменного движения. Действительно, пусть скорость материальной точки меняется по произвольному закону  $v = f(t)$ ; график этой функции изображен на рис. 4.4.

Разобьем промежуток времени  $t = t_2 - t_1$  на несколько частей и будем считать, что в течение малого промежутка времени  $\Delta t$  скорость не меняется, а затем скачком принимает новое значение.

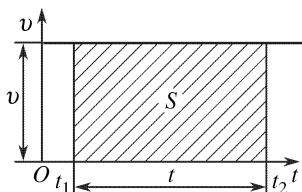


Рис. 4.3

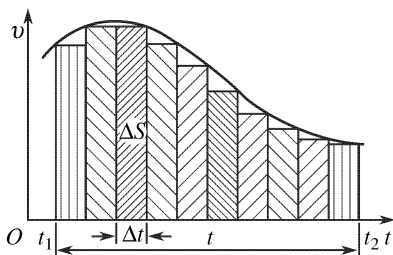


Рис. 4.4

Это «скачкообразное» движение с какой-то степенью точности изображает истинное движение, при котором скорость изменялась не скачками, а плавно, как изображено на графике. Перемещение  $\Delta l$  в течение малого промежутка времени  $\Delta t$  численно равно площади заштрихованной полоски, поскольку в течение этого времени движение рассматривалось как равномерное. Перемещение же за время  $t$  *приблизленно* равно площади ступенчатой фигуры (конечно, речь идет о численном равенстве). Чем меньше будут промежутки  $\Delta t$ , тем точнее «скачкообразное» движение изображает истинное переменное движение. Точный результат получится, если мы перейдем к пределу при условии  $\Delta t \rightarrow 0$ .

2. На графике скорости *перемещение при произвольном переменном движении материальной точки численно равно площади криволинейной трапеции*, ограниченной снизу осью абсцисс, справа и слева — значениями мгновенной скорости в моменты  $t_1$  и  $t_2$  и сверху — графиком скорости. Заметим, что вычисление такого рода площадей является предметом раздела математики, который называется интегральным исчислением. Итак, перемещение

$$l = l_2 - l_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_0^t v dt. \quad (4.6)$$

#### § 4.6. Перемещение и средняя скорость при равнопеременном движении

1. Пользуясь выводом предыдущего параграфа, легко вычислить перемещение при равнопеременном движении материальной точки. Действительно, здесь скорость — линейная функция времени, график скорости — прямая линия, и искомая площадь

трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту (см. рис. 4.1). Отсюда следует, что при  $t_1 = 0$  и  $t_2 = t$  перемещение можно вычислить по формуле

$$l - l_0 = \frac{v_0 + v}{2} t. \quad (4.7)$$

Подставив значение  $v = v_0 + at$ , получим

$$l = l_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (4.8)$$

Таким образом, *координата материальной точки, совершающей равнопеременное движение, является квадратичной функцией времени*. Уравнение (4.8) и есть искомый закон движения. График пройденного пути является параболой. На рис. 4.5 изображен график простейшего случая движения, когда

$$l_0 = 0, \quad v_0 = 0 \quad \text{и} \quad l = \frac{at^2}{2}.$$

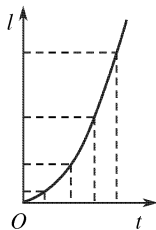


Рис. 4.5

Нетрудно убедиться, что рассмотренные в § 1.5 переменные движения являются равнопеременными движениями.

2. Воспользовавшись определением средней скорости (3.13), легко показать, что *абсолютная величина средней скорости при равнопеременном движении материальной точки есть полусумма начальной и конечной скорости*:

$$v_{\text{cp}} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (4.9)$$

Действительно, по определению

$$v_{\text{cp}} = \frac{l_2 - l_1}{t_2 - t_1}. \quad (4.10)$$

Подставив значения  $t_2$  и  $t_1$  и проделав несложные преобразования, имеем

$$\begin{aligned} v_{\text{cp}} &= \frac{l_0 + v_0 t_2 + \frac{at_2^2}{2} - \left( l_0 + v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \right)}{t_2 - t_1} = \frac{2v_0 + at_1 + at_2}{2} = \\ &= \frac{(v_0 + at_1) + (v_0 + at_2)}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \end{aligned}$$

Заметим, что этот вывод применим только для равнопеременного движения. В общем случае переменного движения он несправедлив. Так, если автобус трогается от остановки и тормозит на следующей остановке, то  $v_1 = v_2 = 0$ , но средняя скорость нулю не равна.

### § 4.7. Равномерное движение материальной точки по окружности

1. Пусть материальная точка движется по окружности радиуса  $r$ . За время  $\Delta t$  точка перемещается по дуге  $\Delta l = r\Delta\alpha$ , где  $\Delta\alpha$  — угол поворота радиуса (рис. 4.6).

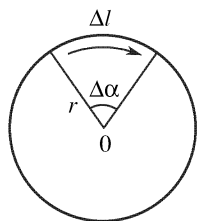


Рис. 4.6

При движении материальной точки по окружности величина

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t) \quad (4.11)$$

называется *угловой скоростью точки*.

Единица угловой скорости — радиан в секунду (рад/с). Размерность угловой скорости:

$$[\omega] = \frac{[\alpha]}{[t]}.$$

Из определения скорости материальной точки имеем

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{r d\alpha}{dt} = r\omega. \quad (4.12)$$

2. Время  $T$ , в течение которого точка совершает полный оборот по окружности, называется *периодом*. Величина  $\nu$ , обратная периоду, показывает, сколько оборотов совершает точка в единицу времени. Она называется *частотой*:

$$\nu = 1/T. \quad (4.13)$$

3. В течение промежутка времени, равного периоду, точка идет полную окружность, т. е. при  $\Delta t = T$  дуга  $\Delta l = 2\pi r$ . Отсюда следует, что

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu. \quad (4.14)$$

Сравнив (4.12) и (4.14), получим

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (4.15)$$

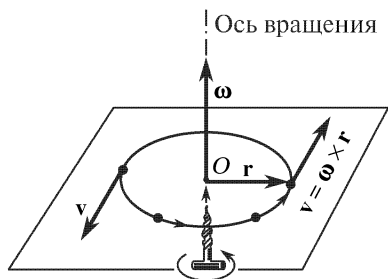


Рис. 4.7

4. Угловую скорость принято рассматривать как вектор, направленный вдоль оси вращения (рис. 4.7). Направление вектора

угловой скорости определяется по правилу винта (правилу буравчика): если головку винта с правой резьбой вращать по направлению движения точки по окружности, то поступательное движение винта покажет направление вектора угловой скорости.

В этих обозначениях вектор скорости равен векторному произведению вектора угловой скорости на радиус-вектор материальной точки:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (4.16)$$

### § 4.8. Ускорение при равномерном движении материальной точки по окружности

1. При равномерном движении материальной точки по окружности модуль скорости не меняется:  $|\mathbf{v}| = v = \text{const}$ . Однако это вовсе не значит, что точка движется без ускорения. Действительно, здесь непрерывно меняется *направление* скорости, как вектора, направленного по касательной к траектории. А это и означает, что точка движется с ускорением.

2. Вектор изменения скорости

$$\Delta v_n = v' - v$$

построим (рис. 4.8) согласно правилу, изложенному в п. 2 § 3.4.

При малом  $\Delta t$  дуга  $AB$  мало отличается от хорды  $AB$ . Из подобия треугольников  $AOB$  и  $BMN$  следует

$$\frac{\Delta v_n}{v} = \frac{\Delta l}{r} = \Delta\alpha.$$

Отсюда модуль среднего ускорения

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Модуль мгновенного ускорения

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{v}{r} \frac{\Delta l}{\Delta t} \right).$$

Постоянный множитель  $v/r$  выносим за знак предела; тогда

$$a = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{v}{r} v = \frac{v^2}{r}. \quad (4.17)$$

3. Нам осталось определить направление вектора мгновенного ускорения. Вектор среднего ускорения составляет с вектором скорости угол  $\beta = (\pi + \Delta\alpha)/2$ . При  $\Delta t \rightarrow 0$  угол  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ . Следовательно, вектор мгновенного ускорения составит с вектором скорости угол

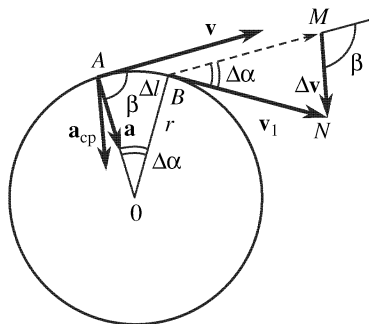


Рис. 4.8



$$\varphi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi + \Delta\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.18)$$

Итак, равномерно перемещающаяся по окружности материальная точка движется с ускорением, направленным перпендикулярно вектору скорости, т. е. по радиусу к центру. Поэтому это ускорение называется *нормальным* или *центростремительным* и обозначается символом  $a_n$ .

Согласно (4.12)  $v = \omega r$ . Подставив в (4.17), получим

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \quad (4.19)$$

## Глава 5

### СИЛА

#### § 5.1. Сила — мера взаимодействия тел

1. Опыт показывает, что все тела в природе так или иначе взаимодействуют друг с другом. Так, например, атмосферный воздух давит на поверхность Земли и все находящиеся на ней предметы; взаимодействие между молекулами воды и поверхностью тела купальщика приводит к тому, что к телу прилипают капли жидкости; сильное взаимодействие между составными частями атомного ядра (протонами и нейтронами) является причиной того, что атомные ядра чрезвычайно трудно разрушить.

*Мерой взаимодействия тел или частиц, из которых состоят тела, является сила.*

Понятие силы первоначально возникло из оценки мышечного напряжения. Чтобы поднять камень, сдвинуть лодку, натянуть тетиву лука и т. д., требуется некоторое напряжение мышц, различное в разных случаях. Степень этого напряжения и оценивалась силой. Можно привести примеры ряда выражений, где и сейчас слово «сила» применяется в своем первоначальном смысле: «сильный человек», «сделать отчаянное усилие», «у меня силы на исходе» и т. д.

Затем люди убедились, что понятие силы может служить и для характеристики воздействия одних тел на другие. Так появились понятия «сильный ветер», «сильное течение», «сильный удар» как характеристики внешних воздействий, равносильных мышечному усилию.

В дальнейшем термин «сила» стал трактоваться весьма широко. Возникли выражения «сила воли», «сила духа», «сильнее

смерти» и тому подобные. Такое расширение понятия о силе служило и служит причиной ряда недоразумений, и его следует избегать. К сожалению, до сих пор пользуются такими, например, терминами, как «сила света», «электродвижущая сила», «лошадиная сила» и т. д., хотя эти понятия ничего общего с силой не имеют.

Термин «сила» мы будем в механике применять только в прямом его смысле — как меру взаимодействия тел.

2. В современной физике различают следующие типы взаимодействий:

а) гравитационное, возникающее между телами за счет всемирного тяготения;

б) электромагнитное, возникающее между неподвижными или движущимися заряженными частицами или телами;

в) сильное, или ядерное, характеризующее взаимодействие элементарных частиц, например тех, которые входят в состав атомного ядра;

г) слабое взаимодействие, имеющее своим результатом распад некоторых элементарных частиц.

В механике рассматриваются силы, возникающие при непосредственном контакте тел, — силы трения и силы упругости. Кроме того, в механике изучаются силы тяготения.

3. Результатом взаимодействия тел является либо деформация (изменение размеров или формы тела), либо ускорение (изменение модуля или направления скорости). Конечно, не исключено, что одновременно могут возникнуть и деформация, и ускорение.

Каждое из этих проявлений силы может быть использовано для ее измерения. Однако измерить степень деформации часто значительно проще, чем ускорение. Поэтому основной деталью прибора для измерения сил — *динамометра* (от греческого *dynamis* — сила) — является пружина, степень деформации которой зависит от значения измеряемой силы (рис. 5.1).

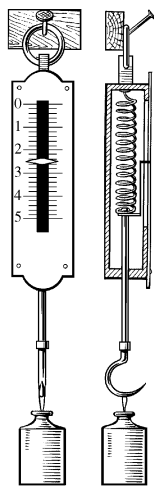


Рис. 5.1

## § 5.2. Упругие и пластические деформации

1. Деформация тела называется *упругой*, если после снятия нагрузки полностью восстанавливаются размеры и форма тела. *Пластической* называется деформация, в результате которой возникающие изменения размеров и формы тела не исчезают после

прекращения действия силы. После пластической деформации тело сохраняет (частично или полностью) вновь приобретенную форму и измененные размеры.

Мосты, балки, стены, детали станков при действии на них сил должны работать в области упругих деформаций — это обеспечит длительную сохранность и надежность конструкции. Наоборот, при механической обработке материала (ковка, штамповка и т. п.) его подвергают пластической деформации с таким расчетом, чтобы деталь, полученная в результате обработки материала, имела нужные размеры и форму и сохранила их после снятия усилий.

2. Характер деформации зависит от величины и длительности действия нагрузки, а также от материала, из которого изготовлено тело, и состояния этого материала (температура, предшествовавшая обработке, и т. п.).

Так, если изогнуть стальную пластинку и тут же отпустить ее, то она примет первоначальную форму; ясно, что здесь мы имеем дело с упругой деформацией. Однако если пластинку закрепить в изогнутом состоянии на длительное время, то после снятия внешних усилий она уже полностью не выпрямится. Значительное увеличение длительности внешнего воздействия превращает упругую деформацию в пластическую.

На характер деформации очень сильно влияет температура. Стальная пластинка, нагретая до температуры желтого каления, становится пластичной при сравнительно небольших внешних усилиях, которые при комнатных температурах способны вызывать в этой пластинке лишь упругие деформации. Наоборот, свинец, весьма пластичный при комнатной температуре, становится упругим при низких температурах. Свинцовый колокольчик, охлажденный жидким воздухом, издает чистый звон, а это значит, что в нем происходят упругие деформации. Увеличение пластичности материалов с ростом температуры используется в технике при обработке металлов.

Таким образом, нет резких границ между упругими и пластическими деформациями. Однако, как показывает опыт, небольшие и кратковременные деформации могут с достаточной степенью точности рассматриваться как упругие.

3. Из практики известно, что чем большую деформацию мы желаем создать, тем большее усилие нужно приложить к деформируемому телу. Следовательно, по величине деформации можно судить о величине силы. Анализ ряда экспериментов показывает, что *абсолютная величина упругой деформации пропорциональна приложенной силе*. Это утверждение составляет содержание за-

кона Гука:

$$F = k(l - l_0) = k \Delta l, \quad (5.1)$$

где  $F$  — приложенная внешняя сила,  $l_0$  — первоначальная длина тела,  $l$  — длина деформированного тела и  $k$  — коэффициент пропорциональности, называемый *жесткостью*. (Раньше он назывался коэффициентом упругости.)

Из закона Гука следует, что шкала динамометра должна быть равномерной (см. рис. 5.1). Это существенно облегчает его градуировку.

4. В справедливости закона Гука позволяет убедиться следующий опыт. Подвесим планку с грузом на одной пружине и измерим деформацию  $\Delta l$  (рис. 5.2 а). Заменим теперь эту пружину двумя точно такими же (рис. 5.2 б). Мы увидим, что хотя на систему действует тот же груз с той же силой  $\mathbf{F}$ , растяжение каждой из пружин окажется вдвое меньше:  $\Delta l_1 = \Delta l/2$ . Но из соображений симметрии следует, что на каждую из пружин действует сила  $F_1 = F/2$ .

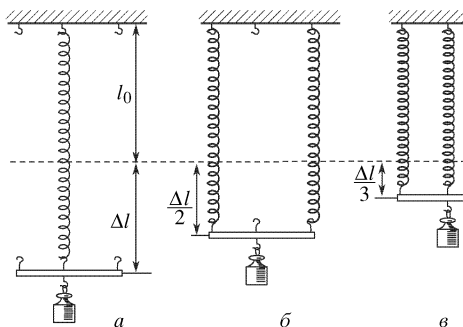


Рис. 5.2

Проделав такой же опыт с тремя пружинами (рис. 5.2 в), мы обнаружим, что  $\Delta l_2 = \Delta l/3$ . Но из симметрии следует, что в этом случае и  $F_2 = F/3$ . Итак,

$$\frac{F}{\Delta l} = \frac{F_1}{\Delta l_1} = \frac{F_2}{\Delta l_2} = k,$$

где  $k$  — постоянная величина для данной пружины. А это и есть закон Гука.

### § 5.3. Сила — вектор

1. Всякая сила имеет определенное направление, причем результат действия силы зависит не только от ее модуля, но и от направления. Например, сила трения чаще всего направлена противоположно вектору скорости. Если под действием некоторой силы пружина растягивается, то при изменении направления силы пружина сожмется. Ударяя по мячу, футболист сообщает ему ускорение, направленное в ту же сторону, что и сила, с которой нога футболиста действует на мяч. То, что сила является вектором, видно и из закона Гука, ибо жесткость есть скалярная

величина, удлинение же  $\Delta l = l - l_0$  — вектор, а при умножении вектора на скаляр получается вектор (см. § 3.3).

2. Запишем закон Гука в векторной форме. При этом следует учитывать направление векторов перемещения и силы. Пусть внешнее тело, например рука, растягивает пружину (рис. 5.3).

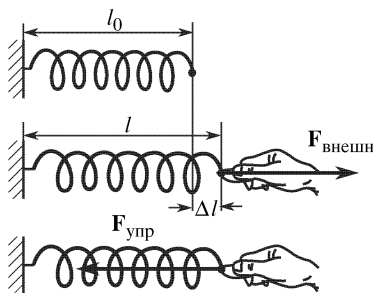


Рис. 5.3

Сила, с которой внешнее тело действует на пружину, называется *внешней силой*. Направление внешней силы совпадает с направлением перемещения, следовательно, оба вектора имеют одинаковое направление:

$$\mathbf{F}_{\text{внешн}} = k \Delta \mathbf{l}. \quad (5.2)$$

Опыт показывает, что деформированная пружина действует на руку с силой, равной внешней силе по величине, но противоположной по направлению

(см. рис. 5.3). Сила, с которой деформированная пружина действует на внешнее тело, называется *силой упругости*. Поскольку направление силы упругости противоположно вектору удлинения, то

$$\mathbf{F}_{\text{упр}} = -k \Delta \mathbf{l}. \quad (5.3)$$

3. Анализируя различные виды взаимодействия тел, Ньютон пришел к выводу, что всегда *два тела взаимодействуют с силами, равными по модулю, но противоположными по направлению*:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \quad (5.4)$$

где  $\mathbf{F}_{12}$  — сила, с которой первое тело действует на второе, а  $\mathbf{F}_{21}$  — сила, с которой второе тело действует на первое. Это утверждение называется *третьим законом Ньютона*.

В качестве примера можно рассмотреть опыт по взаимодействию магнита с куском железа. Динамометры, прикрепленные к обоим телам, регистрируют одинаковые по модулю, но противоположные по направлению силы взаимодействия (рис. 5.4).

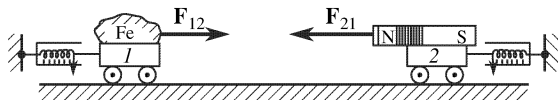


Рис. 5.4

Примеры на применение третьего закона Ньютона будут рассмотрены в последующих главах.

### § 5.4. Сложение и разложение сил, приложенных к материальной точке

1. Если к материальной точке приложено несколько сил, то их можно заменить *равнодействующей* силой. *Равнодействующая* является *векторной суммой* слагаемых сил, и ее можно найти по правилу многоугольника (рис. 5.5).

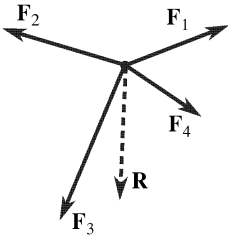


Рис. 5.5

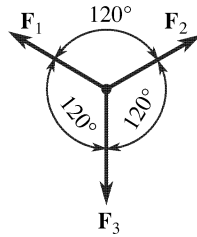
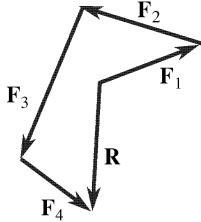
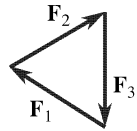


Рис. 5.6



Если многоугольник сил окажется замкнутым, то это означает, что равнодействующая данной системы сил равна нулю. Такая система сил называется *уравновешенной*. Примером может служить система из трех равных по абсолютной величине сил, расположенных в одной плоскости под углами  $120^\circ$  друг к другу (рис. 5.6).

Систему сил, приложенных к одной точке, можно уравновесить, приложив к ней *уравновешивающую* силу. Уравновешивающая сила по модулю равна равнодействующей, но имеет противоположное направление.

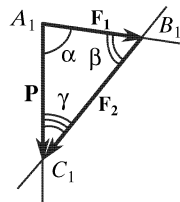
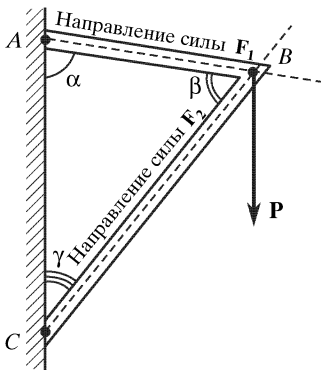


Рис. 5.7

2. Силу, как и любой вектор, можно разложить на две составляющие (см. § 3.4). На практике часто встречается случай разложения силы на две составляющие с заданными направлениями.

Так, пусть на кронштейн действует некоторая сила  $\mathbf{P}$  (рис. 5.7). Требуется найти усилия в стержнях. В этом случае искомые силы направлены вдоль стержней. Строим треугольник  $A_1B_1C_1$  так, чтобы его стороны были параллельны силе  $\mathbf{P}$  и стержням, а длина стороны  $A_1C_1$  равна  $P$  (в избранном масштабе). Тогда вектор  $\mathbf{F}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$  является силой, растягивающей стержень  $AB$ , а вектор  $\mathbf{F}_2 = \overrightarrow{B_1C_1}$  — силой, сжимающей стержень  $BC$ . В избранном масштабе силы  $F_1$  и  $F_2$  можно вычислить из пропорции

$$\frac{F_1}{AB} = \frac{F_2}{BC} = \frac{P}{AC}.$$

## Глава 6

### СИЛА ТЯЖЕСТИ, ВЕС И МАССА

#### § 6.1. Сила тяжести. Вес

1. Из повседневного опыта известно, что все тела падают на Землю, если этому движению не препятствуют другие тела. Что же является причиной падения?

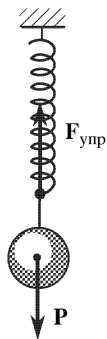


Рис. 6.1

Проведем такой опыт. Подвешиваем ниткой тело к пружине и отпустим ее (рис. 6.1). Тело продвинется слегка вниз, растянет пружину и затем остановится. Деформированная пружина действует на тело с некоторой силой  $\mathbf{F}_{\text{упр}}$ , направленной вертикально вверх, однако тело остается в равновесии. А это возможно лишь в том случае, если кроме силы упругости на тело действует еще одна сила  $\mathbf{P}$ , равная ей по абсолютной величине, но направленная вертикально вниз, к Земле.

Если пережечь нить, связывающую тело с пружиной, то взаимодействие между ними исчезнет. Пружина вновь примет первоначальную форму и размеры. Взаимодействие же между Землей и телом сохраняется — Земля продолжает притягивать тело с силой  $\mathbf{P}$ . Под действием этой силы тело выходит из состояния покоя и начинает падать на Землю.

*Сила, с которой Земля притягивает к себе тела, называется силой тяжести.*

2. Сила тяжести действует на все тела, расположенные вблизи Земли. И если не все они падают на Землю, то это происходит оттого, что их движение ограничивается другими телами — опорой, нитью, пружиной, стенкой и т. п.

Тела, которые ограничивают движение других тел, называются *связями*. Происхождение этого термина очевидно: эти тела связывают движение данного тела, препятствуя его свободному перемещению. Так, поверхность стола является связью для всех предметов, лежащих на нем; пол служит связью для стола и т. д.

Под действием силы тяжести связи деформируются, и реакция деформированной связи по третьему закону Ньютона уравновешивает силу тяжести. Но если деформацию пружины обнаружить сравнительно легко, то для наблюдения деформации других связей нередко необходимы приборы, позволяющие регистрировать очень малые перемещения.

3. *Весом называется сила, с которой тело действует на связь (давит на горизонтальную опору или растягивает нить) вследствие притяжения этого тела к Земле.*

Как будет показано в § 7.2, вес тела равен силе тяжести, если тело и связь покоятся относительно Земли (или движутся относительно нее прямолинейно и равномерно).

Реакцией деформированной связи можно воспользоваться для измерения веса. Для этой цели применяется динамометр (пружинные весы), градуированный в каких-либо единицах силы.

Впрочем, можно поступить и иначе. Подберем *эталонную гирю* — тело, вес которого равен единице силы, и изготовим гири в несколько раз больше или меньше эталона. Эта система гирь называется *разновесом*.

Поместим на одну чашку равноплечих рычажных весов тело, вес которого мы желаем определить, а на другую чашку — гири такой величины, чтобы весы уравнились (рис. 6.2). Поскольку для равновесия равноплечих рычажных весов необходимо, чтобы на обе чашки

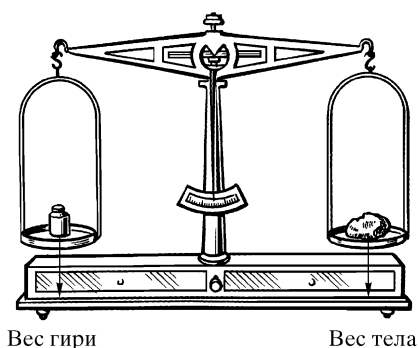


Рис. 6.2



действовали равные силы, мы делаем вывод, что вес испытуемого тела равен весу гирь.

Итак, *вес можно определить на пружинных или рычажных весах.*

## § 6.2. Свободное падение

1. *Свободным падением* называется движение тел под действием одной только силы тяжести. Для того чтобы исследовать свободное падение тел, нужно освободить их от действия всех посторонних сил, в частности от сопротивления воздуха.

Легко убедиться, что сопротивление воздуха существенно влияет на характер падения тел. Выпустим из рук камень и кусок ваты. Камень быстро упадет на Землю, вата опускается медленнее. У нас может сложиться представление, что тяжелые тела падают быстрее легких. Однако если вату скатать в плотный шарик, то она значительно быстрее упадет на Землю. Что же изменилось в этом опыте? Уменьшился размер шарика и соответственно сопротивление воздуха. Точно так же скомканный лист бумаги испытывает значительно меньшее сопротивление воздуха и потому падает быстрее, чем такой же плоский лист.

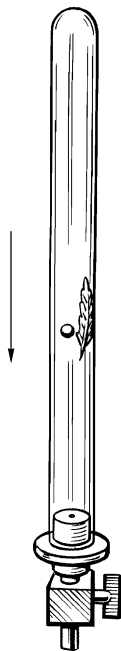


Рис. 6.3

Естественно, возникает вопрос: а как будут падать тела в вакууме, когда сопротивление воздуха исключено? Будут ли они падать с одинаковым ускорением? Рассмотрим следующий опыт (рис. 6.3). Возьмем стеклянную трубку длиной более метра, запаянную с одной стороны, а с другой стороны закрытую крышкой с патрубком. Внутри трубки находятся кусочек свинца и перышко. Если резко опрокинуть трубку, то свинец падает вниз быстро, а перышко падает очень медленно. Присоединим трубку к воздушному насосу и выкачаем из нее воздух. Вновь перевернув трубку, убедимся, что оба тела падают одинаково — перышко несколько не отстает от свинца!

Таким образом, *все тела, независимо от их веса, свободно падают с одинаковым ускорением.*

2. Впервые к такой мысли пришел Галилей в начале XVII в. До этого времени в науке господствовали представления Аристотеля о том, что тяжелые тела падают быстрее легких. Чтобы

убедиться в правильности своей точки зрения, Галилей поставил ряд опытов, бросая разные тела со знаменитой Пизанской наклонной башни и измеряя время их падения.

Галилей показал, что свободное падение является равноускоренным движением. Для доказательства этого положения достаточно, например, убедиться, что *расстояние*, пройденное телом при свободном падении, *пропорционально квадрату времени движения* (см. § 4.6). Галилей не имел приборов, позволяющих точно измерять малые промежутки времени. Поэтому он имитировал свободное падение движением тела по наклонной плоскости.

3. В настоящее время можно с помощью электрического секундомера очень точно измерить время падения тела с любой высоты. Пусть небольшой стальной шарик удерживается на некоторой высоте с помощью электромагнита. Специальное реле позволяет разомкнуть ток в цепи электромагнита и одновременно включить электрический секундомер. Шарик, падая вдоль вертикальной линейки, проходит определенное расстояние и в конце пути размыкает цепь секундомера, тем самым останавливая его. Меняя это расстояние и измеряя каждый раз время падения, легко установить закон движения. Сопротивление воздуха можно исключить, поместив всю установку в трубку и выкачав из нее воздух. Впрочем, при падении маленького тяжелого шарика с малой высоты можно пренебречь сопротивлением воздуха (см. § 11.9).

Результаты экспериментов убедительно свидетельствуют о следующем:

- а. *Свободное падение является равноускоренным движением.*
- б. *Все тела под действием силы тяжести падают с одинаковым ускорением  $g$  (от латинского gravitas — тяжесть), называемым ускорением свободного падения.*
- в. *Ускорение свободного падения в разных точках Земли несколько различно.* При не очень точных измерениях этой разницей (которая не превышает 0,6 %) можно пренебречь и считать  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

### § 6.3. Масса тела

1. Опыт показывает, что сила тяжести, действующая на данное тело в разных точках Земли, несколько различна — она меняется в зависимости от географической широты и от высоты над уровнем моря; точно так же меняется и ускорение свободного падения. Однако для любого тела отношение силы тяжести

к ускорению свободного падения является величиной постоянной:

$$\frac{P_1}{g_1} = \frac{P_2}{g_2} = \frac{P_3}{g_3} = \dots = \text{const},$$

и служит, следовательно, некоторой характеристикой данного тела.

*Отношение действующей на тело силы тяжести к ускорению свободного падения называется массой тела:*

$$m = \frac{P}{g}. \quad (6.1)$$

Понятие массы является одним из важнейших в физике. Оно будет неоднократно рассматриваться в дальнейших разделах курса: при изучении законов Ньютона, закона тяготения, в связи с такими важнейшими понятиями, как импульс и энергия. Это позволит значительно углубить и расширить наши представления о массе.

2. Масса является скалярной величиной, а сила тяжести и ускорение свободного падения — это векторы, имеющие одинаковое направление. Соотношение (6.1) лучше записать в векторной форме:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}. \quad (6.2)$$

3. Поскольку ускорение свободного падения для всех тел одно и то же, то из (6.1) следует

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1}{P_2}, \quad (6.3)$$

т. е. *отношение масс двух тел равно отношению их сил тяжести или весов*, ибо здесь вес равен силе тяжести.

На этом основан метод определения масс с помощью рычажных весов. Как уже указывалось, рычажные весы находятся в равновесии, если вес тела равен весу гирь. *Но тогда и масса тела равна массе гирь*. Изготовив эталонную гирю и приняв ее массу за единицу, мы можем на рычажных весах сравнить с ней массу любого другого тела. Следовательно, слово «взвешивание» применяется фактически в двух смыслах: как определение веса и как определение массы.

Итак, *масса тела может быть определена на рычажных весах*.

#### § 6.4. Плотность вещества

Если изготовить из одного и того же вещества тела различных объемов, то и массы их будут различными. Однако, как показывает опыт, отношение масс этих тел к их объемам будет постоянной

величиной:

$$\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2} = \dots = \text{const.}$$

Это отношение служит характеристикой вещества.

*Отношение массы тела к его объему называется плотностью вещества:*

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (6.4)$$

Как будет показано ниже, плотность вещества зависит от его температуры, внешнего давления и агрегатного состояния. Поэтому в справочниках всегда указываются условия, при которых справедливы табличные данные, — без этих указаний они лишены смысла.

### § 6.5. Давление. Архимедова сила

1. Опыт показывает, что одна и та же сила, распределенная на разных площадях, производит различное действие. Так, человек на лыжах свободно движется по рыхлому снегу, в то время как без лыж он проваливается; острый нож режет лучше, чем тупой и т. д.

Пусть к некоторой площадке  $S$  приложена сила  $\mathbf{F}$ , равномерно распределенная по площадке; пусть сила направлена перпендикулярно этой площадке. *Давлением  $p$*  называется отношение модуля силы к значению площади:

$$p = \frac{F}{S}. \quad (6.5)$$

Если же направление силы составляет некоторый угол  $\alpha$  с нормалью к площадке, то давление равно отношению проекции силы на нормаль к значению площади:

$$p = \frac{F_n}{S} = \frac{F \cos \alpha}{S}. \quad (6.6)$$

2. Давление в жидкости или газе удобно сравнивать с давлением вертикального столба некоторой жидкости. Так, например, измеряется давление атмосферы с помощью ртутного барометра или степень разрежения в вакуумной установке (рис. 6.4) с помощью манометра.

Для вычисления давления, которое производит вертикальный столбик жидкости под действием силы тяжести (гидростатическое давление), нужно его вес разделить на площадь основания:

$$p = \frac{P}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho h S g}{S} = \rho h g, \quad (6.9)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $h$  — высота столба,  $g$  — ускорение свободного падения.

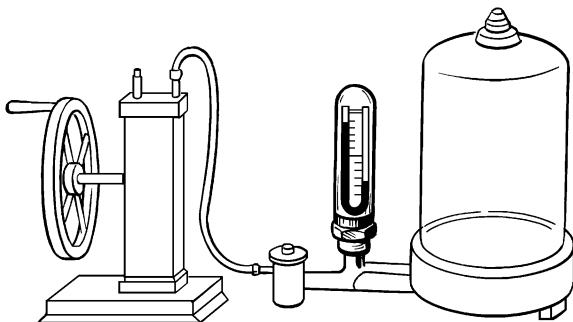


Рис. 6.4

Для измерения малых давлений нередко применяется наклонная манометрическая трубка. Здесь

$$p = \rho g l \sin \alpha, \quad (6.8)$$

где  $\alpha$  — угол между трубкой и горизонтальной плоскостью и  $l$  — длина столба жидкости.

3. Опыт показывает, что в жидкости (например, в воде) тело весит меньше, чем в воздухе. А это означает, что на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила. Значение этой силы нашел великий древнегреческий ученый Архимед примерно за 250 лет до нашей эры.

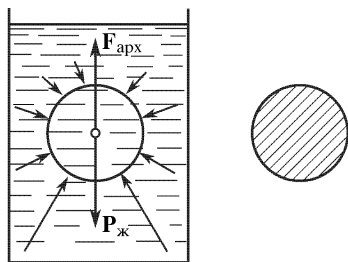


Рис. 6.5

Для вывода закона Архимеда обратимся к рис. 6.5. Мысленно выделим в жидкости объем, который должно занять погруженное в нее тело. На данный объем действуют силы гидростатического давления, изображенные на рисунке маленькими стрелками. Очевидно, что давление снизу, на большей глубине, больше давления сверху (см. § 6.7). Результирующая всех элементарных сил и есть выталкивающая сила  $F_{\text{арх}}$ , действующая на выделенный объем жидкости. Но поскольку жидкость находится в равновесии, то эта сила должна быть равна весу выделенного объема жидкости:

$$F_{\text{арх}} = P_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}} V g. \quad (6.9)$$

Ясно, что если интересующее нас тело поместить в жидкость, то на него будут действовать со стороны окружающей жидкости те же самые гидростатические силы. Итак, *на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненной этим телом* (закон Архимеда).

Не лишним будет напомнить, что архимедова сила возникает лишь в том случае, когда на жидкость действует сила тяжести. В состоянии невесомости (§ 7.3) не возникает гидростатического давления и нет архимедовой силы.

4. В нашем рассуждении существенную роль играл тот факт, что тело со всех сторон окружено жидкостью. Если же тело притерто ко дну сосуда или к его стенке, то равнодействующая сил гидростатического давления будет прижимать тело ко дну или к стенке сосуда.

По этой причине, например, присасываются якоря кораблей к илистому дну. И если якорь находится на большой глубине, то усилия якорной лебедки нередко оказывается недостаточно, чтобы оторвать его от дна. Приходится рубить якорную цепь и оставлять якорь на дне.

Из этих же соображений подводные лодки при погружении избегают ставить на дно. А при подъеме затонувших судов под днищем вымывают ил, чтобы вода охватила судно со всех сторон и помогала его подъему на поверхность.

## Глава 7

# ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ

### § 7.1. Сила и ускорение

1. Из закона инерции следует, что тело само по себе, без взаимодействия с окружающими его телами, не может изменить своей скорости. Всякое изменение модуля или направления скорости движения тела вызывается воздействием на него внешних тел. Это воздействие, как известно, характеризуется силами (см. § 5.1). *Основной закон динамики* (иначе называемый вторым законом Ньютона) *выражает соотношение между силой и изменением скорости взаимодействующих тел*.

Наиболее простой вид основной закон динамики имеет в инерциальных системах отсчета. Случай неинерциальных систем будет рассмотрен ниже (см. гл. 24).

Вначале мы ознакомимся с основным законом динамики при условии, что скорость движения материальной точки относительно выбранной инерциальной системы отсчета значительно меньше скорости света. Далее будет показано, что многие задачи динамики могут быть решены в этом приближении с точностью, достаточной для практики. Более общий релятивистский случай будет рассмотрен ниже (см. гл. 13).

2. Смысл основного закона динамики можно выяснить на основе следующего эксперимента. В вагонетке между двумя стенками заделан твердый и гладкий стержень, по которому с ничтожным трением может перемещаться тело массой  $m$ . К телу прикреплен динамометр, который вторым концом крепится к передней стенке (рис. 7.1). Пусть вагонетка движется относительно инерциальной системы отсчета (например, Земли) с некоторым ускорением  $a$ .

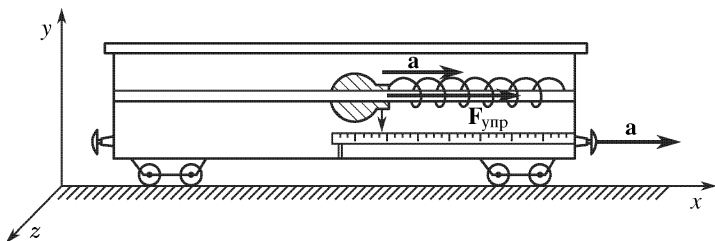


Рис. 7.1

Если тело неподвижно относительно вагонетки, то относительно Земли (инерциальной системы отсчета) оно движется с тем же ускорением  $a$ , что и вагонетка. Опыт показывает, что в этом случае пружина динамометра находится в деформированном состоянии. А это означает, что *пружина действует на тело с некоторой силой, которая и сообщает ему ускорение*. Действительно, если нарушить взаимодействие между пружиной и телом (скажем, пережечь соединяющую их нить), то пружина придет в недеформированное состояние. Тело же будет двигаться относительно Земли равномерно, сохраняя по инерции ту скорость, которую оно приобрело к моменту прекращения взаимодействия.

Проделав опыты с телами разной массы и при разных ускорениях вагонетки, мы убедимся, что степень растяжения пружины пропорциональна массе ускоряемого тела (при неизменном ускорении) и ускорению (при данной массе тела). Кроме того, растяжение пружины не зависит от скорости движения тела и вагонетки. Но по определению (см. § 5.2) сила упругости пропорци-

ональна растяжению пружины, так что по величине растяжения пружины мы можем судить о величине действующей силы.

Результаты эксперимента можно сформулировать так:

а. Если тело движется с ускорением относительно некоторой инерциальной системы отсчета, то на него действует сила.

б. Сила вызывает ускорение, которое пропорционально этой силе и совпадает с ней по направлению; при заданном ускорении сила пропорциональна массе тела, которому она сообщает ускорение.

в. При скоростях, значительно меньших скорости света, эта сила не зависит от скорости движения ускоряемого тела.

3. Аналогичный результат получится при исследовании криволинейного движения материальной точки, что покажет следующий эксперимент. Стержень с грузом и пружиной крепится одним концом к оси центробежной машины и приводится во вращение вокруг этой оси (рис. 7.2). При вращении системы пружина деформируется и действует на тело с силой, которая зависит от массы тела, расстояния от тела до оси вращения и от скорости вращения.

Этот результат легко объяснить. При равномерном движении тела по окружности модуль скорости остается постоянным, направление же вектора скорости все время меняется. А мы уже установили (см. § 4.8), что в этом случае имеется *нормальное*, или *центростремительное*, ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Деформированная пружина и сообщает телу это ускорение.

Проделав опыты с различными телами при разных скоростях их движения и при различных расстояниях от тела до оси вращения, мы убедимся, что при движении на тело действует сила, пропорциональная массе тела и центростремительному ускорению.

4. Обобщая результаты экспериментов, о которых говорилось выше, мы приходим к выводу: *сила равна произведению массы*

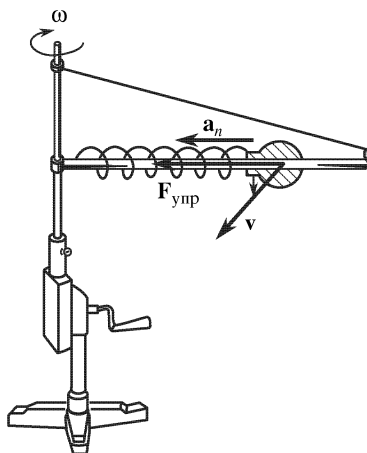


Рис. 7.2



тела на ускорение, которое она сообщает этому телу:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (7.1)$$

Это и есть второй закон Ньютона (или основной закон динамики) для случая, когда скорость движения тела много меньше скорости света в вакууме.

5. Основной закон динамики можно записать и в несколько иной форме, которая часто бывает более удобной. По определению ускорение  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ . Подставив это значение в (7.1) и учитывая, что масса инвариантна, получим

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}. \quad (7.2)$$

*Импульсом* (или количеством движения) называется произведение массы тела на его скорость:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (7.3)$$

Тогда основной закон динамики (7.2) можно сформулировать следующим образом: *сила равна производной импульса по времени*, т. е.

$$\mathbf{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{p}'(t). \quad (7.4)$$

Это и есть наиболее общая формулировка основного закона динамики.

6. Наконец, если на тело действует некоторая совокупность сил, равнодействующая которых равна  $\mathbf{R}$ , то второй закон Ньютона записывается так:

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (7.5)$$

Заметим, что если материальная точка движется по окружности равномерно, то равнодействующая всех сил направлена к центру. Эту равнодействующую иногда называют *центростремительной силой*.

## § 7.2. Применения основного закона динамики

1. С помощью основного закона динамики можно определить силы, действующие на тело, либо характер движения тела по заданным силам. Так, если задан закон движения, то можно найти ускорение, с которым движется тело. Зная же ускорение и массу тела, легко определить действующую силу.

При составлении уравнения движения надо пользоваться следующим правилом:

вначале нужно найти *все* силы, действующие на данную материальную точку (включая силы реакции);

затем следует найти равнодействующую этих сил;

исходя из основного закона динамики, записать, что равнодействующая всех сил равна произведению массы на ускорение.

Составленное *уравнение движения* следует решить относительно неизвестной величины.

2. *Пример 1.* На полу лифта находится человек, масса которого  $m$ . Определить, с какой силой давит человек на пол лифта, если лифт движется:

- а) вертикально вверх с ускорением;
- б) вертикально вверх с замедлением;
- в) вертикально вниз с ускорением;
- г) вертикально вниз с замедлением;
- д) равномерно.

Поскольку человек покоится относительно лифта, то он движется относительно Земли с тем же ускорением, что и лифт. По третьему закону Ньютона нам известно, что пол лифта давит на человека с такой же силой, с какой человек давит на пол, но направления этих сил противоположны. Итак, на человека действуют две силы: сила тяжести  $\mathbf{P}$  и реакция пола  $\mathbf{Q}$ .

Направим ось  $z$  вертикально вверх. Тогда сила реакции является положительным вектором, сила тяжести — отрицательным, знак же вектора ускорения зависит от характера движения (рис. 7.3). В случае *а* вектор ускорения направлен вертикально

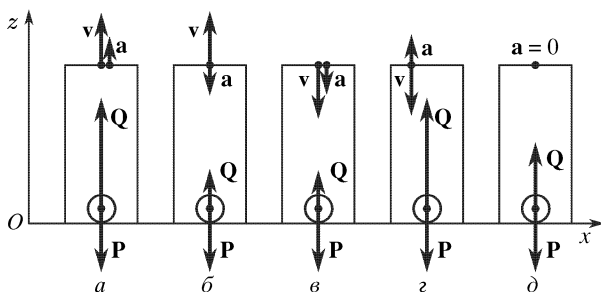


Рис. 7.3

вверх, и потому он положителен; то же относится и к случаю *г* — вектор ускорения при замедленном движении направлен против вектора скорости. В случаях же *б* и *в* вектор ускорения направлен вертикально вниз.

Уравнение движения в векторном виде запишется так:

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = m\mathbf{a}. \quad (7.6)$$

Чтобы перейти к скалярной записи, следует учесть знаки векторов. Для случаев  $a$  и  $г$ :  $-P + Q = ma$ , откуда

$$Q = P + ma = m(g + a).$$

Для случаев  $б$  и  $в$ :  $-P + Q = -ma$ , откуда

$$Q = m(g - a).$$

Наконец, для случая  $д$ :  $-P + Q = 0$ , откуда

$$Q = P.$$

3. Итак, если лифт движется относительно Земли с ускорением и является, таким образом, *неинерциальной* системой отсчета, то сила, с которой тело давит на опору (т.е. вес), не равна силе тяжести. Если ускорение лифта направлено противоположно ускорению свободного падения, то сила давления на опору *больше* силы тяжести. Когда же ускорение лифта совпадает по направлению с ускорением свободного падения, то сила давления тела на опору *меньше* силы тяжести. Если при этом окажется, что  $a = g$ , то из (7.6) следует  $Q = 0$ , т.е. тело вообще не давит на опору.

И только в том случае, когда лифт движется равномерно относительно Земли (и является, таким образом, *инерциальной* системой отсчета), сила давления тела на опору равна силе тяжести.

4. *Пример 2.* Самолет, двигаясь со скоростью  $v$ , совершает в вертикальной плоскости мертвую петлю радиуса  $r$ . С какой силой летчик прижимается к сиденью? При какой минимальной скорости летчик удержится на сиденье? Рассмотрим верхнюю и нижнюю точки траектории.

Вместо силы, с которой летчик прижимается к сиденью, мы найдем равную ей и противоположно направленную силу реакции. На летчика действуют две силы: реакция сиденья и притяжение Земли. В нижней точке реакция

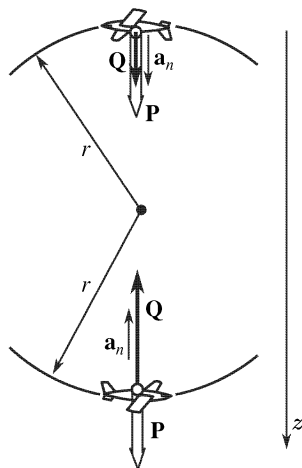


Рис. 7.4

направлена вертикально вверх, в верхней точке — вертикально вниз (рис. 7.4). Хотя самолет движется по окружности равномер-

но, вектор скорости все время меняется по направлению, следовательно, имеется нормальное (центростремительное) ускорение  $a_n = v^2/r$ . В нижней точке траектории оно направлено вертикально вверх, в верхней — вниз. Направим для удобства ось  $z$  вертикально вниз, вдоль силы тяжести.

Уравнение движения в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = m\mathbf{a}_n. \quad (7.7)$$

В проекциях на ось  $z$  получим для нижней точки  $P - Q = -\frac{mv^2}{r}$ , откуда

$$Q = P + \frac{mv^2}{r} = m \left( \frac{v^2}{r} + g \right).$$

Следовательно, здесь летчик испытывает перегрузку. Для верхней же точки  $P + Q = \frac{mv^2}{r}$ , откуда

$$Q = \frac{mv^2}{r} - P = m \left( \frac{v^2}{r} - g \right).$$

Поскольку  $Q$  есть модуль силы реакции, т. е. положительное число, то величина  $v^2/r$  не может быть меньше  $g$ . Следовательно, летчик удержится на сиденье, если  $v^2/r \geq g$ . Минимальная скорость найдется из условия

$$v_{\min} = \sqrt{gr}. \quad (7.8)$$

### § 7.3. Невесомость

1. В § 6.1 мы определили вес как силу, с которой тело действует на связь вследствие притяжения этого тела к Земле. В предыдущем параграфе мы убедились, что в случае, если тело неподвижно относительно Земли, вес равен силе тяжести.

Анализ решения примера 1 в предыдущем параграфе приводит к выводу, что вес равен силе тяжести также и в том случае, если тело находится в лифте, движущемся относительно Земли прямолинейно и равномерно, т. е. в инерциальной системе отсчета. Таким образом, *в любой инерциальной системе отсчета вес равен силе тяжести*.

Если же тело находится в лифте, движущемся ускоренно относительно Земли, или в самолете, движущемся по окружности

(т. е. тоже с ускорением относительно Земли), то сила давления на опору, т. е. вес, уже не равна силе тяжести.

Система отсчета, движущаяся ускоренно относительно инерциальной системы, называется *неинерциальной* системой отсчета. Более подробно явления в неинерциальных системах отсчета будут рассмотрены в гл. 24. Здесь же ограничимся анализом смысла двух понятий: невесомости и перегрузки.

2. Рассмотрим, с какой силой космонавт, находящийся в кресле космического корабля, давит на опору в случае взлета, торможения и при свободном полете на орбите.

При взлете космический корабль под действием ракеты-носителя движется ускоренно. Этот случай вполне аналогичен п. а предыдущего параграфа. Здесь сила, с которой космонавт давит на опору, больше силы тяжести. Действительно, по третьему закону Ньютона сила, с которой космонавт давит на опору,  $Q = m(g + a)$ , в то время как сила тяжести равна  $mg$ . Космонавт будет испытывать *перегрузку*, т. е. ему будет казаться, что он стал как бы тяжелее.

Организм тренированного человека может перенести примерно шестикратную перегрузку, т. е.  $F_{\text{давл}} \approx 6P$ . Значит, ускорение космического корабля не должно превосходить пятикратного значения ускорения свободного падения. Действительно, из неравенства  $m(g + a) \leq 6mg$  следует, что  $a \leq 5g$ .

3. Предоставляем читателю, основываясь на результате решения п. г предыдущего параграфа, показать, что при торможении космического корабля возникают такие же перегрузки, как и при взлете.

4. Если космический корабль движется по орбите вокруг Земли, то ускорение корабля равно ускорению свободного падения:  $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ . Из (7.6) в этом случае следует, что  $Q = 0$ . Космонавт на опору не давит, он будет ощущать это как «потерю веса».

Итак, *состояние невесомости наступает в том случае, когда неинерциальная система* (в нашем случае — космический корабль) *движется относительно Земли с ускорением  $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ .*

Заметим, что такая величина ускорения еще не предопределяет характера движения. Движение может быть прямолинейным, если при вертикальном взлете или вертикальном приземлении будет выключен двигатель ракеты, или криволинейным, если космический корабль движется по орбите вокруг Земли — здесь ускорение является центростремительным. Для наступления состояния невесомости форма траектории не играет роли, важно только одно — чтобы космический корабль двигался с ускорением  $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ .

### § 7.4. Система единиц

1. Как уже указывалось выше, единицы измерения какой-либо физической величины могут быть выбраны произвольно. Единственным необходимым условием является *однородность* единицы измерения и самой величины: единицей длины может служить длина какого-то твердого стержня, единицей скорости — скорость какого-то равномерного движения и т. д. Однако такой произвол в выборе единиц физических величин приводит к неудобствам: в формулах, связывающих некоторые величины функциональной зависимостью, появляются числовые коэффициенты.

Так, известно, что площадь прямоугольника пропорциональна его длине и высоте:

$$S = \alpha lh,$$

где  $S$  — площадь,  $l$  — длина,  $h$  — высота и  $\alpha$  — коэффициент, зависящий от выбора единиц. Если единицей длины и высоты будет метр, а площади — гектар, то  $\alpha = 0,0001$ ; тогда  $S = 0,0001 lh$ . Однако удобнее за единицу площади принять площадь квадрата со стороной, равной единице длины. Если длина измеряется в метрах, то площадь измеряется в квадратных метрах, и искомое выражение примет простейший вид:

$$S = lh.$$

Итак, целесообразно единицы физических величин выбирать так, чтобы они были связаны между собой теми же соотношениями, что и измеряемые величины. Это позволит существенно уменьшить число коэффициентов, входящих в формулы, выражающие соотношения между физическими величинами.

Совокупность единиц, построенная согласно указанному правилу, называется *системой единиц*.

2. Все единицы, входящие в определенную систему, разбиваются на два класса:

*Основные единицы*, установленные произвольно и независимо друг от друга. Обычно основные единицы определяются с помощью эталонов.

*Производные единицы*, которые выражаются через основные с помощью соответствующих физических законов.

Например, единица длины является основной, а единица площади — производной.

*Размерностью* физической величины  $B$  называется соотношение, определяющее связь между единицей этой величины  $[B]$

и основными единицами  $[A_1]$ ,  $[A_2]$ ,  $[A_3]$ , ... данной системы. Формулы размерности имеют вид

$$[B] = [A_1]^{n_1} \cdot [A_2]^{n_2} \cdot [A_3]^{n_3} \dots$$

Обычно стремятся уменьшить число основных единиц, но это не всегда оказывается удобным на практике. Поэтому при построении системы единиц приходится учитывать потребности измерительной техники, а также исторические традиции.

### § 7.5. Международная система единиц

1. Международная система единиц (СИ) — правильно построенная и взаимосвязанная совокупность единиц физических величин, состоящая из семи основных, двух дополнительных и большого числа производных единиц.

*Основные единицы:*

метр (м) — единица длины;

килограмм (кг) — единица массы;

секунда (с) — единица времени;

ампер (А) — единица силы электрического тока (см. § 41.9);

кельвин (К) — единица термодинамической температуры (см. § 26.7 и 36.6);

моль (моль) — единица количества вещества (см. § 26.9);

кандела (кд) — единица силы света (см. § 66.1).

*Дополнительные единицы:*

радиан (рад) — единица плоского угла;

стерадиан (ср) — единица телесного угла (см. § 37.9).

2. Производные единицы для измерения механических величин определяются следующим образом:

единица скорости — метр в секунду (м/с) — скорость равномерного движения материальной точки, проходящей расстояние 1 м в течение 1 с;

единица ускорения — метр на секунду в квадрате (м/с<sup>2</sup>) — ускорение равнопеременного движения материальной точки, скорость которой изменяется на 1 м/с за 1 с;

единица силы — ньютон (Н) — сила, которая массе 1 кг сообщает ускорение 1 м/с<sup>2</sup>;

единица плотности — килограмм на кубический метр (кг/м<sup>3</sup>) — плотность однородного вещества, масса которого при объеме 1 м<sup>3</sup> равна 1 кг;

единица давления — паскаль (Па) — давление, вызываемое силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м<sup>2</sup>.

Единицы остальных величин будут определены по мере их использования.

3. Основным единицам — единицам длины, массы, времени, силы электрического тока, термодинамической температуры, количества вещества и силы света — приписывают размерности  $L$ ,  $M$ ,  $T$ ,  $I$ ,  $\Theta$ ,  $N$ ,  $J$ . Размерности производных единиц строятся на основе формул, применяемых для определения соответствующих производных величин, например:  $[v] = [l/t] = LT^{-1}$ ,  $[a] = [v/t] = LT^{-2}$ ,  $[F] = [ma] = MLT^{-2}$ ,  $[\rho] = [m/V] = L^{-3}M$  и т. д.

4. Для образования десятичных кратных и дольных единиц используется система десятичных приставок, каждой из которых соответствует множитель типа  $10^n$ , где  $n$  — целое число. Наиболее употребительные приставки приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Множи- тель	При- ставка	Обозначение		Множи- тель	При- ставка	Обозначение	
		рус- ское	между- народ- ное			рус- ское	между- народ- ное
$10^{12}$	тера	Т	Т	$10^{-3}$	милли	м	m
$10^9$	гига	Г	G	$10^{-6}$	микро	мк	$\mu$
$10^6$	мега	М	M	$10^{-9}$	нано	н	n
$10^3$	кило	к	k	$10^{-12}$	пико	п	p
Так, 1 нм (нанометр) = $10^{-9}$ м, 1 Гм (гигаметр) = $10^9$ м; 1 мкс (микросекунда) = $10^{-6}$ с, 1 МН (меганьютон) = $10^6$ Н, 1 мг (миллиграмм) = $10^{-3}$ г, 1 Мг (мегаграмм) = $10^6$ г = 1 т и т. д.							

## Глава 8

# ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

### § 8.1. Основная задача динамики

1. Очень многие задачи астрономии, транспорта, артиллерии и ряда других областей науки и техники формулируются следующим образом: имеется тело, которое можно рассматривать как материальную точку (например, планета, снаряд, ракета и т. п.); известны силы, действующие на это тело. Требуется найти закон движения точки, т. е. выразить ее координаты в виде определенных функций времени.



Это и есть *основная задача динамики*, которая кратко формулируется так: *определить закон движения материальной точки, если известны действующие на нее силы*.

Для ее решения вначале с помощью основного закона динамики (второго закона Ньютона) находят ускорение, с которым движется материальная точка. Затем с помощью известных формул кинематики ищут выражения для скоростей и координат.

2. Математические трудности, возникающие при решении задачи в общем виде, могут оказаться весьма значительными. Вместе с тем частное решение любой задачи может быть получено численными методами — приближенно, но с любой наперед заданной степенью точности.

Две простейшие задачи будут рассмотрены ниже. Одну из них решим в общем виде, вторую — численными методами. На их примере мы попытаемся выяснить, что же нужно знать для того, чтобы суметь решить основную задачу динамики.

Точное решение задачи нам удастся получить только в простейшем случае — при расчете движения тела под действием *постоянной силы*. Что же касается численных методов, то они пригодны для решения любых задач, но требуют всегда очень большого числа арифметических выкладок. В настоящее время такие выкладки поручают компьютерам — быстродействующим электронным вычислительным машинам (ЭВМ), которые легко решают данные задачи при соответствующем их программировании.

## § 8.2. Движение материальной точки под действием силы тяжести

1. Пусть на движущуюся материальную точку, кроме силы тяжести, никакие другие силы не действуют. Например, это могло

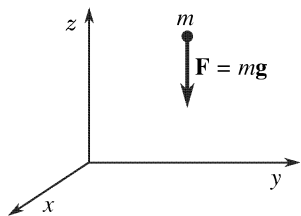


Рис. 8.1

бы быть тело на Луне, где нет атмосферы. Впрочем, с известным приближением это может быть и на Земле, если скорость точки не превосходит нескольких метров в секунду, ибо при таких скоростях можно пренебречь сопротивлением воздуха (см. § 11.9).

Систему отсчета, связанную с Землей, будем считать инерциальной. Оси координат выберем так, как показано на рис. 8.1. Выражение для силы, действующей на материальную точку, запишется так:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} = m\mathbf{g}, \quad (8.1)$$

или в проекциях на оси координат

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg. \quad (8.2)$$

Основной закон динамики примет вид

$$F_x = ma_x = 0, \quad F_y = ma_y = 0, \quad F_z = ma_z = -mg. \quad (8.3)$$

Следовательно, проекции ускорения на оси координат будут:

$$a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad a_z = -g. \quad (8.4)$$

2. Теперь уже нетрудно найти и закон движения. Вдоль оси абсцисс точка движется без ускорения, т. е. равномерно. В этом случае скорость точки остается постоянной, а ее координата — линейной функцией времени (см. § 1.4):

$$v_x = u_0 = \text{const}, \quad x = x_0 + u_0 t. \quad (8.5)$$

Аналогично для оси ординат

$$v_y = w_0 = \text{const}, \quad y = y_0 + w_0 t. \quad (8.6)$$

Наконец, вдоль оси аппликат точка движется с постоянным ускорением. Тогда (см. § 4.3–4.6) ее скорость является линейной функцией времени, а координата — квадратичной функцией времени:

$$\begin{aligned} v_z &= v_0 + a_z t = v_0 - gt, \\ z &= z_0 + v_0 t + \frac{a_z t^2}{2} = z_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

3. Итак, закон движения найден. Он имеет вид

$$x = x_0 + u_0 t, \quad y = y_0 + w_0 t, \quad z = z_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (8.8)$$

Мы получили в (8.8) перед ускорением знак минус, а в (4.8) был знак плюс. Это связано с направлением оси аппликат: в (4.8) ускорение направлено вдоль оси аппликат, здесь же направление вектора ускорения противоположно.

В выражение для закона движения вошло шесть произвольных постоянных: *начальные координаты*  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  и *начальные скорости*  $u_0$ ,  $w_0$ ,  $v_0$ . Они определяют положение и скорость движения материальной точки в момент времени  $t = 0$ , принятый за начальный.

4. Система уравнений (8.5)–(8.8) описывает *все возможные случаи* движения точки под действием силы тяжести. Чтобы получить какое-либо частное решение, необходимо указать конкретные начальные условия.

Пусть точка брошена из начала координат со скоростью  $V_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту, причем вектор начальной скорости лежит в плоскости  $yz$  (рис. 8.2). Тогда начальные условия примут вид

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, & w_0 &= V_0 \cos \alpha, \\ v_0 &= V_0 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Закон движения выглядит так:

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= V_0 t \cos \alpha, \\ z &= V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

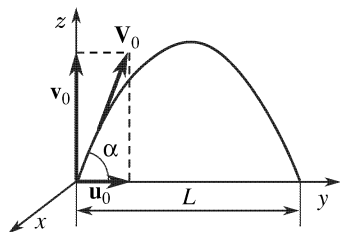


Рис. 8.2

Покажем, что точка движется по параболе, лежащей в вертикальной плоскости. Действительно, из (8.10) следует:  $t = y / (V_0 \cos \alpha)$ . Подставив это значение  $t$  в третье уравнение, получим

$$z = y \operatorname{tg} \alpha - \frac{gy^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (8.11)$$

А это и есть уравнение параболы в общем виде. Дальность полета получим, положив в (8.11)  $z = 0$ ,  $y = L$ ; тогда

$$L = \frac{2V_0^2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (8.12)$$

Наибольшая дальность полета достигается при бросании тела под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту: здесь  $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1$ .

5. Рекомендуем читателю самостоятельно получить выражения для двух частных случаев.

а. Тело, находясь на некоторой высоте  $h$  над Землей, брошено горизонтально с начальной скоростью  $u_0$ . Найти закон движения; траекторию; дальность полета.

б. Тело брошено вертикально вверх из начала координат с начальной скоростью  $v_0$ . Найти закон движения; траекторию; максимальную высоту подъема и время подъема.

### § 8.3. Численное решение основной задачи динамики

1. В предыдущем параграфе нам удалось весьма просто найти общий закон движения только потому, что на точку действовала постоянная сила. Если же на точку действует переменная сила, то общий закон движения можно найти только методами высшей математики. Однако частное решение при конкретных начальных условиях может быть всегда получено с помощью численных

методов. При этом все решение сводится к совершенно элементарным, хотя и довольно длинным арифметическим действиям.

2. При расчете будем исходить из следующих соображений. Среднее ускорение в течение некоторого промежутка времени  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$  определяется из соотношения (см. § 4.1)

$$a_{\text{ср}} = \frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t}.$$

Полагая (при малом  $\Delta t$ ), что среднее ускорение мало отличается от мгновенного в конечный момент  $t = t_n$ , имеем приближенно

$$v_n \approx v_{n-1} + a_n \Delta t. \quad (8.13)$$

Для средней скорости  $\bar{v}_n$  получим аналогичную формулу:

$$\bar{v}_n \approx \bar{v}_{n-1} + a_n \Delta t, \quad (8.14)$$

где средняя скорость

$$\bar{v}_n \approx \frac{v_n + v_{n-1}}{2}.$$

Но по определению (см. § 1.6) средняя скорость

$$\bar{v}_n = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t};$$

отсюда следует

$$x_n = x_{n-1} + \bar{v}_n \Delta t. \quad (8.15)$$

Теперь мы имеем все необходимое для численного расчета закона движения. Действительно, пусть нам известны координата и скорость точки в некоторый начальный момент; ускорение найдем с помощью основного закона динамики. По формуле (8.13) вычислим скорость спустя время  $\Delta t$ , а по формуле (8.15) — координату. Приняв эти новые значения скорости и координаты за исходные и воспользовавшись теми же формулами, мы сделаем еще один шаг, и т. д. Через конечное число шагов получим скорость и координату в нужный момент времени.

Естественно, чем меньше  $\Delta t$ , тем точнее будет результат. Но это потребует увеличения числа выкладок.

## § 8.4. Движение тела под действием упругой силы

1. Проиллюстрируем применение численного метода решения основной задачи механики на примере движения материальной точки под действием упругой силы.

Пусть на материальную точку действует упругая сила  $F = -kx$  (рис. 8.3). Тогда основное уравнение динамики примет вид

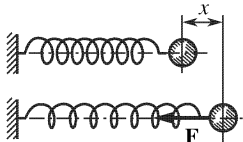
$$-kx = ma, \quad (8.16)$$

или в проекциях на оси координат

$$-kx = ma_x, \quad 0 = ma_y, \quad 0 = ma_z. \quad (8.17)$$

Положим, что  $y_0 = z_0 = 0$  и  $w_0 = u_0 = 0$ ; следовательно, материальная точка движется только по оси абсцисс с ускорением

$$a_x = a = -\frac{k}{m}x. \quad (8.18)$$



Для численного решения задачи нужно задать какое-либо конкретное значение постоянной  $k/m$ , начальную координату  $x_0$  и начальную скорость  $v_0$ . Пусть

Рис. 8.3

$$\frac{k}{m} = 2,467 = \frac{\pi^2}{4}, \quad x_0 = 1,000; \quad v_0 = 0. \quad (8.19)$$

Расчет будем вести, полагая  $\Delta t = 0,1$  с.

Из (8.18) следует, что ускорение в течение первого промежутка времени приближенно равно  $a_0 = -2,467x_0 = -2,467$ .

Конечная скорость через  $\Delta t = 0,1$  с

$$v_0^{\text{кон}} = v_0 + a_0 \Delta t = -2,467 \cdot 0,1 = -0,2467.$$

Средняя скорость за этот промежуток времени

$$\bar{v}_0 = \frac{v_0 + v_0^{\text{кон}}}{2} = \frac{0 - 0,2467}{2} = -0,1234.$$

Координата точки к концу промежутка

$$x_1 = x_0 - \bar{v}_0 \Delta t = 1,000 - 0,1234 \cdot 0,1 = 0,988.$$

Аналогично вычисления могут быть продолжены (табл. 8.1).

2. Далее  $t = 1$  с производить вычисления не имеет смысла, ибо начиная с этого момента времени значения координаты  $x$  повторяются, но с противоположным знаком. Следовательно, при  $t = 2$  с координата точки примет значение  $x = -1$ ; при  $t = 3$  с — значение  $x = 0$ . Наконец, при  $t = 4$  с координата и скорость будут иметь те же значения, что и при  $t = 0$ .

График зависимости координаты точки от времени очень напоминает график функции  $x = A \cos \omega t$ , где  $\omega = \sqrt{k/m}$ . График мгновенной скорости точки весьма похож на график функции  $v = B \sin \omega t$ . И в самом деле, точное решение этой задачи (§ 49.1) приводит к следующему результату:

$$x = \cos \frac{\pi}{2} t, \quad v = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t. \quad (8.20)$$

Выразив переменный угол  $\alpha = (\pi/2)t$  не в радианах, а в градусах, найдем по таблицам тригонометрических функций значения выражений (8.20) и сопоставим их с результатами наших вычислений (табл. 8.2). При этом следует учесть, что формула (8.20) дает *мгновенные значения* скорости к началу каждого промежутка времени, мы же вычислили *приближенное значение средней скорости* в течение этого промежутка.

Заметим, что фактически при численном расчете данные были получены путем деления промежутка времени на 100, а не на 10 частей и в таблицу внесены округленные значения. Мы видим очень хорошее совпадение теоретических и расчетных данных для координат.

3. Движение, совершаемое материальной точкой под действием упругой силы, называется *гармоническим колебанием*. Подробно этот вид движения будет рассмотрен в гл. 49, т. II.

Таблица 8.1

$t$	$x$	$a = -2,467x$	$\bar{v}$	Вычисления
0,0	1,000	-2,467	-0,123	$v_0 = 0$ $v_0^{\text{кон}} = v_0 + a_0 \Delta t = -0,246$
0,1	0,988	-2,437	-0,367	$x_1 = x_0 + \bar{v}_0 \Delta t = 1,000 - 0,012 = 0,988$ $\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + a_1 \Delta t = -0,123 - 0,244 = -0,367$
0,2	0,951	-2,347	-0,602	$x_2 = x_1 + \bar{v}_1 \Delta t = 0,988 - 0,037 = 0,951$ $\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + a_2 \Delta t = -0,367 - 0,235 = -0,602$
0,3	0,891	-2,199	-0,822	$x_3 = x_2 + \bar{v}_2 \Delta t = 0,951 - 0,060 = 0,891$ $\bar{v}_3 = \bar{v}_2 + a_3 \Delta t = -0,602 - 0,220 = -0,822$
0,4	0,809	-1,996	-1,022	$x_4 = x_3 + \bar{v}_3 \Delta t = 0,891 - 0,082 = 0,809$ $\bar{v}_4 = \bar{v}_3 + a_4 \Delta t = -0,822 - 0,200 = -1,002$
0,5	0,707	-1,743	-1,196	$x_5 = x_4 + \bar{v}_4 \Delta t = 0,809 - 0,102 = 0,707$ $\bar{v}_5 = \bar{v}_4 + a_5 \Delta t = -1,022 - 0,174 = -1,196$
0,6	0,587	-1,450	-1,341	$x_6 = x_5 + \bar{v}_5 \Delta t = 0,707 - 0,120 = 0,587$ $\bar{v}_6 = \bar{v}_5 + a_6 \Delta t = -1,196 - 0,145 = -1,341$
0,7	0,453	-1,120	-1,453	$x_7 = x_6 + \bar{v}_6 \Delta t = 0,587 - 0,134 = 0,453$ $\bar{v}_7 = \bar{v}_6 + a_7 \Delta t = -1,341 - 0,112 = -1,453$
0,8	0,308	-0,722	-1,525	$x_8 = x_7 + \bar{v}_7 \Delta t = 0,453 - 0,145 = 0,308$ $\bar{v}_8 = \bar{v}_7 + a_8 \Delta t = -1,453 - 0,072 = -1,525$
0,9	0,156	-0,380	-1,563	$x_9 = x_8 + \bar{v}_8 \Delta t = 0,308 - 0,152 = 0,156$ $\bar{v}_9 = \bar{v}_8 + a_9 \Delta t = -1,525 - 0,038 = -1,563$
1,0	0,000	0,000	-1,563	$x_{10} = x_9 + \bar{v}_9 \Delta t = 0,156 - 0,156 = 0,000$ $\bar{v}_{10} = \bar{v}_9 + a_{10} \Delta t = -1,563 - 0,000 = -1,563$
1,1	-0,156	0,380	-1,525	$x_{11} = x_{10} + \bar{v}_{10} \Delta t = 0,000 - 0,156 = -0,156$ $\bar{v}_{11} = \bar{v}_{10} + a_{11} \Delta t = -1,563 + 0,038 = -1,525$
1,2	-0,308	0,722	-1,453	$x_{12} = x_{11} + \bar{v}_{11} \Delta t = -0,156 - 0,152 = -0,308$ $\bar{v}_{12} = \bar{v}_{11} + a_{12} \Delta t = -1,525 + 0,072 = -1,453$

Таблица 8.2

$t, \text{с}$	$\alpha = \frac{\pi}{2} t = 90^\circ t,$ град	Теоретические данные		Расчетные данные	
		$x = \cos \frac{\pi}{2} t$	$v = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t$	$x$	$\bar{v}$
0	0	1,0000	0,0000	1,000	-0,123
0,1	9	0,9877	-0,2457	0,988	-0,367
0,2	18	0,9511	-0,4854	0,951	-0,602
0,3	27	0,8910	-0,7131	0,891	-0,822
0,4	36	0,8090	-0,9233	0,809	-1,022
0,5	45	0,7071	-1,1107	0,707	-1,196
0,6	54	0,5878	-1,2708	0,587	-1,341
0,7	63	0,4540	-1,3996	0,453	-1,453
0,8	72	0,3090	-1,4938	0,308	-1,525
0,9	81	0,1564	-1,5515	0,156	-1,563
1,0	90	0,0000	-1,5708	0,000	-1,563
1,1	99	-0,1564	-1,5515	-0,156	-1,525

### § 8.5. Величины, определяющие закон движения материальной точки

1. На примере задач, рассмотренных в предыдущих параграфах, мы убедились, что для определения закона движения материальной точки необходимы следующие данные:

а) должна быть известна действующая *сила*, заданная как функция времени или координат;

б) должны быть известны *начальные условия*: координаты и скорость точки в некоторый момент времени. (Вместо начальной скорости может быть задан начальный импульс  $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0$ .)

Если эти величины известны, то всегда можно найти закон движения точки, т. е. выразить ее координаты в виде функций времени. А это в свою очередь позволяет предсказать ее поведение в любой предшествующий или последующий момент времени.

Так, зная силы взаимодействия между Солнцем и планетами, а также координаты и скорости планет в некоторый момент времени (т. е. начальные условия), можно предсказать состояние их движения как в давно прошедшие времена, так и на будущее. В частности, можно предсказать такие явления, как солнечные или лунные затмения, великие противостояния Земли и Марса (т. е. моменты времени, когда расстояние между этими планетами становится минимальным) и т. п.

Зная скорость космической ракеты и ее координаты в некоторый момент времени, а также силы, действующие на нее, можно рассчитать ее траекторию; определить, где она будет находиться в любой момент времени; предсказать время и координаты точки приземления.

2. Если окажется, что истинное движение материальной точки не совпадает с расчетным, то это означает, что либо неверно определены начальные условия, либо неверно задана сила. По степени расхождения расчетной и истинной траекторий обычно удается определить и величину допущенной ошибки. В качестве примера рассмотрим историю открытия планет Нептун и Плутон.

В 1781 г. английский астроном В. Гершель сконструировал огромный по тому времени телескоп и с его помощью обнаружил новую, седьмую планету, которую назвали Ураном. Учитывая действие на Уран Солнца и остальных планет Солнечной системы, известных к тому времени (Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера и Сатурна), нашли закон его движения и определили его траекторию на небосводе. Расчетная траектория оказалась неверной — Уран двигался по другой кривой. Поскольку начальные

условия были заданы верно, то единственно разумным являлось предположение, что учтены не все силы, действующие на Уран.

Французский ученый Леверье и английский ученый Адамс независимо друг от друга выдвинули предположение, что за Ураном должна находиться еще одна планета, которую никто еще не наблюдал. По отклонению расчетной траектории Урана от истинной они смогли определить закон движения этой неизвестной планеты и предсказать, в какой точке небосвода ее можно найти в тот или иной момент времени. Опыт блестяще подтвердил их расчет: направив в эту точку небосвода телескоп, немецкий астроном Галле в 1846 г. действительно обнаружил там планету, названную впоследствии Нептуном.

В начале XX в. американский астроном Лоуэлл, учитывая результаты более точных наблюдений, пришел к выводу, что расхождения между расчетной траекторией Урана и истинным характером его движения нельзя объяснить только действием Нептуна, что за Нептуном есть еще одна, девятая планета. В 1930 г., уже после смерти Лоуэлла, в основанной им обсерватории астроном Томбо обнаружил эту планету, названную затем Плутоном.

Итак, на примере ряда задач ньютоновской механики мы убедились, что *сила и начальные условия полностью определяют закон движения материальной точки.*

Дальнейшее развитие науки показало, что в микромире невозможно такое задание начальных условий, какое применяется в ньютоновской механике (см. гл. 14).

## Глава 9

### ТЯГОТЕНИЕ

#### § 9.1. Открытие закона тяготения

1. К началу XVII столетия большинство ученых окончательно убедилось в справедливости гелиоцентрической системы мира. Согласно этой системе, предложенной Николаем Коперником, Земля и все остальные планеты движутся вокруг Солнца, которое является центром нашей планетной системы. Однако ученым того времени не были ясны ни законы движения планет, ни причины, определяющие характер их движения.

Иоганн Кеплер, обработав результаты многочисленных наблюдений, проведенных Тихо Браге и им самим, получил законы



движения планет вокруг Солнца. Ему было ясно, что для объяснения этих законов нужно найти силы, которые действуют на планеты. Однако ни ему, ни его современникам это не удалось сделать. Задача была решена гениальным английским ученым Исааком Ньютоном и изложена в его книге «Математические начала натуральной философии» (натуральной философией в то время называли физику), вышедшей в 1687 г.

2. В первом приближении можно считать, что планеты движутся почти равномерно по орбитам, которые мало отличаются от окружностей. Но при движении материальной точки по окружности имеется нормальное (центростремительное) ускорение, направленное к центру орбиты, где находится Солнце. Из основного закона динамики следует, что это ускорение вызывается некоторой силой. Итак, Солнце действует на каждую планету с некоторой силой, направленной к его центру. Из третьего закона Ньютона следует, что и планета действует на Солнце с такой же силой, но направленной в противоположную сторону.

3. Известно, что Луна обращается вокруг Земли. Очевидно, что силы притяжения действуют также и между ними: Луна притягивается к Земле, а Земля — к Луне.

Ньютон выдвинул решающее предположение, что сила тяжести, действующая на тела вблизи поверхности Земли, и сила, с которой Земля притягивает Луну, имеют совершенно одинаковое происхождение. Для этой цели он сравнил ускорение свободного падения и нормальное ускорение, с которым Луна движется на своей орбите.

Это ускорение можно рассчитать из таких соображений. Расстояние от Земли до Луны  $r = 384\,403 \text{ км} = 3,84 \cdot 10^8 \text{ м}$ ; период обращения  $T = 27,322 \text{ суток} = 27,3 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с}$ . Орбитальная скорость  $v = 2\pi r/T$ , а нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 3,84 \cdot 10^8}{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2. \quad (9.1)$$

Как мы видим, нормальное ускорение Луны и ускорение свободного падения резко отличаются друг от друга. Однако Ньютон объяснил расхождение между этими величинами, выдвинув предположение, что *сила тяготения убывает с увеличением расстояния между взаимодействующими телами по некоторому закону*, который мы сейчас найдем. Действительно, ускорение свободного падения равно  $9,81 \text{ м/с}^2$  вблизи поверхности Земли, т.е. когда расстояние от притягиваемого тела до центра Земли равно ее среднему радиусу ( $R = 6371 \text{ км} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$ ); нормаль-

ное же ускорение Луны получено для точки на ее орбите, когда расстояние между взаимодействующими телами равно радиусу лунной орбиты  $r = 3,84 \cdot 10^8$  м. Составив соотношение

$$\frac{g}{a_n} = \left(\frac{r}{R}\right)^n, \quad (9.2)$$

можно определить неизвестный показатель степени. Подставив значения расстояний и ускорений, получим

$$\frac{9,81}{2,72 \cdot 10^{-3}} = \left(\frac{3,84 \cdot 10^8}{6,37 \cdot 10^6}\right)^n$$

или  $3606 = 60,28^n$ , откуда  $n = 2$ .

Итак, ускорение, вызванное силой тяготения, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния: из (9.2) при  $n = 2$  следует, что

$$a_n = \frac{gR^2}{r^2} = \frac{K}{r^2}, \quad (9.3)$$

где  $K$  — некоторая постоянная величина.

## § 9.2. Закон всемирного тяготения

1. Результаты, полученные Ньютоном при анализе нормального ускорения, возникающего при движении Луны вокруг Земли, привели его к выводу, что все тела в природе притягиваются друг к другу с некоторой силой, называемой *силой тяготения*, причем ускорение, вызванное этой силой, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния между взаимодействующими телами.

Пусть два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  расположены на расстоянии  $r$  друг от друга. Они взаимодействуют с силами  $F_1 = m_1 a_1$  и  $F_2 = m_2 a_2$ , причем по третьему закону Ньютона  $F_1 = F_2$ . Учитывая (9.3), имеем

$$\frac{m_1 K_1}{r^2} = \frac{m_2 K_2}{r^2}. \quad (9.4)$$

Это равенство будет справедливо, если положить  $K_1 = Gm_2$  и  $K_2 = Gm_1$ , где  $G$  — некоторая постоянная величина. Тогда

$$F = m_1 a_1 = \frac{m_1 K_1}{r^2} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Сформулируем закон тяготения следующим образом:

*Сила тяготения между двумя телами (материальными точками) пропорциональна произведению масс этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:*

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (9.5)$$

Изложенные выше соображения никоим образом нельзя рассматривать как вывод закона тяготения. Они могут служить лишь иллюстрацией к рассуждениям Ньютона.

Для опытной проверки этого закона необходимо уметь находить силу тяготения не только между материальными точками, но и между телами конечных размеров. В общем случае эта задача представляет огромные математические трудности, и решить ее элементарными методами невозможно. Точный расчет показывает, что формулой (9.5) можно пользоваться и для вычисления силы взаимодействия между *однородными шарами* с массами  $m_1$  и  $m_2$ , понимая под  $r$  расстояние между центрами шаров.

2. Коэффициент  $G$ , входящий в закон тяготения, называется *гравитационной постоянной*. Она численно равна силе, с которой взаимодействуют частицы с единичной массой, расположенные на единичном расстоянии друг от друга.

В Международной системе единиц гравитационная постоянная численно равна силе, с которой взаимодействуют две частицы с массами  $m_1 = m_2 = 1$  кг, расположенные друг от друга на расстоянии  $r = 1$  м. Эта величина может быть определена только опытным путем.

### § 9.3. Опыт Кавендиша

В 1798 г. Кавендиш поставил опыт, позволивший измерить силу тяготения в лабораторных условиях и тем самым определить гравитационную постоянную. В качестве экспериментальной установки использовались крутильные весы, принцип устройства которых ясен из рис. 9.1.

На тонкой кварцевой нити 1, на которой подвешен легкий стержень 2, жестко закреплено небольшое зеркальце 3. Луч света 4, падая на зеркальце, отражается от него и попадает на шкалу 5. При повороте стержня отраженный луч перемещается по шкале, регистрируя тем самым угол закручивания нити. На концах стержня укреплены два свинцовых шарика с массами  $m$  каждый. К ним подносят два симметрично расположенных свинцовых шара с массами  $M$  ( $M \gg m$ ). При этом нить закручивается на некоторый угол до тех пор, пока сила упруго-

сти деформированной нити не уравнивает силу гравитационного взаимодействия между шарами. Измерив силу взаимодействия по

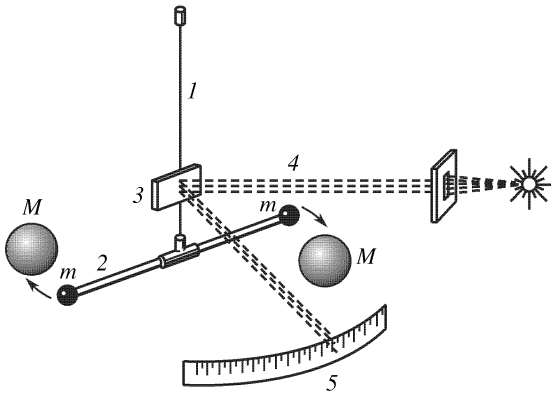


Рис. 9.1

углу закручивания нити, зная массы шаров и расстояние между их центрами, можно определить гравитационную постоянную.

Наиболее точные измерения, проведенные по усовершенствованной методике, дали следующий результат:

$$G = (6,67259 \pm 0,00055) \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2.$$

#### § 9.4. Определение расстояний от Солнца до планет

Применим закон тяготения для вычисления расстояний от Солнца до планет. При этом для простоты рассуждений положим, что планеты движутся по круговым орбитам. Это мало скажется на точности результатов расчета, ибо истинные траектории планет мало отличаются от окружностей.

Сила тяготения, действующая со стороны Солнца на планеты, сообщает им нормальное ускорение:  $a_n = F/m = GM/r^2$ . А так как  $a_n = v^2/r = 4\pi^2 r/T^2$ , то

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}, \quad (9.6)$$

где  $M$  — масса Солнца,  $r$  — радиус орбиты,  $T$  — период обращения планеты вокруг Солнца. Отсюда

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{const}. \quad (9.7)$$

Итак, *кубы средних расстояний от планет до Солнца пропорциональны квадратам периодов обращений планет вокруг Солнца* (третий закон Кеплера).

Поскольку периоды обращения планет могут быть измерены весьма точно, то для определения расстояний до всех планет достаточно измерить расстояние от Солнца до одной какой-либо планеты. В качестве такого эталона принято расстояние от Солнца до Земли, которое называется *астрономической единицей* длины ( $1 \text{ а. е.} = 1,49598 \cdot 10^{11} \text{ м}$ ).

В 1960–1962 гг. российские ученые с помощью мощного радиолокатора измерили расстояние от Земли до Венеры, что позволило уточнить значение астрономической единицы и тем самым — расстояния до всех планет Солнечной системы. Отличное совпадение результатов астрономических и радиолокационных измерений является хорошим доказательством справедливости закона всемирного тяготения.

### § 9.5. Гравитационное поле

В современной физике механизм гравитационного взаимодействия представляется следующим образом. Каждое тело массой  $M$  создает вокруг себя поле; если же в некоторую точку этого поля поместить пробное тело массой  $m$ , то поле будет действовать на пробную массу с силой  $F$ , зависящей от свойств поля в этой точке и от массы пробного тела. Естественно, что пробное тело создает вокруг себя свое поле, которое в свою очередь действует на тело массой  $M$ .

Свободное от вещества пространство обладает рядом геометрических и физических свойств. Так, кратчайшим расстоянием между двумя точками является прямая линия; ход времени во всех точках пространства один и тот же; лучи света представляют собой прямые линии и т. п.

Согласно Эйнштейну, тело массой  $M$ , внесенное в некоторую область пространства, изменяет свойства последнего. В частности, кратчайшим расстоянием между двумя точками будет уже не прямая, а некоторая кривая, форма которой зависит от массы тела и от расстояния между телом и исследуемыми точками пространства. Свет по-прежнему распространяется по кратчайшему расстоянию между двумя точками, но теперь уже световые лучи искривляются. Соответственно и время вблизи массивных тел замедляется.

Таким образом, гравитационное поле характеризует изменение физических и геометрических свойств пространства вблизи массивных тел (см. § 24.5, 24.6).

Гравитационное поле материально. Оно существует независимо от нашего сознания и может быть обнаружено по его воздействию на физические объекты, например на измерительные приборы.

### § 9.6. Напряженность гравитационного поля

1. Для количественной характеристики гравитационного поля вводится физическая величина, называемая *напряженностью* поля **E**. Напряженность поля численно равна отношению силы тяготения, действующей на пробное тело, к массе этого тела:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \quad (9.8)$$

Воспользовавшись законом тяготения (9.5) и положив в нем  $m_1 = M$ ,  $m_2 = m$ , имеем для модуля напряженности:

$$E = G \frac{M}{r^2}. \quad (9.9)$$

2. Мы видим, что напряженность гравитационного поля определяется массой тела, создающего поле (источником поля), и расстоянием от этого тела до интересующей нас точки поля. Она не зависит от массы пробного тела, помещаемого в эту точку.

Очевидно, что по своему физическому смыслу напряженность гравитационного поля совпадает с ускорением пробного тела. Поскольку напряженность поля не зависит от массы пробного тела, то все тела, независимо от их массы, движутся в данной точке гравитационного поля с одинаковым ускорением. В частности, именно поэтому все тела падают под действием силы тяжести с одинаковым ускорением  $g$  (см. § 6.2).

3. Напряженность поля является вектором, направленным в ту же сторону, что и сила тяготения. Если радиус-вектор  $\mathbf{r}$  направить от источника поля  $M$  к исследуемой точке поля, то вектор напряженности **E** будет направлен всегда противоположно радиусу-вектору. Чтобы показать это, следует проекцию

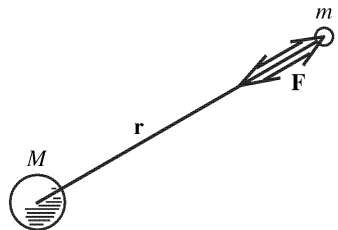


Рис. 9.2

вектора напряженности гравитационного поля на направление радиуса-вектора писать со знаком минус:

$$E_r = -G \frac{M}{r^2}. \quad (9.10)$$

Соответственно записывается и проекция силы тяготения на радиус-вектор (рис. 9.2):

$$E_r = m E_r = -G \frac{Mm}{r^2}. \quad (9.11)$$

### § 9.7. Гравитационное поле Земли

1. По мере удаления тела от поверхности Земли сила тяжести и ускорение свободного падения уменьшаются. Тело, расположенное на уровне моря, притягивается к Земле с силой

$$P_0 = mg_0 = G \frac{Mm}{R^2}, \quad (9.12)$$

где  $M$  и  $R$  — масса и радиус Земли,  $m$  — масса тела,  $g_0$  — ускорение свободного падения на уровне моря. Тело же, поднятое на высоту  $h$  над уровнем моря, притягивается к Земле с силой

$$P_0 = mg = G \frac{Mm}{(R+h)^2}. \quad (9.13)$$

Отсюда следует, что сила тяжести и ускорение свободного падения меняются с высотой в одинаковой степени.

На небольших высотах, много меньших радиуса Земли, можно этими изменениями пренебречь и считать силу тяжести и ускорение свободного падения постоянными величинами. Действительно, поскольку средний радиус Земли  $R = 6371$  км, то даже на высоте в несколько сотен километров над уровнем моря только очень чувствительные приборы могут обнаружить изменение силы тяжести и ускорения. Пусть  $h = 300$  км, тогда

$$\frac{P}{P_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \left( \frac{6371}{6671} \right)^2 = 0,955,$$

что отличается от единицы на 4,5 %. А при  $h = 30$  км

$$\frac{P}{P_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \left( \frac{6371}{6401} \right)^2 = 0,9957,$$

что отличается от единицы на 0,43 %.

2. Зная ускорение свободного падения и гравитационную постоянную, можно определить массу Земли. Действительно, из (9.12) следует, что

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}, \quad (9.14)$$

откуда масса Земли

$$M = \frac{g_0 R^2}{G} = \frac{9,81 \cdot 6,37^2 \cdot 10^{12}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг.} \quad (9.15)$$

Аналогично можно рассчитать и массу Солнца. Зная, что радиус земной орбиты  $R_3 = 149,5 \cdot 10^9$  м, а период обращения Земли вокруг Солнца  $T = 1$  год  $= 31,56 \cdot 10^6$  с, можно найти нормальное ускорение Земли:

$$a_3 = \frac{4\pi^2 R_3}{T^2} = 5,93 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2.$$

По аналогии с (9.15) имеем

$$M_C = \frac{a_3 R_3^2}{G} = \frac{5,93 \cdot 10^{-3} \cdot 149,5^2 \cdot 10^{18}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг.}$$

Итак, масса Солнца в 330 000 раз больше массы Земли.

3. Зная массу Земли и ее радиус, можно определить ее среднюю плотность:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 3}{4\pi \cdot 6,37^3 \cdot 10^{18}} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Поскольку каменные породы, из которых состоит поверхностный слой Земли, имеют примерно вдвое меньшую плотность, то очевидно, что внутри Земли имеется ядро, плотность которого примерно вдвое больше ее средней плотности. А это значит, что ядро Земли состоит в основном из металлов типа железа, меди и т. п.

По одной из гипотез, предложенной О.Ю. Шмидтом, Земля образовалась из метеорного облака. Метеориты, сталкиваясь друг с другом, разогревались; кроме того, разогрев вызывался теплотой, которая выделялась при распаде радиоактивных веществ. В результате земной шар приобрел пластичные свойства. Более плотные вещества, такие, как металлы, притянулись к центру Земли и образовали ее ядро; менее плотные вещества всплыли на поверхность и образовали каменную оболочку Земли — литосферу.

Однако в литосфере нередко встречаются массивные залежи более плотных веществ — металлических руд. Вблизи этих залежей ускорение свободного падения больше, чем в областях, состоящих только из каменных пород. Точные измерения ускорения свободного падения помогают геологам обнаружить рудные залежи. Этот метод, называемый *гравиметрической разведкой*, широко применяется на практике.



### § 9.8. Влияние вращения Земли на ускорение свободного падения

1. В предыдущем параграфе выведена зависимость ускорения свободного падения от высоты тела над уровнем моря. Однако при этом мы не учли, что на эту величину влияет еще и суточное вращение Земли.

Пусть тело массой  $m$  расположено в точке  $A$  на географической широте  $\varphi$  (рис. 9.3). Поскольку это тело участвует в суточном вращении Земли, то оно движется по окружности радиуса

$AK = r = R \cos \varphi$ , где  $R$  — радиус Земли. Во всяком криволинейном движении есть нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 R \cos \varphi}{T^2},$$

где  $T$  — период вращения Земли.

Чтобы найти силу, вызывающую нормальное ускорение, разложим силу тяготения  $\mathbf{F}_{\text{тяг}}$  на две компоненты: центробежную силу  $\mathbf{F}_n$  и силу тяжести  $\mathbf{P}$ . Из рис. 9.3 видно, что сила тяжести повсюду, кроме полюсов, меньше силы тяготения.

Кроме того, повсюду, кроме экватора и полюсов, сила тяжести направлена не к центру Земли, а несколько в сторону.

Так как за счет вращения Земли сила тяжести на полюсах несколько больше, чем на экваторе, земной шар немного сплюснут: его полярный радиус равен 6356,9 км, а экваториальный — 6378,4 км.

2. Ускорение свободного падения на полюсе имеет максимальное значение. Действительно, здесь нормальное ускорение равно нулю, а полярный радиус имеет минимальные размеры. Следовательно,

$$g_{\text{пол}} = G_{\text{пол}} = \frac{GM}{R_{\text{пол}}^2}.$$

Ускорение свободного падения тела на экваторе есть разность между напряженностью поля тяготения и нормальным ускорением:

$$g_{\text{экв}} = G_{\text{экв}} - a_n^{\text{экв}} = \frac{GM}{R_{\text{экв}}^2} - \frac{4\pi^2 R_{\text{экв}}}{T^2}.$$

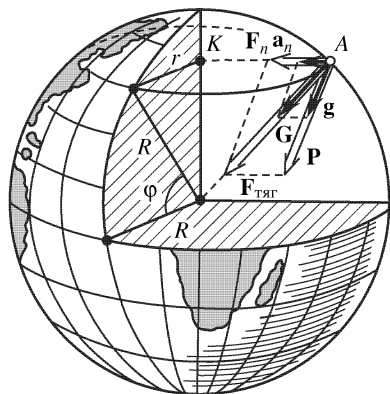


Рис. 9.3

Точные измерения дают

$$g_{\text{пол}} = 9,83210 \text{ м/с}^2, \quad g_{\text{экв}} = 9,78038 \text{ м/с}^2.$$

На широте  $45^\circ$  ускорение свободного падения тела  $g = 9,80620 \text{ м/с}^2$ .

При приближенных расчетах полагают  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

## Глава 10

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СИЛЫ

## § 10.1. Электрический заряд

1. Помимо гравитации, в природе существует особый класс *электромагнитных* взаимодействий: электрические и магнитные силы. Простейшим примером взаимодействий является притяжение или отталкивание наэлектризованных тел.

С явлением электризации тел позволяет ознакомиться следующий эксперимент. Два стержня из пластмассы установлены на иглах и могут свободно поворачиваться (рис. 10.1). На одном стержне укреплена хорошо отшлифованная металлическая пластинка, на другом — пластинка из плексигласа, также хорошо отшлифованная. Снимем стержни с игл и приведем пластинки в соприкосновение. Если вновь поставить стержни на иглы, то пластинки притянутся друг к другу. Эта сила, естественно, не является гравитационной, ибо масса тел до и после контакта остается неизменной, а гравитационные силы зависят только от масс тел и расстояния между ними. Следовательно, в данном эксперименте мы встречаемся с новым классом сил, которые называются *электрическими*.

2. Физическая величина, характеризующая свойство тел вступать при определенных условиях в электрические взаимодействия и определяющая величину электрических сил, называется *электрическим зарядом*. Явление, сопровождающееся перераспределением зарядов на телах, называется *электризацией*.

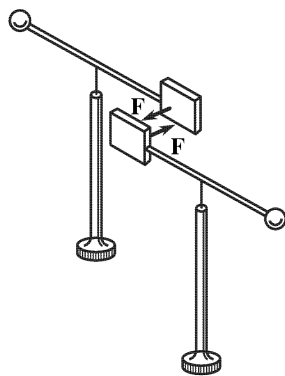


Рис. 10.1

Электризация тел при соприкосновении иногда называется еще электризацией вследствие трения, что по существу неверно. Трение здесь не играет принципиальной роли, оно лишь улучшает контакт между соприкасающимися телами и тем самым способствует их электризации.

3. При всех явлениях, связанных с перераспределением электрических зарядов в изолированной системе взаимодействующих тел, алгебраическая сумма электрических зарядов сохраняется постоянной. Этот *закон сохранения электрических зарядов* является таким же основным законом физики, как и другие законы сохранения, которые будут рассмотрены дальше (см. гл. 15).

## § 10.2. Закон Кулона

1. Опыт показывает, что сила электрического взаимодействия довольно сложным образом зависит от формы наэлектризованных тел и характера распределения заряда на этих телах. Следовательно, не существует единой простой формулы, описывающей электрическое взаимодействие для любого произвольного случая.

И только для *точечных зарядов* закон взаимодействия записывается в достаточно простой форме.

Заметим, что понятие точечного заряда является удобной абстракцией, аналогично понятию материальной точки (см. § 1.1). *Точечным* называется заряд, распределенный на теле, размеры которого значительно меньше, чем любые расстояния, встречающиеся в данной задаче.

2. Воспользовавшись крутильными весами (см. § 9.3), Кулон в 1785 г. смог опытным путем найти закон взаимодействия точечных зарядов. Крутильные весы Кулона (рис. 10.2) имели легкое стеклянное коромысло, которое заканчивалось с одной стороны металлическим шариком.

До этого шарика Кулон дотрагивался наэлектризованным стержнем, тоже с шариком на конце. При этом заряд распределялся между шариками и они отталкивались друг от друга. Коромысло закручивало нить до тех пор, пока сила упругости не уравновешивала силу электрического взаимодействия. Поворачивая рукоятку, можно было изменять угол закручивания нити, изменяя тем самым силу упругости и за счет этого расстояние между зарядами. Из ряда экспериментов Кулон нашел, что

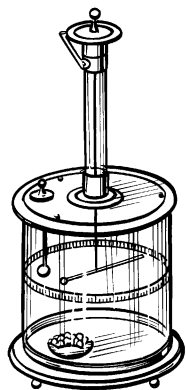


Рис. 10.2

сила электрического взаимодействия между зарядами изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния между ними.

В отличие от опыта Кавендиша, где массы взаимодействующих тел были известны, у Кулона не было метода для измерения заряда на шариках. Однако здесь оказалось возможным применить следующий прием. К наэлектризованному шарiku прикасались незаряженным шариком одинакового с ним размера, который потом уносили далеко от прибора. Поскольку при этом заряд распределялся поровну между обоими соприкоснувшимися телами, заряд пробного шарика уменьшался вдвое. Оказалось, что ровно во столько же раз уменьшалась и сила электрического взаимодействия.

Повторяя эту операцию несколько раз, Кулон пришел к выводу, что сила электрического взаимодействия пропорциональна произведению зарядов взаимодействующих тел.

3. Опыты Кулона были не очень точны, поскольку шарики были слишком велики и сила измерялась со значительной погрешностью. Наконец, опыты производились в воздухе, что хотя и незначительно, но все же влияло на результаты эксперимента. Тем не менее Кулону удалось сформулировать закон, который в дальнейшем блестяще подтвердился всей совокупностью электрических явлений: *сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами в вакууме прямо пропорциональна произведению этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними*

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (10.1)$$

Здесь  $F$  — сила взаимодействия,  $q_1$  и  $q_2$  — заряды,  $r$  — расстояние между ними,  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц, которой пользуются при расчетах.

4. *Кулоновская сила*, как и любая другая сила (например, гравитационная), подчиняется третьему закону Ньютона: *силы взаимодействия между зарядами равны по модулю и направлены противоположно друг другу вдоль прямой, соединяющей эти заряды*.

Опыт показывает, что одноименные электрические заряды отталкиваются друг от друга, а разноименные — притягиваются. Этим кулоновские силы принципиально отличаются от гравитационных, которые всегда являются силами притяжения.

Сила отталкивания, действующая на данный заряд, направлена в ту же сторону, что и радиус-вектор, проведенный к этому заряду; сила притяжения имеет противоположное направление

(рис. 10.3). Поэтому целесообразно приписать этим силам соответствующие знаки: силам отталкивания — положительный, силам притяжения — отрицательный.

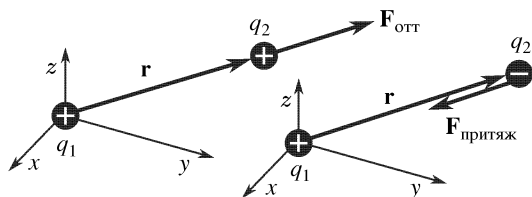


Рис. 10.3

Закон Кулона учитывает знак сил автоматически: если заряды одноименные, то их произведение является положительным числом и сила отталкивания имеет тот же знак. Если же заряды имеют разные знаки, то их произведение является отрицательным числом, что соответствует знаку силы притяжения.

### § 10.3. Единица заряда

1. В СИ единицей заряда служит *кулон*.

По определению, два неподвижных точечных заряда по 1 кулону, расположенные на расстоянии 1 м друг от друга, взаимодействуют в вакууме с силой, равной  $9 \cdot 10^9$  Н. Поскольку коэффициент  $k$  в законе Кулона (аналогично гравитационной постоянной в законе тяготения) численно равен силе, с которой два единичных заряда взаимодействуют на единичном расстоянии, то

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2. \quad (10.2)$$

В СИ закон Кулона принято писать в виде

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2}. \quad (10.3)$$

Величина  $\varepsilon_0$  называется *электрической постоянной*. Сравнивая (10.1) и (10.3), получим

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2) = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2). \quad (10.4)$$

2. За единицу электрического заряда естественно было бы выбрать заряд электрона. В этом случае заряд любого другого тела выражался бы целым числом, показывающим, сколько электронов это тело приобрело (или потеряло) при электризации. Однако, поскольку единица заряда уже выбрана, заряд электрона

был определен опытным путем. Оказалось, что заряд электрона (элементарный заряд)  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  Кл (§ 37.10). Отсюда следует, что  $1 \text{ Кл} = 6,25 \cdot 10^{18} e$ .

3. Сравним силу гравитационного и электрического взаимодействий между двумя электронами. Имеем

$$F_{\text{кул}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad F_{\text{грав}} = \frac{Gm^2}{r^2},$$

где  $m = 9 \cdot 10^{-31}$  кг — масса покоя электрона;

$$\frac{F_{\text{кул}}}{F_{\text{грав}}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 Gm^2} = \frac{1,6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 36\pi \cdot 10^9}{4\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 9^2 \cdot 10^{-62}} \approx 4 \cdot 10^{42}.$$

Таким образом, при рассмотрении явлений, протекающих в электрически заряженных системах и, в частности, в мире молекул, атомов и атомных ядер, можно полностью пренебречь гравитационными силами по сравнению с электрическими. И только для космических тел (планет, звезд), обладающих огромными массами, гравитационные силы начинают играть преобладающую роль.

## § 10.4. Диполь

1. *Диполем* называется электрическая система, состоящая из двух зарядов  $q$ , равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку (рис. 10.4). Характеристикой диполя является его *электрический момент*:

$$p_e = ql. \quad (10.5)$$

Вектор  $\mathbf{l}$  считается направленным от отрицательного к положительному заряду. Модуль  $|\mathbf{l}| = l$  называется *плечом диполя*. Вектор  $\mathbf{p}_e$  направлен в ту же сторону, что и вектор  $\mathbf{l}$ .



Рис. 10.4

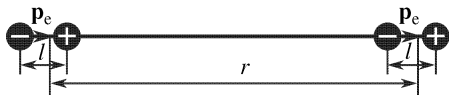


Рис. 10.5

Поскольку диполь представляет собой электрически нейтральную систему, то на первый взгляд может показаться, что диполи не способны к электрическому взаимодействию. Однако такой вывод является слишком поспешным. *Диполи взаимодействуют*, и это вызвано тем фактом, что заряды, образующие диполь, расположены в разных точках пространства.

2. Рассмотрим случай взаимодействия двух одинаковых диполей, расположенных вдоль одной оси. Расстояние между центрами диполей обозначим буквой  $r$ ; пусть это расстояние много больше плеча диполя:  $r \gg l$  (рис. 10.5).

Сила взаимодействия складывается из четырех компонентов — двух сил отталкивания между одноименными зарядами и двух сил притяжения между разноименными зарядами:

$$F = \frac{(-q)(-q)}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{(-q)q}{4\pi\epsilon_0 (r-l)^2} + \frac{(-q)q}{4\pi\epsilon_0 (r+l)^2} =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2}{r^2} - \frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right].$$

После несложных преобразований получим

$$F = -\frac{6q^2 l^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - (l^2/3)}{r^2(r^2 - l^2)^2}.$$

Обозначив  $ql = p_e$  и отбрасывая  $l^2$  как очень малую величину по сравнению с  $r^2$ , имеем

$$F = -\frac{6p_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}. \quad (10.6)$$

Нетрудно обобщить это выражение для случая взаимодействия диполей с разными электрическими дипольными моментами  $\mathbf{p}_{1e}$  и  $\mathbf{p}_{2e}$ :

$$F = -\frac{6p_{1e}p_{2e}}{4\pi\epsilon_0 r^4}. \quad (10.7)$$

Итак, если дипольные моменты двух диполей расположены вдоль одной прямой и одинаково направлены, то они притягиваются, причем сила притяжения пропорциональна произведению электрических моментов диполей и обратно пропорциональна четвертой степени расстояния между ними. Следовательно, дипольное взаимодействие убывает с расстоянием значительно быстрее, чем взаимодействие между точечными зарядами.

Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что диполи, моменты которых расположены вдоль одной прямой и направлены в противоположные стороны, отталкиваются с такой же по величине силой.

3. Вычислим силу взаимодействия между диполями, ориентированными так, как показано на рис. 10.6. Равнодействующая сила

$$F' = F_1 + F_2 - F_3 \cos \alpha - F_4 \cos \alpha = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{2q^2 \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Учитывая, что  $\cos \alpha = r/R$  и  $R^2 - r^2 = l^2$ , получим после сложных преобразований

$$F' = \frac{2q^2 l^2 (r^2 + Rr + r^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2 R^3 (R + r)}.$$

Полагая, как и выше, что  $l \ll r$ , следовательно,  $R \approx r$ , имеем

$$F' = \frac{2q^2 l^2 \cdot 3r^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2r^6} = \frac{3p_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} = \frac{F}{2}. \quad (10.6')$$

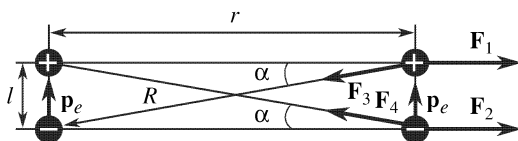


Рис. 10.6

Читатель может легко убедиться, что при антипараллельной ориентации дипольных моментов возникнет такая же по величине сила притяжения.

4. Сравнивая выражения (10.6) и (10.6'), мы убеждаемся, что, в отличие от центральных сил (гравитационных и кулоновских), сила взаимодействия между диполями зависит не только от расстояния между ними, но и от их взаимной ориентации. Аналогичными свойствами обладают ядерные силы.

Дипольное взаимодействие играет исключительно важную роль в физике. Оказывается, что всякая система, состоящая из асимметрично расположенных зарядов, алгебраическая сумма которых равна нулю, может в первом приближении рассматриваться как диполь. Это позволяет объяснить один из видов молекулярного взаимодействия — так называемые силы Ван-дер-Ваальса (см. § 31.3).

## § 10.5. Электрическое поле. Напряженность

1. Аналогично тому, как было введено понятие о гравитационном поле (см. § 9.5), введем понятие об электрическом поле. А именно, будем считать, что электрическое взаимодействие осуществляется по схеме «заряд–поле–заряд»: каждый заряд создает вокруг себя электрическое поле, которое действует на все остальные заряженные частицы.

*Электрическое поле материально.* Оно существует независимо от нашего сознания и может быть обнаружено по его воздей-



ствию на физические объекты, например измерительные приборы.

2. Силовой количественной характеристикой электрического поля является векторная величина, называемая *напряженностью* электрического поля  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (10.8)$$

Напряженность поля численно равна отношению силы, действующей в данной точке поля на пробный положительный точечный заряд  $q$ , к значению этого заряда. Пробный заряд должен быть столь малым, чтобы его поле не искажало исследуемого поля.

### § 10.6. Поле точечного заряда и диполя

1. Выражение для напряженности поля точечного заряда можно получить из закона Кулона. Обозначив заряд, создающий поле, буквой  $Q$ , а пробный положительный заряд через  $q$ , имеем

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (10.9)$$

Заряд, создающий поле, мы поместим в начало координат (рис. 10.7). Проведем радиус-вектор в интересующую нас точку поля  $M$ . Тогда при положительном знаке источника поля вектор напряженности направлен в ту же сторону, что и радиус-вектор, а при отрицательном — в противоположную.

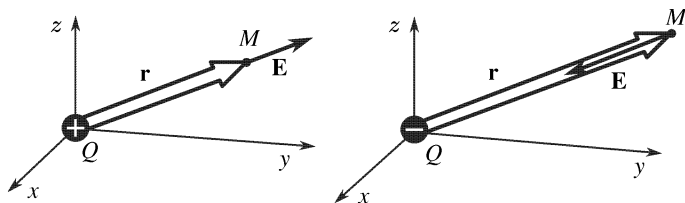


Рис. 10.7

Заметим, что напряженность в данной точке определяется источником поля  $Q$  и радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , но не зависит от пробного заряда  $q$ . Это позволяет говорить о поле в данной точке пространства независимо от того, находится ли в этой точке пробный заряд или нет.

2. Поле любого заряженного тела, вообще говоря, можно рассчитать, исходя из того, что напряженность — вектор, а закон сложения векторов нам известен. Метод принципиально несложен: нужно разбить тело на столь малые участки, чтобы заряд этих участков можно было считать точечным, вычислить напряженность поля, создаваемого каждым точечным источником, а затем найти *векторную сумму* по правилу многоугольника.

3. Вычислим напряженность поля на оси диполя  $E_{\parallel}$  и в точке на нормали к середине оси диполя  $E_{\perp}$  (рис. 10.8). При этом, как и в § 10.4, расстояние от точки поля до оси диполя значительно

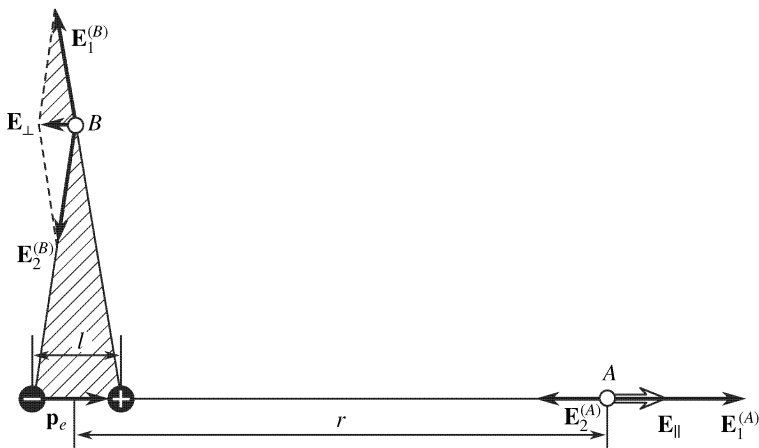


Рис. 10.8

больше плеча диполя:  $r \gg l$ . Напряженность поля в точке A равна векторной сумме напряженностей полей, созданных положительным и отрицательным зарядами. Так как  $E_1$  и  $E_2$  направлены по одной прямой, то

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= E_1^{(A)} + E_2^{(A)} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r - l/2)^2} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 (r + l/2)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2lr}{(r^2 - l^2/4)^2}. \end{aligned}$$

Отбрасывая малую величину  $l^2 \ll r^2$  и полагая  $ql = p_e$ , имеем

$$E_{\parallel} = \frac{2p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (10.10)$$

Напряженность поля в точке B равна векторной сумме напряженностей  $E_1^{(B)}$  и  $E_2^{(B)}$ . Из подобия треугольника напряженностей и треугольника расстояний (на рисунке заштрихованы)

имеем

$$\frac{E_{\perp}}{E_1^{(B)}} = \frac{l}{R}.$$

Из формулы (10.9) следует, что  $E_1^{(B)} = q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ ; следовательно,

$$E_{\perp} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

При  $r \gg l$  можно без особой погрешности положить, что  $R \approx r$ . Тогда

$$E_{\perp} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (10.11)$$

Итак, напряженность поля, создаваемого диполем, пропорциональна моменту диполя и обратно пропорциональна кубу расстояния от точки поля до центра диполя.

4. Напряженность поля и момент диполя являются векторами. Из рис. 10.8 видно, что векторы  $\mathbf{E}_{\parallel}$  и  $\mathbf{p}_e$  направлены одинаково, а вектор  $\mathbf{E}_{\perp}$  направлен противоположно. Следовательно, в векторной форме выражения (10.10) и (10.11) примут вид

$$E_{\parallel} = \frac{2p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (10.12)$$

$$E_{\perp} = -\frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (10.13)$$

## Глава 11

### ТРЕНИЕ

#### § 11.1. Внешнее и внутреннее трение

*Силой трения*  $T$  называется сила, возникающая при соприкосновении поверхностей двух тел и препятствующая их взаимному перемещению. Она приложена к телам вдоль поверхности их соприкосновения и направлена всегда противоположно *относительной скорости* перемещения.

Различают *внешнее* (сухое) и *внутреннее* (жидкое или вязкое) трение.

*Внешним трением* называется взаимодействие между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел. Если эти тела неподвижны друг относительно друга, то говорят о *трении покоя*; при относительном перемещении говорят о *трении скольжения*,

или кинематическом трении. В случае, когда одно из тел катится по поверхности другого без проскальзывания, возникает особый вид сопротивления, называемый *трением качения*.

*Внутренним трением* называется взаимодействие, возникающее между слоями жидкости или газа, движущимися друг относительно друга. В отличие от внешнего трения, здесь отсутствует трение покоя.

## § 11.2. Трение покоя

1. Особенности внешнего трения могут быть изучены с помощью установки, изображенной на рис. 11.1. Брусок, лежащий на гладкой горизонтальной доске, с помощью динамометра крепится к нитке, которая наматывается на барабан, насаженный на

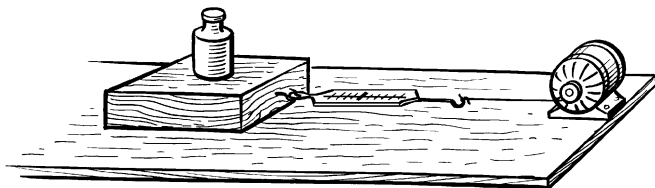


Рис. 11.1

ось электродвигателя. Динамометр служит для измерения силы тяги  $F$ . Регулируя скорость вращения двигателя, можно менять силу тяги в нужных пределах. Опыт показывает, что до тех пор, пока сила тяги меньше некоторой величины  $F_{\text{мин}}$ , брусок с места не сдвигается. При большей же силе тяги он скачком срывается с места и затем, в зависимости от условий опыта, движется равномерно или ускоренно.

2. Отсутствие ускорения у бруска при наличии силы тяги можно объяснить только тем, что *сила тяги уравновешивается силой трения*.

Основной закон динамики имеет вид

$$\mathbf{F} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}. \quad (11.1)$$

При  $a = 0$  брусок либо покоится, либо движется равномерно. Следовательно, здесь  $|\mathbf{F}| = |\mathbf{T}|$ , откуда следует, что для измерения силы трения покоя или силы трения скольжения достаточно измерить соответствующую этому состоянию силу тяги.

*Сила трения покоя не является однозначно определенной величиной.* В зависимости от приложенной силы тяги сила трения

покоя меняется от нуля до  $F_{\min}$  — того значения силы, когда брусок скачком начинает двигаться. Поэтому

$$T_{\text{пок}} < T_{\text{пок}}^{\text{макс}} = F_{\min}. \quad (11.2)$$

Обычно силой трения покоя и называют *максимальную силу трения покоя*.

3. Теория явления внешнего трения еще недостаточно разработана, но в общих чертах механизм возникновения трения покоя выглядит так.

Поверхность твердого тела, даже хорошо отшлифованного, далеко не ровная. На ней имеются микровыступы, впадины, трещины; часто эта поверхность покрыта окислами, прилипшими слоями газа или жидкости, посторонними включениями. При соприкосновении поверхностей двух тел микровыступы частично попадают в соответствующие впадины. Естественно, что зацепление этих выступов будет препятствовать перемещению соприкасающихся тел друг относительно друга.

На ряде участков расстояние между соприкасающимися телами может оказаться порядка радиуса действия молекулярных сил. Это приведет к *слипанию* тел на данных участках, что также препятствует их относительному перемещению.

Внедрению микровыступов и частичному слипанию поверхностей способствует внешняя *сила нормального давления*  $P_n$ , прижимающая твердые тела друг к другу. Этой силой может служить сила тяжести или ее нормальная компонента (если тело лежит на наклонной плоскости), а также любая другая сила, перпендикулярная поверхности соприкосновения тел.

Сила тяги, меньшая максимальной силы трения покоя, вызывает в основном упругие деформации микровыступов и областей, где действуют силы молекулярного сцепления. Возникшая сила упругости и есть, по существу, сила трения покоя.

4. Изложенные соображения позволяют лишь качественно объяснить происхождение трения покоя, но они недостаточны для расчета величины силы трения. Для получения соответствующего закона обратимся к эксперименту.

Нагружая разными гирями брусок (см. рис. 11.1), будем менять силу нормального давления  $P_n$  (а следовательно, и равную ей силу реакции  $Q = P_n$ ). Измеряя каждый раз силу тяги, мы убедимся, что *сила трения покоя пропорциональна силе нормального давления*:

$$T_{\text{пок}}^{\text{макс}} = \mu_{\text{пок}} Q. \quad (11.3)$$

Величина  $\mu_{\text{пок}}$  называется *коэффициентом трения покоя*.

Меняя площадь бруска, например поворачивая его с основания на бок, мы заметим, что *сила трения покоя не зависит от площади бруска*. Разделим обе части равенства (11.3) на площадь соприкосновения и обозначим через  $\tau = T/S$  величину, называемую *касательным напряжением*; поскольку  $p = P_n/S$  есть давление, то полученный закон трения можно записать так:

$$\tau_{\text{пок}}^{\text{макс}} = \mu_{\text{пок}} p. \quad (11.4)$$

5. Коэффициент трения покоя зависит от качества обработки поверхностей. У шлифованных поверхностей трение обычно меньше, чем у грубо обработанных. Но это справедливо лишь до известных пределов. А именно, опыт показывает, что при очень тщательной шлифовке тела прилипают друг к другу, что вызывает резкое возрастание коэффициента трения. По-видимому, у грубо обработанных поверхностей основную роль в возникновении силы трения играют зацепления выступов, а при тщательной шлифовке — молекулярное сцепление.

Сила трения покоя также зависит от того, сколько времени тела находятся в контакте друг с другом. При длительном контакте тел и значительной силе нормального давления происходят пластические деформации соприкасающихся поверхностей. Это способствует слипанию тел и приводит к росту силы трения покоя.

### § 11.3. Угол трения покоя

Для определения коэффициента трения удобно использовать установку, изображенную на рис. 11.2. Приподнимая осторожно наклонную плоскость, заметим, что при некотором угле  $\varphi_0$  брусок скачком сдвигается с места и начинает скользить по плоскости.

В данном случае на брусок действуют три силы: сила тяжести  $P$ , сила реакции опоры  $Q$  и сила трения  $T_{\text{пок}}$ . При отсутствии ускорений равнодействующая всех трех сил равна нулю, т. е. они образуют замкнутый треугольник. Поскольку сила тяжести направлена по вертикали, сила трения — вдоль наклонной плоскости, а сила реакции перпендикулярна ей, то треугольник сил  $QPT_{\text{пок}}$  является прямоугольным, а угол при его вершине равен  $\varphi_0$ . Отсюда следует, что

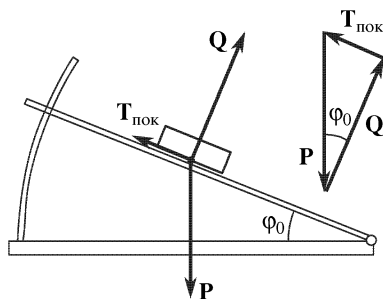


Рис. 11.2

$$T_{\text{пок}} = Q \operatorname{tg} \varphi_0. \text{ Поскольку } T_{\text{пок}} = \mu_{\text{пок}} Q, \text{ то}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \mu_{\text{пок}}. \quad (11.5)$$

Измерения для разных материалов при различном качестве их обработки показывают, что коэффициент трения покоя меняется в весьма широких пределах — от нескольких сотых до единицы. При значительном же молекулярном сцеплении коэффициент трения может достичь значения 2–3.

### § 11.4. Трение скольжения

1. Опыт показывает, что при *равномерном* движении бруска, изображенного на рис. 11.1, к нему должна быть все время приложена сила тяги. Но равномерное движение является инерциальным; оно происходит само по себе, без воздействия внешних сил. Очевидно, что отсутствие ускорения у бруска при наличии силы тяги можно объяснить только тем, что *сила тяги уравновешивается силой трения скольжения*.

Исследовав силу трения скольжения при различных условиях, мы увидим, что она, как и сила трения покоя, зависит от нормального давления и качества обработки трущихся поверхностей. Она не зависит от площади их соприкосновения и мало зависит от скорости относительного движения трущихся тел. Это позволяет силу трения скольжения вычислять по формуле

$$T_{\text{ск}} = \mu Q, \quad (11.6)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения скольжения.

2. Если трение покоя вызывается в основном упругими деформациями микровыступов на поверхностях соприкасающихся тел, то трение скольжения возникает в результате пластических деформаций микровыступов и их частичного разрушения. Действительно, различные микровыступы в состоянии покоя находятся под действием неодинаковых сил, да и прочность разных выступов различна. Под действием силы тяги некоторые из них сразу же разрушаются. При этом сила тяги сосредоточится на еще не разрушенных участках, которые уже не смогут выдерживать возросшую нагрузку. В результате происходит лавинообразное разрушение микровыступов, и тело скачком срывается с места. Сила трения при этом убывает, ибо уменьшение зацепления и прилипания поверхностей содействует их взаимному проскальзыванию, в результате чего коэффициент трения скольжения  $\mu$  меньше коэффициента трения покоя  $\mu_{\text{пок}}$ .

3. Качественный анализ механизма трения скольжения показывает, что оно сопровождается *износом* и *нагревом* трущихся поверхностей. Характер износа определяется состоянием трущихся поверхностей — степенью их шероховатости, твердости и т. п. Благодаря износу возможны некоторые виды обработки материалов — шлифовка и полировка.

Износ и нагрев трущихся деталей механизмов и машин условно вреден; поэтому в технике принимают ряд мер для уменьшения трения. Для этой цели часто применяется смазка (см. § 11.7). Трение скольжения заменяют также трением качения, устанавливая шариковые или роликовые подшипники.

### § 11.5. Трение качения

1. Заменим в установке, изображенной на рис. 11.1, скользящий брусок цилиндром, который может вращаться на оси (рис. 11.3). Если зажать скобки на оси так, чтобы цилиндр не

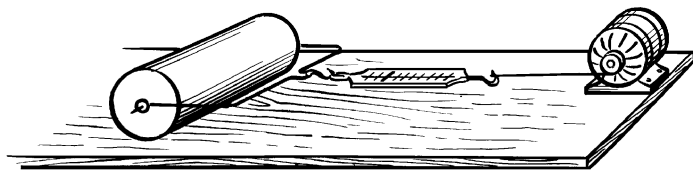


Рис. 11.3

вращался, то он будет скользить по поверхности доски. При этом сила трения заметно не отличается от силы трения бруска, ибо она практически не зависит от площади соприкосновения трущихся тел. Если же скобки на оси отпустить, то цилиндр станет катиться и сила трения резко уменьшится. Итак, *сила трения качения значительно меньше силы трения скольжения*.

2. опыты показывают, что сила трения качения пропорциональна силе нормального давления и обратно пропорциональна радиусу цилиндра (или колеса):

$$T_{\text{кач}} = k \frac{Q}{r}. \quad (11.7)$$

Здесь  $k$  — коэффициент трения качения; он имеет размерность длины и в Международной системе единиц измеряется в метрах. Выражением (11.7) можно пользоваться только в том случае, когда цилиндр не проскальзывает по поверхности.



### § 11.6. Движение тел под действием силы трения

1. До сих пор мы рассматривали силу трения как некое препятствие для движения тела. Однако это так далеко не всегда. На самом деле именно наличие трения покоя дает возможность двигаться, скажем, человеку или автомобилю по земной поверхности, поезду или трамваю — по рельсам и т. д. Действительно, при движении человека между подошвой его обуви и землей возникает сила трения покоя. Эта сила и вызывает его перемещение. Всем известно, как трудно ходить по льду, где сила трения покоя слишком мала.

2. Выясним роль силы трения при повороте велосипедиста на горизонтальном участке пути. Из опыта известно, что для поворота необходимо наклониться в соответствующую сторону, что вызовет автоматический поворот руля.

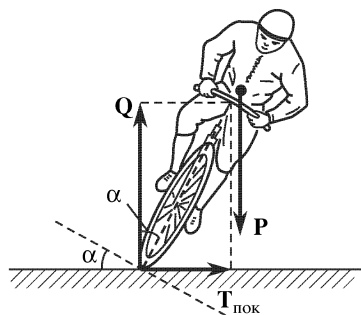


Рис. 11.4

Рассмотрим силы, действующие на велосипедиста при его наклоне влево (рис. 11.4). Сила тяжести  $P$  и сила реакции опоры  $Q$  действуют уже не по одной прямой. Под действием этих сил велосипедист начинает вращаться в вертикальной плоскости, что должно было бы вызвать проскальзывание колеса. При этом возникает сила

трения покоя  $T_{\text{пок}}$ , направленная в ту сторону, куда наклонился велосипедист.

Поскольку сила трения перпендикулярна скорости, она сообщает велосипедисту нормальное ускорение  $a_n = v^2/r$ . Из основного закона динамики следует, что центростремительная сила равна силе трения покоя:

$$\frac{mv^2}{r} = T_{\text{пок}} \leq \mu_{\text{пок}} mg,$$

или

$$\frac{v^2}{r} \leq g \mu_{\text{пок}}.$$

Угол наклона велосипедиста (считая от вертикали) можно найти из условия, что равнодействующая силы реакции и силы трения

должна быть направлена вдоль движущегося тела:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T_{\text{пок}}}{Q} = \frac{mv^2}{rmg} = \frac{v^2}{rg} \leq \mu_{\text{пок}}.$$

Велосипедист не должен отклоняться от вертикали больше чем на угол трения  $\varphi_0 = \arctg \mu_{\text{пок}}$ . Для того чтобы создать возможность крутого поворота на больших скоростях, велосипедную дорожку (трек) профилируют, наклоняя ее на угол, соответствующий условию  $\operatorname{tg} \alpha \approx v^2/rg$ .

### § 11.7. Внутреннее трение (вязкость)

1. Опыт показывает, что в движущихся жидкостях или газах возникают силы внутреннего трения. Наличие этих сил можно обнаружить с помощью установки, изображенной на рис. 11.5. На тонкой нити подвешивают тяжелый цилиндр. В наружный цилиндрический сосуд, ось которого совпадает с подвесом, наливают жидкость. Если наружный цилиндр привести во вращение, то внутренний цилиндр повернется на некоторый угол. Следовательно, вращающаяся жидкость действует на поверхность внутреннего цилиндра с силой, которая уравновешивается упругостью закрученной нити. Эта сила зависит от расстояния между наружным и внутренним цилиндрами, от скорости вращения наружного цилиндра, рода жидкости и ее температуры.

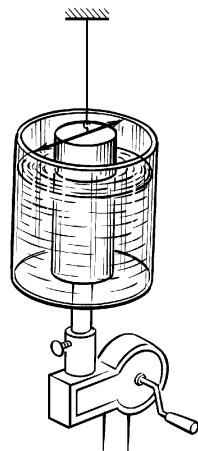


Рис. 11.5

2. Явление внутреннего трения описывается следующим образом. Пусть между двумя плоскостями находится слой жидкости; верхняя плоскость движется относительно нижней со скоростью  $v$  (рис. 11.6). Мысленно разобьем жидкость на очень тонкие слои параллельными плоскостями, отстоящими на расстоянии  $\Delta n$  друг от друга. Слои жидкости, касающиеся твердых тел, прилипают к ним. Промежуточные слои имеют распределение скоростей, изображенное на рис. 11.6. Это распределение характеризуется *градиентом скорости* — величиной  $\Delta v/\Delta n$ , показывающей, как быстро меняется абсолютная величина скорости при перемещении на единицу длины в направлении, перпендикулярном вектору скорости (соответственно — слоям жидкости).

Между соприкасающимися слоями жидкости при наличии градиента скорости возникают силы, направленные вдоль плоскости соприкосновения и препятствующие их относительному перемещению, — силы внутреннего трения. Согласно Ньютону, *касательное напряжение сил внутреннего трения пропорционально градиенту скорости*:

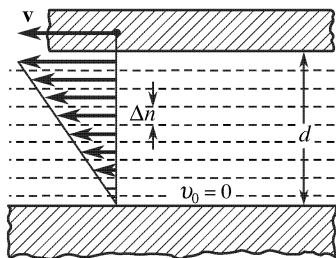


Рис. 11.6

где  $\eta$  — коэффициент внутреннего трения, или *вязкость* жидкости.

$$\tau = \frac{T_{\text{внутр}}}{S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta n}, \quad (11.8)$$

Единицей вязкости в СИ является *паскаль-секунда*:

$$\text{Па} \cdot \text{с} = \text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2,$$

ее размерность  $[\eta] = \text{Л}^{-1} \text{МТ}^{-1}$ .

3. Силы внутреннего трения проявляются не только в жидкостях, но и в газах. В этом можно убедиться, приводя в быстрое вращение установку, изображенную на рис. 11.5, когда между телами находится воздух (или какой-либо другой газ). Вязкость газов весьма мала — примерно в  $10^5$  раз меньше, чем вязкость жидкостей.

Силы внутреннего трения значительно меньше сил трения скольжения. Поэтому для уменьшения трения между движущимися частями механизмов и машин используется смазка — слой вязкой жидкости, заполняющий пространство между трущимися поверхностями и оттесняющий их друг от друга. Это приводит к существенному уменьшению сил трения, что связано с уменьшением нагрева и износа деталей. Вместе с тем следует избегать попадания жидкости между фрикционными муфтами, между ремнем и шкивом в ременной передаче, между ведущими колесами локомотива и рельсом и т. д., ибо во всех этих случаях именно сила трения служит для передачи движения. Уменьшение трения в этих случаях безусловно вредно.

## § 11.8. Движение тела в жидкости

1. Опыт показывает, что тело, движущееся в жидкости или газе, испытывает сопротивление. Это сопротивление зависит от размеров и формы тела, от скорости его движения и свойств жидкости или газа.

Рассмотрим поток жидкости, движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  в некоторой системе координат, связанной с неподвижным телом. Из принципа относительности следует, что сила, с которой движущийся поток действует на тело, в точности равна силе сопротивления, которую испытывало бы это тело, двигаясь с той же скоростью в неподвижной жидкости.

2. Поток жидкости, набегаая на тело, деформируется и обтекает его. При этом слои жидкости, прилегающие непосредственно к телу, прилипают к нему. При определенных условиях образуется так называемый *пограничный слой* — область жидкости, в которой скорость очень быстро возрастает от нуля примерно до скорости невозмущенного потока, т. е. имеется большой градиент скорости. При отрыве пограничного слоя от тела за ним возникают вихри (рис. 11.7). Сопротивление жидкости или газа в значительной мере определяется явлениями, происходящими в пограничном слое, и характером вихрей. Однако детальный анализ явлений в пограничном слое и вычисление сил сопротивления является исключительно сложной задачей.

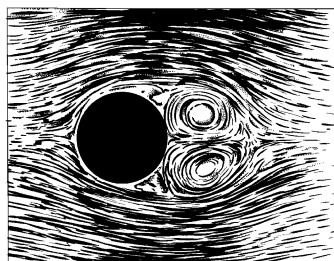


Рис. 11.7

Мы можем попытаться оценить лишь *порядок* этих сил и основные параметры, от которых они зависят.

Можно считать, что сила сопротивления состоит из двух составляемых: сопротивления давления и сопротивления трения. Первое определяется *разностью давлений* на передней и задней кромках обтекаемого тела, второе — *силами внутреннего трения*, возникающими за счет большого градиента скорости в пограничном слое. Для оценки влияния каждого из этих компонентов применим метод размерностей.

3. Сила сопротивления, возникающая вследствие разности давлений на передней и задней кромках обтекаемого тела, зависит от плотности жидкости, скорости потока и площади максимального поперечного сечения, перпендикулярного потоку:

$$R = \frac{C}{2} \rho^\alpha v^\beta S^\gamma, \quad (11.9)$$

где  $C$  — безразмерный коэффициент.

В любом равенстве размерности левой и правой частей одинаковы, т. е.  $[R] = [\rho^\alpha v^\beta S^\gamma]$ . Подставив  $[R] = \text{ЛМТ}^{-2}$ ,  $[\rho] = \text{Л}^{-3}\text{М}$ ,  $[v] = \text{ЛТ}^{-1}$  и  $[S] = \text{Л}^2$ , определим неизвестные показатели  $\alpha$ ,  $\beta$

и  $\gamma$ . Имеем

$$LMT^{-2} = L^{-3\alpha} M^{\alpha} L^{\beta} T^{-\beta} L^{2\gamma},$$

откуда  $\alpha = 1$ ;  $-3\alpha + \beta + 2\gamma = 1$ ,  $-\beta = -2$ , т.е.  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$ .

Выражение для сопротивления давления имеет вид

$$R = CS \frac{\rho v^2}{2}. \quad (11.10)$$

Коэффициент  $C$ , входящий в это выражение, зависит от формы тела, или, как говорят, от его удобообтекаемости. Так, если для круглого диска  $C = 1,1-1,2$ , то для шара  $C = 0,4-0,2$ , а для каплеобразного обтекаемого тела  $C \approx 0,04$ , т.е. примерно в 10 раз меньше, чем у шара, и в 30 раз меньше, чем у диска (рис. 11.8).

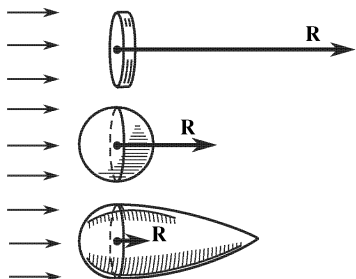


Рис. 11.8

4. Сила вязкого трения, как это следует из (11.8), должна зависеть от вязкости, скорости и размеров тела:

$$T = B\eta^m v^n L^k, \quad (11.11)$$

где  $B$  — безразмерный коэффициент, а  $L$  — характерный размер тела. Анализ размерностей левой и правой частей дает

$$LMT^{-2} = L^{-m} M^m T^{-m} L^n T^{-n} L^k,$$

откуда

$$m = 1, \quad -m + n + k = 1, \quad -m - n = -2,$$

следовательно,

$$m = n = k = 1.$$

Выражение для сопротивления трения имеет вид

$$T = B\eta v L. \quad (11.12)$$

Коэффициент  $B$ , как и  $C$ , чаще всего определяется экспериментально. Для шара, как показал Стокс,  $B = 6\pi$ , а характерным размером является радиус. Итак, для шара

$$T = 6\pi\eta vr. \quad (11.13)$$

5. Полная сила сопротивления является довольно сложной комбинацией сопротивления давления  $R$  и сопротивления трения  $T$ . Однако при очень малых скоростях сила трения, пропорциональная первой степени скорости, будет значительно больше силы давления, которая пропорциональна второй степени скорости. При больших скоростях, очевидно, справедливо обратное.

Поскольку понятия «большая» и «малая» скорость являются довольно неопределенными, введем специальный критерий для ее оценки. Для этого найдем отношение сопротивления давления к сопротивлению трения:

$$\frac{R}{T} = \frac{C}{2B} \frac{\rho v^2 S}{\eta v L}.$$

Отбрасывая безразмерные коэффициенты  $C$  и  $B$  и считая площадь сечения пропорциональной квадрату характерного размера ( $S \sim L^2$ ), получим

$$\frac{R}{T} \approx \frac{\rho v L}{\eta} = \text{Re}. \quad (11.14)$$

Безразмерное число  $\text{Re}$ , называемое *числом Рейнольдса*, играет исключительно важную роль в гидро- и аэродинамике: именно оно и определяет величину сопротивления.

Так, для «ползущих» течений, когда  $\text{Re} < 1$ , можно пренебречь силами давления и учитывать только силы трения. Наоборот, при больших значениях числа Рейнольдса следует учитывать только силы давления, отбрасывая силы трения.

### § 11.9. Падение тела в жидкости или газе

1. Выше было рассмотрено свободное падение тел, т. е. движение тел под действием одной лишь силы тяжести. Мы установили, что это движение является равноускоренным, и нашли соответствующий закон движения (см. § 8.2). Здесь мы рассмотрим падение тела в среде с сопротивлением — в жидкости или газе. Заодно выясним, при каких условиях можно пренебречь сопротивлением воздуха и рассматривать падение тела в воздухе как свободное.

2. На тело, падающее в жидкости или газе, действуют три силы: сила тяжести  $\mathbf{P}$ , архимедова выталкивающая сила  $\mathbf{F}_{\text{арх}}$  и сила сопротивления  $\mathbf{F}_{\text{сопр}}$  (рис. 11.9). Основной закон динамики в этом случае запишется так:

$$ma = P - F_{\text{арх}} - F_{\text{сопр}}. \quad (11.15)$$

Из трех сил лишь одна является переменной — это сила сопротивления, которая быстро возрастает с ростом скорости. Сила

тяжести и архимедова сила являются постоянными величинами. Естественно, что с течением времени, по мере возрастания скорости, ускорение уменьшается, и наступит такой момент, когда оно станет равно нулю. Начиная с этого момента тело будет

двигаться *равномерно*. Итак, падение тела в жидкости и газе лишь на начальном этапе является ускоренным; начиная с некоторого момента тело падает с постоянной скоростью, которая называется *установившейся*.

3. Установившаяся скорость  $v_{\text{уст}}$  может быть найдена из (11.15) при условии  $a = 0$ :

$$P - F_{\text{арх}} - F_{\text{сопр}}^{\text{уст}} = 0. \quad (11.16)$$

Для того чтобы произвести соответствующий расчет, следует оценить порядок числа Рейнольдса и выбрать соответствующее выражение для силы сопротивления.

При малых числах Рейнольдса, например, если шарик падает в вязкой жидкости с небольшой высоты, в формулу (11.16) подставляют значение силы трения по формуле Стокса (11.13).

4. При больших числах Рейнольдса сила сопротивления обусловлена в основном сопротивлением давления  $R$ . Основной закон динамики примет вид (пренебрегая для газов выталкивающей силой  $F_{\text{арх}} \ll P$ )

$$ma = mg - CS \frac{\rho_0 v^2}{2}, \quad (11.17)$$

где  $\rho_0$  — плотность газа.

Если тяжелое тело малых размеров падает с небольшой высоты, то сила сопротивления может оказаться много меньше силы тяжести. Тогда можно сопротивлением пренебречь и считать, что тело падает почти свободно. Если же тело падает с большой высоты, то сопротивлением уже пренебречь нельзя, и начиная с некоторого момента тело будет падать с установившейся скоростью, которую легко определить из (11.17), положив  $a = 0$ :

$$v_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho_0}}. \quad (11.18)$$

Так, дождевые капли, имеющие форму шара ( $C = 0,4$ ) радиусом около  $r \approx 1\text{--}2$  мм, при плотности воздуха  $\rho_0 \approx 1 \text{ кг/м}^3$  падают с установившейся скоростью независимо от высоты облаков над поверхностью Земли (для воды  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ):

$$v_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4\pi r^3 \rho g}{3C\pi r^2 \rho_0}} = \sqrt{\frac{8r\rho g}{3C\rho_0}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 9,8}{3 \cdot 0,4 \cdot 1}} \approx 8 \text{ м/с}.$$

5. Анализ формулы (11.18) позволяет понять роль парашюта. Человек, падая без парашюта со значительной высоты, имел бы установившуюся скорость порядка нескольких десятков метров в секунду. Удар о земную поверхность с такой скоростью привел

бы к его гибели. При раскрытии парашюта сила сопротивления резко возрастает: у парашюта площадь сечения, обдуваемого потоком, примерно в сто раз больше, чем у падающего человека, а коэффициент сопротивления  $C$  у парашюта в несколько раз больше, чем у человека. При возрастании множителя  $CS$  в несколько сотен раз установившаяся скорость уменьшится в десятки раз, примерно до 3–4 м/с. Приземление с такой скоростью безопасно.

## Глава 12

# ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### § 12.1. Скорость света и закон сложения скоростей

1. В середине XIX в. были разработаны методы, позволившие достаточно точно измерить скорость света. Оказалось, что в вакууме она составляет  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с (более точно см. § 63.9). Напрашивается естественный вопрос: к какой системе отсчета относится данное значение скорости света? Ведь говорить о скорости без указания системы отсчета, вообще говоря, бессмысленно.

Исходя из классического закона сложения скоростей, мы приходим к выводу, что в разных системах отсчета скорость света должна быть различной; следовательно, данное значение скорости света должно относиться лишь к одной какой-то системе отсчета, например связанной с источником света. На этой основе можно предложить следующий эксперимент.

Пусть некоторый прибор, позволяющий измерить скорость света с достаточно большой точностью, покоится относительно источника света, расположенного в системе отсчета  $xyz$ . В этом случае прибор зарегистрирует скорость света, равную  $c$  (рис. 12.1).

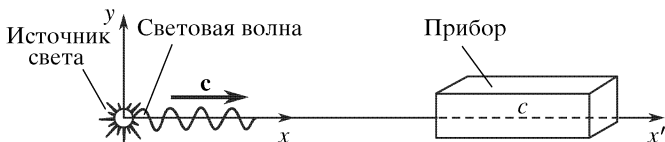


Рис. 12.1

Поместим теперь прибор в другую систему отсчета, которая движется относительно системы  $xyz$  так, как это изображено на



рисунках 12.2, 12.3 и 12.4. На основе классического закона сложения скоростей следовало бы ожидать, что  $c' = c - v$ ,  $c'' = c + v$ ,  $c''' = \sqrt{c^2 + v^2}$  т. е. что скорости света  $c'$ ,  $c''$  и  $c'''$  различны.

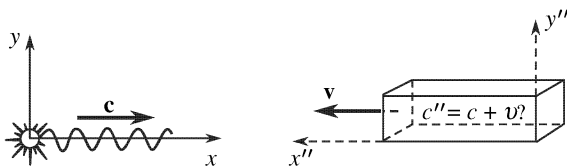


Рис. 12.2

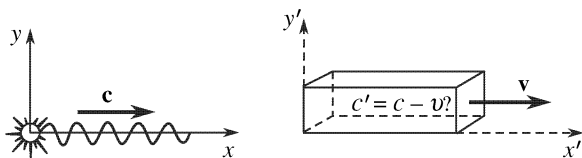


Рис. 12.3

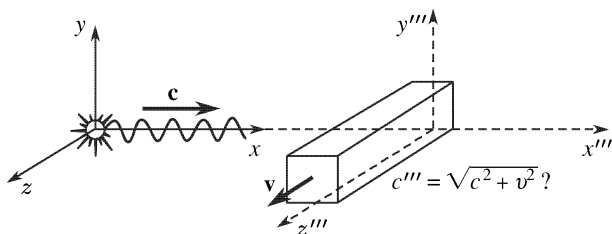


Рис. 12.4

2. Первый опыт по измерению скорости света в движущейся системе отсчета был поставлен Майкельсоном в 1881 г., затем аналогичные эксперименты ставились рядом ученых буквально до самого последнего времени, причем точность измерений, естественно, все время возрастала. Оказалось, что опыт дает *отрицательный результат*: с очень высокой степенью точности во всех системах отсчета, независимо от величины и направления скорости их движения, скорость света (в вакууме) такая же, как и в системе отсчета, связанной с источником, т. е.  $c' = c'' = c''' = c$ .

Этот результат показывает, что классический закон сложения скоростей имеет ограниченную область применения. Он, в частности, непригоден для описания явлений, связанных с распространением света. Но классический закон сложения скоростей

является следствием из преобразований Галилея; следовательно, и последние имеют ограниченную область применения.

3. Поскольку инвариантность скорости света во всех инерциальных системах отсчета есть твердо установленный экспериментальный факт и в то же время этот факт не согласуется с преобразованиями Галилея, то возникла необходимость в критическом пересмотре тех идей, которые положены в основу этих преобразований. Эту задачу решил в 1905 г. А. Эйнштейн. Но для этого понадобился радикальный пересмотр всех представлений о пространстве и времени.

Эйнштейн показал, что при выводе преобразований Галилея в неявном виде вводились два положения, которые казались настолько очевидными, что их даже не считали нужным обосновывать:

а) полагали, что одновременность двух событий есть абсолютное понятие, — два события, одновременные в одной системе отсчета, считали одновременными и в любой другой системе; отсюда вытекало, что часы, расположенные в произвольных инерциальных системах отсчета, регистрируют одно и то же время — короче, что время во всех инерциальных системах отсчета протекает одинаково;

б) предполагалось, что длина стержня во всех инерциальных системах отсчета одна и та же (см. § 2.4).

В действительности эти положения оказались не универсальными, а только первым приближением, справедливым лишь в ньютоновской механике.

## § 12.2. Основные постулаты специальной теории относительности

Специальная теория относительности называется иначе релятивистской теорией (от латинского *relativ* — относительный). В основу ее положены два принципа, которые являются постулатами. Эти постулаты надежно подтверждены экспериментально.

1. *Принцип относительности.* Все инерциальные системы отсчета равноправны, во всех инерциальных системах не только механические, но и все другие явления природы протекают одинаково.

2. *Принцип инвариантности скорости света.* Во всех инерциальных системах скорость света в вакууме одинакова и равна  $c$ .

Посмотрим же, какие следствия вытекают из этих основных положений.

### § 12.3. Относительность одновременности и длины

1. Для того чтобы определить момент времени, когда в данной точке пространства  $A$  происходит некоторое событие, нужно сопоставить это событие с показаниями часов, которые расположены вблизи этой точки. То же относится и к любой другой точке  $B$ . Однако сравнивать показания обоих часов имеет смысл, если они синхронизированы. Это положение представляется настолько очевидным, что в течение многих лет никто не задумывался над вопросом: а какова же физическая процедура синхронизации?

Эйнштейн предложил синхронизировать часы с помощью световых сигналов, исходя из следующего мысленного эксперимента. По определению полагаем, что время, в течение которого световой сигнал идет из  $A$  в  $B$ , равно времени, в течение которого он идет из  $B$  в  $A$ . Пусть сигнал вышел из  $A$  в момент времени  $t_A^{\text{отпр}}$ , доходит до  $B$  в момент времени  $t_B$ , отражается и возвращается в точку  $A$  в момент времени  $t_A^{\text{прих}}$ . Тогда, согласно определению,

$$t_B - t_A^{\text{отпр}} = t_A^{\text{прих}} - t_B.$$

Иными словами, часы в точке  $B$  должны показывать время

$$t_B = \frac{1}{2} (t_A^{\text{отпр}} + t_A^{\text{прих}}).$$

При такой процедуре синхронизации часов выполняются два условия:

а) условие симметрии: если часы  $A$  идут синхронно с часами  $B$ , то и часы  $B$  идут синхронно с часами  $A$ ;

б) условие транзитивности: если часы  $A$  идут синхронно с часами  $B$ , а часы  $B$  — с часами  $C$ , то и часы  $A$  идут синхронно с часами  $C$ .

2. Из двух основных постулатов теории относительности вытекает, что *два события, одновременные в одной системе отсчета, не одновременны в другой системе.*

Чтобы доказать это положение, которое на первый взгляд кажется парадоксальным, рассмотрим следующий эксперимент. Пусть одна система отсчета связана с Землей, вторая — с вагоном, движущимся относительно Земли прямолинейно и равномерно (рис. 12.5). Отметим на Земле точки  $A$ ,  $B$  и  $M$ , причем  $AM = BM$ , а в вагоне соответственно точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $M'$  с таким расчетом, что  $A'M' = B'M'$ . Пусть в тот момент, когда отмеченные на Земле и в вагоне точки совпадают, в точках  $A$  и  $B$  происходят некоторые события, например ударяют две молнии.

Очевидно, что если свет от обеих вспышек придет в точку  $M$  одновременно, то в точку  $M'$  раньше придет свет из  $B'$ , затем из  $A'$ . Проанализируем теперь эти события с позиций наблюдателей, находящихся в обеих системах отсчета.

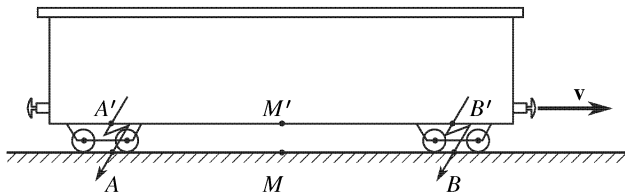


Рис. 12.5

*На Земле:* расстояние  $AM = BM$ . Скорость света во всех направлениях одна и та же. Сигналы от обоих событий пришли в точку  $M$  одновременно. Следовательно, и события в точках  $A$  и  $B$  произошли одновременно.

*В вагоне:* расстояние  $A'M' = B'M'$ . Скорость света во всех направлениях одна и та же. Сигнал из точки  $B'$  пришел раньше, чем из точки  $A'$ . Следовательно, событие в точке  $B'$  произошло раньше, чем в точке  $A'$ . Если бы вагон двигался справа налево, то получился бы обратный результат: событие  $B'$  произошло бы позже, чем  $A'$ .

Итак, понятие одновременности имеет относительный смысл, и в разных инерциальных системах отсчета время протекает по-разному.

3. Заметим, что в приведенном рассуждении мы пользовались только двумя принципами: мы считали обе системы отсчета равноправными (принцип относительности) и считали, что свет во всех направлениях движется с одной и той же скоростью (принцип инвариантности скорости света). Никаких других дополнительных гипотез мы не вводили.

В классической же физике совершенно бездоказательно предполагалось, что время во всех системах отсчета протекает одинаково. Отсюда получался классический закон сложения скоростей, который противоречит экспериментально установленному закону инвариантности скорости света.

4. Иногда спрашивают: ну, а на самом деле события в точках  $A$  и  $B$  одновременны или нет? Очевидно, что этот вопрос не имеет смысла. Ответить на вопрос, что происходит на самом деле, означает фактически указать некую преимущественную систему отсчета. А такой системы отсчета просто нет в природе.

Вообще не всегда можно ответить на вопрос о том, что происходит на самом деле. Так, когда в Москве утро, то во Владивостоке вечер, а в Сан-Франциско ночь.

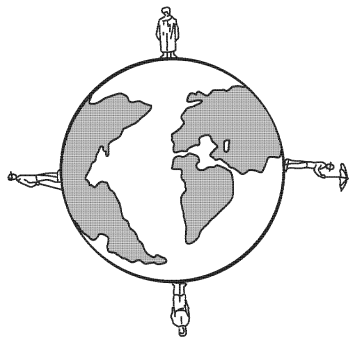


Рис. 12.6

И нелепо спрашивать, а что же сейчас на самом деле: утро, вечер или ночь? Это относительные понятия, ответ зависит от того, в какой точке Земли находится наблюдатель. В такой же мере относительны понятия «верха» и «низа» для людей, живущих на противоположных сторонах земного шара (рис. 12.6).

Точно так же понятие одновременности является относительным — на вопрос об одновременности или неодновременности двух

событий нельзя ответить, не указав систему отсчета, относительно которой данная задача решается.

5. Почему же в классической физике мы пренебрегаем этим свойством времени и считаем время инвариантом, т. е. величиной, не зависящей от системы отсчета?

Дело в том, что в классической физике мы имеем дело со скоростями, настолько меньшими скорости света, что можно пренебречь запаздыванием сигналов и считать, что свет распространяется практически мгновенно, с бесконечно большой скоростью. В этом случае наблюдатели на земной поверхности и в вагоне не заметят никакой разницы в поступлении сигналов из точек *A* и *B* (см. рис. 12.5), а потому оба придут к одному и тому же выводу об одновременности или неодновременности событий.

Итак, относительность одновременности есть следствие конечности скорости распространения света и вообще конечности скорости передачи любых взаимодействий. Опытный факт отсутствия каких-либо процессов, распространяющихся с бесконечно большой скоростью, Эйнштейн положил в основу теории относительности.

6. Выше мы определили длину стержня как разность координат его начала и конца, *измеренных одновременно* (см. § 2.4). Однако понятие одновременности имеет относительный смысл, и события, одновременные в одной системе отсчета, окажутся неодновременными в другой системе. А отсюда вытекает, что *длина стержня в разных системах отсчета будет различной* (см. далее § 12.8). Нельзя говорить о длине стержня, не указав системы отсчета, относительно которой эта длина измеряется.

Это так же бессмысленно, как говорить о скорости пассажира, не указывая системы отсчета: скорость пассажира относительно вагона не равна его скорости относительно Земли.

Итак, в теории относительности промежутки времени между событиями и длины отрезков являются относительными понятиями, имеющими различные значения в разных инерциальных системах отсчета.

## § 12.4. Релятивистские преобразования координат. Релятивистский закон сложения скоростей

1. Как было показано выше, преобразования Галилея не согласуются с экспериментально установленным фактом постоянства скорости света. Поэтому необходимо вывести новые преобразования координат при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Рассмотрим систему координат  $x y z$ , связанную с Землей, и систему координат  $x' y' z'$ , связанную с вагоном (см. рис. 2.1). В этом случае вдоль оси ординат и оси аппликат движения нет, откуда вытекает, что  $y' = y$  и  $z' = z$ , как и в случае преобразований Галилея.

Свободное пространство однородно и изотропно. Это значит, что преобразования координат являются линейными функциями (рис. 12.7). В самом деле, как видно из рисунка, в этом случае длина отрезка не зависит от того, в какой области пространства этот отрезок находится: из  $l_1 = l_2$  следует  $l'_1 = l'_2$ .

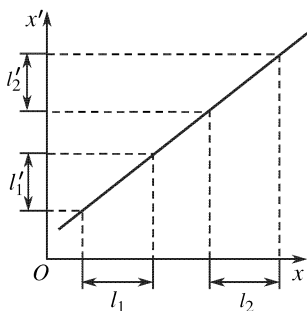


Рис. 12.7

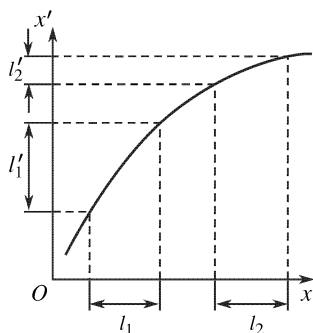


Рис. 12.8

Если бы преобразование было нелинейным (рис. 12.8), то из  $l_1 = l_2$  следовало бы  $l'_1 \neq l'_2$ , т. е. длина отрезка зависела бы от того, в какой области пространства он находится. Это означало бы нарушение однородности пространства.

Естественно, что аналогичное рассуждение справедливо и для времени.

Поэтому мы будем искать релятивистские преобразования в виде линейных функций:

$$x' = Ax + Bt, \quad t' = Mx + Nt. \quad (12.1)$$

Здесь  $A$ ,  $B$ ,  $M$  и  $N$  — постоянные, которые следует определить.

2. Перемещение вдоль оси абсцисс в вагоне

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = A(x_2 - x_1) + B(t_2 - t_1) = A\Delta x + B\Delta t. \quad (12.2)$$

Аналогично для промежутка времени между двумя событиями имеем

$$\Delta t' = M\Delta x + N\Delta t. \quad (12.3)$$

Разделив (12.2) на (12.3) и учитывая, что скорость точки относительно вагона (вдоль оси абсцисс)

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \quad (12.4)$$

а скорость той же точки относительно Земли

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (12.5)$$

получим выражение для закона сложения скоростей (вдоль оси абсцисс):

$$u' = \frac{Au + B}{Mu + N}. \quad (12.6)$$

3. Используем (12.6) для определения постоянных, введенных в выражения (12.1). Для этого рассмотрим следующие частные случаи:

а) Пусть материальная точка покоится относительно вагона.

Тогда  $u' = 0$ ,  $u = v$ . Подставив в (12.6), имеем  $0 = \frac{Av + B}{Mv + N}$ , откуда

$$B = -Av. \quad (12.7)$$

б) Пусть точка покоится относительно Земли. Тогда  $u' = -v$ ,  $u = 0$ . Подставив в (12.6) и используя (12.7), имеем  $-v = -Av/N$ , откуда

$$N = A. \quad (12.8)$$

в) Пусть вместо материальной точки в вагоне распространяется световая волна. На основе второго постулата теории относительности (принципа инвариантности скорости света во всех инерциальных системах) получим

$$u' = u = c. \quad (12.9)$$

Подставив в (12.6) и используя результаты (12.7) и (12.8), имеем  $c = \frac{Ac - Av}{Mc + A}$ , откуда

$$M = \frac{Av}{c^2}. \quad (12.10)$$

4. Полученные значения  $B$ ,  $M$  и  $N$  подставим в (12.6) и получим *релятивистский закон сложения скоростей* (вдоль оси абсцисс):

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}, \quad \text{или} \quad u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}. \quad (12.11)$$

### § 12.5. Предельный характер скорости света

1. Из релятивистского закона сложения скоростей вытекает предельный характер скорости света: *ни в какой системе отсчета тело (и сигнал) не может двигаться со скоростью, превосходящей скорость света в вакууме.*

Действительно, пусть тело движется относительно вагона со скоростью  $u'$ , не превосходящей скорость света в вакууме:  $0 < u' < c$ . Вагон же движется относительно Земли со скоростью  $v$ , также меньшей скорости света,  $0 < v < c$ . Тогда легко показать, что скорость тела относительно Земли (при любых  $u'$  и  $v$ , меньших  $c$ ) будет также меньше скорости света.

Для доказательства найдем разность между скоростью света в вакууме и скоростью тела относительно Земли:

$$c - u = c - \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{(c - v)(c - u')}{c(1 + u'v/c^2)}. \quad (12.12)$$

Поскольку мы с самого начала предположили, что скорость тела  $u'$  и скорость самой системы  $v$  меньше  $c$ , то  $c - u > 0$ . Итак,

$$u < c. \quad (12.13)$$

2. Полученный результат безусловно справедлив для частиц вещества. В самом деле, всегда существует система отсчета, в которой частица движется со скоростью, меньшей скорости света в вакууме (например, покоится, т.е.  $u' = 0$ ). Но тогда она и в любой другой системе отсчета будет двигаться медленнее, чем световой сигнал в вакууме.

Заметим, что при выводе мы не прибегали ни к каким предположениям о структуре и свойствах частиц вещества, а основывались только на основных постулатах. Следовательно, полученный



результат является совершенно общим, справедливым для любых частиц вещества, для любых тел.

Итак, скорость света в вакууме есть максимально большая скорость в природе.

## § 12.6. Преобразования Лоренца

1. Преобразования координат, соответствующие двум основным постулатам теории относительности, были впервые получены Х.А. Лоренцем.

Для вывода искомых преобразований подставим в выражение (12.1) значения постоянных  $B$ ,  $M$  и  $N$ ; получим

$$x' = A(x - vt), \quad t' = A\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \quad (12.14)$$

Из принципа относительности вытекает полное равноправие обеих систем отсчета: можно считать покоящейся систему координат, связанную с вагоном; тогда система координат, связанная с Землей, будет двигаться относительно вагона со скоростью  $v' = -v$  (взаимность преобразований Лоренца).

Преобразования координат примут вид

$$x = A(x' + vt'), \quad t = A\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right). \quad (12.15)$$

Подставив выражение (12.15) в (12.14), имеем

$$x' = A^2\left(x' + vt' - vt' - \frac{v^2x'}{c^2}\right),$$

откуда после сокращений получим

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.16)$$

Окончательно преобразования Лоренца примут вид

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.17)$$

или

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.18)$$

2. В классической механике пространство и время рассматриваются как понятия, независимые друг от друга. Из преобразований Лоренца вытекает тесная связь между пространственными

и временными координатами: не только пространственные координаты зависят от времени (это мы имели и в преобразованиях Галилея), но и время зависит от пространственных координат, а также от скорости движения системы отсчета.

3. Преобразования Лоренца и релятивистский закон сложения скоростей соответствуют принципу инерции.

Действительно, если тело движется равномерно и прямолинейно относительно одной инерциальной системы отсчета (скажем, относительно вагона), то оно будет двигаться прямолинейно и равномерно относительно любой другой инерциальной системы: из  $u' = \text{const}$  и  $v = \text{const}$  следует, согласно (12.11), что и  $u = \text{const}$ .

### § 12.7. Длина отрезка

1. Пусть стержень расположен параллельно оси абсцисс и покоится в системе отсчета  $xyz$  (например, на земной поверхности). Его длину в системе отсчета, относительно которой он покоится, обозначим  $l_0 = x_2 - x_1$  (см. рис. 2.2). В системе отсчета  $x'y'z'$ , движущейся относительно системы  $xyz$  со скоростью  $v$  (например, в вагоне), длина стержня  $l$  определяется так:  $l = x'_2 - x'_1$  при условии  $t'_2 = t'_1$ . Из преобразований Лоренца (12.18) следует

$$x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

отсюда

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1 + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.19)$$

Положив по условию  $t'_2 = t'_1$ , имеем

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (12.20)$$

2. Назовем длину стержня в той системе отсчета, относительно которой он покоится, *собственной длиной*  $l_0$ . Из (12.20) следует, что длина стержня в любой другой системе отсчета, относительно которой он движется, меньше собственной длины.

Заметим, что в разных системах отсчета, движущихся с разными скоростями относительно той системы отсчета, в которой стержень покоится, длина этого стержня различна. А отсюда явно вытекает, что релятивистское изменение длины не вызвано никакими деформациями стержня (или другими аналогичными процессами).

## § 12.8. Промежуток времени между двумя событиями

1. Любые явления, происходящие в природе, называются *событиями*. Пусть в точке  $A$ , где находится интересующее нас тело, в момент времени  $t_1$  происходит некоторое событие, а в момент времени  $t_2$  — другое событие. Тогда промежуток времени между этими событиями  $\tau_0 = t_2 - t_1$ . Этот промежуток времени измерен в системе отсчета  $xyz$ , связанной с исследуемым телом (*собственное время*). Найдем промежуток времени между этими же событиями в системе отсчета  $x'y'z'$ , движущейся относительно  $xyz$  со скоростью  $v$  (вдоль оси абсцисс).

Используя выражение (12.17) и учитывая, что события происходят в одной точке  $A$ , т. е.  $x_2 = x_1$ , имеем

$$\tau = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.21)$$

Мы получили фундаментальной важности результат: *промежуток времени между двумя событиями имеет наименьшее значение в системе отсчета, связанной с точкой  $A$ , где происходят исследуемые события*. В любой другой системе отсчета этот промежуток времени будет больше. Иными словами, *в движущейся системе отсчета время замедляется* по сравнению с системой отсчета, в которой происходят события и которую мы приняли за неподвижную.

2. Замедление времени в движущейся системе отсчета позволяет объяснить одно любопытное явление.

Под действием космического излучения на границе атмосферы возникают частицы, называемые *мюонами* (см. § 83.3). Эти частицы обнаруживаются затем на поверхности Земли. Толщина атмосферы — порядка 300 км. Даже в том случае, если мюоны движутся со скоростью, очень близкой к скорости света, время их движения сквозь атмосферу — около  $10^{-3}$  с. Между тем опыты над мюонами показывают, что эти частицы неустойчивы и самопроизвольно распадаются. Время жизни мюона  $10^{-6}$  с, т. е. в тысячу раз меньше, чем время его движения сквозь атмосферу к поверхности Земли! Как же согласовать это кажущееся противоречие?

Оказывается, никакого противоречия здесь нет. Действительно, в системе отсчета, связанной с мюоном, время его жизни  $10^{-6}$  с. Система же отсчета, связанная с Землей, движется относительно мюона со скоростью, близкой к скорости света. В этой системе темп времени замедлен и мюон живет около  $10^{-3}$  с —

в тысячу раз больше, чем в системе отсчета, связанной с этим мюоном.

### § 12.9. Промежуток времени между причиной и следствием. Интервал

1. В природе часто встречаются события, связанные между собой определенным видом связи, которую мы называем причинно-следственной. Так, для того чтобы пуля попала в мишень, необходимо предварительно произвести выстрел. Здесь выстрел является тем событием, которое служит причиной, а попадание пули в мишень — следствием.

При этом необходимо отметить два характерных свойства этого вида связи между явлениями:

а) вначале всегда происходит событие, которое является причиной, а уж затем — следствие;

б) если каким-либо образом устранить событие, которое служит причиной, то не произойдет и другое событие, которое является следствием.

Покажем, что, хотя в теории относительности время в разных системах отсчета протекает по-разному, последовательность во времени между причиной и следствием сохраняется.

2. Пусть в системе отсчета, связанной с Землей, выстрел произошел в момент времени  $t_1$  в точке с координатой  $x_1$ , а пуля попала в мишень с координатой  $x_2$  в момент времени  $t_2$  (рис. 12.9). Скорость пули в этой системе отсчета

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

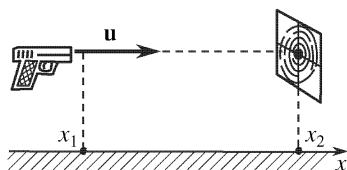


Рис. 12.9

Найдем промежуток времени между этими же событиями в системе отсчета, движущейся вдоль оси абсцисс со скоростью  $v$ . Из выражения (12.17) получим

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - v(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right). \quad (12.22)$$

Скорость пули  $u$  и скорость движения новой системы отсчета  $v$  меньше скорости света в вакууме. Поэтому  $1 - uv/c^2$  является положительным числом. Знак разности  $t'_2 - t'_1$  совпадает со знаком разности  $t_2 - t_1$ .

Но  $t_2 > t_1$ , поскольку в системе отсчета, связанной с Землей, пуля попала в мишень *после выстрела*. А поэтому и в любой другой системе отсчета  $t'_2 > t'_1$ .

Итак, хотя промежуток времени между двумя событиями в разных системах отсчета различен, во всех системах отсчета событие, являющееся причиной, происходит раньше события, которое является следствием.

3. Представим себе две точки пространства  $M_1$  и  $M_2$  с координатами  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$ . В момент времени  $t_1$  в точке  $M_1$  происходит некоторое событие, в момент времени  $t_2$  в точке  $M_2$  — другое событие. Расстояние между точками

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (12.23)$$

промежуток времени между событиями

$$\tau = t_2 - t_1. \quad (12.24)$$

*Интервалом* между двумя событиями называется величина

$$s = \sqrt{c^2\tau^2 - l^2}. \quad (12.25)$$

Пользуясь преобразованиями Лоренца, можно доказать, что *интервал является инвариантом*: значение интервала не меняется при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, т. е.

$$s' = s = \text{inv.} \quad (12.26)$$

4. Интервал называется *временеподобным*, если  $c^2\tau^2 - l^2 > 0$ , т. е.  $s$  — действительное число. В этом случае можно с помощью некоторого сигнала, скорость которого  $u \geq l/\tau$  и в то же время  $u < c$ , передать из одной точки в другую информацию о том, что в точке  $M_1$  в момент  $t_1$  произошло некоторое событие, и это станет известно в точке  $M_2$  раньше, чем в ней в момент времени  $t_2$  произойдет второе событие.

Таким образом, если два события связаны *временеподобным* интервалом, то может оказаться, что эти события связаны причинно-следственной связью. Читатель легко убедится, что рассмотренные выше события «выстрел» и «попадание пули в мишень» связаны *временеподобным* интервалом.

Интервал называется *пространственноподобным*, если  $c^2\tau^2 - l^2 < 0$ , т. е.  $s$  — мнимое число. Нетрудно убедиться, что в этом случае не существует сигнала, который мог бы передать информацию из первой точки во вторую до того момента, когда произойдет второе событие. В самом деле, если бы такой сигнал существовал, то его скорость превосходила бы скорость света в вакууме, что невозможно (см. § 12.5). А это означает, что события, связанные *пространственноподобным* интервалом, не могут быть связаны причинно-следственной связью.

### § 12.10. Соотношение между релятивистской и ньютоновской механикой

1. Ньютоновская механика и, в частности, преобразования Галилея основывались на допущении, что во всех системах отсчета время протекает одинаково. Выше мы показали, что это допущение по существу неверно. Естественно, возникает вопрос: как могла эта теория в течение нескольких веков успешно применяться на практике и давать *правильные* результаты? Более того, и в настоящее время мы с успехом ведем расчеты движения небесных тел, космических кораблей, автомобилей, судов и т. п. на базе законов *ньютоновской механики*, пользуемся преобразованиями Галилея — и всегда получаем отличные результаты! Нет ли здесь какого-то противоречия?

Оказывается, никакого противоречия нет. Все дело в том, что перечисленные тела движутся со скоростями, значительно меньшими скорости света в вакууме. А в этом случае релятивистские формулы с достаточной для практических целей точностью автоматически переходят в ньютоновские.

2. Действительно, пусть тело движется со скоростью  $v = 10$  км/с относительно Земли. Это — скорость космической ракеты. Обычно в инженерной практике имеют дело с телами, которые движутся значительно медленнее. Свяжем с этим телом новую систему отсчета. Точные соотношения между координатами и временем в обеих системах отсчета выражаются с помощью преобразований Лоренца. Однако нетрудно убедиться, что, пользуясь преобразованиями Галилея, мы получим практически одинаковые результаты.

Действительно, в нашем случае отношение

$$\frac{v^2}{c^2} = \left( \frac{10^4}{3 \cdot 10^8} \right)^2 \approx 10^{-9}.$$

Следовательно, для того чтобы величину  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  отличить от единицы, нужен измерительный прибор, позволяющий измерять с точностью до девяти значащих цифр! На практике мы пользуемся значительно менее точными приборами. То же самое можно сказать о величине  $vu/c^2$  — она несущественно отличается от нуля.

Но если в преобразованиях Лоренца положить  $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1$  и  $vu/c^2 \approx 0$ , то они автоматически перейдут в преобразования

Галилея:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx x - vt, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t(1 - vu/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx t.$$

Таким образом, при анализе явлений, происходящих со скоростями значительно меньшими, чем скорость света в вакууме, можно с успехом пользоваться преобразованиями Галилея, следовательно, и всеми другими формулами ньютоновской механики. Применение в этих случаях преобразований Лоренца даст практически те же результаты, хотя выкладки будут значительно более сложными.

Мы получили принципиальной важности результат: *теория относительности включает в себя ньютоновскую механику как предельный случай механики явлений, скорость которых значительно меньше скорости света в вакууме.*

3. На этом примере виден путь развития науки. Всякая научная теория описывает некоторый круг явлений с определенной степенью точности, зависящей от уровня развития науки, а также от уровня развития измерительной техники. При дальнейшем развитии науки мы охватываем все более обширный круг явлений. Одновременно возрастает и точность наших измерений.

На определенном этапе может оказаться, что старая теория уже не сможет объяснить вновь открытые явления. Выводы старой теории вступят в противоречие с новыми фактами. Тогда создается новая теория, часто на основе совершенно новых принципов. Однако новая теория не отбрасывает старую, как заблуждение. Она включает в себя результаты старой теории как предельный случай для того круга явлений, которые и прежде описывались удовлетворительно. Это положение в науке называется *принципом соответствия*.

Часто критика принципиальных основ старой теории оказывается довольно болезненной, ибо нужно преодолеть представления, которые кажутся «очевидными», «само собой разумеющимися», а поэтому якобы истинными. Однако рано или поздно более правильная теория всегда побеждает. И последующим поколениям часто даже непонятно, чем были вызваны предшествующие дискуссии. Так было и с теорией относительности. Ее появление вызвало бурную дискуссию. Многие ученые, не сумев отказаться от привычных представлений, не поняли ее сущности. Реакционеры всех мастей повели с ней ожесточенную борьбу, пытаясь представить ее как противоречащую «здравому смыслу». Однако дальнейшее развитие науки полностью подтвердило истинность как ее исходных положений, так и всех ее выводов.

## Глава 13

# ИМПУЛЬС И СИЛА В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### § 13.1. Релятивистский импульс

1. Рассмотрим, как будет двигаться тело под действием постоянной силы в приближении ньютоновской механики. Для упрощения дальнейших расчетов предположим, что при  $t_1 = 0$  начальная скорость  $u_1 = 0$ , т. е. тело не имеет начальной скорости. Тогда основной закон динамики (7.2) примет вид

$$F = \frac{mu}{t}, \quad \text{или} \quad u = \frac{Ft}{m}. \quad (13.1)$$

При предположении о постоянстве силы  $a = F/m = \text{const.}$  Следовательно, скорость тела прямо пропорциональна времени действия силы:

$$u = at. \quad (13.2)$$

А это означает, что при достаточно длительном воздействии постоянной силы на тело скорость его движения возрастает неограниченно.

2. Этот результат противоречит теории относительности. Действительно, один из фундаментальных выводов теории относительности гласит, что *никакое тело не может двигаться со скоростью, превосходящей скорость света в вакууме* (см. § 12.6).

Таким образом, нам следует преобразовать основной закон динамики, чтобы выводы из него согласовывались с выводами теории относительности. Оказывается, что для этого необходимо считать, что релятивистский импульс зависит от скорости несколько более сложным образом, чем в ньютоновской механике:

$$\mathbf{p} = \Gamma m \mathbf{u} = \frac{m \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (13.3)$$

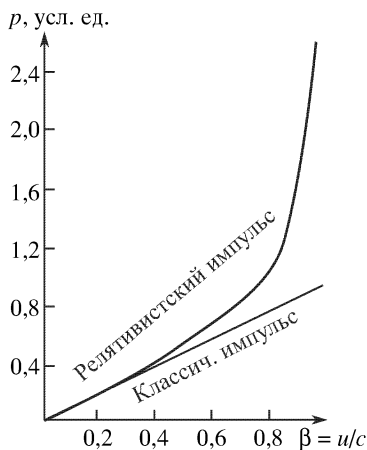


Рис. 13.1



Заметим, что при  $u \ll c$  мы вернемся к приближению ньютоновской механики (7.3). Графически зависимость релятивистского и классического импульса от скорости показана на рис. 13.1.

### 3. Величину

$$\Gamma = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (13.4)$$

будем называть *релятивистским фактором*. Здесь  $u$  — скорость движения тела относительно выбранной инерциальной системы отсчета. Вывод выражения (13.4) дан в § 15.8.

### 4. Величину

$$m_{\text{рел}} = \Gamma m = m \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

называют *релятивистской массой*, а  $m$  — массой покоя (и обозначают ее через  $m_0$ ), ибо она измерена в системе отсчета, относительно которой тело покоится. Мы далее этими терминами пользоваться не будем.

## § 13.2. Основной закон динамики в теории относительности

1. Основной закон динамики (7.4) сохраняет свою формулировку — *сила равна производной импульса по времени*:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\Gamma m \mathbf{u})}{dt}. \quad (13.5)$$

Покажем, что при такой записи основного закона динамики выводы из него не противоречат теории относительности.

2. При тех же предположениях, которые были сделаны выше ( $F = \text{const}$ ,  $t_1 = 0$ ,  $u_1 = 0$ ), имеем из (7.2)

$$F = \frac{mu}{t} = \frac{mu}{t\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (13.6)$$

Положив  $F/m = b = \text{const}$  и решив это уравнение относительно  $u$ , получим

$$u = \frac{bt}{\sqrt{1 + b^2 t^2 / c^2}}. \quad (13.7)$$

3. Исследуем полученный результат. При достаточно малых промежутках времени произведение  $bt$  значительно меньше скорости света в вакууме; следовательно,  $b^2 t^2 / c^2 \ll 1$ , и приближенно

$$u \approx bt.$$

Итак, мы получили классическое приближение как предельный случай медленных движений.

При длительном же действии постоянной силы величина  $bt$  может стать значительно больше  $c$ ; тогда  $b^2 t^2 / c^2 \gg 1$ , и приближенно

$$u \approx \frac{bt}{\sqrt{b^2 t^2 / c^2}} = c.$$

Таким образом, при длительном действии постоянной силы *скорость тела стремится к скорости света*, а не возрастает неограниченно, как это следовало из законов ньютоновской механики (см. рис. 13.2).

### § 13.3. Соотношение между ньютоновской и релятивистской динамикой

1. В § 12.10 было показано, что теория относительности не отменяет ньютоновскую кинематику, а включает ее в себя как предельный случай медленных движений. Результаты предыдущего параграфа приводят к выводу, что такое же положение имеет место и в динамике. А именно, мы показали, что при достаточно медленных движениях вполне допустимо пользоваться формулами ньютоновской механики, при анализе же быстрых движений правильные результаты дает только теория относительности.

Попробуем более точно ввести критерий того, какие движения следует считать медленными, а какие — быстрыми.

Допустим, что аппаратура позволяет производить измерения величин с точностью до  $n$  значащих цифр. Тогда, если относительная погрешность (т. е. разность между двумя величинами, деленная на измеряемую величину) меньше  $10^{-n}$ , то мы ее обнаружить не сможем. Подсчитаем, при какой же скорости движения тела не могут быть обнаружены различия между релятивистским и классическим импульсами. Относительная погрешность при измерении импульса

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{p - p_{\text{кл}}}{p} = 1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (13.8)$$

Эта погрешность должна быть меньше  $10^{-n}$ , следовательно,

$$1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} < 10^{-n}, \quad \text{или} \quad 1 - 10^{-n} < \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Возведем неравенство в квадрат, что возможно, ибо единица больше, чем  $10^{-n}$ . Тогда

$$1 - 2 \cdot 10^{-n} + 10^{-2n} < 1 - u^2/c^2, \text{ или } u < c\sqrt{2 \cdot 10^{-n} - 10^{-2n}}.$$

Учитывая, что  $10^{-2n} \ll 10^{-n}$ , имеем

$$u < c\sqrt{2 \cdot 10^{-n}}.$$

Пусть, например, измерения производятся с точностью до шести значащих цифр ( $n = 6$ ). Тогда  $u < c\sqrt{2 \cdot 10^{-6}} = 423$  км/с. Таким образом, при скоростях движения, не превосходящих *четырёхсот километров в секунду*, классический импульс отличается от релятивистского менее чем на  $10^{-6}$ , т. е. менее чем на одну десятитысячную долю процента!

В реальных условиях движения больших тел их скорость значительно меньше указанного предела — даже космические ракеты имеют скорость около 10 км/с, т. е. в 40 раз меньше. Да и измерения в технике редко когда производятся с такой точностью. Ясно, что в этих условиях применение законов ньютоновской механики для расчета движения тел даст идеальные по своей точности результаты.

Однако в мире атомных частиц нередко встречаются скорости, близкие к скорости света в вакууме. В этом случае только применение законов теории относительности даст правильные результаты. В частности, при анализе движения быстрых микро-частиц удалось опытным путем проверить выражение для реля-

тивистского импульса (13.3), причем результаты эксперимента оказались в отличном согласии с теорией.

2. Изложенные соображения позволяют нам ввести следующую классификацию движений (рис. 13.2).

*Ньютоновская область.* Скорость движения тел столь мала, что измерительная аппаратура не позволяет обнаружить релятивистские

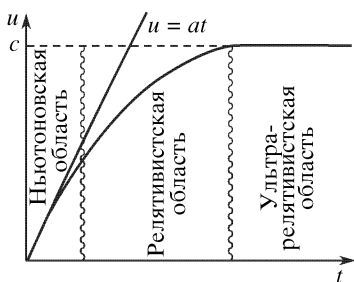


Рис. 13.2

эффекты замедления времени, сокращения длин и т. п. Здесь вполне допустимо пользоваться законами ньютоновской механики.

*Релятивистская область.* Скорость движения достаточно велика, и релятивистские эффекты становятся вполне измеримы-

ми. Естественно, что здесь правильные результаты дает только теория относительности.

*Ультрарелятивистская область.* Скорость тела становится почти равной скорости света в вакууме. Точнее, разность между скоростью тела и скоростью света меньше чувствительности измерительного прибора. Конечно, и в этом случае только применение законов теории относительности даст верные результаты.

В нашем примере, когда точность измерений не превосходит  $10^{-6}$ , классическую область скоростей составляют скорости, меньшие 400 км/с; ультрарелятивистскую область — скорости, отличающиеся от скорости света менее чем на 300 м/с; остальной диапазон скоростей — это собственно релятивистская область.

3. Рассмотрим, как же меняется импульс тела под действием постоянной силы. Из уравнения (13.5) при условии, что при  $t_1 = 0$  начальный импульс  $p_1 = 0$ , следует

$$p = Ft. \quad (13.9)$$

Итак, под действием постоянной силы импульс возрастает пропорционально времени.

## Глава 14

# ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

### § 14.1. Начальные условия и измерительная аппаратура

1. Успешное применение рассмотренного в гл. 8 метода решения основной задачи динамики в ньютоновской механике неизбежно приводило ученых к мысли, что этот метод является универсальным и что его можно применять для решения *любых* задач. При этом никто всерьез не задавался вопросом: а можно ли на самом деле задать начальные условия настолько точно, как это нам необходимо? Само успешное решение задач приводило к мысли, будто бы начальные условия могут быть заданы с произвольной степенью точности.

Конечно, измерение координат и импульсов производится с определенной погрешностью. Однако в XIX в. предполагалось, что путем усовершенствования измерительной аппаратуры погрешность измерений может быть сделана сколь угодно малой.

Дальнейшее развитие науки показало несостоятельность этой точки зрения.

Попытаемся на примере проанализировать в общих чертах действие приборов, с помощью которых можно измерить координаты и скорости тел.

2. Для определения координат самолета применяется радиолокатор (рис. 14.1). Антенна локатора излучает радиоволны короткими импульсами. Волна, дойдя до самолета, отражается от него и возвращается к антенне. На экране локатора получают две отметки: от отправленного и принятого (отраженного) сигнала. Зная скорость движения луча по экрану  $u$  и скорость радиоволны ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с), можно из пропорции  $L/u = 2X/c$  по величине смещения отметки судить о расстоянии до самолета

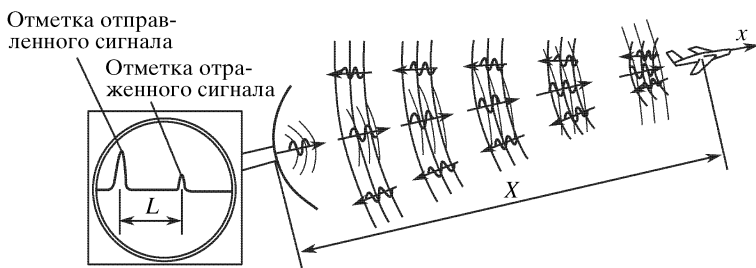


Рис. 14.1

$X = cL/2u$ . Смещение на экране градуируется в километрах (ибо величина  $c/2u$  постоянна и известна). Это позволяет без дополнительных расчетов сразу же определять координаты самолета по отметкам на экране осциллографа.

Заметим, что с помощью прибора, который служит для определения мгновенных значений координат, невозможно измерить мгновенные значения скорости. Правда, наблюдая за движением отметки на экране локатора, можно определить среднюю скорость самолета за некоторый промежуток времени, но мгновенную скорость самолета в момент измерения координат найти с помощью этого прибора невозможно.

3. Существуют приборы, с помощью которых можно измерить мгновенную скорость точки. Например, тот же радиолокатор можно переоборудовать так, чтобы он сравнивал частоту колебаний волны, которую посылает антенна, с частотой колебаний волны, которая отражается от самолета.

Если самолет движется со скоростью  $v$  вдоль оси абсцисс, то темп времени в связанной с ним системе отсчета изменяется

по сравнению с темпом времени в системе отсчета, связанной с радиолокатором (см. § 12.8). С изменением темпа времени, естественно, изменяется частота волны, что будет видно на экране переоборудованного радиолокатора: при удалении самолета от локатора волна растягивается вдоль экрана (рис. 14.2), при приближении — сжимается (рис. 14.3).

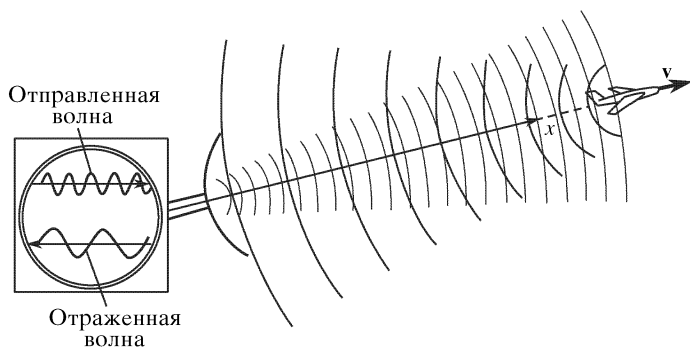


Рис. 14.2

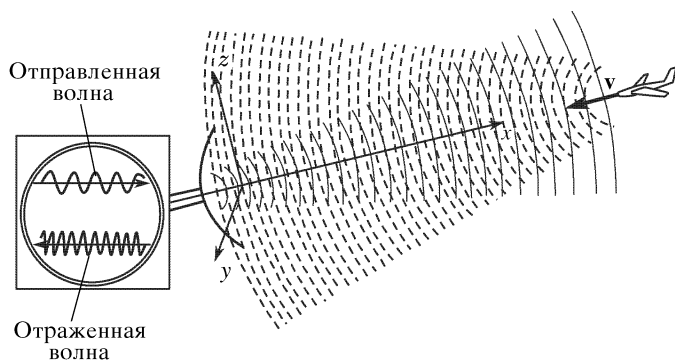


Рис. 14.3

Пользуясь преобразованиями Лоренца, можно вывести соотношение между частотой отправленной волны  $\nu$  и частотой отраженной от самолета волны  $\nu'$ . Частотой называется число колебаний в единицу времени; следовательно, частота колебаний волны в разных системах отсчета *обратно пропорциональна* промежутку времени между двумя событиями (например, промежутку времени между отражением волны от самолета и приемом ее радиолокатором (рис. 14.4)). В системе отсчета, связанной с локатором, имеем частоту волны  $\nu$  и промежуток времени  $\Delta t$ .

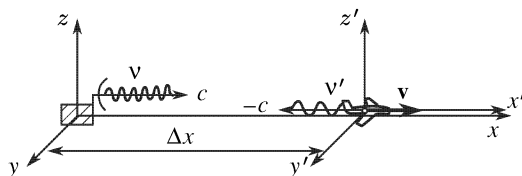


Рис. 14.4

В системе отсчета, связанной с самолетом, — соответственно  $\nu'$  и  $\Delta t'$ . Тогда

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\Delta t}{\Delta t'}. \quad (14.1)$$

Но

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(см. (12.17)), где  $\Delta x$  — путь, пройденный отраженной волной. Учитывая, что скорость отраженной волны  $\Delta x/\Delta t = -c$  (знак минус появился потому, что отраженная волна движется в направлении, противоположном направлению оси абсцисс), получим

$$\Delta t' = \Delta t = \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (14.2)$$

Сравнив выражения (14.1) и (14.2), получим

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c}. \quad (14.3)$$

Итак, частота волны, которая отражается от удаляющегося самолета, будет меньше частоты волны, которую посылает локатор. Если же самолет приближается к локатору, то его скорость имеет противоположный знак и частота отражаемой волны возрастает:

$$\nu'' = \nu \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c}. \quad (14.4)$$

Это явление называется оптическим продольным *эффектом Доплера*. С его помощью легко измерить скорость самолета — достаточно сравнить частоты излучаемой и отраженной волны.

С помощью эффекта Доплера можно измерить также скорость тела, которое само излучает свет, например скорость движения звезды (см. § 59.8).

4. Найдем частоту волны, воспринимаемой локатором от удаляющегося самолета:

$$\nu_{\text{воспр}} = \nu' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} = \nu \frac{1 - v^2/c^2}{(1 + v/c)^2} = \nu \frac{1 - v/c}{1 + v/c}.$$

В случае, если самолет приближается к локатору, нужно в числителе и знаменателе изменить знаки на противоположные.

5. *Однако прибор, позволяющий измерить скорость материальной точки* (следовательно, и ее импульс), *не позволяет измерить ее координату.* Действительно, для измерения скорости по эффекту Доплера необходимо иметь синусоидальную волну с определенной частотой, для измерения же координаты самолета радиолокатор должен излучать волны короткими импульсами, а такие волны не являются синусоидальными.

Следовательно, для одновременного измерения координаты и скорости (или импульса) движущегося тела необходимо иметь два прибора, из которых один измеряет координату, второй — скорость.

Нильс Бор (один из основателей современной квантовой физики) показал, что все измерительные приборы можно разделить на два класса таким образом, что приборы одного из них дают информацию, *дополнительную* к той, которую дают приборы другого класса. Например, одни приборы служат для измерения координат, другие — импульсов или скоростей. Полную информацию о характере движения тела можно получить только при совместном применении приборов обоих типов.

## § 14.2. Соотношение неопределенностей

1. Приборы, с помощью которых производятся измерения координат и скоростей, взаимодействуют с телом, параметры которого измеряются. Так, радиоволна, достигая самолета и отражаясь от него, оказывает на самолет определенное давление и тем самым изменяет его координату и скорость.

Конечно, в случае самолета эти изменения совершенно ничтожны, и мы можем их не учитывать. Однако по мере проникновения в микромир стало ясно, что измерительный прибор может вносить серьезные возмущения в характер движения микрочастицы, и воздействием прибора пренебрегать нельзя. Это связано с особой природой микрочастиц, которую мы рассмотрим в разделе, посвященном квантовой механике.



2. В. Гайзенберг проанализировал результаты всевозможных экспериментов, которые могут быть проведены для измерения координаты частицы и ее импульса (или скорости). Он пришел к выводу, что особая природа микрочастиц приводит к тому, что при одновременном измерении координат и импульсов возникают неопределенности в их значениях, равные  $\Delta x$  и  $\Delta p_x$  соответственно. Эти определенности связаны соотношением

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar, \quad (14.5)$$

где *постоянная Планка*  $\hbar$  — одна из важнейших мировых констант, имеющая огромное значение в описании явлений микромира. С этой величиной мы часто будем встречаться в квантовой механике. Принятое в настоящее время значение:

$$\hbar = (1,0545887 \pm 0,0000057) \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$$

$$h = 2\pi\hbar = (6,626176 \pm 0,000036) \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

Аналогичным соотношением связаны неопределенности координат и импульсов и по другим осям:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \approx \hbar, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \approx \hbar.$$

### § 14.3. Соотношение неопределенностей и классическая механика

1. Сопоставляя метод решения основной задачи динамики с соотношением неопределенностей Гайзенберга, мы видим, что они противоречат друг другу. Действительно, для определения закона движения необходимо максимально точное задание начальных условий; соотношение же неопределенностей показывает, что начальные условия могут быть заданы лишь приближенно, причем степень приближения не беспредельна. Но тогда не ясно, как же в классической механике удастся найти закон движения с произвольной, наперед заданной точностью?

Для ответа на этот вопрос проанализируем три задачи. В первой из них рассмотрим движение макроскопического тела (ракеты); во второй — движение микрочастицы (электрона) по макроскопической траектории и, наконец, в третьей задаче — движение микрочастицы по микротраектории.

2. *Задача 1.* Ракета массой  $10^3$  кг обращается вокруг Земли по круговой орбите. Радиус орбиты 6500 км; скорость ракеты 8 км/с. С какой точностью могут быть заданы радиус и скорость?

Для того чтобы ракета двигалась по окружности, вектор скорости в каждой точке траектории должен быть перпендикулярен радиусу. Это значит, что компонента скорости вдоль радиуса должна равняться нулю. Но если эта компонента *точно* равна нулю, то и ее неопределенность  $\Delta v_r$  тоже равна нулю. А тогда, как показывает соотношение (14.5), неопределенность в значении радиуса станет бесконечно большой. Но мы можем пойти на компромисс. Пусть радиус орбиты задан с неопределенностью  $\Delta r$ , а радиальная компонента скорости равна нулю, но с неопределенностью  $\Delta v_r$ , которая может быть получена из соотношения неопределенностей Гейзенберга (рис. 14.5):

$$\Delta r \cdot \Delta p_r \approx \hbar.$$

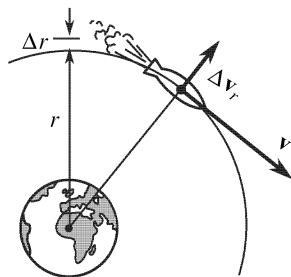


Рис. 14.5

Если при этом неопределенности интересующих нас величин значительно меньше их самих, то можно считать, что задача решена достаточно точно.

Положим в нашем случае, что  $\Delta r = 10^{-10}$  м — эта неопределенность примерно равна диаметру атома. Ясно, что на практике ошибка любого измерительного прибора значительно больше! Тогда неопределенность радиальной составляющей импульса ракеты

$$\Delta p_r \approx \frac{\hbar}{\Delta r} = \frac{10^{-34}}{10^{-10}} = 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с},$$

а неопределенность радиальной компоненты скорости

$$\Delta v_r = \frac{\Delta p_r}{m} \approx \frac{\hbar}{m \Delta r} = \frac{10^{-34}}{10^3 \cdot 10^{-10}} \text{ м/с} = 10^{-27} \text{ м/с}.$$

Но ведь орбитальная скорость ракеты  $8 \cdot 10^3$  м/с несоизмеримо больше полученной неопределенности!

Итак, при анализе движения макроскопического тела соотношение неопределенностей не играет никакой роли. Мы можем вполне пренебречь неопределенностями координат и скоростей, полагать, что начальные условия могут быть заданы с той точностью, которая нам нужна, и решать основную задачу динамики классическими методами.

**Задача 2.** Электрон движется в бетатроне (приборе для ускорения электронов) по круговой орбите радиусом 2,5 м со скоростью, равной 99% от скорости света:  $v = 0,99c = 2,97 \cdot 10^8$  м/с.

С какой точностью могут быть заданы радиус орбиты и скорость электрона?

В отличие от предыдущей задачи, здесь следует воспользоваться выражением для релятивистского импульса (13.3):

$$p = \Gamma m v = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 2,97 \cdot 10^8}{\sqrt{1 - 0,99^2}} \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 1,9 \cdot 10^{-21} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Поскольку масса электрона значительно меньше массы ракеты, нельзя задать радиус орбиты с такой высокой степенью точности, как это было сделано в предыдущей задаче. Однако если мы зададимся неопределенностью радиуса  $\Delta r = 0,05$  мм, то орбита будет определена весьма точно — относительная ошибка составит

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{0,05}{2,5 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-5} = 0,002 \text{ \%}.$$

Неопределенность радиальной компоненты импульса

$$\Delta p_r = \frac{\hbar}{\Delta r} = \frac{10^{-34}}{5 \cdot 10^{-5}} \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 2 \cdot 10^{-30} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Относительная ошибка, возникающая в случае, если мы пренебрегаем радиальной составляющей импульса, ничтожно мала:

$$\frac{\Delta p_r}{p} = \frac{2 \cdot 10^{-30}}{1,9 \cdot 10^{-21}} = 10^{-9}.$$

Следовательно, и в этом случае, когда микрочастица движется по макроскопической траектории, соотношение неопределенностей фактически не играет никакой роли. И здесь можно полагать, что начальные условия могут быть заданы с нужной степенью точности, и решать задачу классическими методами (с учетом релятивистских эффектов).

В дальнейшем мы узнаем, что сложная природа элементарных частиц (электронов, протонов, нейтронов и т. п.) не позволяет, строго говоря, рассматривать их в качестве материальных точек, и траектории элементарных частиц нельзя так просто рассчитывать. Однако в случаях, аналогичных рассмотренному, вполне допустим такой подход к решению задачи о характере их движения.

**Задача 3.** Рассмотрим движение микрочастицы на микроорбите, например движение электрона в атоме. Радиус атома примерно равен  $r \approx 5 \cdot 10^{-11}$  м; орбитальная скорость примерно равна  $v \approx 10^6$  м/с. При данной скорости можно пренебречь релятивистскими эффектами. Неопределенность радиуса положим равной одному проценту от значения радиуса, т. е.  $\Delta r = 0,01r = 5 \cdot 10^{-13}$  м. Тогда неопределенность радиальной компоненты

скорости

$$\Delta v_r \approx \frac{\hbar}{m\Delta r} = \frac{10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-13}} = 2,2 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

что почти равно скорости света.

Итак, неопределенность радиальной компоненты скорости в 220 раз превышает орбитальную скорость! Очевидно, что в этом случае никакой речи о движении электрона по орбите быть не может, ибо скорость его движения совершенно не определена.

Наоборот, если мы зададимся некоторым разумным значением неопределенности радиальной компоненты скорости, например  $\Delta v_r/v = 1\%$ , то мы совершенно ничего не сможем сказать о траектории. Действительно, если  $\Delta v_r = 0,01v = 10^4 \text{ м/с}$ , то неопределенность радиуса

$$\Delta r = \frac{\hbar}{m\Delta v_r} = \frac{10^{-34}}{10^4 \cdot 9 \cdot 10^{-31}} = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

А это в 220 раз превышает сам радиус! Ясно, что здесь говорить о какой-то определенной орбите совершенно невозможно.

3. Итак, мы убедились, что соотношение неопределенностей не влияет на применимость методов ньютоновской механики или теории относительности к *макроскопическим объектам*. Здесь по силам и начальным условиям можно с любой наперед заданной степенью точности найти закон движения тела, рассматривая его как материальную точку. Соотношение неопределенностей фактически не ограничивает применение этих законов и к *микрочастицам*, которые движутся в *макроскопических* областях пространства. Так, вполне имеет смысл говорить о траектории электрона в радиолампе, электронно-лучевой трубке, ускорителе и т. п.

Совсем иная картина наблюдается в *микрообластях* — атоме, атомном ядре, кристаллической решетке твердого тела и т. д. Из-за соотношения неопределенностей здесь методы классической механики оказываются совершенно непригодными. В частности, здесь теряют всякий смысл такие классические понятия, как закон движения частицы, ее траектория, мгновенная скорость и т. п. Бессмысленно говорить о траектории электрона в атоме или о скорости движения протона в атомном ядре. Для решения этих задач используются методы *квантовой механики* (см. гл. 70–72, т. 2).

## Часть II

# ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

---

### Глава 15

## ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

### § 15.1. Замкнутая система тел

1. Для точного решения задачи о характере движения некоторого тела следует учесть все силы, действующие на него со стороны всех окружающих его тел. Но этих сил фактически бесконечно много. Кроме того, данные силы являются переменными, ибо в результате взаимодействия между собой окружающие тела движутся весьма сложным образом. В результате при такой постановке задачи ее фактически решить нельзя из-за непреодолимых математических трудностей.

На самом же деле задачу можно существенно упростить, если учесть, что не все окружающие тела действуют на данное тело с одинаковыми силами. Так, если спутник движется вокруг Земли по орбите с радиусом  $r = 8000$  км, то Солнце действует на него с силой, которая значительно меньше силы притяжения Земли:

$$\frac{F_3}{F_C} = \frac{GmM_3 \cdot R^2}{r^2 \cdot GmM_C} = \frac{M_3 R^2}{M_C r^2},$$

где  $R = 1$  а.е.  $= 1,49598 \cdot 10^{11}$  м,  $M_3 = 6 \cdot 10^{24}$  кг и  $M_C = 2 \cdot 10^{30}$  кг. Подставив числовые значения, мы получим, что Солнце действует на этот спутник с силой, в тысячу раз меньшей силы притяжения Земли. Читатель может убедиться, что сила притяжения Луны будет еще в 200 раз меньше, а действие остальных планет — ничтожно мало.

Этот расчет показывает, что мы можем в первом приближении отвлечься от действия на спутник всех тел, кроме Земли. Следовательно, можно рассмотреть *систему, состоящую из двух тел* — спутника и Земли, и считать, что их взаимодействие в основном определяет характер движения спутника. Все остальные тела можно считать *внешними* по отношению к этой системе и действие этих тел учесть в виде поправок к основной силе.

2. Принято силы, с которыми взаимодействуют между собой составные части данной системы, называть *внутренними силами*. *Внешними* называют силы, с которыми вся система или отдельные тела, входящие в ее состав, взаимодействуют с окружающими телами. Система тел называется *замкнутой* (или *изолированной*), если можно пренебречь действием внешних сил по сравнению с внутренними.

3. Так, в рассмотренном примере систему тел Земля–спутник можно в первом приближении рассматривать как замкнутую.

С еще большей степенью точности можно считать замкнутой Солнечную систему. Действительно, силы взаимодействия между Солнцем и планетами значительно превосходят силы, с которыми на эти планеты действуют даже самые близкие звезды. Ближайшая к Солнечной системе звезда расположена на колоссальном расстоянии  $R = 4,5$  св. года <sup>1)</sup>  $= 4,2 \cdot 10^{13}$  км; расстояние же от Земли до Солнца  $r = 1,5 \cdot 10^8$  км. Полагая, что масса звезды примерно равна массе Солнца, получим

$$\frac{F_C}{F_{зв}} = \frac{GmM \cdot R^2}{r^2 \cdot GmM} = \frac{R^2}{r^2} = \left( \frac{4,2 \cdot 10^{13}}{1,5 \cdot 10^8} \right)^2 \approx 8 \cdot 10^{10}.$$

Итак, здесь внутренняя сила (т. е. сила взаимодействия между Солнцем и Землей) в 80 миллиардов раз больше внешней силы (т. е. силы, с которой на Землю действует ближайшая звезда). Естественно, что у нас есть все основания считать Солнечную систему замкнутой.

4. Понятие замкнутой системы является весьма полезной абстракцией, ибо в таких системах все явления описываются с помощью наиболее простых и общих законов. Поэтому *всюду, где это возможно, следует отвлекаться от действия внешних сил и рассматривать изучаемую систему тел как замкнутую*. Затем, если это необходимо, следует в решение, полученное в первом приближении, внести поправки, учитывающие характер возмущений, вносимых действием внешних сил.

## § 15.2. Закон сохранения импульса

1. Для замкнутых систем справедлив закон сохранения импульса, который можно сформулировать так: *суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется при любых процессах, происходящих в этой системе*.

<sup>1)</sup> Световым годом называется расстояние, которое свет проходит в вакууме за 1 год.

Не следует думать, что этот закон требует неизменности импульса каждого тела, входящего в систему. Как раз наоборот — благодаря действию внутренних сил импульсы тел, входящих в систему, все время изменяются. *Сохраняется лишь векторная сумма импульсов всех составных частей системы.*

2. Для вывода закона сохранения импульса воспользуемся вторым и третьим законами Ньютона. Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда система состоит из двух тел; рассмотрение более общего случая системы, состоящей из многих тел, не даст ничего принципиально нового, но существенно усложнит вывод.

Пусть в момент времени  $t'$  импульс первого тела  $p'_1 = \Gamma'_1 m_1 \mathbf{v}'_1$  и второго тела  $p'_2 = \Gamma'_2 m_2 \mathbf{v}'_2$ ; в момент времени  $t''$  соответственно  $p''_1 = \Gamma''_1 m_1 \mathbf{v}''_1$  и  $p''_2 = \Gamma''_2 m_2 \mathbf{v}''_2$ . Второй закон Ньютона для первого тела запишется так (13.5):

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\Gamma''_1 m_1 \mathbf{v}''_1 - \Gamma'_1 m_1 \mathbf{v}'_1}{t'' - t'},$$

для второго

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\Gamma''_2 m_2 \mathbf{v}''_2 - \Gamma'_2 m_2 \mathbf{v}'_2}{t'' - t'}.$$

По третьему закону Ньютона  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ , или

$$\frac{\Gamma''_2 m_2 \mathbf{v}''_2 - \Gamma'_2 m_2 \mathbf{v}'_2}{t'' - t'} = -\frac{\Gamma''_1 m_1 \mathbf{v}''_1 - \Gamma'_1 m_1 \mathbf{v}'_1}{t'' - t'}.$$

Сократим знаменатели и перенесем все члены с двумя штрихами в левую, а с одним — в правую часть равенства. Получим

$$\Gamma''_2 m_2 \mathbf{v}''_2 + \Gamma''_1 m_1 \mathbf{v}''_1 = \Gamma'_2 m_2 \mathbf{v}'_2 + \Gamma'_1 m_1 \mathbf{v}'_1,$$

или, короче,

$$\Gamma_2 m_2 \mathbf{v}_2 + \Gamma_1 m_1 \mathbf{v}_1 = \text{const.} \quad (15.1)$$

В приближении ньютоновской механики, когда  $v_1 \ll c$  и  $v_2 \ll c$ , релятивистские факторы  $\Gamma_1 \approx \Gamma_2 \approx 1$ . Тогда

$$m_2 \mathbf{v}_2 + m_1 \mathbf{v}_1 = \text{const} \quad (15.2)$$

для любого момента времени.

Если замкнутая система состоит из нескольких тел, то для нее закон сохранения импульса запишется так:

$$\Gamma_1 m_1 \mathbf{v}_1 + \Gamma_2 m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \Gamma_n m_n \mathbf{v}_n = \text{const.} \quad (15.3)$$

### § 15.3. Явление отдачи

1. На практике часто встречается явление, когда некоторое тело под действием внутренних сил распадается на две части. Если при этом внутренние силы много больше внешних, то эту систему можно рассматривать как замкнутую и применить к ней закон сохранения импульса.

Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда тело до распада на части покоилось относительно системы отсчета. Тогда можно утверждать, что два новых тела, возникших в результате распада, будут двигаться в противоположных направлениях со скоростями, обратно пропорциональными их массам. Пусть массы этих тел равны  $m_1$  и  $m_2$ , а их скорости соответственно  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ . Из закона сохранения импульса следует

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.$$

Поскольку до распада тело покоилось относительно системы отсчета, то  $\mathbf{p} = 0$ . Отсюда (в приближении ньютоновской механики):

$$0 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2, \quad (15.4)$$

или

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{v}_1, \quad (15.5)$$

т. е. действительно векторы  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  направлены противоположно.

2. С явлением отдачи мы встречаемся, например, при выстреле из орудия: если орудие не закрепить, то оно откатится в сторону, противоположную направлению движения снаряда. В пулемете, автомате и т. п. за счет отдачи затвора происходит выбрасывание стреляной гильзы и перезарядка оружия.

С явлением отдачи связано движение всех видов транспорта. Так, при вращении ведущих колес автомобиля возникает сила трения между поверхностью покрышки и Землей. Эта сила является внутренней (в системе машина–Земля). За счет этой силы автомобиль движется в одну сторону, Земля — в противоположную. Движение Земли, конечно, происходит с ничтожно малой скоростью, ибо масса Земли несоизмеримо велика по сравнению с массой автомобиля.

Точно так же движется судно: его винт захватывает воду и отбрасывает ее за корму, благодаря чему судно движется вперед.

3. Многие явления в ядерной физике также сопровождаются отдачей. Например, ядро урана при попадании в него нейтрона делится на два осколка примерно равной массы. Поскольку ядро



и нейтрон до реакции движутся с очень малыми (тепловыми) скоростями, то можно приближенно считать, что до распада система покоилась. Но тогда возникшие при распаде осколки должны двигаться в противоположные стороны. Это хорошо видно на фотографии (рис. 15.1), полученной с помощью камеры Вильсона (см. § 36.9), посередине которой помещена пластинка с нанесенным слоем окиси урана. Видны следы  $AB$  и  $BC$ , оставленные двумя осколками, разлетевшимися в противоположных направлениях.

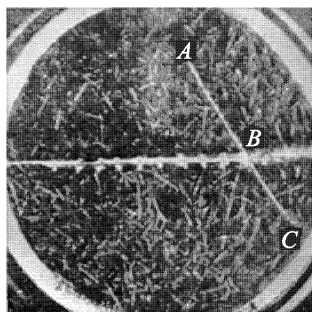


Рис. 15.1

Ниже мы рассмотрим еще одно явление, связанное с отдачей при ядерных реакциях (§ 17.2).

4. Пользуясь законом сохранения импульса, можно сравнить массы двух тел, не прибегая к их взвешиванию.

Свяжем два тела разной массы нитью и поместим между ними сжатую пружину. При пережигании нити оба тела станут двигаться вдоль некоторой оси в противоположных направлениях со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Так как, согласно формуле (15.5), скорости обратно пропорциональны массам, то, зная эти скорости и массу одного тела, определяем массу второго без весов.

В механике этим методом измерения массы практически не пользуются, поскольку измерить скорости тел довольно трудно: дело в том, что из-за наличия трения эти скорости непрерывно меняются. Однако в ядерной физике, где скорость частицы можно измерить по длине ее пробега, этот метод может быть использован, например, для сравнения масс осколков, возникших при делении ядра.

## § 15.4. Реактивное движение

1. Движение ракеты объясняется на основе того же закона, что и явление отдачи, а именно закона сохранения импульса. При сгорании топлива из сопла с большой скоростью вырываются газы, в результате чего ракета движется в противоположном направлении, так что сумма импульсов ракеты и газов остается постоянной величиной.

Поскольку скорость ракеты  $v$  и скорость истечения газов  $u$  — нерелятивистские величины ( $v < u \ll c$ ), то все расчеты дальше мы будем вести в приближении ньютоновской механики.

Пусть в некоторый момент времени  $t$  масса ракеты (вместе с горючим и окислителем) равна  $m$ , а скорость ее относительно Земли равна  $v$ . При сгорании некоторого количества топлива ракета к моменту времени  $t_1$  будет иметь массу  $m_1$  и скорость относительно Земли  $v_1$ . Скорость газов относительно ракеты — *скорость истечения* — равна  $u$  и направлена в сторону, противоположную скорости ракеты. Тогда скорость газов относительно Земли в момент времени  $t_1$  равна разности скорости ракеты и скорости истечения:  $v_{\text{газ}} = v_1 - u$ .

Импульс ракеты в момент времени  $t$  равен  $p = mv$ . В момент времени  $t_1$  суммарный импульс ракеты и газов

$$p_1 = m_1 v_1 + m_{\text{газ}} v_{\text{газ}} = m_1 v_1 + (m - m_1)(v_1 - u).$$

Поскольку ракета и газы образуют замкнутую систему, к ней применим закон сохранения импульса:

$$mv = m_1 v_1 + (m - m_1)(v_1 - u). \quad (15.6)$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$m(v - v_1) = u(m_1 - m).$$

Но  $\Delta v = v_1 - v$  равно приращению скорости ракеты;  $\Delta m = m_1 - m$  равно массе топлива, выгоревшего за время  $\Delta t = t_1 - t$ . Следовательно,

$$-m \cdot \Delta v = u \cdot \Delta m. \quad (15.7)$$

2. Газы, вырываясь из сопла ракеты, действуют на нее с некоторой силой, которая называется *реактивной силой тяги*. Чтобы найти ее, воспользуемся основным уравнением динамики (7.2). Для этого разделим обе части равенства (15.7) на  $\Delta t$ . Учитывая, что  $m \Delta v / \Delta t = F$  представляет собой *силу тяги*, а  $\mu = \Delta m / \Delta t$  — *ежесекундный расход топлива*, получим

$$F = -\mu u. \quad (15.8)$$

Итак, реактивная сила тяги пропорциональна ежесекундному расходу топлива и скорости истечения газов; она направлена противоположно направлению истечения газов.

## § 15.5. Расчет запаса топлива

1. Для грубой оценки примерного запаса топлива сделаем ориентировочный расчет. Допустим, что ракета с массой около 10 т должна подниматься с ускорением  $a = 5g = 49 \text{ м/с}^2$ . Сила тяги  $F = ma = 49 \cdot 10^4 \text{ Н}$ . Скорость истечения газов у современных ракет  $u \approx 4 \text{ км/с}$ . Отсюда расход топлива

$$\mu = \frac{F}{u} = \frac{49 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^3} \text{ кг/с} \approx 120 \text{ кг/с}.$$

Первой космической скорости (8 км/с) ракета, двигаясь с ускорением около  $50 \text{ м/с}^2$ , достигает через время  $t = v : a = 8000 : 50 = 160 \text{ с}$ . Следовательно, суммарный запас топлива

$$M_{\text{топл}} = \mu t \approx 120 \text{ кг/с} \cdot 160 \text{ с} \approx 19\,000 \text{ кг} \approx 20 \text{ т}.$$

2. Приведенный расчет не годен даже для ориентировочной оценки запаса топлива. Дело в том, что ракета является телом с переменной массой, поскольку по мере выгорания топлива масса ее все время уменьшается. А поэтому, если нам нужно запустить на орбиту ракету массой 10 т, то в начале полета даже по нашему ориентировочному расчету ее масса должна быть около 30 т. Чтобы сообщить этой массе нужное ускорение, нужна сила тяги в 3 раза большая, что требует увеличения расхода топлива, а это неизбежно приводит к еще большему увеличению запаса топлива и его расхода.

3. Запас топлива можно точно рассчитать по формуле Циолковского, которую мы приведем без доказательства:

$$\frac{v}{u} = \ln \frac{M_0}{M} = 2,3 \lg \frac{M_0}{M}, \quad (15.9)$$

где  $v$  — конечная скорость ракеты (начальная скорость  $v_0 = 0$ );  $u$  — скорость истечения газов;  $M$  — масса ракеты на орбите;  $M_0 = M_{\text{топл}} + M$  — начальная масса ракеты с топливом. График этой функции приведен на рис. 15.2.

Полагая  $v = 8 \text{ км/с}$ ,  $u = 4 \text{ км/с}$ ,  $M = 10 \text{ т}$ , получаем

$$\lg \frac{M_0}{M} = \frac{8}{4 \cdot 2,3} = 0,87,$$

Рис. 15.2

откуда  $M_0/M = 7,4$ ,  $M_0 = 74 \text{ т}$  и  $M_{\text{топл}} = 64 \text{ т}$  — почти в 3,5 раза больше того, что дала грубая оценка. Еще больший запас топлива — около 160 т — потребуется для достижения второй космической скорости  $v = 11,2 \text{ км/с}$ .

## § 15.6. Центр масс

Пусть две материальные точки (частицы) с массами  $m_1$  и  $m_2$  расположены на оси абсцисс в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$ . Расстояние между этими точками  $l = x_2 - x_1$  (рис. 15.3). Точку  $C$ , которая делит расстояние между частицами на отрезки, обратно пропорциональные массам этих частиц, назовем *центром инерции* (или *центром масс*) данной системы частиц. Итак, по определению

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (15.10)$$

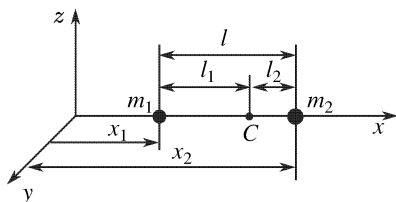


Рис. 15.3

Поскольку  $l_1 = x_c - x_1$ ,  $l_2 = x_2 - x_c$ , где  $x_c$  — координата центра масс, то

$$m_1(x_c - x_1) = m_2(x_2 - x_c),$$

откуда

$$x_{\text{ц}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (15.11)$$

Это выражение легко обобщается на случай нескольких материальных точек, расположенных произвольным образом; абсцисса центра масс

$$x_{\text{ц}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (15.12)$$

Аналогичные выражения получаются для ординаты  $y_{\text{ц}}$  и аппликаты  $z_{\text{ц}}$  центра масс системы материальных точек.

### § 15.7. Движение центра масс

1. Задачу о характере движения центра масс решим для случая, когда тела движутся со скоростями, много меньшими скорости света.

Записав выражение (15.12) для двух разных моментов времени и вычитая одно из другого, получим

$$\Delta x_{\text{ц}} = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (15.13)$$

Разделив обе части равенства на  $\Delta t = t_2 - t_1$  и положив  $\Delta x_{\text{ц}}/\Delta t = v_{\text{ц}}^{(x)}$  (компонента вектора скорости по оси абсцисс), имеем

$$v_{\text{ц}}^{(x)} = \frac{m_1 v_1^{(x)} + m_2 v_2^{(x)} + \dots + m_n v_n^{(x)}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (15.14)$$

Аналогичные выражения получатся для компонент скорости по осям ординат и аппликат. Выражение для скорости центра масс в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{v}_{\text{ц}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_n \mathbf{v}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\mathbf{P}}{M}, \quad (15.15)$$

где  $M$  — суммарная масса системы,  $\mathbf{P}$  — ее суммарный импульс.

2. Вышеизложенные рассуждения непригодны в теории относительности, где зависимость импульса от скорости (13.3) сложнее, чем в ньютоновской механике, и из формулы (15.13) не вытекает выражение (15.14). Поэтому в теории относительности центр масс системы материальных точек по определению называется точкой, скорость которой

$$\mathbf{v}_{\text{ц}} = \frac{\Gamma_1 m_1 \mathbf{v}_1 + \Gamma_2 m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \Gamma_n m_n \mathbf{v}_n}{\Gamma_1 m_1 + \Gamma_2 m_2 + \dots + \Gamma_n m_n}. \quad (15.16)$$

Что же касается формулы (15.12), то ею в теории относительности не пользуются.

3. Если система частиц замкнута, то ее суммарный импульс является постоянной величиной. Но тогда и скорость центра масс является постоянной величиной.

Иными словами, *центр масс замкнутой системы совершает инерциальные движения*, т. е. движется прямолинейно и равномерно независимо от того, как движутся отдельные тела, из которых составлена система.

Следует обратить внимание на смысл этого утверждения. В замкнутой системе действуют внутренние силы, вследствие чего тела, входящие в состав системы, могут двигаться ускоренно и их скорости (и импульсы) могут непрерывно изменяться. Однако это не сказывается на движении центра масс. Итак, *под действием внутренних сил скорость движения центра масс не меняется*.

4. Читатель легко может найти ряд примеров, подтверждающих полученный результат. Так, находясь в автомобиле, можно давить на любую его стенку с произвольной силой, но это никак не повлияет на характер движения машины: если машина покоится

относительно Земли, то она и останется в покое, а если движется, то продолжит движение с той же скоростью.

Точно так же ясно, что барон Мюнхгаузен сочинял, рассказывая о том, как он сам себя за волосы вытягивал из болота (рис. 15.4). Поскольку его центр масс погружался, то любые усилия, которые он сам прилагал к своим волосам, не могли изменить скорость погружения.



Рис. 15.4

При перемещении человека вдоль лодки последняя перемещается в противоположном направлении (рис. 15.5). Причина заключается в следующем. При очень малых скоростях сила трения между лодкой и водой ничтожно мала (§ 11.8), поэтому лодка вместе с человеком образует замкнутую систему. Перемещение человека в одном направлении вызывает соответствующее перемещение лодки в противоположном направлении так, что центр масс этой системы  $C$  сохраняет неизменное положение.

Данное положение относится не только к поступательному, но и к вращательному движению. Так, можно лишь приблизительно говорить о том, что Луна обращается вокруг Земли; фактически система Земля–Луна обращается вокруг общего центра масс.

Найдем его положение. Расстояние между центрами Земли и Луны равно 384 000 км, масса Луны в 81 раз меньше массы Земли. Из (15.12) следует, что расстояние от центра масс до центра Земли

$$x_{\text{ц}} = \frac{1 \cdot 384\,000 + 81 \cdot 0}{1 + 81} \approx 4700 \text{ км.}$$

Но радиус земного шара равен 6370 км, следовательно, центр масс системы Земля–Луна заметно отстоит от центра Земли. Проведая такой же расчет для системы Земля–Солнце и проанализировав результат, можно убедиться, что центр масс этой системы почти точно совпадает с центром Солнца.

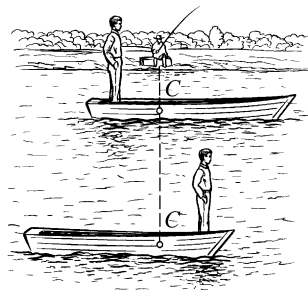


Рис. 15.5

### § 15.8. Релятивистский фактор

1. Пользуясь свойствами центра масс, выведем выражение для релятивистского фактора (13.4), который был в § 13.1 введен без должного обоснования.

Рассмотрим два совершенно одинаковых тела с равными массами, причем одно из них движется со скоростью  $u$  параллельно оси абсцисс, а второе покоится (рис. 15.6 а). Центр масс этой си-

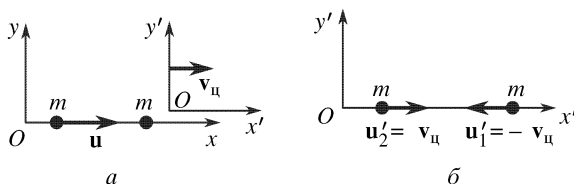


Рис. 15.6

стемы движется вдоль оси абсцисс со скоростью (15.16):

$$v_{\text{ц}} = \frac{\Gamma m u}{\Gamma m + m} = \frac{\Gamma u}{\Gamma + 1}. \quad (15.17)$$

Перейдем в штрихованную систему отсчета, которая движется с той же скоростью  $v_{\text{ц}}$ . В этой системе отсчета скорость центра масс равна нулю, а оба тела движутся навстречу друг другу, имея равные по модулю, но противоположные по направлению импульсы (рис. 15.6 б).

Очевидно, что тело, покоившееся в системе отсчета  $xOz$ , будет двигаться относительно штрихованной системы со скоростью  $u'_1 = -v_{\text{ц}}$ . Скорость же второго тела  $u'_2 = v_{\text{ц}}$ . В самом деле,

релятивистский фактор не зависит от направления скорости, а зависит только от ее модуля, а модули импульсов будут равны лишь в том случае, если у обоих тел (с равной массой покоя) окажутся одинаковыми модули скорости.

2. Скорость тела  $u'_2$  можно вычислить, воспользовавшись релятивистским законом сложения скоростей (12.11):

$$u'_2 = v_{ц} = \frac{u - v_{ц}}{1 - uv_{ц}/c^2}. \quad (15.18)$$

Выражение (15.18) является квадратным уравнением относительно  $v_{ц}$ :

$$\frac{uv_{ц}^2}{c^2} - 2v_{ц} + u = 0.$$

Его корни:

$$v_{ц1} = \frac{1 + \sqrt{1 - u^2/c^2}}{u/c^2} = \frac{c^2(1 + \sqrt{1 - u^2/c^2})}{u} = \frac{u}{1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

$$v_{ц2} = \frac{1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}}{u/c^2} = \frac{c^2(1 - \sqrt{1 - u^2/c^2})}{u} = \frac{u}{1 + \sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Первый корень не имеет физического смысла, ибо скорость центра масс не может превосходить скорость света в вакууме (см. § 12.6). Подставив значение второго корня в выражение (15.17), получим искомое выражение для релятивистского фактора  $\Gamma$ .

3. Мы видим, что введение релятивистского фактора в уравнения динамики согласуется с релятивистским законом сложения скоростей (12.11). Читатель легко убедится, что если воспользоваться классическим законом сложения скоростей (2.6), то получим  $v_{ц} = u/2$ . Подставив в (15.17), получим  $\Gamma = 1$  и соответствующее выражение для импульса (7.3) в ньютоновской механике.

## Глава 16

# ПОЛНАЯ И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

## § 16.1. Полная энергия тела

1. Понятие энергии является одним из основных понятий физики. Из начального курса физики читателю известен *закон сохранения энергии* — один из важнейших законов природы, а также ряд применений этого закона для объяснения механических, тепловых и электрических явлений. С понятием энергии приходится встречаться при рассмотрении ряда технических задач,

ибо одной из важнейших проблем техники является получение, передача и использование энергии. В этой и последующих главах будет подробно изложено понятие энергии и показано, как им пользоваться при решении ряда физических задач.

2. Наиболее общее понятие об энергии можно получить, пользуясь идеями теории относительности. *Полная энергия* изолированного от внешних воздействий тела *есть произведение массы на квадрат скорости тела и на релятивистский фактор*:

$$\mathcal{E} = \Gamma mc^2. \quad (16.1)$$

Из этого определения следует, что *в разных системах отсчета полная энергия тела различна*. Она зависит от того, с какой скоростью тело движется относительно системы отсчета, поскольку от скорости зависит его релятивистский фактор (см. § 13.1), а в разных системах отсчета тело имеет различную скорость.

Наименьшей энергией тело обладает в системе отсчета, относительно которой оно покоится. Это значение энергии тела называется *энергией покоя*. При  $u = 0$  релятивистский фактор  $\Gamma = 1$ . Итак,

$$\mathcal{E}_0 = mc^2. \quad (16.2)$$

## § 16.2. Кинетическая энергия

1. *Кинетической энергией тела  $K$  называется разность между его полной энергией и энергией покоя*:

$$K = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = mc^2(\Gamma - 1). \quad (16.3)$$

Она зависит от скорости движения тела относительно системы отсчета.

Придадим выражению для кинетической энергии вид, более удобный для дальнейших исследований. Умножив и разделив это выражение на  $\Gamma + 1$ , получим после преобразований:

$$K = \frac{mc^2(\Gamma^2 - 1)}{\Gamma + 1} = \frac{mc^2(1 - 1/\Gamma^2)}{1/\Gamma + 1/\Gamma^2} = \frac{mc^2(1 - 1 + u^2/c^2)}{1/\Gamma + 1/\Gamma^2} = \frac{mu^2}{1/\Gamma + 1/\Gamma^2}.$$

В ньютоновской механике скорость движения тела относительно системы отсчета много меньше скорости света; поэтому там можно пренебречь членом  $u^2/c^2$  по сравнению с единицей и положить  $(1/\Gamma) = \sqrt{1 - u^2/c^2} \approx 1$ . Тогда мы получим очень простую формулу для вычисления кинетической энергии в ньютоновской механике:

$$K = \frac{mu^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (16.5)$$



Хотя эта формула и является приближенной, при скоростях движения, с которыми обычно приходится иметь дело в технике, она дает очень хорошую точность. Пользуясь результатами § 13.3, получим, что даже при скоростях порядка сотен километров в секунду приближенное выражение (16.5) отличается от точного (16.4) менее чем на десяти тысячную долю процента.

2. При скоростях, много меньших скорости света, кинетическая энергия тела значительно меньше энергии покоя. Действительно,

$$\frac{K}{\mathcal{E}_0} = \frac{u^2}{2c^2} \ll 1.$$

Даже при скорости  $u \approx 300$  км/с, что в 10 раз больше орбитальной скорости Земли, кинетическая энергия составит

$$\frac{K}{\mathcal{E}_0} = \frac{9 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 5 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-5} \%,$$

т. е. сотысячные доли процента от энергии покоя тела!

Наоборот, при ультрарелятивистских скоростях, мало отличающихся от скорости света, практически вся энергия тела сводится к его кинетической энергии: энергия покоя здесь значительно меньше кинетической. Так, в современных синхрофазотронах протоны разгоняются до скоростей порядка  $u = 0,999923$  с. Здесь

$$\frac{K}{\mathcal{E}_0} = \Gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 = \frac{10^3}{\sqrt{153,994}} - 1 = 80,6 - 1 \approx 80.$$

Следовательно, при этих скоростях кинетическая энергия протона в 80 раз больше его энергии покоя.

Пренебрегая энергией покоя по сравнению с кинетической, получим из (16.3) приближенно для ультрарелятивистских скоростей

$$K \approx \mathcal{E} = \Gamma mc^2. \quad (16.6)$$

### § 16.3. Энергия и импульс

1. Выведем соотношение между полной энергией тела и его импульсом, которое нам потребуется в дальнейшем. Для этой цели возведем в квадрат выражения для полной энергии (16.1) и релятивистского импульса (13.3):  $\mathcal{E}^2 = \Gamma^2 m^2 c^4$  и  $p^2 = \Gamma^2 m^2 u^2$ . Умножая второе выражение на  $c^2$  и вычитая его из первого, имеем

$$\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = \Gamma^2 m^2 c^4 - \Gamma^2 m^2 u^2 c^2 = \Gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right). \quad (16.7)$$

Но, согласно (13.4) выражение  $\Gamma^2(1 - u^2/c^2) = 1$ . С учетом (16.2) получим

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + p^2 c^2. \quad (16.8)$$

В ультрарелятивистской области

$$K \approx \mathcal{E} \approx pc. \quad (16.9)$$

2. Анализ выражения (16.8) показывает, что существуют два способа изменения полной энергии тела.

Во-первых, можно изменить импульс тела, не меняя энергии покоя. Для этого необходимо изменить скорость движения тела относительно избранной системы отсчета. Во-вторых, можно изменить энергию покоя; при этом, естественно, изменится и масса этого тела. На первый взгляд не ясно, с помощью каких процессов можно изменить массу тела. На самом же деле такие процессы возможны, что будет показано в главах 20 и 21.

## § 16.4. Кинетическая энергия и работа

1. Рассмотрим случай, когда на тело действует сила  $\mathbf{F}$ , составляющая угол  $\alpha$  с направлением перемещения. В общем случае мы можем считать силу переменной, а траекторию тела криволинейной. Разложим силу на две компоненты (рис. 16.1), тангенциальную  $F_t = F \cos \alpha$  и нормальную  $F_n = F \sin \alpha$ , и рассмотрим, как они влияют на кинетическую энергию тела.

Нормальная компонента силы меняет только направление вектора скорости, но не меняет ее абсолютной величины (§ 4.8), поэтому нормальная компонента силы не меняет кинетической энергии тела. Действительно, в выражение для кинетической энергии (16.4) входит квадрат скорости, следовательно, кинетическая энергия зависит только от модуля скорости или импульса, но не зависит от направления этих векторов.

Тангенциальная же компонента силы влияет именно на абсолютную величину скорости или импульса, но не на их направление. Следовательно, изменение кинетической энергии тела происходит под действием тангенциальной компоненты силы. Последняя, согласно (13.5), может быть записана так:

$$F_t = F \cos \alpha = \frac{dp}{dt}.$$

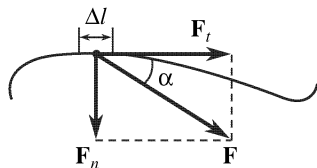


Рис. 16.1

Действительно, тангенциальная компонента силы характеризует изменение абсолютной величины импульса в единицу времени, поэтому в выражении (13.5) следует вместо разности векторов рассматривать разность модулей этих векторов.

2. Пусть под действием силы тело переместилось на малое расстояние  $\Delta l$  в течение малого промежутка времени  $\Delta t$ . При неизменной энергии покоя изменение кинетической энергии тела равно изменению его полной энергии.

Дифференцируя (16.8) при  $\mathcal{E}_0 = \text{const}$ , получим

$$2\mathcal{E} d\mathcal{E} = 2pc^2 dp.$$

Подставив значения полной энергии  $\mathcal{E} = \Gamma mc^2$  и импульса  $p = \Gamma mu$ , получим после сокращений

$$d\mathcal{E} = dK = u dp. \quad (16.10)$$

При неизменной энергии покоя изменение полной энергии тела равно изменению его кинетической энергии. Умножив и разделив (16.10) на  $dt$  и учитывая, что  $u dt = dl$ ,  $dp/dt = F_t = F \cos \alpha$ , получаем

$$dK = F_t dl = F \cos \alpha dl. \quad (16.11)$$

3. Физическую величину  $F_t dl = F \cos \alpha dl$  назовем *элементарной работой*:

$$\Delta A = F \cos \alpha dl = F_t dl = \mathbf{F} d\mathbf{l}. \quad (16.12)$$

Итак, *элементарная работа равна бесконечно малому изменению кинетической энергии тела*:

$$\Delta A = dK. \quad (16.13)$$

4. Рассмотрим случай работы произвольной силы на конечном участке траектории (рис. 16.2). Раз-

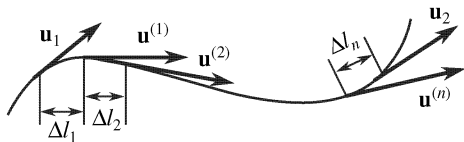


Рис. 16.2

бьем эту траекторию на малые участки  $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ . Для каждого участка, согласно (16.13), имеем

$$\begin{aligned} \Delta A_1 = \Delta K_1 = K_1 - K_0; \quad \Delta A_2 = \Delta K_2 = K_2 - K_1; \quad \dots \\ \dots; \quad \Delta A_n = \Delta K_n = K_n - K_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Сложив все эти равенства и обозначив полную работу на конечном участке пути через  $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$ , а  $K_n = K$ , имеем

$$A = K - K_0, \quad (16.14)$$

ибо все промежуточные слагаемые взаимно уничтожаются.

Итак, работа силы на конечном участке пути равна изменению кинетической энергии тела, т. е. разности значений кинетической энергии в конечной и начальной точках траектории. Выражение (16.14) выведено на основе формул теории относительности и потому справедливо для движений тела с произвольными скоростями (но при условии, что энергия покоя не меняется).

5. Учитывая важность этого результата, рекомендуем читателю самостоятельно вывести выражение (16.14) для случая действия постоянной силы в приближении  $u \ll c$  (ньютоновская механика). Можно, например, воспользоваться выражениями (4.9), (4.10) и (7.2) и получить

$$A = \frac{mu^2}{2} - \frac{mu_0^2}{2}. \quad (16.15)$$

### § 16.5. Мощность

*Средней мощностью за промежуток времени  $\Delta t$  называется отношение работы, совершаемой за это время, к промежутку времени:*

$$P_{\text{cp}} = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (16.16)$$

*Мгновенной мощностью называется предел, к которому стремится средняя мощность за бесконечно малый промежуток времени:*

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = A'(t). \quad (16.17)$$

Мгновенную мощность можно выразить через силу и мгновенную скорость. Для этого подставим в (16.17) выражение (16.12):

$$P = F_t u = F u \cos \alpha = \mathbf{F} \mathbf{u}, \quad (16.18)$$

где  $u$  — значение мгновенной скорости.

Заметим, что если сила перпендикулярна траектории ( $\alpha = \pi/2$ ), то и работа, и мощность равны нулю.

### § 16.6. Единицы энергии, работы и мощности

1. Поскольку работа есть мера изменения энергии, то работа и энергия измеряются одними и теми же единицами.

В СИ единицей работы является *джоуль*. Джоуль — это работа, совершаемая силой 1 Н на расстоянии 1 м в направлении действия силы:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}.$$

Размерность работы:

$$[A] = [F][l] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}.$$

Ту же размерность можно получить и так:

$$[A] = [\mathcal{E}] = [m][c^2] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}.$$

Наглядное представление о джоуле можно получить из следующих соображений: если тело массой 2 кг движется со скоростью 1 м/с, то его кинетическая энергия равна 1 Дж.

2. Единицей мощности в СИ служит *ватт*: это мощность, при которой за время 1 с совершается работа в 1 Дж:

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}.$$

Размерность мощности:

$$[P] = [A/t] = \text{ML}^2\text{T}^{-3}.$$

3. В атомной физике применяется единица энергии *электронвольт* (эВ) и ее производные: килоэлектронвольт (1 кэВ =  $10^3$  эВ), мегаэлектронвольт (1 МэВ =  $10^6$  эВ) и гигаэлектронвольт (1 ГэВ =  $10^9$  эВ)

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Смысл такого наименования единицы энергии будет выяснен ниже (см. § 18.7).

### § 16.7. Импульс и энергия локализованной частицы

1. Частица называется *локализованной* в некоторой области пространства с характерным размером  $a$ , если для ее координат справедливы соотношения

$$\begin{aligned} x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 \leq y \leq y_0 + a, \\ z_0 \leq z \leq z_0 + a. \end{aligned} \quad (16.19)$$

Это означает, что частица не выходит за пределы кубика, изображенного на рис. 16.3. Естественно, что неопределенность координаты частицы совпадает с характерным размером области локализации:

$$\Delta x \approx \Delta y \approx \Delta z \approx a. \quad (16.20)$$

Используя соотношение неопределенностей (14.5), найдем неопределенности проекций импульсов:

$$\Delta p_x \approx \Delta p_y \approx \Delta p_z \approx \hbar/a. \quad (16.21)$$

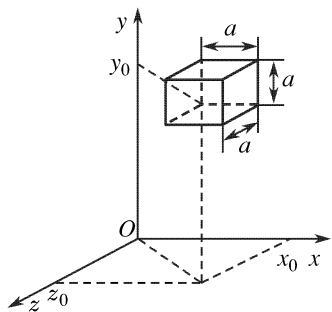


Рис. 16.3

2. Попытаемся оценить среднее значение модуля импульса этой частицы. Из (16.21) следует, что разность двух произвольных значений проекции импульса на любую координатную ось не превосходит  $\hbar/a$ :

$$0 \leq |p_{x2} - p_{x1}| \leq \hbar/a.$$

Но сумма модулей двух величин не меньше модуля их разности:

$$|p_{x1}| + |p_{x2}| \geq |p_{x2} - p_{x1}| \approx \hbar/a.$$

Среднее значение проекции импульса на ось абсцисс:

$$\langle p_x \rangle \approx \frac{1}{2} (|p_{x1}| + |p_{x2}|) \gtrsim \frac{\hbar}{2a}.$$

Аналогично для других проекций

$$\langle p_x \rangle \approx \langle p_y \rangle \approx \langle p_z \rangle \gtrsim \frac{\hbar}{2a}. \quad (16.22)$$

Отсюда следует выражение для среднего значения импульса частицы

$$\langle p \rangle = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle + \langle p_y^2 \rangle + \langle p_z^2 \rangle} \gtrsim \sqrt{\frac{3\hbar^2}{4a^2}} \approx \frac{\hbar}{a}, \quad (16.23)$$

где  $a$  — размер области локализации <sup>1)</sup>.

3. Выведем выражение для средней кинетической энергии локализованной частицы. Для нерелятивистского случая имеем, согласно (16.5) и (16.23):

$$\langle K \rangle = \frac{\langle p \rangle^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}. \quad (16.24)$$

Для ультрарелятивистской частицы в соответствии с (16.9) получим

$$\langle K_{\text{рел}} \rangle \approx \langle p \rangle c \geq \hbar c/a. \quad (16.25)$$

Если число частиц в единице объема (т. е. концентрация частиц) равно  $n$ , то очевидно, что  $na^3 = 1$ , откуда следует, что  $a = n^{-1/3}$ . Подставив это значение  $a$  в (16.24) и (16.25), получим выражения для кинетической энергии через концентрацию частиц:

$$\langle K \rangle \geq \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m}, \quad (16.26)$$

$$\langle K_{\text{рел}} \rangle \geq \hbar c n^{1/3}. \quad (16.27)$$

<sup>1)</sup> Здесь и далее угловыми скобками обозначаются средние значения величин. Мы видим, что среднее значение импульса локализованной частицы не меньше неопределенности импульса, т. е.  $\langle p \rangle \geq \Delta p$ . Аналогично среднее значение энергии  $\langle \mathcal{E} \rangle \geq \Delta \mathcal{E}$ .

4. Итак, частица, локализованная в некоторой области пространства, *не может покоиться*: среднее значение модуля ее импульса равно  $\langle p \rangle \approx \hbar/a$ , а среднее значение кинетической энергии равно  $\langle K \rangle \approx \hbar^2/(2ma^2)$  (или  $\langle K_{\text{рел}} \rangle \approx \hbar c/a$ ).

Этот результат представляется на первый взгляд парадоксальным, так как он противоречит нашему повседневному опыту, где мы наблюдаем множество покоящихся тел. Разобраться в этом парадоксе нам помогут два примера.

*Пример 1.* Пусть на столе лежит копеечная монета ( $m = 1$  г). Оценим ее средние импульс и скорость. Область локализации здесь по крайней мере не меньше ее размеров:  $a \approx 1$  см. Среднее значение импульса

$$\langle p \rangle \approx \frac{\hbar}{a} \approx \frac{10^{-34}}{10^{-2}} \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 10^{-32} \text{ кг} \cdot \text{м/с},$$

средняя скорость

$$\langle u \rangle \approx \frac{\langle p \rangle}{m} \approx \frac{10^{-32}}{10^{-3}} \text{ м/с} = 10^{-29} \text{ м/с}.$$

Естественно, что такой скоростью можно пренебречь и с полным правом считать монету покоящейся. Мы вновь видим, как и в § 14.3, что в области ньютоновской механики можно пренебречь следствиями из соотношения неопределенностей.

*Пример 2.* Оценим импульс и энергию электрона в атоме ( $a \approx 10^{-10}$  м). Имеем

$$\langle p \rangle \approx \frac{\hbar}{a} \approx \frac{10^{-34}}{10^{-10}} \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с},$$

$$\langle u \rangle \approx \frac{\langle p \rangle}{m} \approx \frac{\hbar}{ma} \approx \frac{10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-10}} \text{ м/с} \approx 10^6 \text{ м/с}.$$

Мы видим, что электрон в атоме не может покоиться, а должен двигаться со значительной, хотя и нерелятивистской скоростью. Среднее значение кинетической энергии

$$\langle K \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} \approx \frac{10^{-68}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-20}} \text{ Дж} = 5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 3 \text{ эВ}.$$

При более детальном знакомстве со строением атома (см. главы 71, 72) мы убедимся, что по порядку величины получили верный результат.

Итак, в микромире пользоваться ньютоновскими представлениями нельзя, здесь дадут правильные результаты лишь квантовые идеи, и в том числе следствия из соотношения неопределенностей.

## Глава 17

## ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ

## § 17.1. Что такое столкновение?

1. В обыденной жизни под столкновением понимается явление, аналогичное соударению *бильярдных шаров*, когда тела при встрече непосредственно касаются друг друга. В физике же это явление понимается в более широком смысле. Под *столкновением* или *ударом* мы понимаем *любое кратковременное взаимодействие частиц*.

Так, можно говорить о столкновении молекул, хотя они взаимодействуют на расстоянии через свои электрические поля; можно говорить о столкновении нейтрона или альфа-частицы с ядром, хотя и здесь нет непосредственного касания частиц, а взаимодействие осуществляется с помощью ядерных или электрических сил.

Особенностью теории столкновений является то, что мы детально не анализируем механизм взаимодействия. Причина заключается в том, что анализ сил, возникающих при столкновении, весьма затруднителен, а во многих случаях и просто невозможен. Так, например, обстоит дело с ядерными силами, закон изменения которых с расстоянием пока еще не найден.

Естественно, что в результате мы лишаемся возможности детально описать закон движения частиц, не можем рассчитать траектории, мгновенные скорости и т. п. Но зачастую это нас особенно и не интересует, тем более что для микрочастиц точное задание траектории и мгновенных скоростей (или импульсов) иногда просто невозможно из-за соотношения неопределенностей.

2. Задача о столкновениях обычно формулируется так: заданы импульсы и кинетические энергии частиц до столкновения; как найти значения этих величин после того, как столкновение произошло? Оказывается, что для решения этой задачи детальный анализ взаимодействия не нужен.

Ниже мы рассмотрим теорию столкновений только в приближении ньютоновской механики, когда скорости частиц много меньше скорости света в вакууме, а массы частиц достаточно велики.

Кроме того, для простоты рассуждений мы рассмотрим столкновение только двух частиц. Несмотря на кажущуюся ограниченность такой постановки задачи, она окажется полезной для анализа многих реальных физических явлений.



## § 17.2. Абсолютно неупругий удар

1. Удар называется *абсолютно неупругим*, если тела после соударения движутся с одинаковой скоростью, образуя одно новое тело. Примером может служить, скажем, попадание снарядов в платформу с песком, удар метеорита о Землю и т. п.

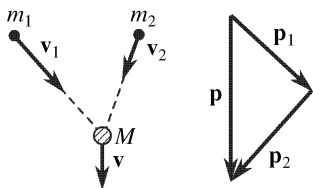


Рис. 17.1

Пусть частица с массой  $m_1$  движется со скоростью  $\mathbf{v}_1$ , а частица с массой  $m_2$  — со скоростью  $\mathbf{v}_2$ . Частицы встретились в некоторой точке и слиплись. Какова скорость вновь образовавшегося тела (рис. 17.1)? Поскольку мы рассматриваем нерелятивистский случай, масса образовавшегося тела  $M = m_1 + m_2$ . На основе закона сохранения импульса имеем

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}, \quad (17.1)$$

откуда

$$\mathbf{v} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (17.2)$$

2. Следует обратить внимание на то, что скорости и импульсы — векторы, и потому нельзя (17.1) понимать как арифметическую сумму. Сложение здесь выполняется по правилу сложения векторов. В частности, если тела движутся по одной прямой навстречу друг другу, то одному вектору следует приписать знак плюс, другому — минус (рис. 17.2).



Рис. 17.2

3. При неупругом ударе сумма кинетических энергий частиц до удара не равна кинетической энергии тела, образовавшегося после удара. Это совершенно очевидно для случая неупругого столкновения двух тел, импульсы которых равны и противоположно направлены. Здесь кинетическая энергия тела после столкновения равна нулю, а сумма кинетических энергий сталкивающихся тел до удара, естественно, нулю не равна. То же справедливо и для случая, когда тело, покоящееся относительно данной системы отсчета, распадается на два осколка.

4. В качестве примера рассмотрим альфа-радиоактивный распад. При распаде ядро некоторого радиоактивного элемента выбрасывает альфа-частицу (ядро гелия); вновь образовавшееся ядро испытывает отдачу.

Допустим, что нам известна кинетическая энергия альфа-частицы  $K$  и нас интересует кинетическая энергия нового ядра, которую мы обозначим буквой  $R$ . Эта задача легко решается на основе закона сохранения импульса.

Пусть масса альфа-частицы равна  $m$ , а масса ядра до распада —  $M$ , тогда масса нового ядра равна  $M - m$ . Предполагая, что ядро до распада покоилось относительно лабораторной системы отсчета, получим в соответствии с законом сохранения импульса

$$0 = \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_R. \quad (17.3)$$

Следовательно, импульсы альфа-частицы и нового ядра равны по модулю и противоположны по знаку.

Пусть альфа-частица движется с нерелятивистской скоростью; скорость нового ядра будет еще меньше. Их кинетические энергии найдем по формуле (16.5):

$$K = \frac{p_\alpha^2}{2m}, \quad R = \frac{p_R^2}{2(M - m)}. \quad (17.4)$$

Отношение кинетических энергий

$$\frac{K}{R} = \frac{M - m}{m}. \quad (17.5)$$

Изменение энергии первоначального ядра

$$\Delta \mathcal{E} = K + R = \frac{KM}{M - m}. \quad (17.6)$$

Рассмотрим конкретный числовой пример. Как показали исследования, ядра радия при распаде выбрасывают альфа-частицы с кинетической энергией  $K = 5,681$  МэВ; масса ядра радия в 56 раз больше массы альфа-частицы ( $M = 56m$ ). Тогда кинетическая энергия ядра, образовавшегося в результате радиоактивного распада

$$R = \frac{Km}{M - m} = \frac{5,681 \cdot 1}{55} = 0,103 \text{ МэВ},$$

а полная энергия реакции

$$\Delta \mathcal{E} = K + R = 5,784 \text{ МэВ}.$$

### § 17.3. Упругий удар

1. Удар называется *упругим*, если, кроме суммы импульсов, сохраняется сумма кинетических энергий соударяющихся тел. Это вовсе не означает, что не меняется энергия каждого из них. Напротив, при ударе меняются скорости тел, а вместе с ними — импульсы и кинетические энергии. Но *сумма импульсов и сумма кинетических энергий* при упругом ударе сохраняется.

При упругом столкновении двух тел получим такую систему уравнений:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2, \quad (17.7)$$

где без штрихов обозначены энергии и импульсы до удара, штрихами — после удара.

2. Рассмотрим упругий *центральный* удар двух шаров, т. е. такой удар, когда векторы скоростей направлены по прямой, соединяющей центры этих шаров. Для простоты рассуждений будем рассматривать явление в той системе отсчета, относительно которой шар  $m_2$  покоится, а шар  $m_1$  движется со скоростью  $v$ .

Уравнения (17.7) примут вид

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad (17.8)$$

или

$$m_1(v - v_1) = m_2 v_2, \quad m_1(v^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2.$$

Разделив второе равенство на первое, имеем

$$v + v_1 = v_2. \quad (17.9)$$

Подставив (17.9) в первое равенство системы (17.8), получим

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v + m_2 v_1,$$

откуда

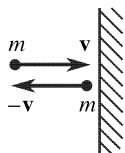
$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (17.10)$$

3. Остановимся на некоторых интересных частных случаях.

а. Если  $m_2 = m_1$ , то  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = v$ . Следовательно, при упругом центральном ударе шара о покоящийся шар равной ему массы первый шар остановится, второй же приобретет скорость первого шара. Если эти шары к тому же неразличимы (например, молекулы), то результат будет такой, как будто бы первый шар «прошел сквозь второй» и продолжает двигаться с той же скоростью, а неподвижный шар так и остался на месте.

б. Если  $m_1 > m_2$ , то  $0 < v_1 < v$ , а  $v_2 > v$ . В предельном случае, когда  $m_1 \gg m_2$ , скорость массивного шара почти не изменится, а легкий шар, покоившийся до удара, полетит со скоростью  $v_2 \approx 2v$ .

в. Если  $m_1 < m_2$ , то  $-v \leq v_1 < 0$ , т. е. легкий шар, налетев на массивный, отразится в обратном направлении. Массивный же шар  $m_2$  приобретет скорость  $0 < v_2 < v$ . В предельном случае, когда  $m_2 \gg m_1$ , можно положить, что отношение  $m_1/m_2$  стремится к нулю. Тогда из (17.10) следует, что  $v_2 = 0$ ; скорость же первого шара



$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{m_1/m_2 - 1}{m_1/m_2 + 1} v = -v,$$

т. е. шар при ударе о массивную стенку отразится от нее с той же по модулю скоростью, с которой он на нее налетает (рис. 17.3); скорость стенки практически не изменится.

## § 17.4. Замедление нейтронов

1. Для некоторых ядерных реакций необходимо замедлить нейтроны, т. е. уменьшить их кинетическую энергию от нескольких мегаэлектронвольт до сотых долей электронвольта. Замедле-

ние достигается за счет упругих соударений нейтронов с ядрами вещества замедлителя. Найдем коэффициент замедления  $r$ , равный отношению энергии, потерянной нейтроном при одном соударении, к его первоначальной кинетической энергии.

Пусть масса ядра замедлителя  $M$ , его скорость после удара  $u = 2mv/(m + M)$  (см. (17.10)). Энергия, потерянная нейтроном, равна энергии, которую получило ядро замедлителя; итак,

$$r = \frac{\Delta K}{K} = \frac{Mu^2 \cdot 2}{2 \cdot mv^2} = \frac{4mM}{(m + M)^2}. \quad (17.11)$$

В качестве замедлителя часто используется углерод. Масса его ядра в 12 раз больше массы нейтрона. Из (17.11) при  $M = 12m$  получим

$$r = \frac{4 \cdot 1 \cdot 12}{13^2} = 0,284 = 28,4\%.$$

2. Для определения числа соударений до полного замедления нейтронов сделаем такой расчет. Если начальная кинетическая энергия нейтрона равна  $K$ , то после одного соударения

$$K_1 = K - \Delta K = K(1 - r).$$

После второго соударения

$$K_2 = K_1 - \Delta K_1 = K_1(1 - r) = K(1 - r)^2.$$

Очевидно, что после  $n$  столкновений кинетическая энергия

$$K_n = K(1 - r)^n. \quad (17.12)$$

Полагая

$K = 1,75 \text{ МэВ} = 1,75 \cdot 10^6 \text{ эВ}$ ,  $K_n = 0,025 \text{ эВ}$ ,  $r = 0,284$ ,  
получим:  $0,025 = 1,75 \cdot 10^6 \cdot 0,716^n$ , или  $0,143 \cdot 10^{-7} = 0,716^{-n}$ , откуда

$$n = \frac{\ln(0,143 \cdot 10^{-7})}{\lg 0,716} = \frac{-7,845}{-0,145} = 54.$$

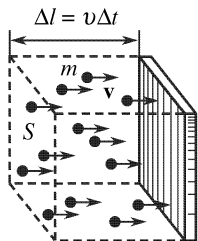
Итак, если бы упругое соударение нейтрона с ядром углерода было всегда центральным, то за 54 соударения его кинетическая энергия уменьшилась бы с 1,75 МэВ до 0,025 эВ, т. е. в 70 миллионов раз! Однако на самом деле кроме центральных ударов происходят косые соударения, при которых нейтрон теряет меньше энергии, чем при центральных. Поэтому для получения соответствующего замедления потребуется некоторое увеличение числа столкновений.

3. Значительно более эффективным замедлителем служит «тяжелая» вода, в которой атомы водорода замещены атомами «тяжелого» водорода — дейтерия. Здесь  $M = 2m$ ,  $r = 4mM/(m + M)^2 = 8/9$ . Подставим значение  $r$  в (17.12), получим  $K_n = K/9^n$ . Полагая, как и выше,  $K = 1,75 \text{ МэВ}$ ,  $K_n = 0,025 \text{ эВ}$ , имеем  $n = 7$ .

## § 17.5. Давление потока частиц на стенку

1. Рассмотрим поток, состоящий из одинаковых частиц с массой  $m$ , которые все движутся со скоростью  $v$  перпендикулярно некоторой стенке, масса которой значительно больше массы всех

частиц (рис. 17.4). Из рисунка видно, что за время  $\Delta t$  к стенке подойдут все частицы, содержащиеся в объеме  $V = S\Delta l = Sv\Delta t$ .



Если концентрация частиц (число частиц в единице объема) равна  $n$ , то за время  $\Delta t$  о стенку ударится  $N$  частиц:

$$N = nV = nSv\Delta t.$$

2. При ударе о стенку на частицу действует сила, равная изменению импульса частицы в единицу времени:

$$f = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t}. \quad (17.13)$$

Рис. 17.4

По третьему закону Ньютона частица действует на стенку с такой же по величине, но противоположно направленной силой. Учитывая, что на стенку за время  $\Delta t$  падает  $N$  частиц, найдем полную силу:

$$F = -fN = -nSv\Delta(mv). \quad (17.14)$$

3. Изменение импульса частицы зависит от характера ее удара о стенку. При упругом ударе частицы о неподвижную стенку ее скорость меняется на противоположную (§ 17.3).

Итак,  $v_{\text{нач}} = v$ ,  $v_{\text{кон}} = -v$ ; изменение импульса

$$\Delta(mv)_{\text{упр}} = mv_{\text{кон}} - mv_{\text{нач}} = -2mv. \quad (17.15)$$

Подставив (17.15) в (17.14), получим

$$F_{\text{упр}} = 2Snmv^2. \quad (17.16)$$

По определению *давлением*  $p$  называется отношение силы  $F$  к площади  $S$ , на которую эта сила действует (направление силы перпендикулярно площадке):

$$p = F/S.$$

Отсюда следует, что давление на стенку, которое оказывает поток частиц при упругом ударе об нее, выразится так:

$$p_{\text{упр}} \approx F_{\text{упр}}/S = 2nmv^2. \quad (17.17)$$

4. При неупругом ударе, когда частицы как бы «прилипают» к стенке, давление оказывается в два раза меньше. Действительно, здесь начальная скорость  $v_{\text{нач}} = v$ , а конечная скорость  $v_{\text{кон}} = 0$ . Изменение импульса

$$\Delta(mv)_{\text{неупр}} = mv_{\text{кон}} - mv_{\text{нач}} = -mv. \quad (17.18)$$

Подставив в (17.14), получим

$$F_{\text{неупр}} = Snmv^2, \quad p_{\text{неупр}} = nmv^2. \quad (17.19)$$

5. Полученные выражения для силы, с которой поток действует на стенку, являются весьма общими. Они пригодны, например, для вычисления давления газа (§ 26.1), для расчета светового давления (§ 68.5) и т. д.

Применим их для вычисления силы, с которой поток жидкости действует на стенку. Произведение  $mn = \rho$  есть плотность жидкости. Действительно, умножив концентрацию (число молекул в единице объема) на массу одной молекулы, мы получим массу вещества в единице объема, т. е. плотность вещества.

Итак,

$$F_{\text{упр}} = 2S\rho v^2, \quad (17.20)$$

$$F_{\text{неупр}} = S\rho v^2. \quad (17.21)$$

По существу, аналогичными формулами мы уже пользовались в гл. 11 для оценки сил сопротивления, испытываемых телом при его движении в жидкости (см. (11.10)). Там выражение было получено из анализа размерностей, в данной же главе мы его вывели на основе закона сохранения импульса.

## Глава 18

# КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

### § 18.1. Работа переменной силы

1. Как уже указывалось (16.4), элементарной работой силы  $\mathbf{F}$  на бесконечно малом перемещении  $d\mathbf{l}$  называется произведение модуля силы на модуль перемещения и на косинус угла между этими векторами:

$$\Delta A = F dl \cos \alpha = F_t dl = \mathbf{F} d\mathbf{l}.$$

Иными словами, *элементарная работа равна произведению тангенциальной составляющей силы на модуль перемещения.*

В зависимости от того, является ли угол  $\alpha$  острым или тупым, элементарная работа  $\Delta A$  может быть как положительной (если  $0 < \alpha < \pi/2$ , то  $\Delta A > 0$ ), так и отрицательной (если  $\pi/2 < \alpha < \pi$ , то  $\Delta A < 0$ ).

2. Для вычисления работы на конечном участке пути разобьем весь путь на малые перемещения и вычислим элементарную работу на каждом из них. Сумма элементарных работ и будет

искомой работой силы на конечном участке пути:

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n = \\ = F_t^{(1)} \Delta l_1 + F_t^{(2)} \Delta l_2 + \dots + F_t^{(n)} \Delta l_n. \quad (18.1)$$

Строго говоря, здесь всегда возникает некоторая ошибка, зависящая от способа разбиения пути на малые участки. Точный результат получится лишь в *пределе*, когда путь будет разбит на бесконечно большое число бесконечно малых перемещений.

3. Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути выразится так:

$$A = F_t l = F l \cos \alpha. \quad (18.2)$$

Действительно, в этом случае можно в формуле (18.1) вынести общий множитель  $F_t$  за скобки, а сумма элементарных перемещений  $\Delta l$  даст пройденный путь  $l$ .

Эту работу можно изобразить графически (рис. 18.1). Графиком тангенциальной компоненты силы при  $F_t = \text{const}$  является прямая, параллельная оси абсцисс. Тогда работа на участке пути  $l = l_2 - l_1$  численно равна площади заштрихованного прямоугольника. При этом нужно учесть переводный масштаб — единичная площадь изображает единицу работы (на нашем рисунке  $1 \text{ см}^2$  изображает 1 Дж).

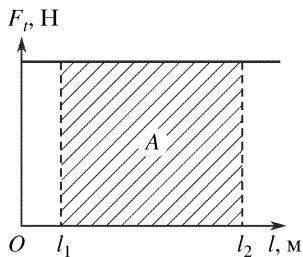


Рис. 18.1

4. В общем случае тангенциальная компонента силы является переменной величиной (рис. 18.2). Для графического вычисления работы разобьем путь  $l$  на несколько малых участков. Наименьшие значения силы на каждом участке (в нашем случае — левые ординаты) умножим на соответствующие перемещения и сложим. Площадь полученной таким образом внутренней ступенчатой фигуры изображает некоторую работу  $A_{\text{мин}}$ ; поскольку мы на каждом перемещении брали наименьшее значение силы, то работа  $A_{\text{мин}}$  меньше искомой работы  $A$ .

Если проделать такой же расчет, но выбрать на каждом перемещении наибольшее значение силы (на рис. 18.3 — правые ординаты), то площадь выступающей ступенчатой фигуры изображает некоторую работу  $A_{\text{макс}}$ , которая больше искомой работы  $A$ . Итак,

$$A_{\text{мин}} < A < A_{\text{макс}}.$$

Если увеличить число разбиений, скажем, вдвое, то площадь внутренней ступенчатой фигуры увеличится, а площадь внеш-

ней — уменьшится (рис. 18.4). В курсах математики доказывается, что при неограниченном возрастании числа разбиений (со-

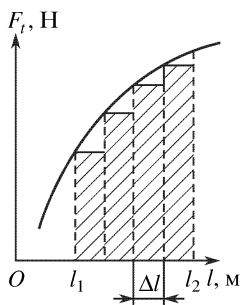


Рис. 18.2

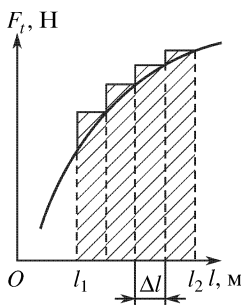


Рис. 18.3

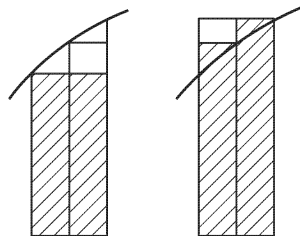


Рис. 18.4

ответственно при  $\Delta l \rightarrow 0$ ) площади обеих ступенчатых фигур имеют общий предел, равный площади криволинейной трапеции, которая и даст точное числовое значение работы переменной силы.

Итак, *работа переменной силы изображается на графике площадью криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью абсцисс, сверху — графиком силы и с боков — ординатами крайних точек.*

Как известно, площадь криволинейной трапеции есть определенный интеграл, взятый в пределах от начальной до конечной абсциссы. Соответственно и работа переменной силы выражается определенным интегралом:

$$A = \int_{l_1}^{l_2} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_{l_1}^{l_2} F \cos \alpha dl. \quad (18.3)$$

## § 18.2. Работа упругой силы

1. Вначале мы вычислим работу внешней силы, растягивающей пружину. По третьему закону Ньютона внешняя сила равна по модулю силе упругости, но имеет противоположное направление ( $\mathbf{F}_{\text{внешн}} = -\mathbf{F}_{\text{упр}}$ ); учитывая выражение для упругой силы, получим

$$F_{\text{внешн}} = kx, \quad (18.4)$$

где  $k$  — жесткость. График этой силы изображен на рис. 18.5. Работа внешней силы на участке пути  $l = x_2 - x_1$  численно равна площади заштрихованной трапеции:

$$A_{\text{внешн}} = \frac{F_1 + F_2}{2} l = \frac{kx_1 + kx_2}{2} (x_2 - x_1) = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \quad (18.5)$$



2. Работа упругой силы на том же участке отличается только знаком, следовательно,

$$A_{\text{упр}} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \quad (18.6)$$

Естественно, что этот же результат можно получить интегрированием:

$$A_{\text{упр}} = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{упр}} dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}.$$

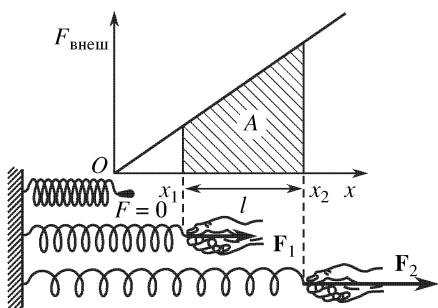


Рис. 18.5

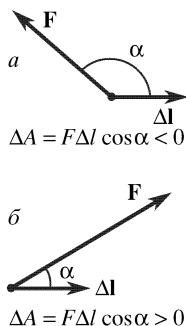


Рис. 18.6

3. При  $x_1 < x_2$ , т.е. при растяжении пружины, упругая сила совершает отрицательную работу, что соответствует правилу о знаке силы: силы притяжения считаются отрицательными, силы отталкивания — положительными (см. § 10.2).

Действительно, при увеличении расстояния между притягивающимися телами сила притяжения составляет тупой угол с направлением перемещения ( $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ ), а косинус тупого угла является отрицательным числом. Здесь сила притяжения совершает отрицательную работу (рис. 18.6 а). Сила же отталкивания составит острый угол с направлением перемещения ( $0 \leq \alpha < \pi/2$ ); она совершает положительную работу (рис. 18.6 б).

### § 18.3. Работа кулоновской силы

1. Нам удалось довольно легко вывести выражение для работы упругой силы, ибо здесь работа изображается площадью обычной трапеции. Несколько труднее вычислить работу кулоновской (или гравитационной) силы.

Действительно, здесь сила обратно пропорциональна квадрату расстояния и графиком этой силы является кривая линия. Поэтому работа изображается площадью криволинейной трапеции (рис. 18.7), а такие площади вычисляются либо путем интегрирования, либо численными методами.

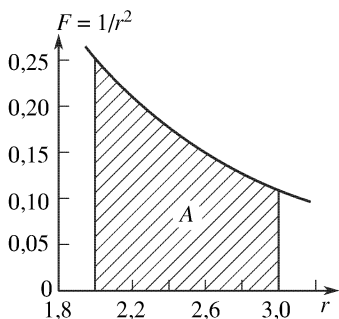


Рис. 18.7

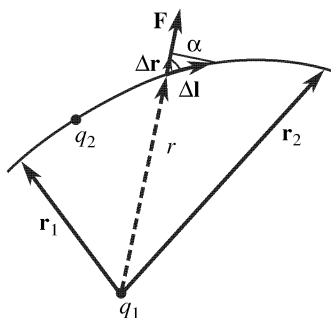


Рис. 18.8

2. Рассчитаем работу кулоновской силы при перемещении заряда по произвольной криволинейной траектории (рис. 18.8).

Разобьем кривую на бесконечно малые перемещения  $\Delta l$ , которые в первом приближении можно считать бесконечно малыми отрезками. Элементарная работа на таком участке

$$\Delta A = F \Delta l \cos \alpha = F \Delta r, \quad (18.7)$$

ибо, как видно из рисунка,  $\Delta l \cos \alpha = \Delta r$ . Сумма всех элементарных работ

$$A = F_1 \Delta l_1 \cos \alpha_1 + F_2 \Delta l_2 \cos \alpha_2 + \dots = F_1 \Delta r_1 + F_2 \Delta r_2 + \dots \quad (18.8)$$

Точный результат получим, перейдя к пределу при условии  $\Delta r \rightarrow 0$ . Итак, работа кулоновской силы по перемещению заряда из точки, определяемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}_1$ , в точку, определяемую радиусом-вектором  $\mathbf{r}_2$ , выражается следующим определенным интегралом:

$$A_{\text{кул}} = \int_{r_1}^{r_2} F_{\text{кул}} \cos \alpha \, dl = \int_{r_1}^{r_2} F_{\text{кул}} \, dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q_1 q_2 \, dr}{4\pi \varepsilon_0 r^2}. \quad (18.9)$$

Известно, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}. \quad (18.10)$$

Следовательно, работа кулоновской силы

$$A_{\text{кул}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (18.11)$$

Итак, *работа кулоновской силы не зависит от формы траектории заряда*; она определяется только радиусами-векторами начальной и конечной точек траектории.

3. Рекомендуем читателю самостоятельно показать, что в полном соответствии с формулой, выведенной в конце предыдущего параграфа, при увеличении расстояния между зарядами силы отталкивания произведут положительную работу, а силы притяжения — отрицательную.

### § 18.4. Работа гравитационной силы

1. Расчет работы гравитационной силы фактически ничем не отличается от расчета работы кулоновской силы. Следует лишь в формуле (18.11) заменить  $q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0)$  выражением  $Gm_1 m_2$  и изменить знак, ибо гравитационная сила всегда является силой притяжения. Получим

$$A_{\text{грав}} = -\frac{Gm_1 m_2}{r_1} + \frac{Gm_1 m_2}{r_2}. \quad (18.12)$$

2. Пусть тело массой  $m$  поднимается на некоторую высоту  $h$  над поверхностью Земли (рис. 18.9). Полагая  $m_1 = m$  (масса тела),  $m_2 = M$  (масса Земли),  $r_1 = R$  (радиус земного шара) и  $r_2 = R + h$ , получим выражение для работы силы тяжести:

$$A = -\frac{GmM}{R} + \frac{GmM}{R+h} = -\frac{GmMh}{R(R+h)}. \quad (18.13)$$

Работа внешней силы имеет противоположный знак, следовательно,

$$A_{\text{внеш}} = \frac{GmMh}{R(R+h)}. \quad (18.14)$$

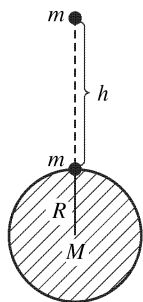


Рис. 18.9

Если высота  $h$  много меньше радиуса Земли, то можно приближенно положить  $R + h \approx R$ . Используя (9.11), получим

$$A_{\text{внеш}} = \frac{GmMh}{R^2} = mgh. \quad (18.15)$$

Собственно этот результат можно было получить совершенно элементарно. На небольших высотах над Землей сила тяжести

$P = mg$  является постоянной величиной. А для постоянной силы  $A_{\text{внешн}} = Ph = mgh$ .

Однако предложенный выше вывод хотя и более сложен, но зато позволяет оценить погрешность, которую мы получаем, заменяя точную формулу (18.14) приближенным выражением (18.15). Действительно, пусть нам нужно вычислить работу с точностью до одного процента; тогда

$$\frac{A_{\text{прибл}} - A_{\text{точн}}}{A_{\text{точн}}} = \frac{A_{\text{прибл}}}{A_{\text{точн}}} - 1 \leq 0,01.$$

Подставив точные и приближенные значения работы и сократив одинаковые множители, имеем

$$\frac{R+h}{R} - 1 = \frac{h}{R} \leq 0,01.$$

Итак, вплоть до высот  $h = 0,01R = 0,01 \cdot 6371 \approx 64$  км можно с точностью до 1% пользоваться приближенной формулой (18.15).

3. Совершенно очевидно, что *работа гравитационной силы, как и кулоновской силы, не зависит от формы траектории*, по которой перемещается материальная точка; работа определяется только радиусами-векторами начальной и конечной точек траектории. Это прямо следует из полной тождественности выражений для вычисления работы гравитационной и кулоновской сил.

### § 18.5. Консервативные силы

1. В предыдущих параграфах было показано, что существуют силы — упругие, кулоновские, гравитационные, — работа которых не зависит от формы траектории, а определяется лишь координатами начала и конца траектории. Такие силы называются *консервативными* (от латинского conservatio — сохранение). Покажем, что *работа консервативной силы по произвольной замкнутой траектории равна нулю*.

Для доказательства рассмотрим некоторую замкнутую траекторию (рис. 18.10). Работы на участках  $M_1 K M_2$  и  $M_1 L M_2$  обозначим соответственно через  $A_K$  и  $A_L$ . Из определения понятия «консервативная сила» следует, что если тело перемещается из точки  $M_1$  в точку  $M_2$ , то работа не зависит от того, движется ли оно по кривой  $M_1 K M_2$  или

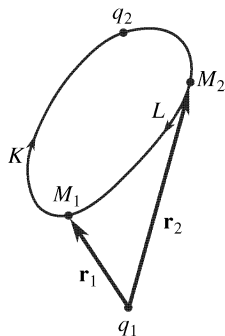


Рис. 18.10

$M_1LM_2$ ; итак,  $A_K = A_L$ . Пусть при движении тела из точки  $M_1$  в точку  $M_2$  совершается положительная работа, тогда при перемещении тела из точки  $M_2$  в точку  $M_1$  совершится отрицательная работа,  $A'_L = -A_L$ . Действительно, если направление силы не меняется, а направление перемещения изменить на противоположное, то работа, согласно определению, изменит знак.

Работа по замкнутой траектории есть сумма работ на участках  $M_1KM_2$  и  $M_2LM_1$ ; итак

$$A_{\text{замкн}} = A_K + A'_L = A_K - A_L = 0.$$

Рекомендуем читателю проделать расчет для конкретной силы, действующей на заданной траектории, воспользовавшись полученными выражениями для упругой (18.6), кулоновской (18.11) или гравитационной (18.12) сил.

2. Заметим, что существуют и неконсервативные (иначе — *диссипативные*, от латинского *dissipatio* — рассеяние) силы, работа которых существенно зависит от формы траектории. Примером может служить сила трения. Действительно, перемещая какой-либо предмет, скажем, по полу, мы совершаем работу против сил трения. Но здесь, как показывает опыт, работа существенно зависит от того, по какой траектории перемещается тело. В частности, если сила трения во всех точках поверхности пола одинакова, то работа по кратчайшему пути меньше, чем по любой другой траектории.

Работа диссипативной силы по замкнутой траектории нулю не равна. Например, работа силы трения (и любых других сил сопротивления) всегда отрицательна, ибо сила направлена против перемещения. Естественно, что на любой траектории работа этой силы в нуль не обратится.

## § 18.6. Потенциальная энергия упругих, кулоновских и гравитационных взаимодействий

1. *Потенциальной энергией*  $U$  взаимодействующих тел называется энергия, зависящая от взаимного расположения этих тел.

Во всех рассмотренных примерах (формулы (18.6), (18.11), (18.12)) работа консервативных сил равнялась разности двух выражений, являющихся функциями координат начала и конца траектории, т. е. изменению потенциальной энергии системы взаимодействующих тел:

$$A = U_1 - U_2. \quad (18.16)$$

2. Сравнивая формулы (18.6) и (18.16), мы получим следующее выражение для *потенциальной энергии упругих сил*:

$$U_{\text{упр}} = \frac{kx^2}{2}. \quad (18.17)$$

Очевидно, что потенциальная энергия равна нулю при  $x = 0$ , т. е. в том случае, когда пружина не деформирована.

3. Аналогичное сравнение формул (18.11) и (18.16) позволяет получить выражение для *потенциальной энергии кулоновских сил*:

$$U_{\text{кул}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (18.18)$$

Заметим, что здесь потенциальная энергия стремится к нулю в том случае, когда расстояние между взаимодействующими зарядами неограниченно возрастает ( $r \rightarrow \infty$ ). Если заряды  $q_1$  и  $q_2$  имеют одинаковый знак, то между ними действует сила отталкивания, а потенциальная энергия является положительной величиной. Если же заряды  $q_1$  и  $q_2$  имеют разные знаки, то между ними действует сила притяжения и потенциальная энергия является отрицательной величиной.

4. *Потенциальная энергия гравитационных сил* может быть найдена путем сравнения формул (18.12) и (18.16):

$$U_{\text{грав}} = -\frac{Gm_1 m_2}{r}. \quad (18.19)$$

Здесь потенциальная энергия является отрицательной величиной, ибо гравитационная сила является силой притяжения. При неограниченном увеличении расстояния между взаимодействующими телами ( $r \rightarrow \infty$ ) потенциальная энергия стремится к нулю, т. е. *возрастает* за счет работы внешней силы, которая увеличивает расстояние между взаимодействующими телами.

5. Определенный интерес представляет значение потенциальной энергии силы тяжести вблизи поверхности Земли. Положим в выражении (18.16) энергию на поверхности Земли  $U_1 = 0$ , энергию  $U_2$  на высоте  $h$  обозначим через  $U$ ; вместо работы силы тяжести подставим выражение (18.13). Получим

$$U = \frac{GmMh}{R(R+h)}. \quad (18.20)$$

При небольших высотах ( $h \ll R$ ) имеем приближенное выражение

$$U = mgh. \quad (18.21)$$

Последние два выражения часто называют *потенциальной энергией тела в гравитационном поле*. Такая терминология не

вполне точна: фактически потенциальной энергией обладает не само тело, а система, состоящая из Земли и этого тела. Однако если об этом не забывать, подчеркивая наличие гравитационного поля (которое создается Землей), то такое словоупотребление не принесет вреда. Аналогично можно говорить о потенциальной энергии заряда в электрическом поле. Но совершенно недопустимо говорить просто о потенциальной энергии тела, не указывая на поле, в котором находится это тело.

6. Заметим, что потенциальную энергию мы можем найти лишь с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Действительно, прибавим ко всем значениям потенциальной энергии некоторую константу; новое значение потенциальной энергии  $U'$  выразится так:

$$U' = U + \text{const.}$$

При таком преобразовании потенциальной энергии работа не изменится. Действительно,

$$A' = U'_1 - U'_2 = (U_1 + \text{const}) - (U_2 + \text{const}) = U_1 - U_2 = A.$$

Полученный результат часто формулируется следующим образом: *нулевой уровень потенциальной энергии может быть выбран произвольно*; при переходе к другому нулевому уровню значения потенциальной энергии во всех точках изменяются на одно и то же слагаемое; работа же силы сохраняет свою величину.

Именно учитывая это свойство, мы подробно рассматривали вопрос о нулевом уровне потенциальной энергии упругого, кулоновского и гравитационного взаимодействий.

## § 18.7. Потенциал электростатического поля

1. В гл. 10 мы характеризовали электрическое поле с помощью *силовой характеристики* — вектора напряженности  $\mathbf{E}$ . Однако можно ввести и энергетическую характеристику поля — скалярную величину  $\varphi$ , называемую *потенциалом*.

Потенциал точки поля численно равен отношению потенциальной энергии пробного точечного заряда, помещенного в эту точку поля, к значению этого заряда:

$$\varphi = \frac{U}{q}. \quad (18.22)$$

Если пробный заряд перемещается из точки поля с потенциалом  $\varphi_1$  в точку поля с потенциалом  $\varphi_2$ , то при этом поле совершает работу

$$A = U_1 - U_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (18.23)$$

Итак, *работа*, совершаемая электрическим полем при перемещении пробного заряда из одной точки поля в другую, *равна произведению заряда на разность потенциалов*.

2. Электрические силы являются консервативными; их работа не зависит от формы траектории и определяется только значениями потенциала начальной и конечной точек пути. Отсюда следует, что потенциальное электрическое поле не способно заставить электрические заряды перемещаться по замкнутой траектории.

3. Единицей потенциала в СИ является *вольт* (В). Вольт равен потенциалу точки поля, где пробный заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией в 1 Дж. Естественно, что если разность потенциалов между двумя точками поля равна 1 В, то электрические силы, перемещая между этими точками пробный заряд в 1 Кл, совершат работу в 1 Дж:

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/1 Кл}.$$

Теперь можно обосновать смысл единицы энергии *электрон-вольт*, введенной в § 16.6: электронвольт есть энергия, приобретенная частицей, несущей на себе элементарный заряд (т. е. заряд электрона), при движении ее между точками поля с разностью потенциалов в 1 В. Поскольку  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, а  $\varphi_1 - \varphi_2 = 1 \text{ В}$ , то

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

### § 18.8. Потенциал поля точечного заряда

1. Если обозначить через  $Q$  точечный заряд, создающий поле, а через  $q$  — пробный заряд, то потенциальная энергия пробного заряда на расстоянии  $r$  от источника поля, согласно (18.18), примет вид

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (18.24)$$

Отсюда следует, что потенциал поля точечного заряда равен

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (18.25)$$

Из данного выражения вытекает, что потенциал поля точечного заряда обращается в нуль в бесконечно удаленной точке. Однако такой выбор нулевого уровня потенциала хотя и удобен, но вовсе не обязателен. В принципе можно нуль потенциала выбрать в любой точке поля (см. § 18.6, п. 6). От этого изменятся потенциалы всех точек поля на одно и то же постоянное слагаемое, однако работа электрических сил не изменится, так как она



зависит не от абсолютных значений потенциалов, а от разности потенциалов, которая при этом не меняет своей причины.

2. Аналогично потенциалу поля электрического заряда можно ввести понятие потенциала гравитационного поля. Потенциал поля частицы с массой  $M$  на расстоянии  $r$  от нее, согласно (18.19), равен

$$\varphi_{\text{грав}} = -G \frac{M}{r}. \quad (18.26)$$

При этом потенциал обращается в нуль в бесконечно удаленной точке. Если же положить, что потенциал равен нулю на поверхности Земли, то, согласно (18.20), потенциал гравитационного поля на высоте  $h$  над поверхностью Земли равен

$$\varphi_{\text{грав}} = G \frac{Mh}{R(R+h)} = gh \frac{R}{R+h}. \quad (18.27)$$

А на небольших высотах ( $h \ll R$ ) имеем приближенно

$$\varphi_{\text{грав}} = gh. \quad (18.28)$$

### § 18.9. Энергия электрического поля

Потенциальная энергия двух зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , как было показано в § 18.6, равна

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Но выражение  $q_1/(4\pi\epsilon_0 r) = \varphi_1$  есть потенциал поля, созданного зарядом  $q_1$  в точке, где находится заряд  $q_2$ ; а выражение  $q_2/(4\pi\epsilon_0 r) = \varphi_2$  есть потенциал поля, созданного зарядом  $q_2$  в точке, где расположен заряд  $q_1$ . Поэтому выражение для потенциальной энергии двух взаимодействующих зарядов может быть записано так:

$$U = q_1 \varphi_2 = q_2 \varphi_1. \quad (18.29)$$

Полусумма двух равных величин равна каждой из них; следовательно,

$$U = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_2 + q_2 \varphi_1). \quad (18.30)$$

Для совокупности многих зарядов потенциальная энергия вычисляется аналогичным образом — как полусумма произведения каждого заряда на сумму потенциалов полей, созданных всеми зарядами, кроме него самого:  $q_1$  умножается на сумму всех потенциалов, но без  $\varphi_1$ ;  $q_2$  — на сумму всех потенциалов, кроме  $\varphi_2$ , и т. д. Причина заключается в том, что поле, созданное некоторым неподвижным зарядом, действует на любые другие заряды, но не на этот заряд.

## Глава 19

**ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ  
В НЬЮТОНОВСКОЙ МЕХАНИКЕ****§ 19.1. Механическая энергия и ее сохранение**

1. Рассмотрим систему тел, в которой действуют только консервативные силы. *Сумма кинетической и потенциальной энергий называется полной механической энергией системы:*

$$W = K + U. \quad (19.1)$$

В ньютоновской механике эта величина играет исключительно важную роль.

2. Допустим, что рассматриваемая консервативная система тел является замкнутой, — это значит, что в ней действуют только внутренние силы. Из соотношения (16.14) следует, что работа внутренних сил равна изменению кинетической энергии, а из (18.16) — что она равна изменению потенциальной энергии. Итак,

$$A = K_2 - K_1 \quad \text{и} \quad A = U_1 - U_2.$$

Приравнявая правые части этих выражений, получим

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2,$$

или

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1. \quad (19.2)$$

Следовательно, сумма кинетической и потенциальной энергии, т. е. механическая энергия системы, сохраняется:

$$W = K + U = \text{const}. \quad (19.3)$$

Мы получили *закон сохранения энергии* в ньютоновской механике. Его можно сформулировать так: *механическая энергия замкнутой консервативной системы сохраняется.*

**§ 19.2. Механическая энергия и трение**

Сформулированный выше закон сохранения энергии в ньютоновской механике является в некоторой степени идеализацией условий реального эксперимента. Действительно, во всякой реальной системе тел действуют силы трения, которые не являются консервативными. Поэтому закон сохранения механической энергии выполняется лишь приближенно и тем точнее, чем меньше силы трения по сравнению с упругими, электрическими или гравитационными силами.

Опыт показывает, что существуют такие системы тел, где силами трения можно в первом приближении пренебречь. В этом случае расчеты, проведенные на основе закона сохранения механической энергии, хорошо оправдываются на практике.

Если же силами трения пренебречь нельзя, то можно внести поправку, учитывающую трение, написав закон сохранения механической энергии в таком виде:

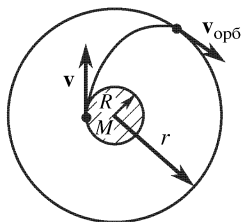
$$W_1 = W_2 + A_{\text{тр}}, \quad (19.4)$$

где  $W_1$  и  $W_2$  — механическая энергия в начале и в конце процесса,  $A_{\text{тр}}$  — работа сил трения. Кстати, часто именно таким образом оказывается возможным определить силу трения.

Ниже будут рассмотрены некоторые примеры применения закона сохранения механической энергии.

### § 19.3. Космические скорости

1. Попытаемся рассчитать, какую скорость следует сообщить ракете, чтобы она вышла на круговую орбиту вокруг Земли.



Обозначим ее орбитальную скорость через  $v_{\text{орб}}$ , скорость запуска через  $v$ , радиус орбиты через  $r$  (рис. 19.1).

На ракету, движущуюся по круговой орбите, действует сила тяготения Земли, сообщаящая ей нормальное ускорение  $a = v_{\text{орб}}^2 / r$ . По второму закону Ньютона

$$G \frac{mM}{r^2} = \frac{mv_{\text{орб}}^2}{r}. \quad (19.5)$$

Однако нас интересует не орбитальная скорость, а скорость запуска. Для ее нахождения воспользуемся законом сохранения энергии в ньютоновской механике: суммы потенциальной и кинетической энергии на поверхности Земли и на орбите равны между собой:

$$K_{\text{пов}} + U_{\text{пов}} = K_{\text{орб}} + U_{\text{орб}}, \quad (19.6)$$

или

$$\frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{R} = \frac{mv_{\text{орб}}^2}{2} - G \frac{mM}{r}. \quad (19.7)$$

Учитывая (19.5), имеем

$$\frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{R} = G \frac{mM}{2r} - G \frac{mM}{r}.$$

Окончательно получим

$$v = \sqrt{GM \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{r} \right)}. \quad (19.8)$$

Мы провели расчет без учета сопротивления воздуха. В реальных условиях, когда ракета запускается в атмосфере, скорость запуска должна быть увеличена. Однако расчет истинной скорости запуска весьма сложен, и здесь он не может быть выполнен.

2. Рассчитаем *первую космическую скорость*, т.е. скорость запуска при условии, когда ракета движется недалеко от поверхности Земли. В этом случае  $r \approx R$ , поэтому

$$v_1 = \sqrt{GM \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{R} \right)} = \sqrt{G \frac{M}{R}}. \quad (19.9)$$

Поскольку на малых высотах  $g = GM/R^2$ , то

$$v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}} = 7,91 \cdot 10^3 \text{ м/с} \approx 8 \text{ км/с}.$$

Итак, первая космическая скорость составляет 8 км/с.

3. *Второй космической скоростью* называется скорость запуска ракеты при условии, что она покинет поле тяготения Земли и станет искусственной планетой. В этом случае можно положить, что ракета уйдет на бесконечно далекую орбиту. Полагая в (19.8), что  $r \rightarrow \infty$ , имеем

$$v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{R}} = v_1 \sqrt{2} = 7,91 \cdot 1,414 = 11,2 \text{ км/с}.$$

Вторая космическая скорость почти в полтора раза больше первой.

#### § 19.4. Потенциальные кривые

1. Часто материальная точка может двигаться только по некоторой заданной кривой, например вдоль оси абсцисс. В этом случае ее потенциальная энергия зависит только от одной переменной, т.е.  $U = f(x)$ . График, изображающий зависимость потенциальной энергии от расстояния, называется *потенциальной кривой*. Оказывается, что анализ формы этого графика дает очень много сведений о характере движения точки.

В качестве примера рассмотрим движение частицы под действием упругой силы (рис. 19.2). При  $x = x_0$  пружина не деформирована и сила, действующая на частицу, равна нулю. При отклонении частицы от положения равновесия на нее действует

сила  $F = -k(x - x_0)$ . Заметим, что при  $x > x_0$  сила отрицательна (притяжение), а при  $x < x_0$  — положительна (отталкивание).

Потенциальная энергия частицы (см. (18.17)) равна

$$U = \frac{k(x - x_0)^2}{2}. \quad (19.10)$$

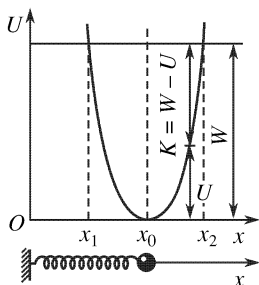


Рис. 19.2

Она изображается на графике (рис. 19.2) в виде параболы с вершиной в точке  $x = x_0$ . Механическая же энергия частицы  $W = K + U$  является постоянной величиной, и она изобразится на графике прямой, параллельной оси абсцисс.

Из графика прежде всего видно, что кинетическую энергию в любой точке можно сразу найти как длину отрезка от прямой  $W$  до параболы, ибо  $K = W - U$ . Максимальное значение кинетической энергии частица имеет при  $x = x_0$ ; здесь  $U = 0$  и  $K_{\text{макс}} = W$ . В точках же  $x = x_1$  и  $x = x_2$  кинетическая энергия частицы равна нулю, ибо здесь  $U_{\text{макс}} = W$ .

Далее из графика видно, что частица не может сместиться правее точки  $x_2$  и левее точки  $x_1$ . Действительно, кинетическая энергия не может быть отрицательной величиной, следовательно, потенциальная энергия не может стать больше полной<sup>1)</sup>. В этом случае говорят, что частица находится в *потенциальной яме* с координатами  $x_1 \leq x \leq x_2$ .

2. Анализ наклона потенциальной кривой позволяет сразу же определить знак силы и тем самым — характер ее действия (притяжение или отталкивание). В самом деле, элементарная работа  $\Delta A = F \Delta x$ ; с другой стороны,  $\Delta A = U_1 - U_2 = -\Delta U$ . Следовательно, если сила — функция только одной координаты, например абсциссы  $x$ , то  $F \Delta x = -\Delta U$ , или

$$F = -\frac{\Delta U}{\Delta x}.$$

Но на графике  $\Delta U / \Delta x = \text{tg } \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона потенциальной кривой к оси абсцисс (рис. 19.3). Собственно, точное значение силы получится лишь в пределе, когда перемещение  $\Delta x$

<sup>1)</sup> Квантовая механика вносит в этот вывод существенные поправки, связанные с особой природой микрочастиц и с соотношением неопределенностей (§ 70.2–70.6).

стремится к нулю:

$$F_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{dU}{dx} = -U'(x). \quad (19.11)$$

Итак, в консервативных системах сила равна производной от потенциальной энергии по координате, взятой с противоположным знаком.

В случае, когда потенциальная энергия возрастает, потенциальная кривая образует с осью абсцисс острый угол. Тангенс острого угла — положительное число, а сила имеет противоположный знак, т. е. отрицательный; следовательно, она является силой притяжения.

Если же потенциальная энергия убывает, то потенциальная кривая образует с осью абсцисс тупой угол, тангенс которого является отрицательным числом. В этом случае сила положительна, т. е. является силой отталкивания.

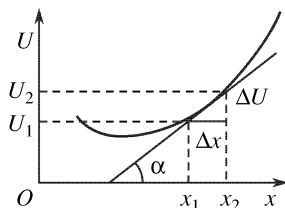


Рис. 19.3

Наконец, в точках минимума или максимума энергии сила, очевидно, равна нулю, ибо в окрестностях этих точек она меняет знак. На графике касательная к потенциальной кривой в этих точках параллельна оси абсцисс (рис. 19.4).

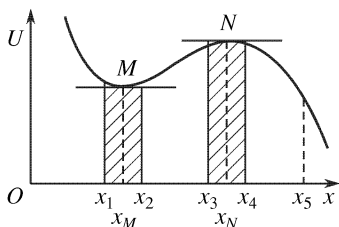


Рис. 19.4

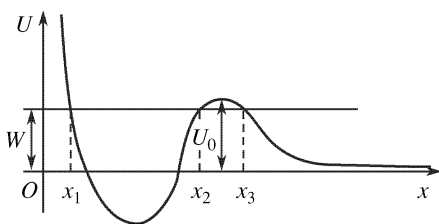


Рис. 19.5

Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что в случае, изображенном на рис. 19.5, частица с полной энергией  $W < U_0$  будет либо находиться в потенциальной яме  $x_1 \leq x \leq x_2$ , либо удаляться в бесконечно удаленную точку; потенциальный же барьер  $x_2 \leq x \leq x_3$  эта частица не сможет преодолеть ни слева, ни справа.

3. Следует обратить внимание на одно весьма интересное свойство потенциальной энергии сил притяжения. Если расстояние между притягивающимися частицами убывает, то убывает

и потенциальная энергия, а сила притяжения увеличивается. Наоборот, увеличение расстояния между притягивающимися частицами сопровождается ростом потенциальной энергии и уменьшением силы притяжения.

Это свойство является совершенно общим и справедливо для любых сил притяжения. Правда, его доказательство в общем виде несколько затруднительно, и мы здесь этим заниматься не будем. Проверить же его справедливость на примере кулоновских или гравитационных сил мы предоставим читателю.

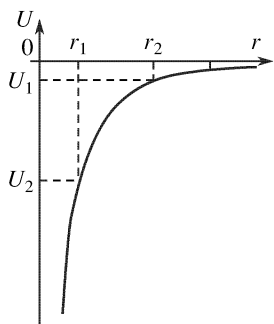


Рис. 19.6

Для этого целесообразно проанализировать потенциальную кривую гравитационного взаимодействия между двумя материальными точками, изображенную на рис. 19.6, и сравнить энергию и силу в точках с координатами  $r_1$  и  $r_2$ . При построении кривой мы полагали, что потенциальная энергия равна нулю при бесконечно большом расстоянии между взаимодействующими точками (см. (18.19)).

Однако это не имеет принципиального значения — результат рассуждения совершенно не зависит от того, где выбран нулевой уровень потенциальной энергии.

### § 19.5. Потенциальная энергия и равновесие

1. Анализ потенциальных кривых позволяет судить об условиях равновесия некоторого тела (точнее — материальной точки).

*Тело находится в равновесии, если равнодействующая всех сил, приложенных к нему, равна нулю.* Очевидно, что равновесию соответствуют точки с минимальной или максимальной потенциальной энергией (точки  $M$  и  $N$  на рис. 19.4), ибо именно в этих точках сила обращается в нуль. Однако точки максимума или минимума энергии не равноценны.

Действительно, пусть частица находится в точке  $x_M$ , где потенциальная энергия минимальна. На участке  $x_1 \leq x \leq x_M$  потенциальная энергия убывает; следовательно, на частицу действует положительная сила отталкивания, возвращающая ее в точку  $M$ . На участке  $x_M < x \leq x_2$  потенциальная энергия возрастает; следовательно, на частицу действует отрицательная сила притяжения, вновь возвращающая ее в точку  $M$ .

Итак, если частицу, находящуюся в точке с минимальным значением потенциальной энергии, вывести из этого состояния,

то под действием сил она будет возвращаться в эту точку. Мы приходим к выводу, что *условием устойчивого равновесия является минимальное значение потенциальной энергии.*

Проведя аналогичные рассуждения для точки  $N$ , где частица обладает максимальным значением потенциальной энергии, читатель легко убедится, что здесь силы, действующие в ее ближайшей окрестности, не будут возвращать частицу в эту точку. Таким образом, *максимум потенциальной энергии характеризует состояние неустойчивого равновесия.*

2. При анализе условий равновесия мы рассматривали только *ближайшую окрестность* интересующей нас точки поля. Под ней следует понимать такую область, где нет дополнительных максимумов или минимумов энергии. Если не обратить внимания на это условие, то можно прийти к неверным выводам.

Так, анализируя силы, действующие на частицу, смещенную вправо от положения устойчивого равновесия ( $x_2 > x_M$ ), мы утверждали, что это будут силы притяжения. Но это верно лишь до тех пор, пока частица остается левее максимума энергии. Если же переместить частицу дальше вправо, например в точку  $x_0 > x_N$  (см. рис. 19.4), то мы уже получим силу отталкивания, и частица не вернется в прежнее положение.

## Глава 20

### ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ

#### § 20.1. Внутренняя энергия системы частиц

1. В гл. 16 было показано, что полную энергию тела можно представить в виде суммы кинетической энергии и энергии покоя. Кинетическая энергия тела зависит от скорости его движения относительно избранной системы отсчета, т. е. относительно внешних тел.

Энергия покоя тела зависит от процессов, происходящих внутри этого тела, и поэтому энергия покоя иначе называется *внутренней энергией*.

2. Пусть тело массой  $M$  состоит из  $N$  частиц, массы которых  $m_1, m_2, \dots, m_N$ . Далее, пусть эти частицы движутся с произвольными скоростями  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$ , но так, что при этом их центр масс остается неподвижным в данной системе отсчета, т. е.  $\Gamma_1 m_1 v_1 + \Gamma_2 m_2 v_2 + \dots + \Gamma_N m_N v_N = 0$ . Наконец, предположим,



что эти частицы находятся друг от друга на значительных расстояниях, так что взаимодействием между ними можно в первом приближении пренебречь.

На первый взгляд может показаться, что энергия покоя тела просто равна сумме энергий покоя частиц, из которых оно состоит. Но это неверно. Действительно, хотя тело и покоится относительно системы отсчета, частицы, из которых оно состоит, определенным образом движутся. Поэтому *внутренняя энергия тела  $\mathcal{E}$*  (т. е. энергия покоя) *равна сумме полных энергий частиц*, из которых это тело состоит:

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}^{(1)} + \mathcal{E}^{(2)} + \dots + \mathcal{E}^{(N)}. \quad (20.1)$$

Учитывая, что, согласно (16.3),  $\mathcal{E}^{(i)} = \mathcal{E}_0^{(i)} + K^{(i)}$ , где  $i$  — номер частицы, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} + K^{(1)} + K^{(2)} + \dots + K^{(N)} = \\ &= \mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} + K_{\text{внутр}}, \end{aligned} \quad (20.2)$$

где  $K_{\text{внутр}} = K^{(1)} + K^{(2)} + \dots + K^{(N)}$  — суммарная кинетическая энергия внутреннего движения частиц, из которых состоит тело.

3. Выше мы рассмотрели систему невзаимодействующих частиц. На самом же деле во всех телах (за исключением разреженных газов) частицы довольно сильно взаимодействуют друг с другом. Обычно взаимодействие сводится к притяжению. Потенциальная энергия сил притяжения является *отрицательной* величиной, поскольку при отсутствии сил взаимодействия мы считали потенциальную энергию равной нулю (см. § 18.6).

Обозначим через  $U_{\text{внутр}}$  суммарную потенциальную энергию взаимодействия частиц. Фактически  $U_{\text{внутр}}$  представляет собой энергию полей, с помощью которых осуществляется взаимодействие между частицами внутри тела. Тогда, обобщая формулу (20.2) на случай взаимодействующих частиц, получим

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} + K_{\text{внутр}} + U_{\text{внутр}}. \quad (20.3)$$

Итак, *внутренняя энергия тела равна сумме энергий покоя частиц, из которых тело состоит, плюс суммарная кинетическая энергия этих частиц и потенциальная энергия полей, осуществляющих взаимодействие между частицами.*

4. Разделив (20.3) на  $c^2$  и учитывая, что  $\mathcal{E}_0/c^2 = M$  есть масса тела, а  $\mathcal{E}_0^{(i)}/c^2 = m_i$  — масса некоторой частицы с номером  $i$ ,

получим

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_N + \frac{1}{c^2} (K_{\text{внутр}} + U_{\text{внутр}}). \quad (20.4)$$

Таким образом, оказывается, что в общем случае *масса тела не равна сумме масс частиц, из которых это тело состоит.*

В частности, при наличии больших сил притяжения абсолютная величина потенциальной энергии полей может оказаться значительно больше суммарной кинетической энергии внутреннего движения. А так как потенциальная энергия сил притяжения есть число отрицательное, то может оказаться, что  $K_{\text{внутр}} + U_{\text{внутр}} < 0$ . Следовательно, в этом случае масса тела будет меньше суммы масс частиц, из которых состоит это тело.

С этим явлением мы встретимся при изучении ядерных сил и методов получения энергии ядра.

## § 20.2. Изменение внутренней энергии при деформации тела

1. Тело под действием силы деформируется, т. е. меняет свои размеры и форму. Деформация тела связана с изменением расстояния между молекулами и, таким образом, с изменением энергии молекулярного взаимодействия. Следовательно, *деформация тела сопровождается изменением его внутренней энергии.*

Поскольку внутренняя энергия тела меняется, то изменяется и его масса. Почему же мы этого не замечаем? Ответить на этот вопрос позволит следующий пример.

Стальной стержень длиной  $l = 1$  м и сечением  $S = 1 \text{ см}^2$  под действием силы  $F = 2 \cdot 10^4$  Н удлиняется на  $\Delta l = 1$  мм. Работа упругой силы

$$A = \frac{kx^2}{2} = \frac{F\Delta l}{2} = 10 \text{ Дж.}$$

Она равна изменению внутренней энергии стержня:  $A = \Delta \mathcal{E}_0$ . Изменение его массы

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{10}{9 \cdot 10^{16}} = 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ кг.}$$

Масса же стержня до деформации

$$m = \rho l S = 7,8 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 0,78 \text{ кг.}$$

Как видно из расчета, изменение массы тела ничтожно мало — оно скажется только в шестнадцатом знаке после запятой! Не существует приборов, которые были бы в состоянии обнаружить

такую малую величину. Поэтому на практике изменениями массы тела при его деформациях пренебрегают.

2. Рассчитаем, на сколько изменится энергия одной частицы при деформации тела. Один килограмм стали содержит  $10^{25}$  частиц. Наш стержень массой  $0,78$  кг состоит из  $N = 0,78 \cdot 10^{25}$  частиц. Тогда изменение энергии одной частицы

$$\varepsilon = \frac{\Delta \varepsilon_0}{N} = \frac{10}{0,78 \cdot 10^{25}} = 1,3 \cdot 10^{-24} \text{ Дж.}$$

Удобнее эту энергию выразить в электронвольтах. Как уже указывалось,  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ , следовательно,

$$\varepsilon = \frac{1,3 \cdot 10^{-24}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-5} \text{ эВ.}$$

Итак, изменение энергии частицы при деформациях тела составляет несколько миллионных долей электронвольта. Ниже мы сравним эту величину с изменением энергии частицы при иных процессах.

### § 20.3. Изменение внутренней энергии тела при тепловых процессах

1. Тепловыми называются процессы, связанные с изменением температуры тела, а также с изменениями его *агрегатного состояния* — плавлением или затвердеванием, испарением или конденсацией. Подробно эти процессы будут рассмотрены ниже, здесь же мы ограничимся лишь общей характеристикой этих процессов с точки зрения изменения внутренней энергии.

Изменение температуры тела связано с изменением кинетической энергии движения его частиц. Однако следует подчеркнуть, что одновременно меняется и потенциальная энергия их взаимодействия (за исключением случая разреженного газа). Действительно, изменение температуры сопровождается изменением расстояния между положениями равновесия в узлах кристаллической решетки тела, что мы регистрируем как изменение размеров тел при изменении температуры. Естественно, что при этом изменяется энергия взаимодействия частиц. Изменение же агрегатного состояния является результатом изменения молекулярной структуры тела, что вызывает изменение как энергии взаимодействия частиц, так и характера их движения.

Итак, *тепловые процессы сопровождаются изменением внутренней энергии тела.*

2. Оценим, на сколько меняется энергия частицы при тепловых процессах. Известно, что при повышении температуры  $1$  кг

воды на  $1^\circ\text{C}$  поглощается энергия, равная  $4,18 \cdot 10^3$  Дж. Один килограмм воды состоит из  $3,3 \cdot 10^{25}$  молекул. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{4,18 \cdot 10^3}{3,3 \cdot 10^{25} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-3} \text{ эВ}.$$

Эта энергия примерно в 100 раз больше энергии при упругих деформациях. При превращении же 1 кг воды в пар поглощается  $2,25 \cdot 10^6$  Дж. Энергия молекулы при этом увеличится примерно на

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{2,25 \cdot 10^6}{3,3 \cdot 10^{25} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 0,5 \text{ эВ}.$$

3. Несмотря на то, что при тепловых процессах внутренняя энергия возрастает в тысячи раз больше, чем при упругих деформациях, изменение массы тела и при этих процессах измерить невозможно. Действительно, если при испарении 1 кг воды его энергия возрастает на  $2,25 \cdot 10^6$  Дж, масса увеличится на

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{2,25 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^{16}} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ кг},$$

что лежит далеко за пределами чувствительности измерительной аппаратуры.

## § 20.4. Изменение внутренней энергии при химических реакциях

1. Химические реакции представляют собой процессы перестройки молекул, их распада на более простые части или, наоборот, возникновения более сложных молекул из более простых или из отдельных атомов (реакции анализа и синтеза). При этом существенно изменяются силы взаимодействия между атомами, что сопровождается соответствующим изменением энергии взаимодействия. Кроме того, меняется характер как движения молекул, так и взаимодействия между ними, ибо молекулы вновь возникшего вещества взаимодействуют между собой иначе, чем молекулы исходных веществ.

Итак, *химические реакции сопровождаются изменением внутренней энергии тела.*

Заметим, что химические реакции всегда сопровождаются тепловыми процессами — изменением температуры, а часто и агрегатного состояния системы. Так, твердый углерод при сгорании образует газообразные продукты: окись углерода (угарный газ) и двуокись углерода (углекислый газ).

2. Оценим изменение энергии молекулы при химических реакциях. При сгорании 1 кг угля выделяется энергия примерно

$3 \cdot 10^7$  Дж. Поскольку 1 кг угля состоит из  $5 \cdot 10^{25}$  атомов углерода, то изменение энергии одной молекулы составит

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{3 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^{25} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 4 \text{ эВ}.$$

Следовательно, при химических реакциях изменение энергии молекулы составляет несколько электронвольт — в сотни и тысячи раз больше, чем при тепловых процессах, и в миллионы раз больше, чем при упругих деформациях.

Заметим, что эта энергия совпадает со средней величиной кинетической энергии электрона, локализованного в атоме (см. § 16.7). Этого и следовало ожидать, поскольку химические реакции сводятся к перестройке электронных оболочек атомов и молекул.

Однако и здесь изменение массы взаимодействующих тел столь мало, что оно лежит за пределами точности измерительных приборов: оно скажется лишь в десятой значащей цифре, а с такой точностью массу измерять мы не умеем. Действительно, при сгорании 1 кг угля

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{3 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^{16}} = 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ кг}.$$

## § 20.5. Изменение внутренней энергии при ядерных реакциях

1. При некоторых условиях ядра атомов испытывают превращения, которые называются *ядерными реакциями*. Независимо от механизма процессов, происходящих при этом (а они могут быть весьма различными), все они связаны со значительным изменением энергии взаимодействующих частиц. Следовательно, *ядерные реакции сопровождаются изменением внутренней энергии тела*, в состав которого входят ядра, испытывающие соответствующие превращения. При этом меняется масса реагирующих ядер. Это позволяет по известным массам исходных частиц и продуктов реакции оценить энергетический выход реакции (см. § 80.4).

Оказывается, если 1 кг тяжелого водорода (дейтерия) превратится в гелий, то в результате этой реакции получится всего 993,75 г гелия, т.е. масса уменьшится на  $\Delta m = 6,25$  г. А такое изменение массы (на 0,6 %) уже вполне может быть измерено чувствительными приборами.

Изменение внутренней энергии при этой реакции составит

$$\Delta \mathcal{E}_0 = \Delta m c^2 = 6,25 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 5,62 \cdot 10^{14} \text{ Дж}.$$

Для сопоставления вычислим, сколько угля нужно сжечь для получения такой же энергии:

$$m_{\text{угля}} = \frac{5,62 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^7} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ кг}$$

(здесь  $3 \cdot 10^7$  Дж — энергия, выделяющаяся при сгорании 1 кг угля). Учитывая, что вагон вмещает около 50 т угля, мы получим, что 1 кг дейтерия при превращении в гелий выделит столько же энергии, сколько выделяется при сгорании 400 вагонов угля.

2. Оценим изменение энергии одного ядра при такого рода реакциях. Один килограмм гелия состоит из  $1,5 \cdot 10^{26}$  атомов, следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{5,62 \cdot 10^{14}}{1,5 \cdot 10^{26} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,34 \cdot 10^7 = 23,4 \text{ МэВ.}$$

Эта энергия в миллионы раз больше энергии химических реакций и в миллиарды раз больше энергии тепловых процессов.

Заметим, что эти цифры характеризуют и порядок ядерных сил по сравнению с силами взаимодействия между атомами и между молекулами.

## Глава 21

# ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

### § 21.1. Работа как мера изменения полной и внутренней энергии

1. В § 20.2 мы выяснили, что при деформациях тела меняются расстояния между частицами, из которых оно состоит. А это приводит к изменению внутренней энергии тела.

Кроме того, при неупругих деформациях меняется температура тела, в чем легко убедиться на опыте. Если несколько раз быстро перегнуть кусок проволоки, то в месте изгиба температура резко возрастет; это можно почувствовать, притронувшись к месту изгиба пальцем.

Но при деформации тела совершается работа. Эта работа и является мерой изменения внутренней энергии.

2. Внутренняя энергия тела меняется также при его неупругом соударении с другим телом. При этом, как было показано (см. § 17.2), кинетическая энергия соударяющихся тел уменьшается. Но отсюда вовсе не следует, что кинетическая энергия ис-

чезает бесследно. Нетрудно убедиться, что она превращается во внутреннюю энергию тела.

Прделаем следующий опыт. Положим кусок проволоки на наковальню и сильно ударим по нему несколько раз молотком. Если затем дотронуться до этого участка проволоки, то можно убедиться в значительном повышении температуры.

Как мы видим, при неупругом ударе кинетическая энергия тел превращается во внутреннюю. Но мерой изменения кинетической энергии является работа силы. Естественно, что работа этой же силы может служить и мерой изменения внутренней энергии.

3. Наконец, изменение внутренней энергии тела происходит под действием силы трения, поскольку, как известно из опыта, трение всегда сопровождается изменением температуры трущихся тел. Естественно, что работа силы трения может служить мерой изменения внутренней энергии.

4. Приведенные примеры позволяют установить более общую связь между работой силы и изменением энергии, чем это было сделано в гл. 16.

Пусть полная энергия тела в некотором состоянии равна  $\mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{E}_0^{(1)} + K^{(1)}$ . Если на тело подействует некоторая внешняя сила, то состояние этого тела изменится; соответственно изменится и его полная энергия, она станет равна  $\mathcal{E}^{(2)} = \mathcal{E}_0^{(2)} + K^{(2)}$ . Изменение энергии  $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)} = (\mathcal{E}_0^{(2)} - \mathcal{E}_0^{(1)}) + (K^{(2)} - K^{(1)})$  или, короче,

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta\mathcal{E}_0 + \Delta K. \quad (21.1)$$

Но мы уже знаем, что работа внешней силы может изменить как кинетическую, так и внутреннюю энергию тела, т. е. его полную энергию. Поэтому можно написать

$$\Delta\mathcal{E} = A_{\text{внешн}}, \quad (21.2)$$

*т. е. работа внешней силы есть мера изменения полной энергии тела.*

## § 21.2. Теплообмен

1. Существует еще один способ изменения энергии тела, не связанный с работой сил. Если тело поместить в пламя горелки, то его температура изменится, следовательно, изменится и его внутренняя энергия. Поместив затем нагретое тело в холодную воду, мы убедимся, что его температура вновь изменится, что опять связано с изменением его энергии. Однако никакая работа здесь не совершалась, ибо не происходило видимого перемещения

ни самого тела, ни отдельных его частей под действием каких-либо сил.

Фактически здесь изменение внутренней энергии тела происходит под действием молекулярных соударений. У нагретого тела частицы движутся с большими скоростями, у холодного — с малыми. При контакте этих тел происходят упругие соударения между частицами. Быстро движущаяся частица, столкнувшись с другой частицей, имеющей меньшую скорость, передает ей часть своей кинетической энергии. Естественно, что при контакте двух тел с разной температурой за счет соударений между частицами суммарная кинетическая энергия частиц горячего тела уменьшится, суммарная же кинетическая энергия частиц холодного тела возрастет. Следствием этого и является передача энергии от горячего тела к холодному без совершения работы.

*Процесс передачи энергии от одного тела к другому без совершения работы называется теплообменом.*

2. Рассмотренный процесс теплообмена между телами, находящимися в непосредственном контакте, называется *кондуктивным теплообменом* или *теплопроводностью*.

Теплообмен может совершаться и за счет конвекции. Слои жидкости или газа, прикасаясь к телу с высокой температурой, нагреваются и всплывают вверх, а на их место поступают более холодные. Теплообмен, происходящий с помощью струй жидкости или газа, называется *конвективным теплообменом*.

3. Наконец, теплообмен может осуществляться с помощью как видимых, так и невидимых излучений. Убедиться в этом можно с помощью следующего опыта. Укрепим в штативе нагретое тело. Поднесем снизу руку на расстояние 15–20 см. Мы почувствуем, что тело передает руке энергию. Этот процесс не является конвекцией, ибо струи нагретого воздуха поднимаются вверх и руки не достигают. Это не может быть и теплопроводностью, ибо она у всех газов, в частности у воздуха, очень мала.

Оказывается, что всякое тело испускает инфракрасное излучение, а при температурах выше  $800\text{ }^{\circ}\text{C}$  — и видимый свет. Процесс передачи энергии с помощью электромагнитных волн (инфракрасного и видимого излучения) называется *теплообменом с помощью излучения*.

В описанном опыте с нагретым телом мы действительно имеем дело с такого рода теплообменом. В самом деле, поместив между рукой и телом лист жести, мы почувствуем, что нагрев руки прекратился. Причина заключается в том, что металл частично отражает, а частично поглощает излучение, и оно уже до руки не доходит.



Наконец отметим, что если для кондуктивного или конвективного теплообмена между двумя телами необходимо, чтобы между ними обязательно было вещество, то теплообмен с помощью излучения происходит и в вакууме. Так, энергия, излучаемая Солнцем, поступает на Землю через космическое пространство, где царит глубокий вакуум.

### § 21.3. Количество теплоты

1. Мерой изменения энергии тела при механических процессах является работа, совершаемая внешними силами (см. (21.2)). Введем физическую величину, характеризующую изменение энергии тела при теплообмене. Эта величина называется *количеством теплоты* и обозначается буквой  $Q$ .

*Количеством теплоты называется энергия, переданная путем теплообмена.*

Из этого определения следует, что если энергия тела меняется только путем теплообмена, то

$$Q = \Delta \mathcal{E}, \quad (21.3)$$

т. е. *количество теплоты есть мера изменения энергии тела при теплообмене.*

2. В Международной системе единицей количества теплоты, как и работы и энергии, служит джоуль (см. § 16.6):

$$[Q] = [\mathcal{E}] = [A] = \text{Дж}.$$

На практике иногда применяется внесистемная единица количества теплоты — *калория*. По определению

$$1 \text{ кал} = 4,1868 \text{ Дж}.$$

3. Напомним читателю выражения, с помощью которых можно рассчитать количество теплоты.

При изменении температуры тела

$$Q = mc\Delta t, \quad (21.4)$$

где  $m$  — масса тела,  $\Delta t$  — изменение температуры,  $c$  — удельная теплоемкость вещества.

При плавлении кристалла (или кристаллизации расплава)

$$Q = m\lambda, \quad (21.5)$$

где  $\lambda$  — удельная теплота плавления.

При испарении жидкости (или конденсации пара)

$$Q = mL, \quad (21.6)$$

где  $L$  — удельная теплота парообразования.

При химической реакции

$$Q = mq, \quad (21.7)$$

где  $q$  — удельная теплота реакции. Так, количество теплоты, выделяющееся при сгорании 1 кг топлива, называется *удельной теплотой сгорания топлива*.

4. Следует обратить внимание на то, что термин «нагревание» применяется в обиходе в двух смыслах: как передача энергии в форме теплоты (при теплообмене) и как изменение температуры. Между тем оба этих процесса неравнозначны. Температуру тела можно изменить, не передавая ему теплоты. При неупругом ударе, при неупругой деформации, при трении и т. п. температура тела изменяется за счет работы, а не за счет теплообмена. Наоборот, при таких процессах, как плавление или кипение, температура тела не меняется, хотя энергия в форме теплоты к нему подводится. Поэтому при точном описании явлений следует избегать двусмысленного термина «нагревание», нужно точно указывать, в чем сущность рассматриваемого процесса — в изменении температуры или в передаче энергии путем теплообмена.

## § 21.4. Первое начало термодинамики

Наука, изучающая условия превращения энергии из одного вида в другой и характеризующая эти превращения с количественной стороны, называется *термодинамикой*.

1. Выше было показано (формулы (21.2) и (21.3)), что энергия тела может изменяться либо за счет действия внешних сил, либо за счет теплообмена с окружающей средой. Возможен и такой случай, когда энергия тела изменяется за счет обеих этих причин. Тогда изменение энергии системы равно сумме работы внешних сил и количества теплоты, полученного от окружающих тел:

$$\Delta \mathcal{E} = A_{\text{внешн}} + Q. \quad (21.8)$$

2. Работа, совершаемая системой против внешних сил, отличается от работы внешних сил только знаком:  $A = -A_{\text{внешн}}$ . Тогда выражению (21.8) можно придать вид

$$\Delta \mathcal{E} = -A + Q,$$

или

$$Q = \Delta \mathcal{E} + A, \quad (21.9)$$

т. е. *количество теплоты* (энергия, полученная системой путем теплообмена) *расходуется на изменение энергии системы и на работу против внешних сил*.

3. Полученное выражение называется *первым началом термодинамики*. Оно имеет чрезвычайно общий смысл и может при-

меняться для описания самого широкого круга явлений. В дальнейшем мы используем этот закон для описания ряда тепловых и иных процессов.

В последующих параграфах данной главы мы выясним связь между первым началом термодинамики и одним из важнейших законов природы — законом сохранения энергии.

### § 21.5. Адиабатически изолированная система

*Замкнутой* является система тел, в которой можно пренебречь действием внешних сил по сравнению с внутренними (см. § 15.1). Из этого определения следует, что в замкнутой системе работа внешних сил равна нулю.

*Адиабатически изолированной* называется система, которая не вступает в теплообмен с окружающей средой. Согласно этому определению количество теплоты, получаемое адиабатически изолированной системой, равно нулю.

Понятие адиабатически изолированной системы является идеализацией некоторых реальных систем. Конечно, полностью отключить систему от теплообмена невозможно, но существует возможность приблизить процессы, происходящие в данной системе, к адиабатным.

Прежде всего, теплообмен происходит обычно достаточно медленно, значительно медленнее, чем передача энергии с помощью других процессов. Поэтому любой быстрый процесс типа взрыва, удара, вспышки и т. п. может с хорошей степенью точности рассматриваться как адиабатный.

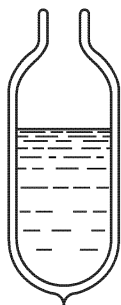


Рис. 21.1

С другой стороны, систему можно приблизить к адиабатной, затруднив теплообмен с окружающей средой, т. е. создав надежную теплоизоляцию. Хорошим примером *адиабатной оболочки* является сосуд Дьюара, который служит основной частью термоса (рис. 21.1). Это тонкостенный стеклянный сосуд с двойными стенками, между которыми создан хороший вакуум. Вакуум препятствует кондуктивному теплообмену и конвекции. Внутренняя стенка сосуда посеребрена. Получившаяся в результате этого зеркальная поверхность хорошо отражает излучение, препятствуя лучистому теплообмену.

Получившаяся в результате этого зеркальная поверхность хорошо отражает излучение, препятствуя лучистому теплообмену.

Систему, находящуюся в оболочке типа сосуда Дьюара, можно с хорошей степенью точности считать адиабатически изолированной.

### § 21.6. Закон сохранения энергии

1. Рассмотрим некую систему тел, которая не взаимодействует с окружающими ее телами механическим путем (система замкнута) и не вступает с внешними телами в теплообмен (система адиабатически изолирована). Из условия замкнутости следует, что система не совершает работы против внешних сил, т. е.  $A = 0$ . Из условия адиабатической изоляции вытекает, что система не получает и не отдает энергию путем теплообмена, т. е.  $Q = 0$ .

Из первого начала термодинамики (21.9) получим, что в этом случае полная энергия системы не меняется:  $\Delta \mathcal{E} = 0$  и потому  $\mathcal{E} = \text{const}$ .

Итак, *полная энергия замкнутой и адиабатически изолированной системы является постоянной величиной*. Это и есть наиболее общая формулировка закона сохранения энергии.

2. Закон сохранения энергии в ньютоновской механике (см. § 19.1) является частным случаем полученного здесь закона. Действительно, в гл. 19 мы рассматривали только консервативные системы, а в этих системах отсутствует теплообмен и для сохранения энергии необходимо только одно условие — замкнутость системы.

3. Закон сохранения энергии вовсе не требует, чтобы энергия каждого из тел, входящих в данную систему, оставалась неизменной. На самом деле между телами может осуществляться как механическое взаимодействие, так и теплообмен, и потому энергия отдельных тел, входящих в данную систему, будет безусловно меняться. Для сохранения энергии системы необходимо, чтобы она не взаимодействовала с внешними телами и не участвовала в теплообмене. В этом случае полная энергия системы не будет меняться, хотя энергия ее составных частей меняется.

### § 21.7. Закон сохранения массы

1. В ньютоновской механике рассматриваются тела, движущиеся с малыми скоростями. В этом случае изменения энергии тела за счет его движения, деформации, тепловых или химических процессов ничтожно малы по сравнению с энергией покоя (см. § 16.2, 20.2–20.4), так что можно последнюю считать постоянной величиной. Кроме того, в ньютоновской механике не рассматриваются случаи преобразования одних форм материи в другие; например, в рамках этой теории невозможны преобразования одних частиц вещества в другие, в электромагнитное поле и иные поля. Поэтому в ньютоновской механике масса рассматривается

как величина, постоянная для данного тела (независимо от его энергии), а масса системы — как сумма масс тел, из которых она состоит. Естественно, что в ньютоновской механике справедлив *закон сохранения массы*, независимый от закона сохранения энергии. Опыт отлично подтверждает этот закон при тех процессах, которые рассматриваются в этой теории.

2. В теории относительности масса системы не равна сумме масс тел, из которых эта система состоит (см. § 20.1). Собственно, этого одного уже достаточно, чтобы утверждать, что в общем случае масса не является сохраняющейся величиной.

Но, кроме того, при больших кинетических энергиях возможно превращение одних частиц в другие, а также «рождение» и «исчезновение» частиц. Здесь мы ограничимся одним примером.

3. Пусть быстрый протон, разогнанный в ускорителе до скорости, близкой к скорости света, ударяется о неподвижный протон. Оказывается, что если быстрый протон обладает достаточной кинетической энергией, то вместо двух частиц возникнут четыре: три протона и один антипротон.

Реакция записывается так:

$${}_1^1p + {}_1^1p \rightarrow {}_1^1p + {}_1^1p + {}_1^1p + {}_{-1}^1\tilde{p},$$

где  ${}_1^1p$  — протон, а  ${}_{-1}^1\tilde{p}$  — антипротон (частица с массой, равной массе протона, но с противоположным знаком электрического заряда). Обозначим энергию покоя протона через  $\mathcal{E}_0$ ; тогда энергия покоя системы до удара составит  $2\mathcal{E}_0$ , после удара  $4\mathcal{E}_0$ . Итак, масса здесь не сохраняется; кинетическая энергия превращается в энергию покоя.

Пользуясь законами сохранения энергии и импульса, определим минимальную кинетическую энергию протона, способного при ударе о неподвижную водородную мишень «родить» антипротон. Для простоты решения примем, что после удара все частицы движутся с одним и тем же импульсом  $p_1$ . Согласно закону сохранения импульса

$$p = 4p_1, \quad (21.10)$$

где  $p$  — импульс быстрого протона до удара о мишень. Используя связь (16.8) между энергией и импульсом, имеем

$$\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2 = p^2 c^2, \quad \mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_0^2 = p_1^2 c^2, \quad (21.11)$$

где  $\mathcal{E}_0$  — энергия покоя протона,  $\mathcal{E}$  — энергия быстрого протона до удара и  $\mathcal{E}_1$  — энергия протона или антипротона после удара.

Исключив из (21.10) и (21.11) импульсы  $p$  и  $p_1$ , получим

$$\mathcal{E}^2 - 16\mathcal{E}_1^2 + 15\mathcal{E}_0^2 = 0. \quad (21.12)$$

Из закона сохранения энергии следует, что полная энергия двух протонов до столкновения равна сумме полных энергий четырех частиц, возникших после столкновения:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_0 = 4\mathcal{E}_1. \quad (21.13)$$

Подставив полученное выражение в (21.12) и проделав несложные выкладки, получим

$$\mathcal{E} = 7\mathcal{E}_0, \quad (21.14)$$

откуда следует, что кинетическая энергия быстрого протона до соударения

$$K = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = 6\mathcal{E}_0. \quad (21.15)$$

Существенно важно, что из кинетической энергии  $K = 6\mathcal{E}_0$  только  $2\mathcal{E}_0$  превратилось в энергию покоя; остаток же  $4\mathcal{E}_0$  сохранил форму кинетической энергии продуктов реакции — трех протонов и одного антипротона (см. § 41.7).

4. Рекомендуем читателю произвести числовой расчет, учитывая, что масса протона  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг. Тогда нетрудно убедиться, что кинетическая энергия быстрого протона составит  $K \approx 6 \text{ ГэВ} = 6 \cdot 10^9 \text{ эВ}$ , а его скорость равна 99 % от скорости света.

## Глава 22

### ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

#### § 22.1. Особенности вращательного движения

Вращающиеся тела часто встречаются на практике — это всевозможные маховики, валы, роторы генераторов и двигателей, винты, сверла, фрезы и т. п. Особенностью вращательного движения является то, что все точки тела движутся по concentрическим окружностям, центры которых расположены на оси вращения. Все эти точки движутся с *разными* линейными скоростями, а одинаковой для них является угловая скорость  $\omega = d\alpha/dt$  (см. § 4.7).

При изучении законов движения материальной точки мы ввели ряд динамических величин: импульс, силу, кинетическую

энергию и т. п. Фактически мы пользовались этими величинами и для описания законов поступательного движения твердого тела. Если твердое тело движется поступательно, то все его точки движутся по одинаковым траекториям (см. § 1.1), а значит, и с одинаковой скоростью. Поэтому выражения для импульса или кинетической энергии тела имеют точно такой же вид, как и для материальной точки. В самом деле, импульс тела равен сумме импульсов отдельных частиц, из которых это тело состоит:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n = m_1 \mathbf{v} + m_2 \mathbf{v} + \dots + m_n \mathbf{v} = \\ = (m_1 + m_2 + \dots + m_n) \mathbf{v} = m \mathbf{v},$$

где  $m_1, m_2, \dots, m_n$  — массы отдельных частиц, а  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  — масса тела. Такой же результат получится и для кинетической энергии тела при его поступательном движении.

Если же твердое тело вращается, то приведенное рассуждение окажется непригодным, ибо скорости разных точек различны. Здесь нужно все динамические характеристики выразить через угловую скорость. Именно по этой причине мы вынуждены будем ввести в данном случае ряд новых физических величин — момент силы, момент инерции и момент импульса.

## § 22.2. Кинетическая энергия и момент инерции

1. Выведем выражение для кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Задачу будем решать в приближении ньютоновской механики, т. е. при условии, что все точки движутся со скоростями, значительно меньшими скорости света в вакууме. Для упрощения задачи вначале рассмотрим систему, состоящую из двух материальных точек, а затем обобщим полученный результат на любое твердое тело.

2. Пусть две материальные точки с массами  $m_1$  и  $m_2$  расположены на расстоянии  $l$  друг от друга (рис. 22.1). Будем считать систему жесткой, т. е. расстояние между точками не меняется. Система вращается вокруг оси с угловой скоростью  $\omega$ . Тогда, согласно (4.12), скорость первой точки  $v_1 = r_1 \omega$ , скорость второй  $v_2 = r_2 \omega$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от материальных точек до оси вращения. Кинетические энергии материальных точек, согласно (16.5),

$$K_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2, \quad K_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2. \quad (22.1)$$

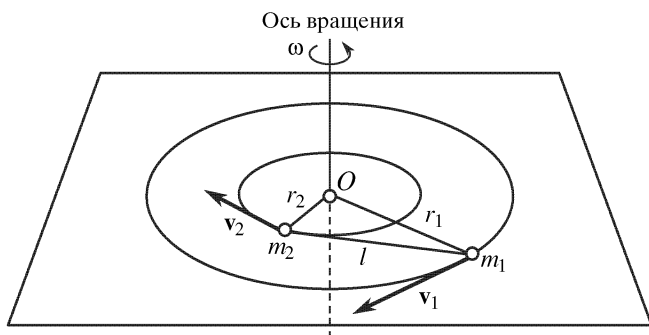


Рис. 22.1

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2). \quad (22.2)$$

### 3. Физическая величина

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad (22.3)$$

называется *моментом инерции* системы материальных точек. Он характеризует распределение масс этих точек относительно оси вращения.

Единицей момента инерции в СИ служит *килограмм на метр в квадрате* ( $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ).

Подставив (22.3) в (22.2), получим

$$K = \frac{J \omega^2}{2}. \quad (22.4)$$

Итак, *кинетическая энергия системы материальных точек равна половине произведения момента инерции этой системы на квадрат угловой скорости вращения.*

4. Если система состоит не из двух, а из  $n$  материальных точек, то выражение для ее кинетической энергии сохранится, но момент инерции примет вид

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2. \quad (22.5)$$

Твердое тело можно разбить на достаточно большое число частиц с массами  $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$  таким образом, чтобы каждую из них можно было считать материальной точкой. Тогда момент инерции этого тела

$$J = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_n r_n^2.$$



Вообще говоря, результат будет зависеть от способа разбиения тела на частицы и от положения оси вращения. Только перейдя к пределу при неограниченном увеличении числа разбиений, мы получим точный результат. Вычисление моментов инерции твердого тела представляет собой довольно сложную математическую задачу, и мы ее здесь решать не будем.

### § 22.3. Зависимость момента инерции от положения оси вращения

1. Момент инерции тела зависит не только от его массы, но и от положения оси вращения. Это непосредственно следует из выражения (22.5). Действительно, если перенести ось вращения в другую точку, то массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$  не изменятся, а радиусы  $r_1, r_2, \dots, r_n$  станут другими, в результате чего и момент инерции окажется иным.

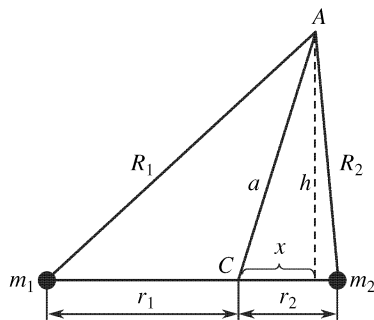


Рис. 22.2

Вычислим моменты инерции системы из двух материальных точек относительно двух осей, параллельных друг другу и перпендикулярных плоскости чертежа (рис. 22.2). Расстояние между осями  $AC = a$ .

Момент инерции системы относительно оси, проходящей через точку  $A$ :

$$J = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2. \quad (22.7)$$

Момент инерции той же системы относительно оси, проходящей через центр масс  $C$ :

$$J_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2. \quad (22.8)$$

По теореме Пифагора

$$R_1^2 = h^2 + (r_1 + x)^2, \quad R_2^2 = h^2 + (r_2 - x)^2.$$

Подставляя в (22.7) и проделав несложные преобразования, получим с учетом (22.8)

$$J = J_0 + (m_1 + m_2)(h^2 + x^2) + 2x(m_1 r_1 - m_2 r_2).$$

Но  $h^2 + x^2 = a^2$ ; из определения понятия «центр масс» (см. § 15.7) следует, что  $m_1 r_1 - m_2 r_2 = 0$ . Наконец, для нерелятивистских скоростей  $m_1 + m_2 = m$  есть масса системы. Следовательно,

$$J = J_0 + m a^2. \quad (22.9)$$

Итак, момент инерции системы материальных точек относительно произвольной оси равен моменту инерции этой системы

относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы системы на квадрат расстояния между осями (*теорема Штейнера*).

Поскольку  $ma^2$  — положительное число, то из теоремы Штейнера следует, что минимальное значение имеет момент инерции системы относительно оси, проходящей через ее центр масс.

2. Воспользуемся теорией Штейнера для вычисления момента инерции однородного стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец (рис. 22.3). Пусть масса стержня  $m$ , его длина  $l$ . Момент инерции пропорционален массе и квадрату линейных размеров:

$$J = \theta ml^2,$$

где  $\theta$  — безразмерный коэффициент.

Вычислим момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. С одной стороны, мы можем считать стержень состоящим из двух равных кусков с массами  $m_1 = m/2$  и длинами  $l_1 = l/2$ . Учитывая, что момент инерции всего стержня равен сумме моментов инерции обеих половин, получим

$$J_0 = 2\theta m_1 l_1^2 = 2\theta \frac{m}{2} \frac{l^2}{4} = \frac{\theta}{4} ml^2.$$

С другой стороны, согласно теореме Штейнера,

$$J_0 = J - ma^2 = \theta ml^2 - m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = ml^2 \left(\theta - \frac{1}{4}\right).$$

Сравнив равенства, получим

$$\frac{\theta}{4} = \theta - \frac{1}{4}, \quad \text{откуда} \quad \theta = \frac{1}{3}.$$

Итак, момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно стержню,

$$J = \frac{ml^2}{3}. \quad (22.10)$$

Момент инерции того же стержня относительно оси, проходящей через центр масс,

$$J = \frac{ml^2}{12}. \quad (22.11)$$

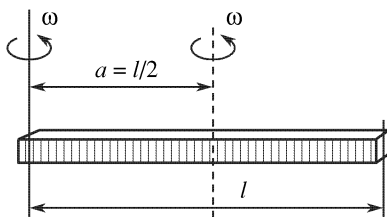


Рис. 22.3

3. Момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр, пропорционален его массе и квадрату радиуса:

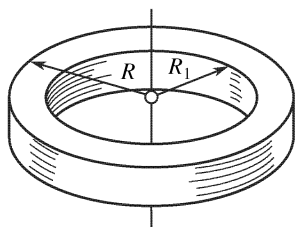


Рис. 22.4

$$J = \alpha m R^2.$$

Для определения коэффициента пропорциональности  $\alpha$  вычислим момент инерции кольца (рис. 22.4). Он равен разности моментов инерции двух дисков с радиусами  $R$  и  $R_1$  и соответственно с массами  $m$  и  $m_1 = m R_1^2 / R^2$ :

$$J_k = J - J_1 = \alpha m R^2 - \alpha m_1 R_1^2 = \frac{\alpha m}{R^2} (R^4 - R_1^4).$$

Масса кольца

$$m_k = m - m_1 = m \frac{R^2 - R_1^2}{R^2}.$$

Если кольцо достаточно тонкое ( $R_1 \approx R$ ), то его момент инерции можно вычислить из (22.6). Имеем

$$\begin{aligned} J_k &= \Delta m_1 R^2 + \Delta m_2 R^2 + \dots = (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots) R^2 = \\ &= m_k R^2 = m (R^2 - R_1^2). \end{aligned}$$

Сравнив оба выражения для момента инерции кольца, получим после сокращений

$$\alpha (R^2 + R_1^2) = R^2.$$

А так как по условию  $R_1 \approx R$ , то  $\alpha = 1/2$ .

Итак, момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно его плоскости, равен

$$J = \frac{1}{2} m R^2. \quad (22.12)$$

## § 22.4. Момент силы

1. Пусть на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, действует некоторая сила  $\mathbf{F}$  (рис. 22.5). Вычислим работу, которую совершает эта сила при повороте тела на угол  $\Delta\alpha$ . Элементарная работа, согласно определению (16.12), равна

$$\Delta A = F_t \Delta l.$$

Но  $F_t = F \sin \gamma$ , где  $\gamma$  — угол между направлением силы и направлением радиуса, проведенного от оси вращения до точки

приложения силы. Дуга же  $\Delta l = r \Delta \alpha$ . Следовательно,

$$\Delta A = F r \sin \gamma \Delta \alpha.$$

## 2. Величину

$$M = F r \sin \gamma = F d \quad (22.13)$$

назовем *моментом силы* относительно оси вращения. Кратчайшее расстояние от оси вращения до направления силы  $d = r \sin \gamma$  назовем *плечом силы*.

*Моментом силы относительно некоторой оси называется произведение силы на ее плечо.*

Единица момента силы в Международной системе единиц — *ньютон-метр* (Н · м).

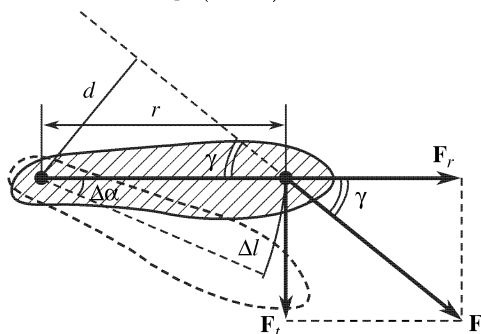


Рис. 22.5

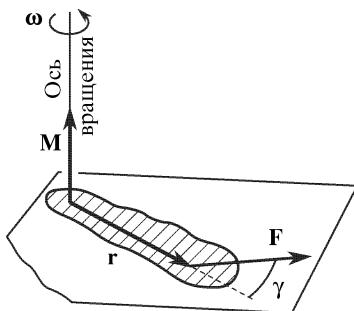


Рис. 22.6

Момент силы принято рассматривать как вектор, направленный вдоль оси вращения (рис. 22.6). Направление вектора момента силы, как и вектора угловой скорости (см. § 4.7), определяется по правилу винта: если головку винта с правой резьбой вращать по направлению силы, то поступательное движение винта покажет направление вектора момента силы.

Момент силы равен векторному произведению радиус-вектора на вектор силы:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (22.14)$$

3. Подставив (22.13) в выражение для элементарной работы, получим

$$\Delta A = M \Delta \alpha, \quad (22.15)$$

т. е. *работа, совершаемая при повороте тела, равна произведению момента силы на угол поворота.*

4. Чтобы вычислить мощность, следует выражение (22.15) разделить на промежуток времени  $\Delta t$ . Учитывая, что  $\Delta A / \Delta t = A_{\text{ср}}$  есть средняя мощность, а  $\Delta \alpha / \Delta t = \omega_{\text{ср}}$  — средняя угловая скорость, получим

$$N_{\text{ср}} = M \omega_{\text{ср}}$$

или, перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим для мгновенной мощности

$$N = M\omega. \quad (22.16)$$

*Мгновенная мощность равна произведению момента силы на угловую скорость вращения.*

## § 22.5. Условие равновесия тела, имеющего ось вращения

1. В § 19.6 мы вывели условие равновесия для свободного тела, которое может перемещаться в любых направлениях. В этом случае равновесие достигается, если векторная сумма всех сил

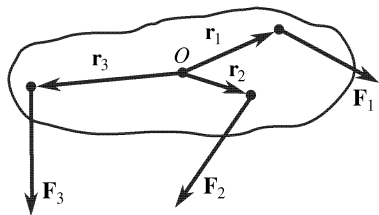


Рис. 22.7

(их равнодействующая) равна нулю. Рассмотрим, при каком условии находится в равновесии тело, которое может вращаться вокруг некоторой заданной оси.

Будем считать положительными моменты, вращающие тело против часовой стрелки, и отрицательными — моменты, вращающие его по часовой стрелке. Так,

на рис. 22.7 моменты сил  $F_1$  и  $F_2$  имеют отрицательный знак, момент силы  $F_3$  — положительный, если ось проходит через  $O$ .

2. Если тело находится в состоянии равновесия, то при повороте его на бесконечно малый угол  $\Delta \alpha$  потенциальная энергия не изменится, следовательно, элементарная работа  $\Delta A$ , равная изменению потенциальной энергии, равна нулю:  $\Delta A = 0$ . Но

$$\begin{aligned} \Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 &= M_1 \Delta \alpha + M_2 \Delta \alpha + M_3 \Delta \alpha = \\ &= (M_1 + M_2 + M_3) \Delta \alpha. \end{aligned}$$

Поскольку  $\Delta \alpha \neq 0$ , то очевидно, что

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0. \quad (22.17)$$

Это и есть искомое условие равновесия. Итак, *тело, имеющее заданную ось вращения, находится в состоянии равновесия, если*

*алгебраическая сумма всех моментов сил относительно этой оси равна нулю.*

Иначе можно сказать, что равновесие достигается здесь в том случае, если сумма моментов, вращающих тело против часовой стрелки, равна сумме моментов, вращающих тело по часовой стрелке.

3. Из полученного условия видно, что малая сила, имеющая большое плечо, способна уравновесить большую силу, имеющую малое плечо. Это свойство моментов сил находит практическое применение в рычагах, воротах, винтовом подъемнике (домкрате) и в целом ряде других приспособлений, широко применяемых в технике.

### § 22.6. Момент импульса и основное уравнение динамики

1. Пусть на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, действует несколько сил (см. рис. 22.7). Алгебраическую сумму моментов всех сил обозначим буквой  $M$ . Как показывает опыт, под действием суммарного момента сил угловая скорость вращения тела меняется и вместе с этим меняется его кинетическая энергия. Бесконечно малое изменение кинетической энергии (при условии  $J = \text{const}$ )

$$dK = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega d\omega.$$

Но согласно (16.13) и (22.16) имеем

$$dK = \Delta A = N dt = M\omega dt,$$

откуда

$$M dt = J d\omega = d(J\omega). \quad (22.18)$$

2. Векторная величина, равная произведению момента инерции на вектор угловой скорости, называется *моментом импульса* (иначе — *вращательным моментом или моментом количества движения*):

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}. \quad (22.19)$$

Заметим, что для материальной точки, движущейся по окружности радиуса  $r$ , модуль момента импульса равен произведению модуля импульса на радиус:

$$L = J\omega = mr^2\omega = mrv = pr. \quad (22.20)$$

Единицей момента импульса в Международной системе единиц служит *килограмм-метр в квадрате на секунду* ( $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ ).

3. Разделив равенство (22.18) на  $dt$  и учитывая (22.19), получим

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L}'(t). \quad (22.21)$$

Это и есть *основное уравнение динамики для вращающегося твердого тела*: момент силы равен производной момента импульса по времени.

4. Следует обратить внимание на тот факт, что в выражении (22.21) речь идет о сумме моментов

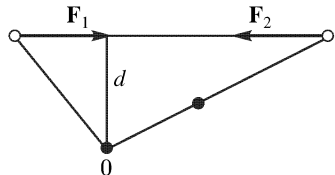


Рис. 22.8

*внешних* сил. Что же касается внутренних сил, то сумма их моментов всегда равна нулю, что прямо следует из третьего закона Ньютона. Для доказательства рассмотрим систему из двух взаимодействующих материальных точек (рис. 22.8). Сила  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ , обе силы имеют одно и то же плечо  $d$ . Следовательно,  $M_1 = F_1 d$ ,  $M_2 = F_2 d = -F_1 d = -M_1$ , и суммарный момент внутренних сил

$$M_{\text{внутр}} = M_1 + M_2 = 0.$$

## § 22.7. Закон сохранения момента импульса

1. Пусть алгебраическая сумма моментов внешних сил, действующих на тело, равна нулю. В частности, это условие всегда справедливо для замкнутой системы, на которую внешние силы вообще не действуют. Тогда из (22.21) следует

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad \mathbf{L} = \text{const}. \quad (22.22)$$

Мы получили очень важный результат, который называется *законом сохранения момента импульса*.

*Момент импульса замкнутой системы является постоянной величиной.*

2. Из различия между понятиями «импульс» и «момент импульса» вытекает одно интересное следствие.

В § 15.7 было показано, что под действием внутренних сил скорость центра масс системы материальных точек не может измениться. При поступательном движении тела скорость всех его точек совпадает со скоростью центра масс. Следовательно, внутренние силы не в состоянии изменить скорость поступательно движущегося тела.

Совсем иной результат получается при вращении тела вокруг оси. Под действием внутренних сил может измениться расстояние

между отдельными частями тела, что приведет к изменению его момента инерции. Но из закона сохранения момента импульса следует, что постоянным является лишь произведение  $L = J\omega$ , а не каждый из сомножителей. Если момент инерции под действием внутренних сил уменьшится, то во столько же раз возрастет угловая скорость, произведение же  $J\omega$  останется постоянной величиной.

3. Данный результат имеет многочисленные практические применения.

Рассмотрим, например, как спортсмен совершает сальто назад (рис. 22.9). После приседания с отведенными назад руками спортсмен прыгает вверх, поднимая руки вперед и затем вверх

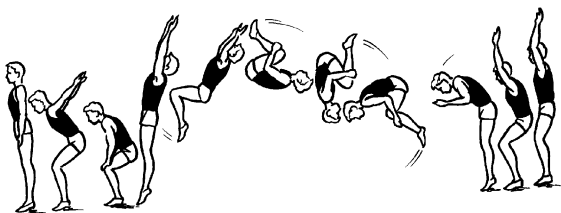


Рис. 22.9

и слегка назад. Тем самым он сообщает своему телу небольшую скорость вращения относительно оси, проходящей через центр масс (примерно на уровне талии). Вблизи верхней точки траектории он «группируется» — резко подтягивает колени к подбородку и охватывает их руками. При этом момент инерции значительно уменьшается, а скорость вращения возрастает, что позволяет спортсмену быстро совершить поворот. При приземлении он вновь выпрямляется и выбрасывает руки вверх и слегка вперед, замедляя тем самым вращение.

Аналогично фигуристы на льду выполняют фигуру, называемую волчком. Раздвинув руки в стороны и заводя свободную ногу, фигурист сообщает себе медленное вращение вокруг вертикальной оси. Резко «сгруппировавшись», т. е. подтянув руки и ногу, он уменьшает момент инерции и начинает быстро вращаться.

4. Нетрудно убедиться, что во всех приведенных примерах кинетическая энергия вращения не сохраняется. Пусть вначале кинетическая энергия  $K = J\omega^2/2$ . После «группировки» момент инерции уменьшается в  $n$  раз,  $J_1 = J/n$ . Во столько же раз увеличивается угловая скорость: из  $J\omega = J_1\omega_1$  следует, что  $\omega_1 = n\omega$ . Кинетическая энергия

$$K_1 = \frac{J_1\omega_1^2}{2} = \frac{J\omega^2 n^2}{2n} = nK.$$



Приращение кинетической энергии  $\Delta K = K_1 - K = K(n - 1)$ . Но для увеличения кинетической энергии нужна работа. Какие же силы ее совершают?

Поскольку рассматриваемые системы в первом приближении являются замкнутыми, то действием внешних сил можно пренебречь. Следовательно, в данном случае кинетическая энергия вращения возрастает за счет действия внутренних сил, т. е. в конечном счете за счет внутренней энергии вращающейся системы. Естественно, что этот результат находится в полном соответствии с законом сохранения энергии.

5. Из закона всемирного тяготения следует, что *каждая из планет обращается вокруг Солнца по эллипсу, причем Солнце находится в одном из его фокусов (первый закон Кеплера)*. По закону сохранения энергии (§ 19.3).

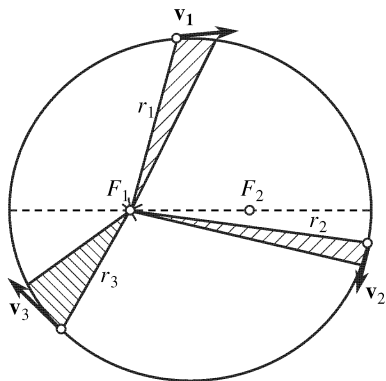


Рис. 22.10

*жгутки времени радиус-вектор планеты описывает равные площади (второй закон Кеплера)*. Покажем, что этот закон есть следствие закона сохранения момента импульса.

В самом деле, Солнце и планета образуют замкнутую систему, поэтому к ней применим закон сохранения момента импульса. Центр масс этой системы практически совпадает с центром Солнца, следовательно, скорость Солнца практически равна нулю. Согласно (22.22) момент импульса этой системы

$$L = mvr = \text{const.} \quad (22.23)$$

Площадь, описываемая радиус-вектором планеты в единицу времени,

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \frac{r dl}{dt} = \frac{mvr}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{const.} \quad (22.24)$$

А это и есть второй закон Кеплера.

## § 22.8. Аналогия между величинами и соотношениями между ними при поступательном и вращательном движениях

Если сопоставить соотношения между величинами, характеризующие движение материальной точки (или поступательно движущегося тела), с такими же соотношениями, описывающими вращение тела вокруг оси, то бросается в глаза глубокая аналогия между ними. Запишем ряд величин и связывающие их уравнения в виде таблицы, ограничиваясь случаем ньютоновской механики (табл. 22.1).

Таблица 22.1

Поступательное движение	Вращательное движение
Перемещение $\Delta l$	Угол поворота $\Delta \alpha$
Скорость $v$	Угловая скорость $\omega$
Масса $m$	Момент инерции $J$
Импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	Момент импульса $\mathbf{L} = J\omega$
Сила $\mathbf{F}$	Момент силы $\mathbf{M}$
Основное уравнение динамики	Основное уравнение динамики
$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{p}'(t)$	$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L}'(t)$
Кинетическая энергия	Кинетическая энергия
$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$	$K = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2J}$
Элементарная работа	Элементарная работа
$\Delta A = F_t dl = \mathbf{F} d\mathbf{l}$	$\Delta A = M d\alpha$
Мощность $N = F_t v = \mathbf{F}\mathbf{v}$	Мощность $N = \mathbf{M}\boldsymbol{\omega}$

Из таблицы видно, что простая подстановка аналогичных величин в формулы для поступательного движения автоматически приводит к правильным формулам для вращательного движения. Так, заменив в выражении  $K = \mathbf{p}^2/2m$  импульс  $\mathbf{p}$  на аналогичный ему момент импульса  $\mathbf{L}$ , а массу  $m$  на ее аналог — момент инерции  $J$ , получим для вращательного движения выражение  $K = \mathbf{L}^2/2J$ . Точно так же можно по аналогии написать выражение для работы, совершаемой при закручивании пружины на некоторый угол  $\varphi$ . Действительно, в § 18.2 мы получили из графика выражение  $A = Fl/2$ . Заменив силу ее аналогом — моментом силы, а перемещение — углом поворота, получим  $A = M\varphi/2$ . Конечно, это выражение можно вывести независимо, с помощью графика, но из аналогии результат получается быстрее и проще.

Рекомендуем читателю, введя понятие об угловом ускорении  $\beta = d\omega/dt$ , получить по аналогии выражения для мгновенной угловой скорости и угла поворота при равнопеременном вращении, а также выражение для основного уравнения динамики вращающегося тела.

## Глава 23

# СИММЕТРИЯ В ПРИРОДЕ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

### § 23.1. Законы сохранения как основные законы природы

1. В предыдущих главах были рассмотрены три основных закона природы: законы сохранения импульса, момента импульса и энергии. Следует учесть, что эти законы выполняются только в инерциальных системах отсчета. В самом деле, при выводе этих законов мы пользовались вторым и третьим законами Ньютона, а последние применимы только в инерциальных системах.

Напомним также, что импульс и момент импульса сохраняются в том случае, если систему можно считать замкнутой (сумма всех внешних сил и соответственно всех моментов сил равна нулю). Для сохранения же энергии тела условия замкнутости недостаточно — тело должно еще быть и адиабатически изолированным (т. е. не участвовать в теплообмене).

2. Законы сохранения ценны своей общностью. Действительно, ни детали того или иного физического процесса, ни особенности отдельных тел, участвующих в этих процессах, не влияют на справедливость этих законов. Они в одинаковой мере применимы как к планетам и звездам, так и к молекулам, атомам и элементарным частицам, из которых состоят атомные ядра. Ими можно пользоваться при исследовании тепловых, химических, электрических и любых иных процессов.

3. Во всей истории развития физики законы сохранения оказались чуть ли не единственными законами, сохранившими свое значение при замене одних теорий другими.

Так, в теории относительности существенные изменения претерпевают классические представления о времени и одновременности событий, о длине отрезков; вводятся новые формулировки закона сложения скоростей и второго закона Ньютона; меняется выражение для кинетической энергии и т. д. Однако законы сохранения импульса, момента импульса и энергии оказываются полностью справедливыми в этой теории.

В микромире — мире атомов, молекул и элементарных частиц — мы встречаемся с рядом специфических явлений, которые резко отличаются от явлений в мире больших тел. Благодаря соотношению неопределенностей здесь, например, невозможно решить основную задачу динамики и однозначно определить, скажем, траекторию электрона в атоме. Все это требует совершенно иного подхода к явлениям микромира. Однако и здесь законы сохранения остаются в силе, и в квантовой механике они играют еще более важную роль, чем в ньютоновской или релятивистской механике. Часто законы сохранения оказываются единственным инструментом для объяснения явлений, происходящих в микромире.

Именно *универсальный характер законов сохранения* и придает им особую ценность.

### § 23.2. Законы сохранения как принципы запрета

1. Между законами типа основного уравнения динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку, и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, модуль и направление скорости в любой момент времени и т. п. (см. гл. 8). Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

Таким образом, законы сохранения проявляются как *принципы запрета: любое явление, при котором не выполняется хотя бы один из законов сохранения, запрещено*, и в природе такие явления никогда не наблюдаются. *Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить*. Заметим, что незапрещенные явления на практике всегда и происходят, хотя и с разной вероятностью: некоторые из этих явлений происходят очень часто, другие — редко, но все же их можно наблюдать.

Может показаться, что законы сохранения оставляют слишком большой произвол, слишком много вариантов, и потому неясно, почему в эксперименте реализуется чаще всего один-единственный процесс. На самом же деле оказывается, что совместное действие нескольких законов сохранения часто почти однозначно определяет возможный ход процесса.

2. Рассмотрим следующий пример. Может ли покоящееся тело за счет своей внутренней энергии начать двигаться? Этот процесс не противоречит закону сохранения энергии. Нужно лишь, чтобы возникшая кинетическая энергия точно равнялась убыли внутренней энергии.

На самом же деле этот процесс никогда не происходит, ибо он противоречит закону сохранения импульса. Раз тело покоилось, то его импульс был равен нулю. А если оно станет двигаться, то его импульс сам собой увеличится, что невозможно. Поэтому внутренняя энергия тела не может превратиться в кинетическую, если тело не распадется на части. Если же допустить возможность распада этого тела на части, то запрет, налагаемый законом сохранения импульса, снимается. При этом возникшие осколки могут двигаться так, чтобы их центр масс остался в покое, — а только этого и требует закон сохранения импульса.

Итак, для того чтобы внутренняя энергия покоящегося тела могла превратиться в кинетическую, это тело должно быть способно распадаться на части. Если же есть еще один какой-либо закон, запрещающий распад этого тела на осколки, то его внутренняя энергия и масса будут постоянными величинами.

3. Кстати, именно совместным действием закона сохранения энергии и импульса объясняется тот факт, что для получения антипротонов при столкновении быстрых протонов с неподвижными (см. § 21.7) необходимо бомбардирующим частицам сообщить кинетическую энергию  $6\mathcal{E}_0 \approx 6$  ГэВ, хотя для возникновения двух новых частиц — протона и антипротона — достаточно энергии  $2\mathcal{E}_0$ .

### § 23.3. Законы сохранения и симметрия пространства–времени

1. Показав универсальный характер законов сохранения, мы тем самым пришли к некоторому логическому противоречию с теми рассуждениями, с помощью которых эти законы были выведены. Действительно, законы сохранения были нами получены как следствия второго и третьего законов Ньютона. Между тем сами законы Ньютона являются результатом обобщения экспериментов с упругими, гравитационными и кулоновскими взаимодействиями. Но эти взаимодействия не описывают всех явлений природы.

В настоящее время известны еще два вида взаимодействий. *Сильным взаимодействием* обусловлены ядерные силы, действующие между элементарными частицами внутри ядра, а так-

же процессы образования тяжелых элементарных частиц при очень высоких энергиях, например, рассмотренная нами в § 21.7 реакция рождения пары протон–антипротон. *Слабые взаимодействия* имеют своим результатом распад некоторых элементарных частиц, например бета-распад ядер.

2. Совсем не очевидно, что для этих взаимодействий пригодны законы Ньютона, тем более что здесь начинает играть определяющую роль соотношение неопределенностей. Между тем законы сохранения здесь полностью справедливы, о чем свидетельствуют все известные явления.

Таким образом, оказывается, что законы сохранения имеют значительно более всеобъемлющий характер, чем законы Ньютона, из которых мы исходили. Поэтому представляется целесообразным найти некоторые более общие принципы, из которых вытекают бы законы сохранения.

3. Оказалось, что такие принципы действительно существуют. Ими являются *принципы симметрии пространства–времени*. Было показано, что из однородности пространства вытекает закон сохранения импульса, из изотропности пространства — закон сохранения момента импульса и из однородности времени — закон сохранения энергии (*теорема Неттер*).

Тот факт, что законы сохранения являются следствиями столь общих представлений, служит сильнейшим подтверждением универсальной значимости этих законов.

## § 23.4. Однородность времени и сохранение энергии

В качестве иллюстрации зависимости между свойствами симметрии пространства–времени и законами сохранения рассмотрим элементарные соображения, поясняющие связь между законом сохранения энергии и однородностью времени.

1. Однородность времени, о которой уже говорилось в § 1.2, выражает собой не что иное, как независимость явлений природы от того, какой момент будет нами принят в качестве начального. В частности, отсюда следует, что масса замкнутой и адиабатически изолированной системы не зависит от времени. Заметим, что условие адиабатической изоляции, не играющее роли при анализе свойств пространства, здесь играет существенную роль, ибо при наличии теплообмена масса со временем меняется.

2. Дифференцируя уравнение (16.8) с учетом  $m = \text{const}$ , мы вновь получим уравнение, совпадающее с (16.10):

$$d\mathcal{E} = u dp. \quad (23.1)$$

Так как система замкнута, то внешняя сила  $F = 0$ , а следовательно,  $dp = F dt = 0$ . Из (23.1) при этих условиях вытекает, что  $d\mathcal{E} = 0$ .

Итак, для замкнутой и адиабатически изолированной системы из факта однородности времени следует  $d\mathcal{E} = 0$ , или  $\mathcal{E} = \text{const}$ , т. е. закон сохранения энергии. Более строгое доказательство требует более сложного математического аппарата.

## Глава 24

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА  
И ТЯГОТЕНИЕ§ 24.1. Явления в ускоренно движущейся  
системе отсчета

1. В предыдущих главах мы описывали явления в инерциальных системах отсчета. Рассмотрим, как же ведут себя тела в системах отсчета, которые движутся с ускорением относительно инерциальной системы. Для простоты рассуждений ограничимся частным случаем, когда неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальной *прямолинейно, с постоянным ускорением  $w = \text{const}$  и в течение небольших промежутков времени*, так что скорость системы отсчета  $v = wt \ll c$ .

Несмотря на такую ограниченную постановку задачи, мы получим, и притом элементарными средствами, все закономерности, которые имеют принципиальное значение.

2. Представим себе достаточно длинный вагон, вдоль которого протянут горизонтальный стержень. На стержне может без трения двигаться массивный шар (рис. 24.1). Система отсчета  $x y z$ , связанная с Землей, как уже говорилось, является в достаточной мере инерциальной. Рассмотрим, как явления, происходящие в вагоне, описываются в связанной с ним системе отсчета  $x' y' z'$ .

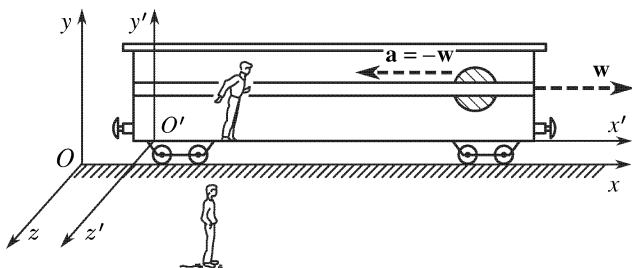


Рис. 24.1

Опыт показывает, что когда вагон движется с ускорением  $w$  относительно Земли, то шар перемещается вдоль стержня с ускорением  $a = -w$  относительно вагона. Опишем это явление с точки зрения обеих систем отсчета.

Система $xy$	Система $x'y'$
<p>На шар никакие силы не действуют, и по закону инерции его скорость не меняется, т.е. относительно Земли его ускорение равно нулю. Но вагон движется относительно Земли с ускорением <math>w</math>, и потому относительно вагона шар движется с ускорением <math>a = -w</math>.</p>	<p>На шар никакие силы не действуют, и тем не менее относительно вагона он имеет ускорение <math>a</math>. Значит, в системе отсчета, связанной с вагоном, закон инерции нарушен: здесь возникают ускорения, не вызванные силами. Причина заключается в том, что вагон движется относительно инерциальной системы с ускорением <math>w = -a</math>.</p>

Итак, в ускоренно движущейся системе отсчета нарушается закон инерции. Поэтому такая система является *неинерциальной*.

3. Видоизменим несколько эксперимент, соединив шар с пружиной, один конец которой прикреплен к передней стенке вагона (рис. 24.2). Пока вагон покоится относительно Земли или дви-

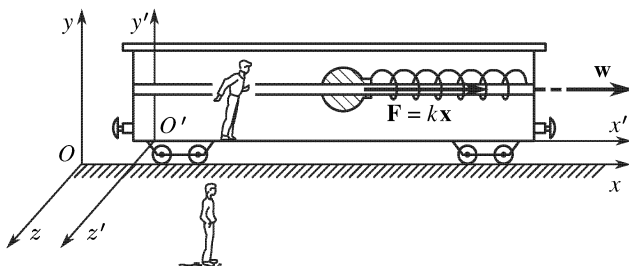


Рис. 24.2

жется относительно нее прямолинейно и равномерно, пружина остается недеформированной. Если вагон станет двигаться с ускорением, то пружина растянется и будет сохранять это деформированное состояние до тех пор, пока продолжается ускоренное движение вагона. Шар же будет покоиться относительно вагона. Рассмотрим и этот случай с точки зрения обеих систем отсчета.

Система $xy$ (инерциальная)	Система $x'y'$ (неинерциальная)
<p>Шар покоится относительно вагона, следовательно, он вместе с вагоном движется относительно Земли с ускорением <math>w</math>. Но по второму закону Ньютона ускорение вызывается силой <math>F = mw</math>. Эта сила приложена к шару со стороны деформированной пружины:</p> $F = kx = mw.$	<p>Шар покоится относительно вагона, хотя деформированная пружина действует на него с силой <math>F = kx</math>. Следовательно, в системе отсчета, связанной с вагоном, нарушается второй закон Ньютона. Дело в том, что вагон движется относительно инерциальной системы отсчета с ускорением</p> $w = F/m = kx/m.$



## § 24.2. Силы инерции

1. Как было показано в предыдущем параграфе, в неинерциальных системах отсчета законы Ньютона не выполняются. Однако можно сформулировать правило, позволяющее *формально* пользоваться вторым законом Ньютона (основным уравнением динамики) и в неинерциальных системах отсчета.

Для этого вернемся к анализу явлений, происходящих в вагоне при его ускоренном движении (см. рисунки 24.1 и 24.2). В первом опыте, когда шар не взаимодействует с другими телами, он все же движется относительно вагона с ускорением  $a = -w$ . Таким образом, шар ведет себя так, как если бы на него действовала некая сила

$$\mathbf{I} = m\mathbf{a} = -m\mathbf{w},$$

которая и сообщала бы ему это ускорение.

Во втором опыте на шар действует деформированная пружина с силой  $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ . Однако эта сила не сообщает шару ускорение относительно вагона. Дело обстоит так, как если бы на шар действовала такая сила  $\mathbf{I}$ , которая уравновешивала бы силу  $\mathbf{F}$  (рис. 24.3). Величина  $\mathbf{I} = -m\mathbf{w}$ , где  $\mathbf{w}$  — ускорение неинерциаль-

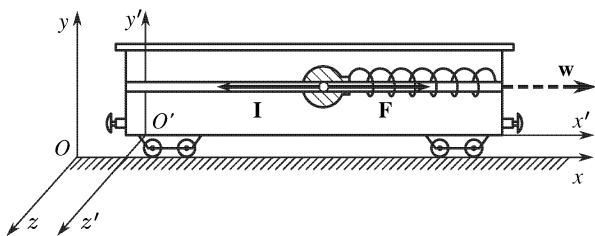


Рис. 24.3

ной системы отсчета (относительно инерциальной), называется *силой инерции*.

2. Пользуясь этим понятием, можно записать основное уравнение динамики в неинерциальных системах следующим образом:

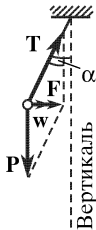
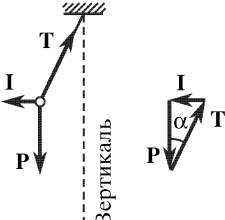
$$\mathbf{R} + \mathbf{I} = m\mathbf{a}, \quad (24.1)$$

где  $\mathbf{R}$  — это сумма всех сил взаимодействия,  $\mathbf{I}$  — сила инерции,  $\mathbf{a}$  — ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчета.

Формула (24.1) есть обобщение основного уравнения динамики на случай неинерциальных систем отсчета:

*Векторная сумма всех сил взаимодействия и сил инерции равна произведению массы тела на его ускорение относительно неинерциальной системы отсчета.*

3. Покажем на примере, как этот принцип применяется. Пусть в вагоне, движущемся ускоренно относительно Земли, висит на нити некоторое тело массой  $m$ . Как показывает опыт, до тех пор, пока вагон движется с ускорением, нить составляет некоторый угол  $\alpha$  с вертикалью. Вычислим этот угол, причем расчет проведем в инерциальной и неинерциальной системах отсчета.

Инерциальная система	Неинерциальная система
<p>Поскольку тело покоится относительно вагона, оно вместе с вагоном движется с ускорением <math>\mathbf{w}</math> относительно Земли. Это ускорение телу сообщает равнодействующая двух сил — тяжести и натяжения нити (рис. 24.4).</p>  <p>Рис. 24.4</p> <p>Согласно основному уравнению динамики</p> $\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{T} = m\mathbf{w}.$ <p>Но <math>F/P = \operatorname{tg} \alpha</math>. Подставив значения <math>F = mw</math> и <math>P = mg</math>, получим</p> $\operatorname{tg} \alpha = \frac{mw}{mg} = \frac{w}{g}.$	<p>Поскольку тело покоится относительно вагона, то векторная сумма всех сил, включая силы взаимодействия и силы инерции, равна нулю. Следовательно, сила тяжести, сила натяжения нити и сила инерции образуют замкнутый треугольник (рис. 24.5).</p>  <p>Рис. 24.5</p> <p>Из рисунка следует, что: <math>\operatorname{tg} \alpha = I/P</math>. Подставив <math>I = mw</math> и <math>P = mg</math>, получим</p> $\operatorname{tg} \alpha = \frac{mw}{mg} = \frac{w}{g}.$

### § 24.3. Особенности сил инерции

1. Силы инерции обладают рядом особенностей, отличающих их от сил взаимодействия: упругих, электрических, гравитационных, сил трения.

Перечислим важнейшие из них.

а. Сила инерции вызвана не взаимодействием тел, а ускоренным движением самой системы отсчета; поэтому к силам инерции неприменим третий закон Ньютона.

б. Сила инерции действует на тело только в неинерциальной системе отсчета; в инерциальных системах таких сил нет.

в. Для любой системы тел, находящейся в неинерциальной системе отсчета, силы инерции являются внешними силами; следовательно, здесь нет замкнутых систем, и потому не выполняются законы сохранения (подробнее об этом см. § 24.4).

г. Наконец, отметим, что сила инерции, как и сила тяготения, пропорциональна массе тела; поэтому в поле сил инерции, как и в поле сил тяготения, все тела движутся с одним и тем же ускорением независимо от их масс (подробнее об этом см. § 24.5).

2. В инерциальных системах отсчета сил инерции вообще нет. И поэтому пользоваться силами инерции в этих системах нельзя, это является грубой ошибкой. В инерциальных системах термин «сила» применяется только в ньютоновском смысле, как мера взаимодействия тел.

В неинерциальных же системах силы инерции действуют так же, как и силы взаимодействия. И если при резком торможении вагона сила инерции бросит вас вперед, то вы эту силу будете ощущать так же реально, как и силу тяжести. Точно так же космонавт очень реально чувствует силу инерции, прижимающую его к креслу при разгоне ракеты.

## § 24.4. Пространство и время в неинерциальных системах отсчета

1. Мы уже неоднократно обращали внимание читателя на то, что в инерциальных системах отсчета время однородно, а пространство однородно и изотропно. Геометрические свойства однородного и изотропного пространства описываются с помощью геометрии Евклида.

Одним из основных положений геометрии Евклида является пятый постулат, который можно сформулировать так: через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну. Из пятого постулата вытекает, что сумма внутренних углов треугольника равна  $\pi$  радиан ( $180^\circ$ ). Наконец, заметим, что в евклидовой геометрии кратчайшим расстоянием между двумя точками является отрезок прямой.

Для упрощения дальнейших рассуждений ограничимся анализом геометрических соотношений на плоскости, например  $xu$ .

2. Пусть наблюдатель находится в инерциальной системе отсчета (например, на Земле, см. рис. 24.1). Здесь пространство и время, как известно, однородны и изотропны.

В однородном и изотропном пространстве длина отрезка не зависит от того, в какой области пространства он находится.

Разобьем оси координат на равные отрезки  $\Delta x_0 = \Delta y_0 = l_0$  и через точки деления проведем параллельные осям прямые. Тогда плоскость  $x_0 y_0$  разобьется на элементарные ячейки (рис. 24.6), имеющие форму равных квадратов.

Точно так же благодаря однородности времени в инерциальной системе отсчета промежуток времени между двумя событиями  $\Delta t_0$  не зависит от того, в какой точке пространства эти события происходят.

3. Наблюдатель, находящийся в неинерциальной системе отсчета (например, в ускоренно движущемся вагоне), обнаружит, что пространство неоднородно (рис. 24.7). В самом деле, длина отрезка в движущейся системе отсчета меньше, чем в системе отсчета, где отрезок покоится (см. § 12.8):

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (24.2)$$

Если наблюдатель, двигаясь равноускоренно, прошел расстояние  $x_0$  относительно Земли, то

$$v^2 = 2wx_0,$$

где  $w$  — ускорение вагона. Подставив значение  $v^2$  в (24.2), получим

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \frac{2wx_0}{c^2}}. \quad (24.3)$$

Данное выражение имеет смысл при  $2wx_0 \ll c^2$ . А в этом случае  $x \approx x_0$ , и выражение (24.3) примет вид

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \frac{2wx}{c^2}}. \quad (24.4)$$

Мы видим, что в неинерциальных системах отсчета длина отрезка зависит от того, в какой области пространства он находится: в точках с разными абсциссами длина одного и того же отрезка различна.

Отрезок же вдоль оси ординат сохраняет неизменную длину, ибо вдоль этой оси нет движения:  $\Delta y = \Delta y_0$ . Построив координатную сетку в неинерциальной системе отсчета, мы убедимся, что здесь уже плоскость  $x y$  разбивается на элементарные ячейки

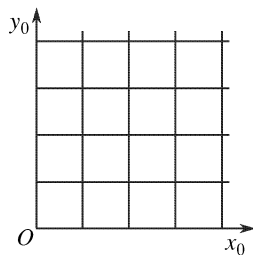


Рис. 24.6

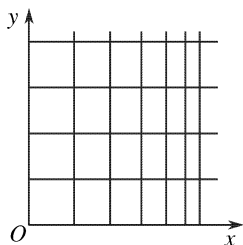


Рис. 24.7

в виде прямоугольников, ширина которых убывает по мере движения вдоль оси абсцисс (рис. 24.7).

4. В неинерциальной системе отсчета пространство не только неоднородно, но и неизотропно.

Действительно, здесь оба направления вдоль оси абсцисс неравноправны: в нашем примере вдоль положительного направления этой оси элемент длины убывает, вдоль отрицательного — возрастает, а вдоль оси ординат его величина не меняется. Следовательно, у нас есть возможность с помощью физического эксперимента различить разные направления в этом пространстве, а это и свидетельствует о его неизотропности.

Заметим, что благодаря неоднородности и неизотропности пространства в неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения импульса и момента импульса, о чем мы уже говорили.

5. Наконец, можно убедиться, что и время в неинерциальных системах отсчета неоднородно, вследствие чего здесь не выполняется закон сохранения энергии. В движущейся системе отсчета промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной и той же точке (см. § 12.9), выражается так:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Используя, как и выше, выражение  $v^2 = 2wx$ , получим

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 2wx/c^2}}. \quad (24.5)$$

6. Покажем, что в неинерциальных системах отсчета благодаря неоднородности и неизотропности пространства его свойства должны описываться *неевклидовой геометрией*.

Для доказательства рассмотрим, как в данном пространстве выглядит отрезок прямой, не параллельной оси координат. Построим в инерциальной системе отсчета отрезок  $AB$ , наклоненный под углом  $45^\circ$  к осям координат (рис. 24.8). В неинерциальной системе этот отрезок превратится в ломаную (рис. 24.9), а фактически, если сделать элемент длины  $\Delta x$  бесконечно малым, — в кривую линию. Но тогда уже сумма углов полученного криволинейного треугольника окажется больше  $180^\circ$  ( $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$ ). А это и означает, что в данном пространстве геометрия является неевклидовой.

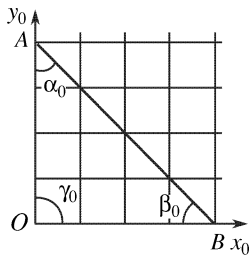


Рис. 24.8

Заметим также, что здесь кратчайшим расстоянием между точками  $A$  и  $B$  является не отрезок прямой, а дуга некоторой кривой, — а это тоже отличает геометрию данного пространства от евклидовой.

7. Впервые идею о возможности существования неевклидовых геометрий выдвинул в 1826 г. Н.И. Лобачевский. Он показал возможность построения непротиворечивой геометрии, в которой не выполняется пятый постулат Евклида, положив тем самым начало ряду последовавших затем работ по неевклидовым геометриям. При этом он также выдвинул идею о том, что геометрия реального мира, возможно, и не является евклидовой.

Современники Лобачевского не могли понять глубины идей, заложенных в его работах, и многие их просто не принимали всерьез. И неудивительно, — геометрия Евклида, которой пользовались в течение более двух тысячелетий, представлялась незыблемой основой науки, а попытка создания неевклидовой геометрии выглядела как явное чудачество, противоречила «здравому смыслу». Кстати, так же многие ученые восприняли позже и теорию относительности.

И все же истина заключалась не в «здравом смысле» консерваторов, а в смелых, революционных идеях Лобачевского и Эйнштейна. Предвидение Лобачевского о неевклидовом характере окружающего нас мира полностью подтвердилось в общей теории относительности.

Пространство, геометрические свойства которого описываются неевклидовой геометрией, часто называют «искривленным» пространством. Смысл такого термина заключается в том, что в неевклидовом пространстве кратчайшим расстоянием между двумя точками оказывается не прямая линия, а некоторая кривая, называемая «геодезической линией». Примером может служить дуга большого круга на поверхности шара или винтовая линия на поверхности цилиндра.

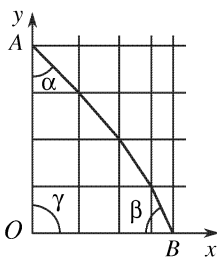


Рис. 24.9

## § 24.5. Принцип эквивалентности

1. Силы инерции, как и силы тяготения, пропорциональны массам тел, на которые эти силы действуют. Поэтому в поле сил инерции, как и в поле сил тяготения, все тела движутся с одним и тем же ускорением независимо от их масс.

Таким образом, *силы инерции по своим проявлениям неотличимы от сил тяготения*. Для иллюстрации этого положения проанализируем еще раз явление, описанное в п. 3 § 24.1. Здесь на шар действует упруго деформированная пружина с силой  $F = -kx$ , но эта сила не сообщает телу ускорения относительно вагона. Такое положение возможно, если на шар, помимо силы упругости, действует еще одна сила, равная ей по величине и противоположная по направлению. Однако все тела, находящиеся в вагоне кроме пружины, с шаром не взаимодействуют. Какие же выводы можно сделать?

Первый вывод	Второй вывод
<p>По-видимому, <i>вагон является неинерциальной системой отсчета</i>, и силу упругости уравновешивает сила инерции: <math>\mathbf{F} = -\mathbf{I}</math>. Чтобы убедиться, что это действительно сила инерции, нужно к пружине прикреплять тела с разной массой. Так как сила инерции пропорциональна массе тела, то и растяжение пружины должно быть пропорционально массе:</p> $x = -\frac{F}{k} = \frac{I}{k} = \frac{mw}{k} = \xi m,$ <p>где</p> $\xi = w/k = \text{const.}$	<p>По-видимому, <i>вагон является инерциальной системой, но он находится в поле тяготения</i>, и силу упругости уравновешивает сила тяготения: <math>\mathbf{F} = -\mathbf{P}</math>. Чтобы убедиться, что это действительно сила тяготения, нужно к пружине прикреплять тела с разной массой. Так как сила тяготения пропорциональна массе тела, то и растяжение пружины должно быть пропорционально массе:</p> $x = -\frac{F}{k} = \frac{P}{k} = \frac{mg}{k} = \xi m,$ <p>где</p> $\xi = g/k = \text{const.}$

Таким образом, *явления в инерциальной системе, находящейся в однородном поле тяжести, и в неинерциальной системе, движущейся с постоянным по величине и направлению ускорением, происходят совершенно одинаково*. Это положение было впервые сформулировано Эйнштейном и положено им в основу релятивистской теории тяготения (см. § 24.6). Оно называется *принципом эквивалентности*.

2. Следует обратить особое внимание на точность формулировки принципа эквивалентности. Он справедлив только для малых областей пространства — столь малых, что в этих областях поле тяготения можно считать однородным. В больших же областях пространства, где отчетливо проявляется неоднородность поля тяготения, невозможно подобрать такую неинерциальную систему отсчета, чтобы в ней силы инерции имели такие же величины и направления, как в поле сил тяготения.

Дело в том, что поле сил тяготения является *центральным* — силы тяготения направлены к центру тяготеющей массы, например Земли; они меняются обратно пропорционально квадра-

ту расстояния. Никаким ускорением системы отсчета получить такие силы инерции невозможно — при ускоренном движении системы отсчета силы инерции будут параллельны друг другу (рис. 24.10).

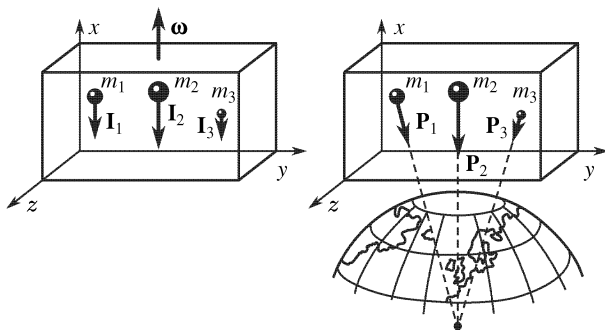


Рис. 24.10

3. Отсюда следует, что не может быть и речи о том, будто бы из принципа эквивалентности вытекает, что поле тяготения является лишь «кажущимся», что в любом случае можно выбрать систему отсчета, где поля тяготения не будет. Об этой ошибке предупреждал неоднократно Эйнштейн. Речь может идти лишь о том, что свойства пространства и времени в поле тяготения и в неинерциальных системах отсчета аналогичны. Это и составляет сущность теории тяготения Эйнштейна, некоторые идеи которой будут изложены ниже.

## § 24.6. Понятие о теории тяготения Эйнштейна

1. Вблизи массивных тел возникает поле тяготения. Оно характеризуется вектором напряженности  $\mathbf{E}$ , совпадающим по смыслу с ускорением тел в данной точке поля, и скалярной величиной  $\varphi$  — потенциалом поля тяготения (§ 9.6, 18.8). В однородном поле, направленном вдоль оси абсцисс, потенциал  $\varphi = gx$ , где  $g$  — ускорение свободного падения,  $x$  — расстояние точки поля от нулевого уровня потенциала, который мы выберем на оси ординат (см. (18.28)). Из принципа эквивалентности следует, что свойства пространства и времени в поле тяготения должны быть такими же, как и в неинерциальных системах отсчета.

2. Пусть в точке, где потенциал поля тяготения равен нулю, элемент длины вдоль оси абсцисс равен  $\Delta x_0$ ; промежуток времени в этой же точке поля равен  $\Delta t_0$ . Тогда в любой другой точке поля, где потенциал равен  $\varphi$ , элемент длины  $\Delta x \neq \Delta x_0$ , а про-



межутков времени  $\Delta t \neq \Delta t_0$ . Для их вычисления воспользуемся формулами (24.4) и (24.5). Поскольку из принципа эквивалентности следует, что  $g = w$ , то произведение  $wx = gx = \varphi$ . Подставив в (24.4) и (24.5), получим

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - 2\varphi/c^2}, \quad (24.6)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 2\varphi/c^2}}. \quad (24.7)$$

Итак, в гравитационном поле, как и в неинерциальных системах отсчета, время неоднородно, а пространство является неевклидовым, т. е. неоднородным и неизотропным. Тем самым подтверждено гениальное предвидение Лобачевского, что геометрия реального мира может быть неевклидовой.

3. Посмотрим, как с этой точки зрения описывается движение тела в поле тяготения.

В ньютоновской механике тело при отсутствии поля тяготения движется по инерции, т. е. прямолинейно и равномерно. Если же оно попало в поле тяготения, то под действием силы нарушится инерциальность движения. Тело приобретает ускорение и движется уже не равномерно и не прямолинейно.

Согласно общей теории относительности (теории тяготения Эйнштейна) *тела всегда движутся по инерции* независимо от наличия или отсутствия поля тяготения. Движение по инерции есть движение по *геодезической линии* (т. е. по кратчайшему расстоянию), и на движение расходуется *минимальное собственное время* (т. е. время по часам, связанным с движущимся телом).

Если тело движется вне поля тяготения, то там пространство однородно и изотропно, а время однородно. Следовательно, тело будет двигаться по прямолинейной траектории, а скорость движения будет постоянной величиной: из  $\Delta x = \text{const}$  и  $\Delta t = \text{const}$  следует, что  $v = \Delta x / \Delta t = \text{const}$ .

Если же тело движется в поле тяготения, где время неоднородно, а пространство неоднородно и неизотропно, то геодезическая линия уже не прямая, а какая-то кривая, форма которой зависит от структуры поля тяготения. Точно так же скорость движения окажется переменной величиной, ибо элемент длины и промежутков времени являются здесь функциями гравитационного потенциала (см. (24.6) и (24.7)).

Основываясь на этих идеях, Эйнштейну удалось сформулировать релятивистскую теорию тяготения, из которой закон тяготения Ньютона вытекает как предельный случай для слабых полей при медленных движениях взаимодействующих сил.

Однако новый взгляд на свойства пространства и времени позволил Эйнштейну не только получить новую теорию тяготения, но и обнаружить три эффекта, которые не были известны в теории тяготения Ньютона.

4. Прежде всего, Эйнштейн показал, что планеты движутся вокруг Солнца не по эллипсам, а по незамкнутым кривым. Каждую из этих кривых можно приближенно представить как эллипс, ось которого медленно поворачивается в плоскости орбиты.

Для планет, которые находятся далеко от Солнца, обнаружить этот эффект очень трудно. Меркурий же расположен к Солнцу ближе остальных планет; следовательно, он находится в более сильном гравитационном поле и движется по орбите быстрее других планет. Поэтому здесь релятивистские эффекты скажутся сильнее. Оказалось, что поворот оси орбиты Меркурия должен составить  $43''$  за столетие. Такая особенность в законах движения Меркурия была замечена астрономами еще в середине XIX столетия, но объяснить это явление не удавалось. Наиболее точные астрономические измерения дали для смещения значение  $(42,6 \pm 0,9)''$  за столетие, что отлично объясняется теорией тяготения Эйнштейна.

5. Вторым эффектом, вытекающим из этой теории, является искривление световых лучей в поле тяготения. Действительно, свет всегда распространяется по геодезическим линиям, а в поле тяготения геодезической линией является кривая, форма которой зависит от структуры поля.

В пределах Солнечной системы сильное поле тяготения имеется лишь вблизи поверхности Солнца. Поэтому искривление световых лучей можно наблюдать следующим образом. Нужно сфотографировать участок небесной сферы вблизи Солнца, а затем — тот же участок, когда Солнце уйдет оттуда; при этом должно наблюдаться смещение звезд на некоторый угол  $\theta$  (рис. 24.11). Естественно, что фотографировать небо следует во время пол-

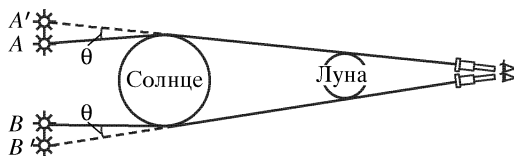


Рис. 24.11

ного солнечного затмения, так как на фоне яркого света Солнца слабый свет, исходящий от звезд, не виден.

Эйнштейн показал, что

$$\theta = \frac{4\varphi}{c^2} = \frac{4GM}{c^2 R}, \quad (24.8)$$

где  $M$  и  $R$  — масса и радиус Солнца. Подставив значения  $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ ,  $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ ,  $R = 7 \cdot 10^8 \text{ м}$  и  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ , получим

$$\theta = 0,85 \cdot 10^{-5} \text{ рад} = 1,75''.$$

Измерения, проведенные рядом наблюдателей, дали от  $(1,72 \pm 0,11)''$  до  $(1,82 \pm 0,15)''$ , что в пределах ошибок измерения отлично согласуется с теорией.

6. Наконец, благодаря неоднородности времени любой периодический процесс в поле тяготения должен идти несколько медленнее, чем вне поля. Следовательно, ход часов в поле тяготения замедляется.

Пусть атом излучает электромагнитные волны (безразлично — видимый свет или гамма-излучение) вне поля тяготения с некоторой частотой  $\nu_0$ . Тогда этот же атом, находясь в поле тяготения с потенциалом  $\varphi$ , излучает волны с меньшей частотой  $\nu$ . Действительно,  $\nu_0 = \Delta N / \Delta t_0$ , где  $\Delta N$  — число колебаний. В поле тяготения  $\nu = \Delta N / \Delta t$ , откуда  $\nu / \nu_0 = \Delta t_0 / \Delta t$ . Используя (24.7), получим

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}. \quad (24.9)$$

В эксперименте может быть зарегистрировано изменение частоты

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} - 1 = \frac{-2\varphi}{c^2 \left(1 + \sqrt{1 - 2\varphi/c^2}\right)}.$$

Поскольку обычно  $\frac{2\varphi}{c^2} \ll 1$ , то

$$1 + \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} \approx 2.$$

Итак,

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \frac{\varphi}{c^2}. \quad (24.10)$$

В поле тяготения Земли эффект изменения частоты исключительно мал. Так, на высоте  $h$  над поверхностью Земли

$$\left| \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \right| = \frac{\varphi}{c^2} = \frac{gh}{c^2} = \frac{9,81h}{9 \cdot 10^{16}} = 1,09 \cdot 10^{-16} h.$$

Тем не менее в 1960 г. Паунд и Ребка (см. § 79.11) сумели экспериментально подтвердить изменение частоты гамма-излучения в поле тяготения Земли. Сравнивалось излучение двух одинаковых источников, один из которых находился на поверхности Земли, второй — на высоте 22,5 м. Теоретическое изменение частоты  $\Delta\nu/\nu_0 = 2,46 \cdot 10^{-15}$ . В эксперименте получилось  $\Delta\nu/\nu_0 = (2,56 \pm 0,25) \cdot 10^{-15}$ . Их отношение

$$\frac{\Delta\nu_{\text{эксп}}}{\Delta\nu_{\text{теор}}} = 1,04 \pm 0,10,$$

что в пределах ошибок эксперимента блестяще подтверждает теорию тяготения Эйнштейна.

### § 24.7. Парадокс близнецов

1. Представим себе, что космический корабль стартует с Земли в точке  $A$ , разгоняется и удаляется от нее вдоль оси абсцисс со скоростью  $v$ . Затем в точке  $B$  он поворачивает, движется к Земле с той же скоростью, тормозит и совершает посадку. Свяжем с Землей систему отсчета  $xyz$ , с удаляющимся кораблем — систему  $x'y'z'$  и с приближающимся —  $x''y''z''$  (рис. 24.12).

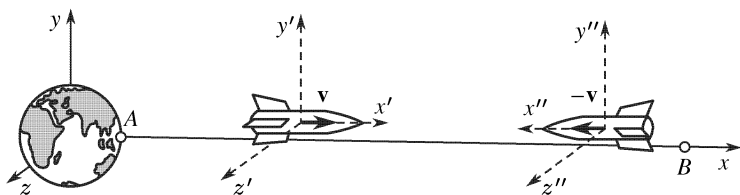


Рис. 24.12

Сравним промежуток времени между стартом и посадкой по показаниям земных часов и часов, которые находятся на космическом корабле. Предполагается, что конструкция часов позволяет им одинаково хорошо работать в обеих системах отсчета.

2. Промежуток времени между этими событиями по земным часам

$$\Delta t_{\text{зем}} = t_{2A} - t_{1A} = (t_{2A} - t_B) + (t_B - t_{1A}), \quad (24.11)$$

где  $t_{1A}$  — момент старта корабля,  $t_{2A}$  — момент посадки и  $t_B$  — момент поворота. Тот же промежуток времени по космическим часам равен согласно (12.22)

$$\begin{aligned}\Delta t_{\text{косм}} &= \Delta t'' + \Delta t' = \\ &= \frac{t_{2A} - t_B + (x_A - x_B) \cdot v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{t_B - t_{1A} + (x_B - x_A) \cdot v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (24.12)\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{x_A - x_B}{t_{2A} - t_B} = -v, \quad \frac{x_B - x_A}{t_B - t_{1A}} = v,$$

и подставив в (24.12), получим

$$\begin{aligned}\Delta t_{\text{косм}} &= (t_{2A} - t_B) \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + (t_B - t_{1A}) \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \\ &= (t_{2A} - t_B) \sqrt{1 - v^2/c^2} + (t_B - t_{1A}) \sqrt{1 - v^2/c^2} = \\ &= \Delta t_{\text{зем}} \sqrt{1 - v^2/c^2}.\end{aligned}$$

Итак,

$$\Delta t_{\text{косм}} = \Delta t_{\text{зем}} \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (24.13)$$

3. Эту задачу можно решить и иначе, с позиций наблюдателя, находящегося в космическом корабле. Часы, покоящиеся относительно корабля, показывают его собственное время (§ 12.9):

$$\Delta t_{\text{косм}} = \Delta t'_0 + \Delta t''_0. \quad (24.14)$$

Время по земным часам найдем по формуле (12.21):

$$\Delta t_{\text{зем}} = \Delta t' + \Delta t'' = \frac{\Delta t'_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{\Delta t''_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_{\text{косм}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (24.15)$$

Мы вновь пришли к формуле (24.13).

Итак, при любом расчете оказывается, что время в космическом корабле течет медленнее, чем на Земле. Если, например,  $v = 0,9998c$ , то время замедлится в 50 раз! Следовательно, если один из двух близнецов отправится с указанной скоростью в далекое космическое путешествие и при этом (по своему календарю) состарится на 1 год, то его брат, оставшийся на Земле, состарится на 50 лет.

4. Замедление времени в быстро движущемся космическом корабле открывает принципиальную возможность в течение разумных промежутков времени по собственным часам путешествовать

к далеким звездам. Правда, об итогах этого путешествия люди, оставшиеся на Земле, уже ничего не узнают.

Заметим, что в настоящее время совершенно не ясны технические условия (в том числе, источники энергии), позволяющие ускорять космические корабли до ультрарелятивистских скоростей. Даже разгон элементарных частиц до этих скоростей связан с огромными трудностями (см. § 41.4–41.6).

5. Полученный выше результат называется «парадоксом близнецов» потому, что на первый взгляд он представляется странным. В действительности никакого парадокса не существует, и выдвигаемые иногда возражения против полученного результата не обоснованны. Рассмотрим некоторые из них.

Иногда говорят, что полученный результат противоречит принципу относительности (см. § 12.2). Это возражение основано на недоразумении. В космическом корабле при старте, повороте и посадке возникают перегрузки, при свободном полете — невесомость; ничего этого на Земле нет. Итак, обе системы отсчета неравноправны, и поэтому в них темп времени различен. Принцип относительности здесь применять нельзя.

Иногда возражают против полученного результата, указывая, что космический корабль не является инерциальной системой отсчета на этапах старта, поворота и посадки, а мы при расчете пользовались формулами специальной теории относительности. Это замечание резонно, но оказывается, что учет неинерциальности не меняет существа дела. На участках, где движение корабля неравномерное, время тоже замедляется, что было показано в предыдущих параграфах.

6. Иногда высказываются сомнения в законности применения теории относительности к темпу процессов, происходящих в живых организмах. Кстати, возможность применения к этим же объектам законов ньютоновской механики почему-то сомнений не вызывает. Между тем никаких оснований для таких сомнений нет. Развитие науки показало, что жизнь в конечном счете сводится к физико-химическим процессам, происходящим в весьма сложных системах, состоящих из высокополимерных соединений — белков и нуклеиновых кислот. Благодаря высокой степени организации эти системы, естественно, имеют свои специфические закономерности. Но общие законы физики — как ньютоновской, так и релятивистской — применимы к этим объектам в полной мере.

# Часть III

## МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗА

---

### Глава 25

#### МОЛЕКУЛЯРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

##### § 25.1. Как измерили скорость движения молекул

1. Известно, что все тела состоят из молекул или атомов <sup>1)</sup>, которые находятся в состоянии непрерывающегося беспорядочного движения. Как же определить скорости движения молекул?

Впервые такой эксперимент поставил в 1920 г. О. Штерн. В дальнейшем предложенная им методика «молекулярного пучка» использовалась различными учеными, создавшими более совершенные установки. Рассмотрим идею эксперимента, осуществленного Ламмертом в 1929 г.

2. Прибор (рис. 25.1) состоит из толстостенного сосуда 1, к которому присоединяется «молекулярная печка» 2 — сосуд, в кото-

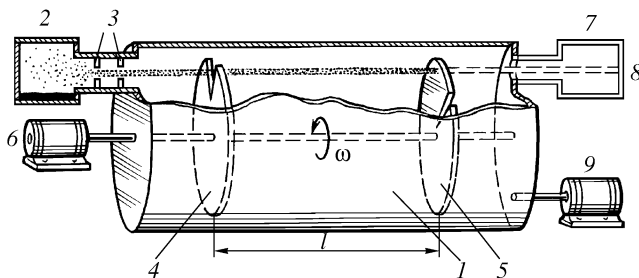


Рис. 25.1

ром испаряется ртуть (или какой-либо другой жидкий металл). Пары ртути проходят через систему диафрагм 3, в результате чего создается довольно узкий молекулярный пучок. Два диска 4

---

<sup>1)</sup> В данном разделе курса термин «молекула» используется для обозначения любой частицы — как собственно молекул, так и атомов и свободно движущихся ионов.

и 5 с узкими прорезями (рис. 25.2) повернуты друг относительно друга на некоторый угол  $\varphi$  и приводятся во вращение мотором 6. Молекулярный пучок, пройдя через прорези обоих дисков, попадает в ловушку 7, охлаждаемую жидким азотом. Молекулы осаждаются на стеклянной мишени 8, образуя на ней видимый осадок.

В установке с помощью насоса 9 поддерживается высокий вакуум, чтобы избежать столкновений атомов ртути с молекулами воздуха.

3. Очевидно, что при неподвижных дисках молекулярный пучок на мишень не упадет. Если же диски привести во вращение, то молекулы, обладающие определенной скоростью, смогут пройти через прорезь второго диска. Это произойдет в том случае, когда за время, в течение которого молекулы движутся между обоими дисками, второй диск как раз успеет повернуться на угол  $\varphi$ , так что прорезь окажется на пути молекулярного пучка.

Если диски вращаются с угловой скоростью  $\omega = 2\pi n$  (где  $n$  — частота их вращения), то угол  $\varphi = \omega t = 2\pi n t$ . Но  $t = l/v$ , где  $v$  — скорость молекул. Отсюда  $\varphi = 2\pi n l/v$ , или

$$v = \frac{2\pi n l}{\varphi}. \quad (25.1)$$

Зная угол между прорезями, расстояние между дисками и частоту их вращения, можно вычислить скорость молекул.

Например, если  $l = 40$  см = 0,4 м,  $\varphi = 24^\circ = 24\pi/180$  рад и  $n = 3000$  об/мин = 50 об/с, то скорость молекул

$$v = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 0,4 \cdot 180}{24\pi} \text{ м/с} = 300 \text{ м/с}.$$

4. Заметим, что вследствие конечной ширины прорезей скорость измеряется не точно, а с некоторой погрешностью. Действительно, пусть молекула летит через левый край прорези первого диска. В прорези второго диска она может пройти как через левый, так и через правый край. Но в первом случае система повернется на угол  $\varphi$ , а во втором — на угол  $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$ . Соответственно на мишень попадут как молекулы, которые движутся со скоростью  $v$  (они пройдут через левый край), так и молекулы, движущиеся с меньшей скоростью  $v_1 = 2\pi n l/\varphi_1$  (они пройдут через правый край прорези). Погрешность при измерении скоро-

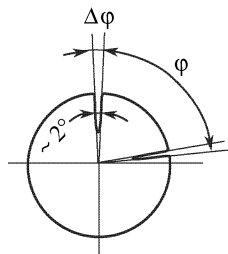


Рис. 25.2



сти равна

$$\Delta v = v - v_1 = \frac{2\pi nl}{\varphi} - \frac{2\pi nl}{\varphi + \Delta\varphi} = \frac{2\pi nl\Delta\varphi}{\varphi(\varphi + \Delta\varphi)} = \frac{v\Delta\varphi}{\varphi + \Delta\varphi}. \quad (25.2)$$

В конкретном примере, который мы рассчитали выше, при  $\Delta\varphi = 2^\circ$  имеем

$$\Delta v = 300 \cdot \frac{2}{26} \text{ м/с} = 23 \text{ м/с}.$$

Итак, в данном опыте мы можем лишь утверждать, что скорость молекул лежит в интервале между 300 и 277 м/с.

Конечно, эту погрешность можно уменьшить, сделав прорези более узкими. Однако принципиально невозможно полностью ликвидировать разброс скоростей, поскольку нельзя сделать щель бесконечно тонкой.

## § 25.2. Распределение молекул по скоростям

1. Если бы все молекулы двигались с одинаковыми скоростями, то при заданном угле между прорезями и заданном расстоянии между дисками все молекулы попали бы в ловушку только при определенной скорости вращения диска. В этом случае при подходящей скорости вращения мишень быстро покроется налетом молекул, а при иных скоростях молекулы на нее не попадут. На самом деле результаты эксперимента оказались совершенно иными. Прежде всего, молекулы проникали в ловушку при разных скоростях вращения дисков. А это свидетельствует о наличии в пучке молекул с различными скоростями. В самом деле, из (25.1) следует, что молекулы, движущиеся с большими скоростями, попадут в ловушку при большей скорости вращения дисков, медленные же молекулы попадут в ловушку при меньших скоростях вращения. Далее, оказалось, что для получения осадка одинаковой толщины при разных скоростях вращения требуется различное время. А это свидетельствует о том, что доля быстрых и медленных молекул в пучке различна.

2. Наиболее трудно в данном эксперименте определить число молекул, движущихся с той или иной скоростью. Из этого затруднения был найден весьма остроумный выход. Опыт показал, что видимый осадок получается при вполне определенном числе сконденсировавшихся молекул. Чем больше число молекул в пучке, тем меньше времени требуется для получения видимого осадка, т. е.  $N_1/N_2 = t_2/t_1$ . Таким образом, в данном эксперименте может быть определено *относительное число молекул*, скорость которых лежит в интервале от  $v$  до  $v + \Delta v$ , т. е. число  $\Delta N / (N \Delta v)$ .

Таблица 25.1

Интервал скоростей, м/с	Относительное число молекул, $\Delta N/(N\Delta v)$	Интервал скоростей, м/с	Относительное число молекул, $\Delta N/(N\Delta v)$	Интервал скоростей, м/с	Относительное число молекул, $\Delta N/(N\Delta v)$
60–90	82	270–300	368	480–510	161
90–120	137	300–330	361	510–540	127
120–150	195	330–360	342	540–600	86
150–180	251	360–390	313	600–660	46
180–210	300	390–420	278	660–720	22
210–240	338	420–450	237	720–840	9
240–270	362	450–480	198		

Результаты одного из экспериментов приведены в табл. 25.1 и на рис. 25.3. Измерения проведены с молекулами некоторого вещества при определенной температуре в «молекулярной печи».

3. Из результатов эксперимента вытекает, что имеется некоторая скорость, с которой движется наибольшее число молекул; в нашем случае она лежит в интервале 270–300 м/с. Эта скорость называется *наиболее вероятной*. Обозначим ее через  $u$ .

Большинство молекул движется со скоростями, близкими к наиболее вероятной; имеется очень мало молекул, скорость которых много больше или много меньше наиболее вероятной скорости.

Распределение молекул по скоростям, полученное экспериментально, хорошо согласуется с теоретическим распределением, которое получил Дж. К. Максвелл

еще в 1860 г., применив к тепловому, хаотическому движению законы теории вероятностей. Полученный им закон называется *максвелловским распределением молекул по скоростям*. Согласование теоретического закона с экспериментальными данными является отличным подтверждением правильности наших представлений о характере молекулярного движения в газах.

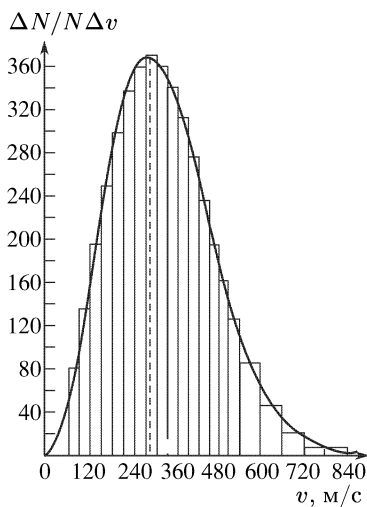


Рис. 25.3

4. Как из опыта, так и из максвелловского распределения можно вычислить наиболее вероятную скорость движения молекул газа. Оказалось, что она зависит от температуры газа и массы его молекул.

Так, для водорода при температуре 0 °С и 100 °С наиболее вероятная скорость равна соответственно 1510 м/с и 1765 м/с. При тех же условиях наиболее вероятная скорость молекул кислорода равна 378 м/с и 442 м/с, т. е. в 4 раза меньше, а скорость атомов в парах ртути — 151 м/с и 176,5 м/с, т. е. в 10 раз меньше, чем скорость молекул водорода.

Как известно, масса молекулы водорода в 16 раз меньше массы молекулы кислорода и в 100 раз меньше массы атома ртути (молекула ртути состоит из одного атома, молекулы же водорода и кислорода — двухатомные). Следовательно, из опыта вытекает, что при заданной температуре газов наиболее вероятные скорости их молекул обратно пропорциональны корням квадратным из их масс:

$$\frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \quad (25.3)$$

Отсюда можно получить

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} = \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (25.4)$$

Итак, *средняя кинетическая энергия молекул не зависит от природы газа, а зависит только от его температуры.*

### § 25.3. Длина свободного пробега молекулы

1. Поскольку при комнатных температурах скорость молекул газа составляет несколько сотен метров в секунду, то на первый взгляд неясно, почему диффузия в газах происходит сравнительно медленно. Например, в комнате запах из одного конца в другой распространяется в течение десятков секунд, а не сотых долей секунды, как этого следовало ожидать. Причина заключается в том, что молекулы очень часто соударяются друг с другом, вследствие чего траектория молекулы представляет собой не прямую линию, а весьма сложную, запутанную ломаную.

Представление о характере этой траектории можно получить, наблюдая в микроскоп за движением броуновской частицы. В 1827 г. Броун с помощью сильной лупы наблюдал за поведением в жидкости мельчайших спор, размером около микрометра. Он обнаружил, что эти частицы находятся в состоянии непрерывного

беспорядочного движения, как бы отплясывая какой-то фантастический танец. В дальнейшем было обнаружено, что *броуновское движение* совершают любые микроскопические частицы как в жидкостях, так и в газах.

2. Как доказали в 1905 г. А. Эйнштейн и М. Смолуховский, броуновские частицы ведут себя как гигантские молекулы, средняя кинетическая энергия которых равна средней кинетической энергии молекул жидкости или газа, окружающих эту частицу. Поэтому характер движения броуновских частиц полностью соответствует характеру движения молекул, но с одной лишь существенной разницей: скорость движения частиц значительно меньше скорости движения молекул. Действительно, из равенства средних значений кинетической энергии частиц и молекул  $\langle K_{\text{част}} \rangle = \langle K_{\text{мол}} \rangle$  следует

$$\frac{M \langle v_{\text{част}}^2 \rangle}{2} = \frac{m \langle v_{\text{мол}}^2 \rangle}{2}, \quad \text{или} \quad \langle v_{\text{част}} \rangle = \langle v_{\text{мол}} \rangle \sqrt{\frac{m}{M}},$$

где угловыми скобками обозначено среднее значение скорости,  $m$  — масса молекулы,  $M$  — масса броуновской частицы. Броуновская частица содержит миллиарды молекул:  $M/m \approx 10^{10}$ ; скорость газовых молекул составляет несколько сотен метров в секунду. Следовательно, скорость броуновских частиц составит несколько миллиметров в секунду, что и наблюдается на практике.

3. Итак, молекула испытывает каждую секунду множество столкновений. Попробуем вычислить *число соударений за секунду и среднюю длину свободного пробега молекулы*.

Предположим, что молекулы газа при столкновении ведут себя как упругие шарики. Для упрощения расчета предположим, что движется только одна молекула, крайняя слева на рис. 25.4, а остальные покоятся. При столкновении двух молекул их центры

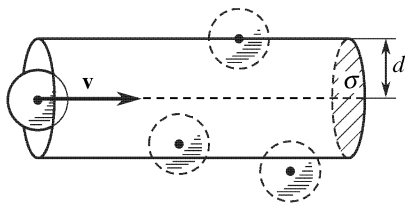


Рис. 25.4

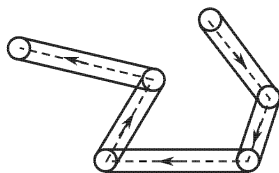


Рис. 25.5

сближаются на расстояние  $d$ , равное диаметру молекулы. Поэтому удобно считать, что движущаяся молекула имеет радиус  $r = d$ , а остальные молекулы являются материальными точками.

При каждом столкновении молекула меняет направление своего движения, так что ее траектория имеет форму запутанной ломаной (рис. 25.5). Для удобства расчета мысленно спрямим эту траекторию, как это изображено на рис. 25.4. Это не может отразиться на расчете числа столкновений, ибо форма траектории здесь не играет никакой роли. Рассматриваемая молекула за время  $t$  пройдет путь  $l = \langle v \rangle t$ , где  $\langle v \rangle$  — средняя скорость. При этом она столкнется со всеми молекулами, центры которых лежат в цилиндре, образующая которого  $l = \langle v \rangle t$ , а площадь основания  $\sigma$  имеет диаметр, равный удвоенному диаметру молекулы. Эта площадь называется *эффективным сечением соударения*.

Число молекул в этом цилиндре  $N = n\sigma l = n\sigma v t$ , где  $n$  — *концентрация молекул*, т. е. число молекул в единице объема. За секунду молекула испытывает  $z$  столкновений:

$$z = \frac{N}{t} = n\sigma \langle v \rangle. \quad (25.5)$$

4. Если бы молекула двигалась в вакууме, не испытывая соударений, то она за секунду прошла бы расстояние, численно равное ее скорости. На самом же деле она за секунду испытывает  $z$  столкновений. Следовательно, *средняя длина свободного пробега*

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{z} = \frac{1}{n\sigma}. \quad (25.6)$$

Этот расчет является довольно приближенным, так как при выводе мы сделали ряд искусственных допущений. Однако строгая теория, учитывающая движение всех молекул, дает результат, отличающийся от полученного нами на 30–40 %, что в данном случае не очень существенно, ибо нас интересуют здесь не точные значения величин, а лишь их порядок.

5. Существует несколько методов, позволяющих экспериментально определить длину свободного пробега. Оказалось, что при нормальном атмосферном давлении длина свободного пробега молекулы газа составляет около  $0,1 \text{ мкм} = 10^{-7} \text{ м}$ ; концентрация же молекул газа при этих условиях  $n \approx 10^{25} \text{ м}^{-3}$ . Отсюда можно найти эффективное сечение соударения:

$$\sigma = \frac{1}{n\lambda} \approx \frac{1}{10^{-7} \cdot 10^{25}} = 10^{-18} \text{ м}^2.$$

Поскольку  $\sigma = \pi d^2$ , где  $d$  — эффективный диаметр молекулы, то

$$d = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \approx 10^{-9} \text{ м}.$$

Полученный результат по порядку хорошо согласуется с числовыми значениями для размеров молекул, которые получены другими способами.

### § 25.4. Диффузия

1. *Диффузией* называется процесс выравнивания концентраций двух веществ при их смешении друг с другом. Диффузия происходит как в газах, так и в жидкостях и твердых телах.

Для наблюдения диффузии в газах можно поставить следующий эксперимент. Толстостенный стальной цилиндр разделен перегородкой с клапаном на две части (рис. 25.6). Нижняя половина цилиндра заполняется кислородом, верхняя — водородом. В боковых стенках имеются запальные свечи, между электродами которых может создаваться искра. В начале эксперимента искра не вызывает взрыва, так как кислород отделен от водорода. Если же открыть клапан, то через некоторое время газы перемешаются и искра вызовет взрыв возникшей при этом смеси — гремучего газа. Заметим, что при диффузии более тяжелый кислород поднимался вверх, а водород, который легче кислорода в 16 раз, опускался вниз. Следовательно, газы двигались вопреки действию поля силы тяжести.

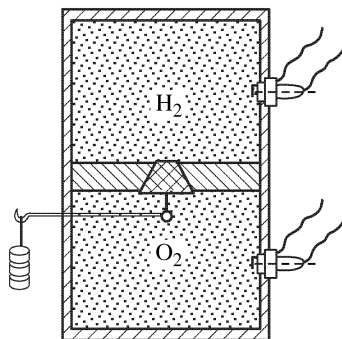


Рис. 25.6

Это явление естественно объясняется на основе молекулярно-кинетической теории. Дело в том, что молекулы обоих газов, двигаясь беспорядочно и сталкиваясь друг с другом, перемешиваются. Постепенно возникает смесь двух газов с одинаковой концентрацией обоих сортов молекул.

2. Заметим, что именно благодаря диффузии окружающая нас атмосфера (по крайней мере, ее нижний слой — тропосфера) представляет собой однородную смесь азота, кислорода, углекислого газа и небольшой примеси инертных газов и паров воды. При отсутствии диффузии произошло бы расслоение атмосферы под действием поля силы тяжести: внизу оказался бы слой наиболее тяжелого углекислого газа, над ним — кислород, а еще выше — азот и инертные газы.

3. Так как с ростом температуры возрастают скорости движения молекул, то при этом ускоряется и процесс диффузии, что и наблюдается на практике. Всем известно, что в горячей воде соль или сахар растворяются значительно быстрее, чем в холодной, — а это и означает ускорение процесса диффузии с ростом температуры. Аналогичные явления наблюдаются и в газах, и в твердых телах.

### § 25.5. Закон диффузии

1. Попытаемся выяснить более глубоко механизм диффузии в газах, а заодно определить, от чего зависит масса вещества, переносимого в процессе диффузии. Для простоты рассуждений рассмотрим процесс *самодиффузии* — случай, когда сосуд заполнен одним газом, но концентрация молекул в разных частях сосуда различна.

Пусть, например, сосуд представляет собой трубу, в левой части которой поддерживается избыточная концентрация, а в правой — некоторое разрежение (рис. 25.7). Концентрация молекул  $n$

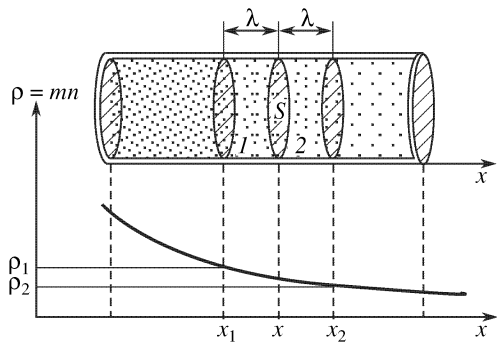


Рис. 25.7

и пропорциональная ей плотность газа  $r = m_0 n$  убывают по направлению оси абсцисс. Выделим мысленно в трубе некоторую площадку  $S$  и подсчитаем массу  $\Delta m$  вещества, которая переносится через единицу площадки в единицу времени, т. е. величину  $\Delta m / (S \Delta t)$ .

2. Через площадку могут пройти только те молекулы, которые отстоят от нее на расстоянии, не превышающем длину свободного пробега, т. е. молекулы, находящиеся в слоях 1 и 2 на рис. 25.7. Но так как молекулы движутся совершенно беспорядочно и для них все направления в пространстве одинаковы, то в среднем в заданном направлении движется лишь одна шестая часть всех молекул:  $N/6$  вдоль положительного направления оси абсцисс,  $N/6$  вдоль ее отрицательного направления и т. д.

В объеме 1 находится  $N_1 = n_1 S \lambda$  молекул; из них через площадку  $S$  пройдет одна шестая часть, т. е.  $N_1/6 = n_1 S \lambda/6$ .

Соответственно из объема 2 через площадку  $S$  пройдет  $N_2/6 = n_2 S \lambda / 6$  молекул. В результате через площадку за время  $\Delta t$  продиффундирует молекул  $\Delta N = S \lambda (n_1 - n_2) / 6$ . Умножив обе части равенства на массу одной молекулы  $m_0$  и учитывая, что  $m_0 \Delta N = \Delta m$ , а  $m_0(n_1 - n_2) = m_0 n_1 - m_0 n_2 = \rho_1 - \rho_2 = -\Delta \rho$ , получим

$$\Delta m = -\frac{1}{6} S \lambda \Delta \rho. \quad (25.7)$$

3. Преобразуем несколько это равенство. Величина  $\frac{\Delta \rho}{\Delta x} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{x_2 - x_1}$ , характеризующая скорость изменения плотности газа вдоль оси абсцисс, называется *градиентом плотности*. Дробь  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\lambda}{\Delta t} = 2v$  равна удвоенной средней скорости движения молекул. Учитывая это, перепишем (25.7) так:

$$\Delta m = -\frac{1}{6} S \lambda \Delta \rho = -\frac{1}{6} S \lambda \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta t = -\frac{1}{3} \lambda v \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S \Delta t.$$

Итак, масса вещества, переносимого вследствие диффузии, равна

$$\Delta m = -\frac{1}{3} \lambda v \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S \Delta t, \quad (25.8)$$

или

$$\Delta m = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S \Delta t, \quad (25.9)$$

т. е. *масса продиффундировавшего вещества пропорциональна градиенту плотности, площади сечения трубы и времени*. Это и есть закон диффузии.

4. Коэффициент

$$D = \frac{1}{3} \lambda v \quad (25.10)$$

называется *коэффициентом диффузии*. Зная коэффициент диффузии и среднюю скорость движения молекул, можно вычислить длину свободного пробега молекулы.

## § 25.6. Разделение газовых смесей

1. Довольно интересные явления наблюдаются при диффузии газов через пористую перегородку. Для ознакомления с этим явлением сделаем следующий опыт (рис. 25.8). Пористый сосуд из необожженной глины соединим резиновой трубкой с водяным манометром. Накроем сосуд небольшим химическим стаканом и введем в стакан водород — газ, молекулы которого имеют гораздо меньшую массу, чем молекулы азота или кислорода, из



которых состоит воздух. Мы заметим, что уровень жидкости в манометре сместится и покажет, что давление внутри пористого сосуда стало больше атмосферного.

Это явление можно объяснить следующим образом. Через стенки пористого сосуда диффундирует как воздух, так и водород. Воздух выходит из сосуда, водород же проникает внутрь.

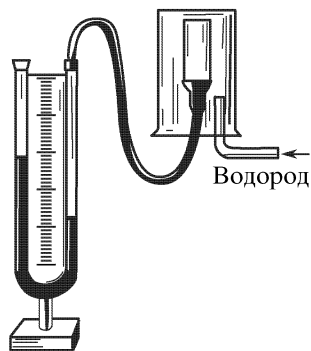


Рис. 25.8

Однако скорость диффузии у них различна. Поскольку масса молекулы водорода примерно в 16 раз меньше массы молекулы кислорода и в 14 раз — молекулы азота, то скорость движения молекул водорода и соответственно его коэффициент диффузии примерно в 4 раза больше, чем коэффициент диффузии воздуха. В результате в пористый сосуд проникает гораздо больше водорода, чем из него выходит воздуха, и давление внутри этого сосуда возрастает.

Исходя из этих соображений, мы можем предугадать, что если пористый сосуд опустить в более тяжелый газ, например в углекислый, то скорость диффузии воздуха из него будет значительно больше скорости диффузии углекислого газа в пористый сосуд. В результате давление газа внутри пористого сосуда станет меньше атмосферного, что и покажет манометр. Опыт подтверждает это предположение.

2. Описанное явление может быть использовано для разделения газовых смесей. Представим себе сосуд, разделенный пополам пористой перегородкой (рис. 25.9). В левую половину сосуда нагнетается газовая смесь, состоящая из двух компонент. Поскольку легкая компонента быстрее диффундирует через пористую перегородку, чем тяжелая, то на выходе из прибора мы получим уже новые газовые смеси, из которых одна обогащена легкой компонентой, а вторая — более тяжелой. Пропустив интересующую нас смесь через большое число камер, можно добиться практически полного отделения одной компоненты от другой.

3. Почти все химические элементы представляют собой смесь *изотопов*, т.е. атомов, которые обладают совершенно одинаковыми химическими свойствами, но различаются атомной массой.

Так, природный водород состоит из 99,985 % легкого изотопа (протия) и из 0,015 % тяжелого изотопа (дейтерия); массы их атомов относятся примерно как 1 : 2 (точнее — 1,008142 : 2,014735).

Искусственно можно получить и сверхтяжелый изотоп водорода (тритий), масса этого атома примерно в 3 раза больше массы атома протия. Природный уран состоит в основном из двух изотопов, массы атомов которых относятся примерно как 235 : 238; легкий изотоп составляет 0,715 %, тяжелый — 99,28 % всей массы урана, оставшиеся 0,005 % составляют другие изотопы.

Разделение изотопов химическими методами невозможно, ибо их химические свойства совершенно одинаковы. Поэтому для их разделения нужно использовать физические явления, ход которых зависит от массы атомов.

Одним из важнейших способов разделения изотопов является диффузионный метод, описанный выше.

Так, для некоторых типов ядерных реакторов необходим обогащенный уран, содержащий до 80 % легкого изотопа. Для его получения используется газ — шестифтористый уран ( $\text{UF}_6$ ), который прогоняется насосами через систему из нескольких сотен или даже тысяч диффузионных камер (в зависимости от нужной степени обогащения). В результате установка для диффузионного разделения изотопов урана представляет собой огромное и дорогостоящее сооружение.

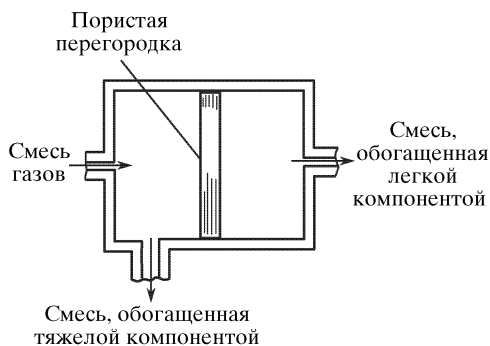


Рис. 25.9

## Глава 26

### ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

#### § 26.1. Давление газа

1. Опыт показывает, что газ, заключенный в некоторый сосуд, производит давление на его стенки. Это явление объясняется на основе молекулярно-кинетической теории следующим образом. Молекулы, двигаясь совершенно беспорядочно, ударяются о стенки сосуда. Суммарный импульс, который молекулы передают

за единицу времени единице площади, — это и есть давление, производимое газом.

Для вычисления давления воспользуемся формулой (17.17), с помощью которой описывается давление потока частиц, упруго соударяющихся со стенкой (см. § 17.5):

$$p = 2nm_0v^2, \quad (26.1)$$

где  $n$  — концентрация частиц. Однако в это выражение нужно внести две существенные поправки. В § 17.5 мы рассматривали поток частиц, в котором все они движутся в одном направлении с одной и той же скоростью. Молекулы идеального газа движутся беспорядочно во всевозможных направлениях, а скорость молекул, согласно распределению Максвелла, различна. Поэтому вместо квадрата скорости нужно в формулу (26.1) ввести *среднюю величину квадрата скорости*:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{N} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2). \quad (26.2)$$

Корень квадратный из среднего значения квадрата скорости  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$  называется *средней квадратичной скоростью*.

Соответственно нужно в (26.1) вместо концентрации  $n$  ввести одну шестую концентрации,  $n/6$ . Действительно, вследствие полной хаотичности молекулярного движения и огромного числа молекул в единице объема можно утверждать, что в любом направлении движется одна шестая часть всех молекул.

2. Таким образом, *давление газа пропорционально концентрации молекул и их средней кинетической энергии*:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2}. \quad (26.3)$$

Выражению (26.3) можно придать другую форму, учитывая, что концентрация молекул  $n = N/V$ , где  $N$  — полное число молекул в сосуде объемом  $V$ :

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2}. \quad (26.4)$$

3. Как показывает опыт, средняя кинетическая энергия молекул не зависит от сорта газа, а определяется только его температурой (см. § 25.2). Следовательно, при *изотермическом процессе* (т. е. процессе, происходящем при неизменной температуре) средняя кинетическая энергия молекул является постоянной величиной. Но тогда из (26.3) вытекает, что и произведение давления

газа на его объем является при этом условии постоянной величиной. Итак, мы получили следующий важный результат.

При неизменной температуре ( $m_0 \langle v^2 \rangle / 2 = \text{const}$ ) и неизменной массе газа ( $N = \text{const}$ ) произведение его давления на объем является постоянной величиной (закон Бойля–Мариотта),

$$pV = \text{const.} \quad (26.5)$$

4. Закон этот часто формулируется и так: при изотермическом процессе давление газа обратно пропорционально его объему (при неизменной массе газа).

Графиком изотермы на осях  $p$ – $V$  является гипербола (рис. 26.1). Для одной и той же массы газа разные кривые соответствуют различным температурам.

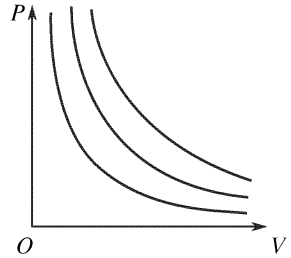


Рис. 26.1

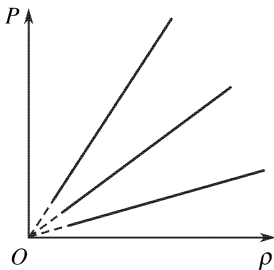


Рис. 26.2

5. Объем равен частному от деления массы на плотность:  $V = m/\rho$ . Подставив это выражение в (26.5) и учитывая, что мы полагаем массу газа величиной постоянной, получим

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (26.6)$$

Итак, закон Бойля–Мариотта можно сформулировать еще и следующим образом: при постоянной температуре и неизменной массе газа его давление прямо пропорционально плотности.

График этой зависимости изображен на рис. 26.2. Наклон графика зависит от температуры газа.

## § 26.2. Идеальный газ

1. Закон Бойля–Мариотта неоднократно проверялся на опыте. Оказалось, что при давлениях, не превосходящих нескольких мегапаскаль, и при сравнительно высоких температурах (порядка комнатных и выше) он выполняется довольно хорошо. Отступления результатов эксперимента от теоретических расчетов не превосходят 1–3 %. Однако при давлениях порядка 5–10 МПа и выше экспериментальные значения произведения  $pV$  уже значительно отличаются от теоретических.

В табл. 26.1 и на рис. 26.3 приведены некоторые данные по сжатию трех различных газов при неизменной температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , начальном давлении  $p_0 = 101\,325\text{ Па}$  и одинаковом начальном объеме  $V_0 = 22,41\text{ м}^3$ .

Таблица 26.1

Кислород			Водород			Гелий		
$p$ , МПа	$V$ , м <sup>3</sup>	$\frac{pV}{p_0 V_0}$	$p$ , МПа	$V$ , м <sup>3</sup>	$\frac{pV}{p_0 V_0}$	$p$ , МПа	$V$ , м <sup>3</sup>	$\frac{pV}{p_0 V_0}$
1,020	2,20	0,988	1,020	2,24	1,006	1,017	2,240	1,003
5,208	0,408	0,936	5,252	0,448	1,04	5,178	0,448	1,02
10,74	0,187	0,884	10,94	0,224	1,08	10,64	0,224	1,05

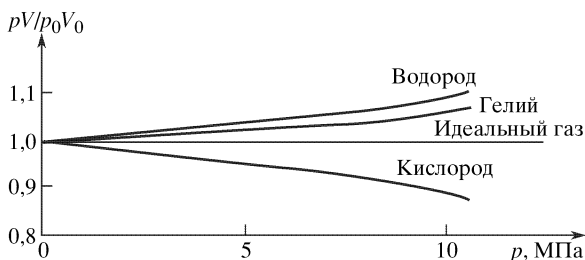


Рис. 26.3

2. Из анализа результатов эксперимента следует, что при давлениях, не превосходящих нескольких мегапаскаль, соотношение между давлением и объемом газа выражается законом Бойля–Мариотта. Целесообразно не учитывать при этих условиях незначительные отклонения экспериментальных данных от теоретического значения  $pV = \text{const}$  и ввести понятие о некотором *идеальном газе*, который точно следует закону Бойля–Мариотта.

*Идеальным газом называется газ, у которого при изотермическом процессе давление в точности обратно пропорционально его объему* (при неизменной массе).

Понятие идеального газа является идеализацией, аналогично тому как идеализациями являются понятия материальной точки, точечного заряда и т. п. Однако в ряде случаев использование подобных идеализаций весьма целесообразно, ибо позволяет существенно упростить решение задачи без заметного ущерба для точности ее решения.

3. Попытаемся выяснить, какова же молекулярная структура идеального газа. Для этой цели сравним плотность газа с плотностью жидкости (или твердого тела) при одном и том же давлении и температуре.

При нормальном атмосферном давлении и температуре  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  плотность воды равна  $958,4\text{ кг/м}^3$ , а водяного пара  $0,598\text{ кг/м}^3$ , т.е. в 1600 раз меньше. Но плотность есть произведение массы молекулы на концентрацию молекул:  $\rho = m_0 n$ . Следовательно, в единице объема воды в 1600 раз больше молекул, чем в единице объема водяного пара.

Так как объем пропорционален кубу линейных размеров, то расстояние между молекулами пара в  $\sqrt[3]{1600} \approx 12$  раз больше, чем расстояние между молекулами воды при тех же условиях. Аналогичный расчет для других веществ приводит к такому же результату: *расстояние между молекулами в газах в десятки раз больше, чем в жидкостях или твердых телах* (при не очень больших давлениях).

4. Ниже будет показано, что молекулярные силы меняются очень быстро с расстоянием; например, силы молекулярного притяжения обратно пропорциональны *седьмой степени* расстояния (см. § 31.4). Следовательно, *в газах силы взаимодействия между молекулами* (при не очень больших давлениях) *в десятки миллионов раз меньше, чем в жидкостях и твердых телах*. А это означает, что при этих условиях можно вообще пренебречь силами молекулярного взаимодействия.

Тем самым оправдано то неявное допущение, которое мы фактически сделали при выводе формулы (26.3), когда учитывалось только взаимодействие между молекулами газа и стенками сосуда, но не учитывалось взаимодействие между самими молекулами. Следовательно, закон Бойля–Мариотта будет выполняться, если в газе не играют заметной роли силы молекулярного взаимодействия. Заметим, что в этом случае не учитываются также и размеры молекул, поскольку суммарный объем молекул (рассчитанный, например, по их эффективному размеру) оказывается много меньше объема сосуда.

Итак, с молекулярной точки зрения *идеальный газ представляет собой систему молекул, которые друг с другом не взаимодействуют и которые в первом приближении можно считать материальными точками*.

## § 26.3. Температура

1. Понятие температуры возникло вначале из ощущений «горячее» и «холодное». Однако такой критерий весьма субъективен, поскольку наши ощущения зависят не только от состояния среды, но и от состояния нашего организма. Так, если в одну и ту же

комнату войдут два человека, один после горячей ванны, а второй с мороза, то первому будет холодно, а второму тепло.

Необходимо найти объективный критерий для характеристики температуры, а также установить однозначный способ измерения этой величины.

2. С точки зрения термодинамики *температура является величиной, характеризующей направление теплообмена*. Действительно, как показывает опыт, теплообмен происходит всегда таким образом, что энергия в форме тепла передается только от нагретых тел к холодным.

Для иллюстрации этого явления рассмотрим следующий эксперимент. В сосуд, содержащий некоторое количество воды, опустим горячий кусок железа. Спустя некоторое время мы заметим, что температуры обоих тел сравнялись — вода и железо на ощупь будут одинаково теплыми. Но железо при этом охладилось и его внутренняя энергия соответственно уменьшилась; вода же нагрелась, следовательно, ее внутренняя энергия возросла.

3. По определению (см. § 21.3) количеством теплоты называется энергия, переданная путем теплообмена. Следовательно, при контакте двух тел с различной температурой *количество теплоты передается от тела с более высокой температурой к телу с более низкой температурой*.

Равенство температур определяется следующим условием: *температуры двух тел равны, если между ними не происходит теплообмена*.

Это необходимо учитывать при измерении температуры. Термометр фактически регистрирует всегда свою собственную температуру; поэтому для правильного измерения температуры некоторого тела следует термометр привести в контакт с телом и выждать, пока показания термометра не окажутся стабильными. Это и будет означать, что теплообмен между телом и термометром прекратился и температура у них одинаковая.

4. С точки зрения молекулярно-кинетических представлений *температура есть величина, характеризующая среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул идеального газа*. Это определение имеет смысл, поскольку опыт показывает, что при одинаковой температуре средние кинетические энергии молекул различных газов совпадают (см. § 25.2).

Учитывая термодинамический смысл температуры, мы можем свести измерение температуры любого тела к измерению средней кинетической энергии молекул идеального газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия с данным телом. Однако измерение скоростей (или кинетических энергий)

молекул связано со значительными трудностями. Поэтому на практике измеряют не кинетическую энергию молекул, а некоторую другую величину, пропорциональную ей, например давление газа.

#### § 26.4. Термодинамическая температура и уравнение состояния идеального газа

1. Определим *термодинамическую температуру* как физическую величину, *пропорциональную средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа*<sup>1)</sup>. В соответствии с этим определением и законами классической молекулярной теории зависимость между температурой и средней кинетической энергией молекул такого газа имеет вид

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (26.7)$$

Здесь  $\langle \varepsilon_k \rangle$  — средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул,  $T$  — термодинамическая температура и  $k$  — коэффициент пропорциональности, который называется *постоянной Больцмана* (см. § 26.8).

Для того чтобы можно было пользоваться сформулированным выше понятием термодинамической температуры, следует прежде всего установить метод измерения этой величины; затем следует установить единицу измерения и, наконец, определить нулевой уровень температуры. Это будет сделано в следующих параграфах.

2. Как было показано, средняя кинетическая энергия молекул идеального газа может быть выражена через давление газа и концентрацию его молекул (см. (26.3)):

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} \frac{p}{n}. \quad (26.8)$$

Из (26.7) и (26.8) следует

$$p = nkT, \quad (26.9)$$

т. е. *давление идеального газа пропорционально его термодинамической температуре и концентрации молекул.*

<sup>1)</sup> До недавнего времени вместо термина «термодинамическая температура» использовался термин «абсолютная температура».



3. Учитывая, что  $n = N/V$ , получим

$$\frac{pV}{T} = Nk = \text{const}, \quad (26.10)$$

или

$$pV = NkT. \quad (26.11)$$

Данное уравнение называется *уравнением газового состояния*. Оно формулируется так:

*При неизменной массе газа (т. е. при неизменном числе молекул  $N$ ) произведение его давления на объем пропорционально его термодинамической температуре.*

### § 26.5. Газовый термометр

1. Прибором для измерения термодинамической температуры служит *газовый термометр* (рис. 26.4). Он представляет собой баллон 1, который заполнен газом (обычно водородом); с помощью трубки 2 с расширением и резинового шланга 3 сосуд соединяется с манометрической трубкой 4. Сосуд с водородом приводится в контакт с телом, температуру которого нужно измерить. Поднимая либо опуская манометрическую трубку, мы доводим уровень ртути в расширении 2 до заданной метки, так что измерение давления производится при неизменном объеме газа.

2. Температуры двух тел сравниваются следующим образом. Приведем газовый термометр вначале в состояние термодинамического равновесия с первым телом, а затем — со вторым, каждый раз измеряя при этом давление по высоте столбика ртути. Тогда на основании уравнения газового состояния (26.11) при условии постоянства объема газа мы делаем вывод, что

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (26.12)$$

Там самым измерение температуры сведено к измерению давления газа.

На практике, естественно, температуру измеряют не газовым термометром, а другими приборами — ртутными или спиртовыми термометрами, термометрами сопротивлений, термопарами и т. п. Однако все эти

приборы градуируются с помощью газового термометра, который служит, таким образом, эталонным прибором.

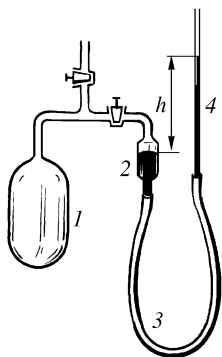


Рис. 26.4

3. Выбор в качестве термометрического тела именно водорода, а не какого-либо иного газа неслучаен. Оказывается, что показания водородного термометра точнее, чем газового термометра, баллон которого заполнен любым другим газом. Они ближе всего к показаниям, которые дал бы газовый термометр с идеальным газом.

Таблица 26.2

Газ	$\delta = \frac{\Delta p}{p_{ид}}$
Кислород	0,00073
Водород	0,00012
Гелий	0,00018

В табл. 26.2 показаны ошибки, которые дают газовые термометры при измерении температуры кипящей воды. Относительная ошибка

$$\delta = \frac{\Delta p}{p_{ид}} = \frac{p - p_{ид}}{p_{ид}},$$

где  $p_{ид}$  — показания газового термометра с идеальным газом,  $p$  — показания газового термометра, заполненного соответствующим газом. Мы видим, что отклонения эти вообще очень малы, они составляют сотые доли процента. При этом показания водородного термометра в полтора раза точнее, чем гелиевого, и в шесть раз точнее, чем при заполнении баллона кислородом (или воздухом).

## § 26.6. Кельвин и градус Цельсия

1. За единицу термодинамической температуры принимается *кельвин* (К), который в СИ определяется как  $1/273,16$  часть термодинамической температуры тройной точки воды (см. § 36.6). На практике за единицу температуры принимается *градус Цельсия* ( $^{\circ}\text{C}$ ). Градус Цельсия и кельвин равны:

$$1^{\circ}\text{C} = 1\text{ K} = \frac{T_{\text{кип}} - T_{\text{пл}}}{100}. \quad (26.13)$$

Ранее градус Цельсия определялся как одна сотая температурного интервала между точкой таяния льда и точкой кипения дистиллированной воды при нормальном давлении  $p_0 = 101\,325\text{ Па}$ .

На этой основе можно экспериментально определить значения термодинамической температуры точек плавления льда и кипения воды. Действительно, из (26.12) следует

$$\frac{T_{\text{кип}}}{T_{\text{пл}}} = \frac{p_{\text{кип}}}{p_{\text{пл}}}, \quad (26.14)$$

где  $p_{\text{пл}}$  — давление, регистрируемое газовым термометром, погруженным в смесь воды и тающего льда,  $p_{\text{кип}}$  — давление, регистрируемое тем же газовым термометром, погруженным в кипящую воду. Из опыта следует:  $p_{\text{кип}}/p_{\text{пл}} = 1,3661$ . Подставив в (26.14) и учитывая (26.13), получим

$$T_0 = T_{\text{пл}} = 273,15\text{ К}; \quad T_{\text{кип}} = 373,15\text{ К}. \quad (26.15)$$

2. Для практических измерений температуры используется Международная практическая температурная шкала (МПТШ-

68), основанная на системе хорошо воспроизводимых основных реперных (постоянных) точек. Некоторые из них приведены в табл. 26.3.

Таблица 26.3

Состояние равновесия (при $p_0 = 101\,325$ Па)	Температура	
	К	°C
Точка кипения водорода	20,28	−252,87
Точка кипения неона	27,102	−246,048
Точка кипения кислорода	90,188	−182,962
Тройная точка воды	273,16	0,01
Точка кипения воды	373,15	100
Точка затвердевания цинка	692,73	419,58
Точка затвердевания серебра	1235,08	961,93
Точка затвердевания золота	1337,58	1064,43

По данным реперным точкам можно проградуировать газовый термометр. Формулу (26.12) запишем так:

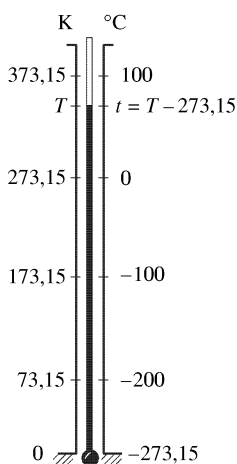


Рис. 26.5

$$T = \frac{373,15h}{h_{\text{кип}}},$$

где  $h$  — высота столбика ртути в манометрической трубке газового термометра при измеряемой температуре, а  $h_{\text{кип}}$  — высота того же столбика ртути при точке кипения воды; эта величина определяется для каждого термометра опытным путем. Тем самым осуществлена градуировка газового термометра — по высоте столбика ртути в манометрической трубке можно сразу вычислить термодинамическую температуру.

3. Как уже говорилось, градус и кельвин по размеру равны. Сдвинут лишь уровень отсчета температур. Соотношение между температурами в обеих шкалах изображено на рис. 26.5. Нетрудно убедиться, что

$$t = T - 273,15, \quad (26.16)$$

где  $t$  — температура по МПТШ-68,  $T$  — термодинамическая температура.

Для расчетов с точностью 0,055 % можно положить, что

$$t = T - 273.$$

### § 26.7. Абсолютный нуль

1. Нулевой уровень температуры по термодинамической шкале называется абсолютным нулем. Ему соответствует температура  $-273,15^\circ\text{C}$  по Международной практической температурной шкале.

Абсолютный нуль — это предельно низкая температура. Ни при каком эксперименте невозможно получить температуру, равную абсолютному нулю. Тем более невозможно получить температуру, меньшую абсолютного нуля.

Получение низких температур, близких к абсолютному нулю, представляет большой интерес, поскольку при таких температурах свойства вещества существенно изменяются. Возникает ряд интересных явлений, таких, как сверхтекучесть гелия (см. § 36.12), сверхпроводимость и т. д. (см. § 75.10). В настоящее время с помощью очень сложных методов, которые здесь не могут быть рассмотрены, удалось достичь температур лишь на  $0,0001\text{ K}$  выше абсолютного нуля.

2. Следует отметить, что при температурах, близких к абсолютному нулю, средняя кинетическая энергия молекул уже не пропорциональна термодинамической температуре. Это следует из того факта, что при температурах, близких к абсолютному нулю, начинают сказываться квантовые свойства молекул. В частности, при понижении температуры средняя энергия молекул стремится не к нулю, как это можно было бы подумать согласно (26.7), а к минимальной энергии локализованной частицы, выражаемой формулой (16.26). Абсолютный нуль является температурой, которой соответствует минимальная внутренняя энергия системы.

Итак, при низких температурах возникает *вырождение газа* — соотношение (26.8) оказывается несправедливым. Температуру *вырождения* можно оценить из соотношения

$$\frac{3}{2} kT \geq \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m_0},$$

откуда следует

$$T_{\text{выр}} = \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{3km_0}. \quad (26.17)$$

Так, для гелия при концентрации  $n \approx 10^{25}\text{ м}^{-3}$  имеем

$$T_{\text{выр}} = \frac{10^{-68} \cdot 10^{50/3}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 0,7 \cdot 10^{-26}}\text{ K} \approx 2 \cdot 10^{-3}\text{ K}.$$

Мы видим, что температура вырождения молекулярного газа очень низка, так что использование модели классического идеаль-

ного газа даже при весьма низких температурах оправдано. Для жидкого гелия ( $n \approx 10^{28} \text{ м}^{-3}$ ) температура вырождения

$$T_{\text{выр}}^{\text{жидк}} \approx 10^2 T_{\text{выр}}^{\text{газ}} \approx 0,2 \text{ К.}$$

Однако электронный газ в металлах оказывается вырожденным при любых, даже очень высоких температурах (см. § 75.5), и его свойства существенно отличаются от свойств обычного идеального газа.

3. Итак, при температурах, близких к абсолютному нулю, средняя кинетическая энергия молекул уже не пропорциональна термодинамической температуре, а выражается значительно более сложной функцией. График этой функции показан на рис. 26.6 сплошной линией, экстраполяция для классического идеального газа — штриховой линией.

Поэтому принципиально неверно утверждение, встречающееся иногда в популярной литературе, будто бы при абсолютном нуле прекращается молекулярное движение. Как доказано в настоящее время, молекулярное движение даже при абсолютном

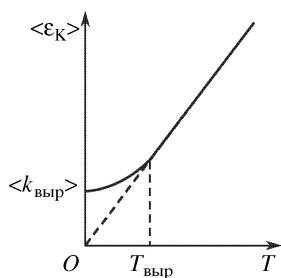


Рис. 26.6

нулю не прекращается — молекулы совершают так называемые *нулевые колебания*. Нулевым колебаниям соответствует *нулевая энергия* — минимальная энергия, которой могут обладать молекулы данного вещества и которая не может быть отнята от тела ни при каком охлаждении, вплоть до абсолютного нуля (см. § 70.5). Наличие нулевых колебаний обнаруживается по рассеянию света в веществе при температурах, близких к абсолютному нулю.

При абсолютном нуле теряет смысл понятие идеального газа. Поэтому неверным является встречающееся иногда утверждение, что при абсолютном нуле давление идеального газа якобы равно нулю. Такая экстраполяция формулы (26.9) незаконна. Эта формула имеет смысл только при температурах, далеких от абсолютного нуля, именно при температурах, много больших температуры вырождения.

## § 26.8. Постоянная Авогадро и постоянная Больцмана

1. Из выражения (26.9) можно получить ряд интересных следствий. Прежде всего из него следует, что при одинаковых условиях (т. е. при одинаковых давлениях и температурах) concentra-

ция молекул у различных газов одна и та же. Иными словами, *в единице объема различных газов при одинаковых условиях содержится одинаковое число молекул (закон Авогадро)*.

Для вычисления концентрации молекул следует знать постоянную Больцмана. Имеется ряд методов измерения этой величины (см., например, § 28.12). В настоящее время ее измерили с точностью до 0,0032 %:

$$k = (1,380622 \pm 0,000044) \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

Зная постоянную Больцмана, вычислим число молекул в  $1 \text{ м}^3$  газа при нормальных условиях ( $T_0 = 273,15 \text{ К}$ ,  $p_0 = 101\,325 \text{ Па}$ ):

$$N_L = n_0 = \frac{p_0}{kT_0} = \frac{101\,325}{1,38062 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} \text{ м}^{-3} = 2,68675 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Эта величина называется *постоянной Лошмидта*.

2. Зная плотность газа при нормальных условиях, можно вычислить массу одной его молекулы, учитывая, что плотность есть произведение массы одной молекулы на концентрацию молекул. Итак,

$$m_0 = \frac{\rho_0}{n_0} = \frac{\rho_0}{2,68675 \cdot 10^{25}}.$$

Так, плотность водорода при нормальных условиях  $\rho_0 = 0,0899 \text{ кг/м}^3$ , кислорода  $1,4291 \text{ кг/м}^3$ , гелия  $0,1785 \text{ кг/м}^3$ . Тогда масса молекулы водорода равна  $3,345 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ , масса молекулы кислорода  $53,145 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ , масса атома гелия  $6,643 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ .

3. Решением XIV Генеральной конференции по мерам и весам, которая состоялась в октябре 1971 г. в Париже, в Международную систему единиц введена еще одна основная величина — *количество вещества*. Под количеством вещества следует понимать число специфических структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т. п.), из которых состоит это вещество.

Так как массы отдельных структурных элементов (например, молекул) отличаются друг от друга, то одинаковые количества вещества имеют разную массу. Например,  $10^{25}$  молекул водорода и  $10^{25}$  молекул кислорода считаются одинаковыми количествами вещества, хотя они имеют разные массы, соответственно равные 33,45 и 531,45 г. Таким образом, решением XIV Генеральной конференции окончательно вносится ясность в вопрос о том, что *масса не является мерой количества вещества*.

Единицей количества вещества установлен *моль* (моль) — это количество вещества системы, содержащей столько же специфиче-

ческих структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т. п.), сколько содержится атомов в массе 0,012 кг изотопа углерода  $^{12}\text{C}$ .

Кроме моля разрешены к употреблению кратные и дольные от него единицы, в частности *киломоль*: 1 кмоль =  $10^3$  моль. Мы в дальнейшем будем вести все расчеты в основном на 1 кмоль.

4. Число структурных элементов, содержащихся в одном моле (или киломоле) вещества, называется *постоянной Авогадро*:

$$N_A = (6,022045 \pm 0,000031) \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} = 6,022045 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}.$$

Зная постоянную Авогадро и постоянную Лошмидта, можно найти объем моля газа (*молярный объем*) при нормальных условиях:

$$V_m = \frac{N_A}{N_L} = 22,41383 \pm 0,00070 \text{ м}^3/\text{кмоль}.$$

Здесь и далее индекс « $m$ » внизу означает, что данная величина рассчитана на моль или киломоль.

Масса одного моля (*молярная масса*)

$$M = \rho_0 V_m = m_0 N_A,$$

где  $\rho_0$  — плотность вещества при нормальных условиях,  $m_0$  — масса структурной единицы (молекулы, атома, иона и т. п.).

Вводятся еще две безразмерные величины: *относительная атомная масса* элемента  $A_r$  и *относительная молекулярная масса* вещества  $M_r$ , определяемые как отношение средней массы атома (или молекулы) природной смеси изотопов вещества к  $1/12$  массы атома изотопа  $^{12}\text{C}$ :

$$M_r = \frac{m_0}{1,6603 \cdot 10^{-27} \text{ кг}}.$$

Заметим, что относительная молекулярная масса численно равна массе киломоля.

5. Произведение постоянной Авогадро на постоянную Больцмана называется *универсальной* или *молярной газовой постоянной*:

$$R = N_A k = (8,31441 \pm 0,00026) \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кмоль} \cdot \text{К}).$$

С помощью этой величины уравнение газового состояния (26.10) преобразуется следующим образом:

$$p = nkT = \frac{n}{N_A} N_A kT = \frac{nm_0}{N_A m_0} RT = \frac{\rho RT}{M}.$$

Итак, уравнение газового состояния примет вид

$$p = \frac{\rho RT}{M}. \quad (26.18)$$

Умножив обе части равенства на объем газа и учитывая, что  $m = \rho V$  есть масса газа, получим *уравнение Клапейрона–Менделеева*:

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (26.19)$$

### § 26.9. Распределение молекул в силовом поле

1. Допустим, что газ, заключенный в некотором сосуде, находится в силовом поле, например в гравитационном поле (рис. 26.7). Выясним, как влияет наличие силы тяжести на характер распределения молекул газа.

Если бы поля силы тяжести не было, то молекулы с течением времен и разместились бы в сосуде совершенно равномерно. Концентрация молекул  $n$  была бы во всех точках одинаковой, следовательно, плотность газа  $\rho = m_0 n$  и давление  $p = knT$  были бы также одинаковыми во всех точках пространства.

Если бы, наоборот, действовало только поле силы тяжести, но не было теплового движения молекул, то они оказались бы прижатыми силами тяжести к нижнему дну сосуда, иными словами, пришли бы в состояние с минимальной потенциальной энергией. Это является следствием общего закона: всякая система частиц всегда приходит в состояние с минимальной потенциальной энергией.

2. Мы видим, что тепловое движение молекул стремится разбросать их по возможности более беспорядочно, так, чтобы они по возможности более равномерно заполнили все доступное для них пространство. Силовое же поле, наоборот, стремится по возможности упорядочить распределение молекул с тем, чтобы они заняли уровень с наименьшим значением потенциальной энергии. Под действием обоих этих факторов молекулы газа распределятся по всему сосуду, но их концентрация в разных точках различна: наибольшая концентрация молекул там, где их потенциальная энергия минимальна; в тех же участках, где потенциальная энергия велика, концентрация молекул мала.

3. В качестве примера можно рассмотреть характер изменения концентрации молекул в атмосфере Земли (и других планет).

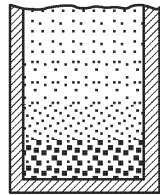


Рис. 26.7



Опыт показывает, что по мере подъема над поверхностью Земли атмосферное давление и плотность воздуха убывают (табл. 26.4).

Таблица 26.4

Высота над уровнем моря, м	Давление, Па	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Температура, °С	Высота над уровнем моря, м	Давление, Па	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Температура, °С
0	101 325	1,2250	15,0	8 000	35 600	0,52717	−37,0
1000	89 874	1,1117	8,5	10 000	26 436	0,41271	−50,0
2000	79 495	1,0065	2,0	12 000	19 330	0,31083	−56,5
3000	70 108	0,90913	−4,5	14 000	14 102	0,22675	−56,5
4000	61 640	0,81914	−11,0	16 000	10 287	0,16542	−56,5
5000	54 020	0,73612	−17,5	18 000	7 504,8	0,12068	−56,5
6000	47 181	0,65970	−24,0	20 000	5 474,9	0,08804	−56,5
7000	41 061	0,58950	−30,5				

Заметим, что при исследовании атмосферы следует вводить поправку на изменение температуры газа с высотой, что несколько усложняет расчет.

### § 26.10. Барометрическое распределение

1. Выведем выражение для закона распределения молекул в силовом поле. Для простоты рассуждений будет считать температуру газа постоянной во всех точках.

Для расчета введем понятие о *вероятности* нахождения молекул в данной точке силового поля, где потенциальная энергия молекулы равна  $U$ . Вероятность  $w$  равна отношению концентрации молекул в данной точке поля  $n$  к концентрации молекул  $n_0$  в той точке поля, где потенциальная энергия равна нулю:

$$w = \frac{n}{n_0}. \quad (26.20)$$

2. Анализ характера воздействия силового поля и теплового движения молекул, проведенный в предыдущем параграфе, показывает, что вероятность нахождения молекулы в данной точке сосуда зависит от ее потенциальной энергии в этой точке и от температуры газа. Чем больше потенциальная энергия  $U$ , тем меньше вероятность того, что молекула окажется в этой точке. Чем выше температура, тем вероятнее, что молекулы распределяются более равномерно, т. е. тем больше вероятность найти молекулу в данной точке сосуда.

Введем вспомогательную переменную  $x$ , равную отношению потенциальной энергии молекулы  $U$  к средней энергии ее тепло-

вого движения  $\varepsilon \approx kT$ , т. е.  $x = U/kT$ . Тогда оказывается, что вероятность найти молекулу с данной энергией есть некоторая функция этой переменной:

$$w = f(x). \quad (26.21)$$

Потенциальная энергия молекулы на некоторой высоте  $h = h_1 + h_2$  равна сумме энергий:  $U = U_1 + U_2$ . Переменная  $x = U/(kT) = U_1/(kT) + U_2/(kT) = x_1 + x_2$ . Вероятность  $f(x) = f(x_1 + x_2)$ . Как доказывается в теории вероятностей, вероятность сложного события, состоящего из двух независимых событий, равна произведению вероятностей каждого из событий в отдельности:  $w = w_1 w_2$ , или

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2). \quad (26.22)$$

Можно показать, что единственная функция, удовлетворяющая этому уравнению, — это показательная функция вида

$$f(x) = a^{-\alpha x}. \quad (26.23)$$

Для проверки воспользуемся свойством показательной функции: при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются, т. е.

$$a^{-\alpha(x_1+x_2)} = a^{-\alpha x_1} \cdot a^{-\alpha x_2}. \quad (26.24)$$

Основание  $a > 1$  может быть выбрано совершенно произвольно. Это отразится лишь на числовом значении коэффициента  $\alpha$ . Обычно выбирается основание натуральных логарифмов — иррациональное число  $e = 2,71828 \dots$ . При  $a = e$  коэффициент  $\alpha = 1$ .

3. Итак, вероятность найти молекулу в точке поля, где ее потенциальная энергия равна  $U$ , выразится так:

$$w = e^{-\frac{U}{kT}} = \exp \left( -\frac{U}{kT} \right). \quad (26.25)$$

Знак минус в показателе появляется по следующим соображениям. Как уже указывалось, чем больше потенциальная энергия молекулы в данной точке, тем меньше вероятность того, что молекула там окажется. Следовательно, искомая вероятность является убывающей функцией. А при основании  $a > 1$  показательная функция убывает, если ее показатель является отрицательным числом.

4. Сопоставив (26.20) и (26.25), получим выражение для концентрации молекул:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}} = n_0 \exp \left( -\frac{U}{kT} \right). \quad (26.26)$$

Соответственно получим для плотности газа

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{U}{kT}} = \rho_0 \exp \left( -\frac{U}{kT} \right) \quad (26.27)$$

и для давления

$$p = p_0 e^{-\frac{U}{kT}} = p_0 \exp \left( -\frac{U}{kT} \right). \quad (26.28)$$

5. Если рассматривать распределение молекул в гравитационном поле Земли (или другой планеты), то при  $h \ll R$ , где  $R$  — радиус планеты, можно положить согласно (18.21), что  $U = m_0 g h$ , где  $m_0$  — масса молекулы,  $g$  — ускорение свободного падения и  $h$  — высота над поверхностью планеты. Для давления получится выражение

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} = p_0 \exp \left( -\frac{m_0 g h}{kT} \right). \quad (26.29)$$

График этой зависимости показан на рис. 26.8. Она называется *барометрическим распределением*. Этот результат хорошо согласуется с данными эксперимента для атмосферы Земли.

Именно барометрическим распределением объясняется отсутствие атмосферы у Луны и крайняя степень разреженности атмосферы Марса. Благодаря малой массе этих небесных тел у них

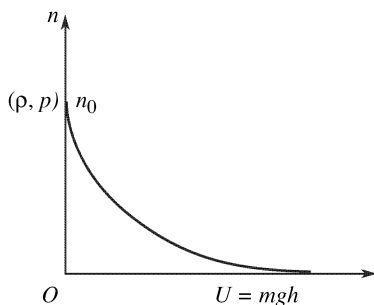


Рис. 26.8

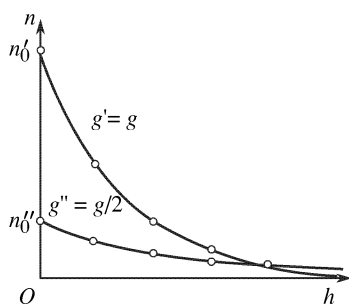


Рис. 26.9

относительно слабое гравитационное поле: на Луне сила тяжести в 6 раз меньше, чем на Земле, на Марсе — в 2,6 раза. Но, как видно из (26.29), при малом  $g$  резко возрастает вероятность того, что молекулы окажутся на больших высотах (рис. 26.9), где гравитационное поле значительно слабее, чем на поверхности планеты. Скорость молекул может здесь оказаться больше второй космической скорости, и газ рассеется в мировом пространстве.

## Глава 27

ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ И ПЕРВОЕ НАЧАЛО  
ТЕРМОДИНАМИКИ

## § 27.1. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа

1. Идеальный одноатомный газ является простейшей термодинамической системой, и его внутреннюю энергию можно легко вычислить.

Вспомним, что молекулы идеального одноатомного газа мы рассматриваем как материальные точки, взаимодействие между которыми столь мало, что им можно пренебречь. Отсутствие сил взаимодействия означает постоянство потенциальной энергии молекулярного взаимодействия (см. § 19.4). Сумма энергий покоя самих молекул тоже постоянна, ибо сами молекулы при тепловых процессах не изменяются. Полагая в (20.2)  $\mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} = \text{const}$  получим, что *внутренняя энергия идеального одноатомного газа представляет собой сумму кинетических энергий поступательного движения молекул* плюс некоторая постоянная величина.

В термодинамике принято обозначать внутреннюю энергию символом  $U$ , а не  $\mathcal{E}_0$ , как мы это делали в гл. 20. Итак,

$$U = K_1 + K_2 + \dots + K_N + \text{const}, \quad (27.1)$$

где  $K_1, K_2, \dots, K_N$  — кинетические энергии поступательного движения отдельных молекул. Учитывая, что средняя кинетическая энергия молекулы  $\langle \varepsilon_k \rangle = (K_1 + K_2 + \dots + K_N)/N$ , а согласно (26.7)  $\langle \varepsilon_k \rangle = (3/2)kT$ , получим

$$U = N\langle \varepsilon_k \rangle + \text{const} = \frac{3}{2} NkT + \text{const}, \quad (27.2)$$

где  $N$  — общее число молекул в газе. Постоянное слагаемое в выражении (27.2) нередко опускают, поскольку во всех дальнейших расчетах оно не играет роли.

2. Из (27.2) следует, что *внутренняя энергия идеального газа полностью определяется его термодинамической температурой*. Она не зависит от того, с помощью какого процесса газ пришел в состояние с этой температурой.

Соответственно и изменение внутренней энергии идеального газа при переходе из состояния с температурой  $T_1$  в состояние

с температурой  $T_2$  определяется только его начальным и конечным состояниями, но не зависит от характера процесса, с помощью которого газ переходит от первого ко второму состоянию:

$$U_2 - U_1 = \frac{3}{2} Nk(T_2 - T_1). \quad (27.3)$$

## § 27.2. Работа при расширении идеального газа

1. Пусть идеальный газ заполняет некоторый цилиндр, закрытый подвижным поршнем (рис. 27.1). При перемещении поршня на бесконечно малое расстояние  $\Delta x$  совершается элементарная работа  $\Delta A = F \Delta x$ . Из определения давления следует:  $F = pS$ ; так как  $S \Delta x = \Delta V$  есть бесконечно малое изменение объема газа, то элементарная работа

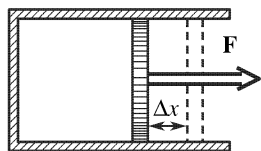


Рис. 27.1

$$\Delta A = p \Delta V. \quad (27.4)$$

При расширении газа он совершает *положительную* работу против внешних сил ( $\Delta V > 0$ ). При сжатии же газа работа *отрицательная*, поскольку  $\Delta V < 0$ ; ее совершают внешние силы, сжимающие газ.

2. Работа, совершаемая при изменении объема газа на конечную величину  $V_2 - V_1$ , находится по общему правилу вычисления работы переменной силы (см. § 18.1):

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (27.5)$$

Графически работа изображается площадью криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью абсцисс, сверху графиком давления, а слева и справа крайними ординатами (рис. 27.2).

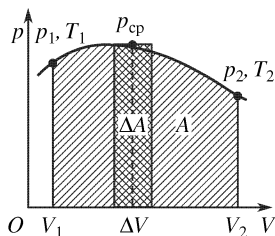


Рис. 27.2

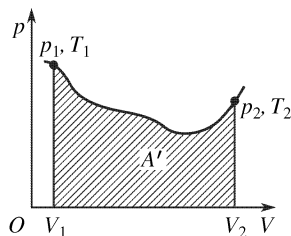


Рис. 27.3

3. Следует обратить внимание на тот факт, что работа при изменении объема газа определяется не только начальным ( $p_1 V_1 T_1$ ) и конечным ( $p_2 V_2 T_2$ ) состояниями газа, но и *характером процесса*, с помощью которого газ переходит от начального состояния к конечному. Для доказательства сравним рисунки 27.2 и 27.3. Здесь начальные и конечные состояния газа одинаковые, тем не менее, работы  $A'$  и  $A$  не равны между собой:  $A' < A$ , поскольку промежуточные состояния в обоих процессах отличаются.

А это означает, что сила давления газа не является консервативной и работу силы давления нельзя рассматривать как разность потенциальных энергий (см. § 18.6).

### § 27.3. Первое начало термодинамики и теплоемкость газа

1. Изменение полной энергии неподвижного газа сводится к изменению его внутренней энергии:  $\Delta \mathcal{E} = \Delta U = U_2 - U_1$ . Подставив в (21.9), получим

$$Q = U_2 - U_1 + A. \quad (27.6)$$

Для одноатомного газа с учетом (27.3) это выражение для первого начала термодинамики примет вид

$$Q = \frac{3}{2} Nk(T_2 - T_1) + A. \quad (27.7)$$

2. Количество теплоты, полученное газом, состоит из двух слагаемых. Одно из них — изменение внутренней энергии — определяется только начальным и конечным состояниями системы и не зависит от характера процесса, переводящего систему из начального состояния в конечное; второе слагаемое — работа — зависит от характера процесса, который происходит с газом. Естественно, что и количество теплоты зависит не только от начального и конечного состояний, но и от характера исследуемого процесса.

Итак, количество теплоты и работа являются количественными характеристиками не состояния системы, а процесса, происходящего с ней. Так же как нельзя говорить о «запасе работы» в системе, нельзя говорить и о «запасе теплоты». Количество теплоты и работа суть количественные характеристики двух разных форм изменения энергии системы, а не какие-то особые виды энергии. Именно поэтому не имеет физического смысла термин «тепловая энергия», который нередко встречается в литературе.

3. *Удельной теплоемкостью* называется отношение количества теплоты, полученного системой, к ее массе и изменению ее

температуры:

$$c = \frac{Q}{m(T_2 - T_1)}, \quad (27.8)$$

где  $m$  — масса системы,  $T_1$  — начальная и  $T_2$  — конечная температура. Единицей удельной теплоемкости в Международной системе единиц служит Дж/(кг · К).

Естественно, что теплоемкость, как и количество теплоты, зависит не только от начального и конечного состояний системы, но и от процесса, с помощью которого система переходит от начального состояния к конечному. Поэтому необходимо, указывая значение теплоемкости, оговаривать характер процесса, при котором это значение получено (т. е. измерено или вычислено).

Ниже будут вычислены теплоемкости идеальных газов при некоторых процессах.

### § 27.4. Изохорный процесс

1. *Изохорным* называется процесс, происходящий при неизменном объеме газа. Из уравнения газового состояния (26.11) при условии  $V = \text{const}$  вытекает, что *при изохорном процессе давление идеального газа прямо пропорционально его термодинамической температуре (закон Шарля)*:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (27.9)$$

2. Очевидно, что при изохорном процессе газ работы не совершает, ибо при  $\Delta V = 0$  и работа  $A = 0$ . Отсюда следует, что *при изохорном процессе количество теплоты, полученное газом, идет целиком на изменение его внутренней энергии*. Согласно (27.7) получим

$$Q_V = U_2 - U_1 = \frac{3}{2} Nk(T_2 - T_1). \quad (27.10)$$

Здесь мы использовали принятое в термодинамике обозначение: если какой-либо параметр при данном процессе остается неизменным, то он служит индексом при интересующей нас величине. Например, обозначение  $Q_V$  читается так: количество теплоты, полученное системой при постоянном объеме;  $c_V$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме (изохорная теплоемкость) и т. д.

3. *Изохорную удельную теплоемкость* определим согласно (27.8) и (27.10):

$$c_V = \frac{Q_V}{m(T_2 - T_1)} = \frac{3}{2} \frac{Nk}{m} = \frac{3}{2} \frac{k}{m_0}, \quad (27.11)$$

ибо частное от деления массы газа  $m$  на число молекул  $N$  даст массу одной молекулы:  $m_0 = m/N$ .

Пользуясь выражением (27.11), мы можем вычислить удельную теплоемкость любого одноатомного газа, т. е. газа, у которого молекула состоит из одного атома. К их числу относятся инертные газы (гелий, неон, аргон и др.), пары металлов и т. п.

4. Во многих случаях вместо удельной теплоемкости удобно пользоваться *молярной теплоемкостью*  $C_m$ :

$$C_{mV} = M c_V, \quad (27.12)$$

где  $M$  — молярная масса газа. Масса киломоля равна произведению массы одной молекулы на число молекул в киломоле, т. е. на постоянную Авогадро:

$$M = m_0 N_A. \quad (27.13)$$

Подставив в (27.12) значения  $c_V$  и  $M$  (из 27.11) и (27.13), получим

$$C_{mV} = \frac{3}{2} N_A k = \frac{3}{2} R. \quad (27.14)$$

Полученное из (27.14) значение молярной теплоемкости одноатомных газов отлично совпадает с экспериментальными данными в очень широком интервале температур.

### § 27.5. Изобарный процесс

1. *Изобарным* называется процесс, происходящий при постоянном давлении. Из уравнения газового состояния (26.11) при условии  $p = \text{const}$  вытекает, что *при изобарном процессе объем идеального газа прямо пропорционален его термодинамической температуре (закон Гей-Люссака)*:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (27.15)$$

2. Работа при изобарном расширении газа вычисляется совершенно элементарно. Действительно, поскольку  $p = \text{const}$ , то

$$A_p = p(V_2 - V_1), \quad (27.16)$$

где  $V_1$  — начальный и  $V_2$  — конечный объемы. На графике эта работа выражается площадью прямоугольника.

Эта работа может быть выражена через изменение температуры газа. Используя (26.10), имеем

$$pV_2 = NkT_2, \quad pV_1 = NkT_1,$$

следовательно,

$$A_p = Nk(T_2 - T_1). \quad (27.17)$$



3. Количество теплоты, полученное идеальным газом, идет как на увеличение внутренней энергии газа, так и на работу расширения. Согласно (27.7) имеем для одноатомного газа

$$Q_p = U_2 - U_1 + A_p = \frac{3}{2} Nk(T_2 - T_1) + Nk(T_2 - T_1) = \frac{5}{2} Nk(T_2 - T_1). \quad (27.18)$$

Мы видим, что для изобарного нагревания газа требуется большее количество теплоты, чем для его изохорного нагревания в том же температурном интервале. Это естественно, ибо внутренняя энергия газа в обоих случаях изменяется на одну и ту же величину, но при изобарном процессе газ еще совершает работу расширения, а при изохорном процессе работа не совершается.

4. Очевидно, что изобарная теплоемкость больше изохорной; для одноатомного газа

$$c_p = \frac{Q_p}{m(T_2 - T_1)} = \frac{5}{2} \frac{k}{m_0}, \quad (27.19)$$

в то время как  $c_V = \frac{3}{2} \frac{k}{m_0}$  (см. (27.11)). Соответственно молярная изобарная теплоемкость такого газа

$$C_{mp} = \frac{5}{2} R = \frac{3}{2} R + R = C_{mV} + R. \quad (27.20)$$

5. Отношение изобарной теплоемкости к изохорной называется *коэффициентом Пуассона*:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}. \quad (27.21)$$

Сопоставив (27.11) и (27.19), получим важный результат: для всех одноатомных газов коэффициент Пуассона имеет одно и то же значение,

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1,67. \quad (27.22)$$

Эксперимент в весьма широком диапазоне температур, при котором одноатомный газ можно рассматривать как идеальный, блестяще подтверждает результат этого расчета.

## § 27.6. Изотермический процесс

1. Как говорилось в § 26.1, изотермическим называется процесс, происходящий при неизменной температуре газа. Там же было показано, что соотношение между давлением и объемом

газа при изотермическом процессе выражается законом Бойля–Мариотта (26.5) и были вычерчены графики изотермы на осях  $p$ – $V$  и  $p$ – $\rho$ .

Работа, совершаемая при изотермическом процессе, графически выражается площадью криволинейной трапеции, т. е. интегралом (см. § 27.2).

Рекомендуем читателю произвести расчет самостоятельно. Полученный результат можно проверить по формуле, которую приведем без доказательства:

$$A_T = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = NkT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

2. При изотермическом процессе внутренняя энергия газа не меняется, что непосредственно следует из (27.3), ибо  $T_2 = T_1 = T$ . Отсюда иногда делают неверный вывод: раз при изотермическом процессе температура не меняется, что газу якобы не нужно сообщать теплоту. Это неверное рассуждение! Из первого начала термодинамики (27.6) вытекает:

$$Q_T = A_T, \quad (27.23)$$

т. е. *при изотермическом процессе газу необходимо сообщить количество теплоты, в точности равное работе, которую совершает газ.*

3. Поскольку при изотермическом процессе газу сообщается теплота, а его температура при этом не меняется, то понятие изотермической теплоемкости, вообще говоря, не имеет смысла: в знаменатель дроби (27.8) нужно подставить  $T_2 - T_1 = 0$ , а при делении на нуль получается бесконечность.

Если же процесс почти изотермический, т. е. происходит почти при неизменной температуре, то теплоемкость газа при этом выражается очень большим числом, ибо если знаменатель дроби стремится к нулю, то сама дробь неограниченно возрастает. Именно в этом смысле говорят, что при изотермическом процессе теплоемкость газа бесконечно велика.

## § 27.7. Адиабатный процесс

1. Как говорилось в § 21.5, адиабатным называется процесс, происходящий в системе, которая не вступает в теплообмен с окружающей средой. Согласно данному определению  $\Delta Q_a = 0$ . Отсюда следует (см. (27.8)), что и адиабатная теплоемкость газа равна нулю:  $c_{ад} = 0$ .

Для того чтобы процесс, происходящий с газом, можно было считать адиабатным, газ следует теплоизолировать, т. е. заключить его в адиабатную оболочку (типа сосуда Дьюара). Однако есть и другая возможность: процесс можно провести настолько быстро, чтобы не успел произойти теплообмен между газом и окружающей средой. Это возможно, поскольку теплообмен происходит значительно медленнее, чем сжатие или расширение газа.

2. При адиабатном расширении газ совершает работу за счет убыли его внутренней энергии (поскольку теплообмен с окружающей средой отсутствует). Соответственно при адиабатном сжатии газа его внутренняя энергия возрастает за счет работы внешних сил. А так как внутренняя энергия идеального газа целиком определяется его температурой, то ясно, что *при адиабатном сжатии идеального газа его температура возрастает, а при расширении — убывает*.

Это широко применяется на практике. Так, если открыть вентиль баллона, в котором находится сжатый углекислый газ (при давлении более 4 МПа), то последний станет адиабатно расширяться. При этом его температура падает до  $-80^\circ\text{C}$  и часть газа превращается в кристаллическую массу наподобие снега. Спрессовывая эту массу, получают «сухой лед».

В двигателях внутреннего сгорания типа «Дизель» при быстром адиабатном сжатии воздуха его температура возрастает до  $500\text{--}600^\circ\text{C}$ , что приводит к самовоспламенению жидкого топлива, впрыскиваемого в цилиндр в конце сжатия.

3. Поскольку адиабатный процесс происходит без теплообмена с окружающей средой, то для вычисления работы следует в выражении (27.6) положить  $Q_{\text{ад}} = 0$ . Получим для одноатомного газа, согласно (27.7):

$$A_{\text{ад}} = \frac{3}{2} Nk(T_1 - T_2), \quad (27.24)$$

где  $T_1$  — температура в начале и  $T_2$  — температура в конце процесса. Воспользовавшись уравнением газового состояния (26.11), имеем

$$A_{\text{ад}} = \frac{3}{2} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}, \quad (27.25)$$

ибо, согласно (27.22),

$$\gamma - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}.$$

4. Выясним, как меняется давление идеального газа при адиабатном изменении его объема, и построим график адиабаты на осях  $p$ – $V$  (рис. 27.4).

Пусть газ находится в состоянии, которое характеризуется объемом  $V_0$ , давлением  $p_0$  и температурой  $T_0$ . Расширим газ до объема  $V_1$ . Если расширение произвести изотермически, то давление  $p_1^{\text{изот}} = p_0 V_0 / V_1$ . Если же расширение произвести адиабатно, то давление упадет более резко, поскольку при адиабатном процессе не только возрастает объем, но и температура убывает. Из уравнения газового состояния  $p_0 V_0 / T_0 = p_1 V_1 / T_1$  получим

$$p_1^{\text{ад}} = \frac{p_0 V_0}{V_1} \frac{T_1}{T_0} = p_1^{\text{изот}} \frac{T_1}{T_0}.$$

Но так как при адиабатном расширении  $T_1 < T_0$ , то  $p_1^{\text{ад}} < p_1^{\text{изот}}$ . Вследствие этого график адиабаты в данной области на рис. 27.4 идет ниже графика изотермы.

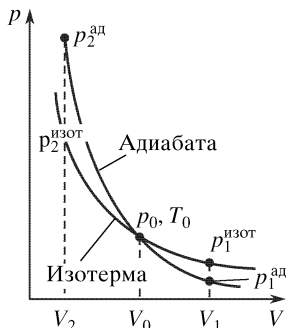


Рис. 27.4

Прodelав аналогичное рассуждение для случая сжатия газа из состояния с параметрами  $p_0, V_0, T_0$  в состояние  $p_2, V_2, T_2$ , не трудно убедиться, что при этом благодаря повышению температуры  $p_2^{\text{ад}} < p_2^{\text{изот}}$  и график адиабаты пройдет уже выше графика изотермы.

Из рис. 27.5 видно, что при адиабатном расширении газ совершает меньшую работу, чем при изотермическом. При адиабатном же сжатии газа внешние силы совершают большую работу, чем при изотермическом (рис. 27.6).

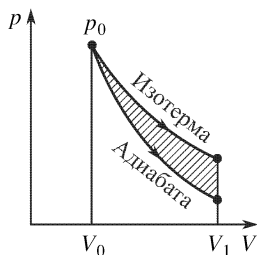


Рис. 27.5

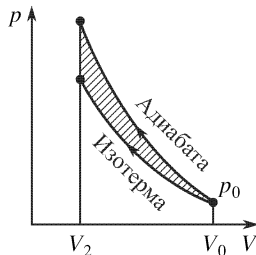


Рис. 27.6

5. Связь между давлением и объемом идеального газа при адиабатном процессе выражается *уравнением Пуассона*, которое мы приводим без доказательства:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma. \quad (27.26)$$

## § 27.8. Теплоемкость двухатомного газа

1. Опыт показывает, что теплоемкости двухатомных газов (водорода, кислорода, азота и др.), а также многоатомных газов (углекислого газа, метана и т. п.) значительно больше теплоемкостей одноатомных газов. Кроме того, теплоемкости этих газов при разных температурах различны, в то время как теплоемкости одноатомных газов не зависят от температуры. Не имея возможности изложить здесь теорию теплоемкостей многоатомных газов, мы на примере водорода и кислорода выясним характер зависимости теплоемкости двухатомных газов от температуры, а затем изложим основные идеи квантовой теории этого явления.

2. При нормальном давлении точка кипения водорода равна 20,45 К. Очевидно, что вблизи этой температуры водород нельзя рассматривать как идеальный газ. Однако при более высоких температурах, начиная примерно с 30 К, этот газ при нормальном давлении ведет себя уже как идеальный.

Теплоемкость водорода в интервале температур порядка 30–80 К не отличается от теплоемкости одноатомного газа. При повышении же температуры теплоемкость постепенно возрастает, а коэффициент Пуассона уменьшается. Соответствующие данные приведены в табл. 27.1.

Таблица 27.1

$T, \text{ K}$	$\gamma$	$\frac{C_{mp}}{R}$	$\frac{C_{mV}}{R}$	$\frac{C_{mp} - C_{mV}}{R}$
50	1,66	2,51	1,51	1,00
100	1,57	2,76	1,76	1,00
273	1,41	3,46	2,46	1,00
773	1,39	3,56	2,56	1,00
1273	1,36	3,76	2,77	0,99

3. Точка кипения кислорода при нормальном давлении равна 90,25 К. Начиная с температуры порядка 100 К, кислород при нормальном давлении ведет себя как идеальный газ, изобарная молярная теплоемкость которого примерно равна  $C_{mp} \approx (7/2)R$ , а коэффициент Пуассона  $g \approx 1,4$ . С ростом температуры теплоемкость возрастает (табл. 27.2).

На рис. 27.7 изображена зависимость изохорных теплоемкостей водорода и кислорода от температуры. Для сравнения показана также теплоемкость одноатомного газа.

4. Как и в случае одноатомного газа, изохорная теплоемкость характеризует количество теплоты, идущее на изменение внутренней энергии газа. Но при одной и той же температуре средние

Таблица 27.2

$T, \text{K}$	$\gamma$	$\frac{C_{mp}}{R}$	$\frac{C_{mv}}{R}$	$\frac{C_{mp} - C_{mv}}{R}$
150	1,40	3,50	2,50	1,00
273	1,39	3,53	2,53	1,00
773	1,33	4,04	3,05	0,99
1273	1,29	4,32	3,34	0,98

кинетические энергии *поступательного* движения одноатомных и многоатомных молекул совпадают. Следовательно, внутренняя энергия многоатомных газов представляет собой сумму энергий не только поступательного движения молекул, но и других видов движений: *вращения молекул и колебаний атомов внутри молекулы*.

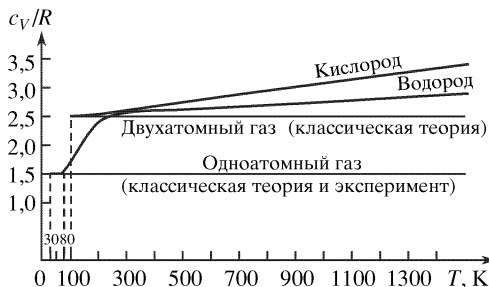


Рис. 27.7

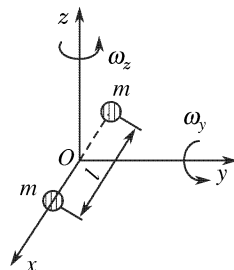


Рис. 27.8

В классической молекулярной теории предполагалось, что молекула двухатомного газа представляет собой жесткую систему из двух шариков, расстояние между которыми не меняется (наподобие гантели). Молекула может двигаться поступательно вдоль трех произвольных осей координат и вращаться вокруг двух из них, например  $Oy$  и  $Oz$  (рис. 27.8). Вращение вокруг оси  $Ox$  не вносит вклада в энергию молекулы ввиду малого значения момента инерции молекулы относительно этой оси. Следовательно, энергия молекулы складывается из кинетической энергии трех поступательных движений и кинетической энергии двух вращений:

$$\varepsilon_k = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2} + \frac{J\omega_y^2}{2} + \frac{J\omega_z^2}{2}. \quad (27.27)$$

В классической молекулярной теории доказывается, что на каждое из этих движений приходится в среднем одна и та же энергия,

равная  $kT/2$ :

$$\frac{mv_x^2}{2} = \frac{mv_y^2}{2} = \frac{mv_z^2}{2} = \frac{J\omega_y^2}{2} = \frac{J\omega_z^2}{2} = \frac{1}{2} kT.$$

Подставив последнее выражение в (27.27), получим, что средняя энергия молекулы двухатомного газа

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{5}{2} kT. \quad (27.28)$$

Отсюда следует, что внутренняя энергия одного киломоля двухатомного газа

$$U_m = \frac{5}{2} N_A kT + \text{const} = \frac{5}{2} RT + \text{const}. \quad (27.29)$$

Изохорная молярная теплоемкость

$$C_{mV} = \frac{5}{2} R. \quad (27.30)$$

5. Сравнив последний результат с данными эксперимента (см. рис. 27.7), мы видим, что числовые значения теплоемкостей двухатомных газов плохо согласуются с теоретическим значением (27.30). Так, для кислорода расхождение составляет около 20–30 %. Однако классическая теория обладает и более существенными недостатками — она не в состоянии объяснить следующие факты:

1) Почему теплоемкости двухатомных (и вообще многоатомных) газов возрастают с ростом температуры?

2) Почему при низких температурах теплоемкость водорода совпадает с теплоемкостью одноатомных газов (т. е.  $C_{mV} = (3/2)R$ , а не  $(5/2)R$ , как при более высоких температурах)?

3) Почему этот эффект проявляется у водорода, а у кислорода он отсутствует?

4) Почему двухатомные молекулы ведут себя как жесткие системы? Почему при соударениях не возбуждаются колебания атомов в молекуле?

Ответить на эти вопросы удалось только на основе квантовой теории теплоемкости.

## § 27.9. Понятие о квантовой теории теплоемкости газов

1. Энергия молекулы двухатомного газа может быть представлена как сумма кинетических энергий ее поступательного и вращательного движения и энергии колебания атомов внутри молекулы:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{пост}}^k + \varepsilon_{\text{вр}}^k + \varepsilon_{\text{колеб}} = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{L^2}{2J} + \varepsilon_{\text{колеб}}, \quad (27.31)$$

где  $p$  — импульс молекулы,  $L$  — момент импульса,  $m_0$  — масса молекулы,  $J$  — момент инерции. Изменение внутренней энергии газа сводится к изменению энергии поступательного и вращательного движения молекул и энергии колебаний. Однако, согласно квантовой теории, эти три компоненты энергии молекулы по-разному реагируют на изменение температуры газа.

2. Изменение кинетической энергии поступательного движения сводится к изменению импульса молекулы. Естественно, что изменение импульса должно быть не меньше неопределенности импульса, которую можно вычислить из соотношения (14.5). Полагая в (14.5) неопределенность координаты равной по порядку величины длине свободного пробега молекулы,  $\Delta l \approx \lambda \approx 10^{-7}$  м (см. § 25.3), получим неопределенность импульса

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta l} \approx 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Неопределенности импульса соответствует неопределенность в значении кинетической энергии молекулы:

$$\Delta \varepsilon_{\text{пост}} = \frac{(p + \Delta p)^2}{2m_0} - \frac{p^2}{2m_0} = \frac{2p\Delta p + \Delta p^2}{2m_0} \geq \frac{3\Delta p^2}{2m_0}.$$

Неопределенности энергии соответствует неопределенность температуры  $\Delta T_{\text{пост}}$ , которую можно найти из соотношения

$$\Delta \varepsilon_{\text{пост}} = \frac{3}{2} k \Delta T_{\text{пост}}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta T_{\text{пост}} = \frac{\Delta p^2}{m_0 k}. \quad (27.32)$$

Масса молекулы водорода  $m_0 = \frac{2 \text{ кг}}{6,02 \cdot 10^{26}} = 3,32 \cdot 10^{-27}$  кг. Следовательно,

$$\Delta T_{\text{пост}} = \frac{10^{-54}}{3,32 \cdot 10^{-27} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ К}.$$

Фактически это означает, что *энергия поступательного движения может меняться при любом изменении температуры*. Следовательно, квантовая теория в этом случае дает такой же результат, как и классическая статистика.

3. Изменение кинетической энергии вращательного движения молекулы сводится к изменению ее момента импульса. В квантовой теории доказывается, что изменение момента импульса не может быть любым — оно кратно постоянной Планка. Отсюда следует, что момент импульса молекулы может принимать ряд



значений (см. § 72.2):

$$L_1 = \hbar, \quad L_2 = 2\hbar, \quad \dots, \quad L_n = n\hbar.$$

Соответственно и кинетическая энергия вращательного движения молекулы может принимать значения

$$\varepsilon_{\text{вр}}^{(1)} = \frac{L_1^2}{2J} = \frac{\hbar^2}{2J}, \quad \varepsilon_{\text{вр}}^{(2)} = \frac{L_2^2}{2J} = \frac{2\hbar^2}{3J} \quad \text{и т. д.}$$

Минимальное изменение кинетической энергии вращательного движения молекулы  $\Delta\varepsilon_{\text{вр}}^{\text{к}} = \varepsilon_{\text{вр}}^{(2)} - \varepsilon_{\text{вр}}^{(1)} = 3\hbar^2/2J$ . Этому изменению энергии соответствует изменение температуры, которое следует из равенства  $\frac{3}{2} k\Delta T_{\text{вр}} = \frac{3\hbar^2}{2J}$ , откуда

$$\Delta T_{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{Jk}. \quad (27.33)$$

4. Момент инерции молекулы водорода можно найти из следующих соображений. Представим себе эту молекулу в виде гантели (см. рис. 27.8); расстояние между центрами атомов  $l \approx 0,74 \cdot 10^{-10}$  м; масса атома водорода вдвое меньше массы молекулы и равна  $m_1 = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг. Тогда

$$J_{\text{H}_2} = 2m_1 r^2 \approx 5 \cdot 10^{-48} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

( $r = l/2$ ). Подставив эти выражения в (27.33), получим, что для изменения кинетической энергии вращательного движения молекулы водорода температура газа должна измениться на

$$\Delta T_{\text{вр}} \approx \frac{10^{-68}}{5 \cdot 10^{-48} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \text{ К} \approx 140 \text{ К}.$$

Итак, при температурах порядка 200 К молекулы при соударениях в состоянии изменить энергию своего вращательного движения, и поэтому  $C_{mV} \approx (5/2)R$ .

При температурах около 100 К лишь небольшая часть молекул, энергия которых, согласно распределению Максвелла (см. § 25.2), больше средней, в состоянии при соударениях изменить энергию своего вращения. Поэтому при этих температурах  $(3/2)R < C_{mV} < (5/2)R$ . А при температурах меньше 80 К процент молекул, способных при соударении изменить энергию вращения, оказывается столь малым, что фактически при изменениях температуры меняется кинетическая энергия только поступательного движения молекул. Естественно, что при этих температурах изохорная теплоемкость водорода такая же, как у одноатомного газа.

5. Совершенно иначе обстоит дело с теплоемкостью кислорода. Здесь масса атома в 16 раз больше массы атома водорода, а расстояние между центрами атомов  $l \approx 1,2 \cdot 10^{-10}$  м; следовательно, момент инерции молекулы кислорода примерно в 40 раз больше момента инерции молекулы водорода. Согласно (27.33) изменение температуры газа, сопровождающееся изменением энергии вращения, составит для кислорода  $\Delta T_{\text{вр}} \approx 3$  К. А так как точка кипения кислорода при нормальном давлении равна 90 К, то при тех условиях, когда кислород можно рассматривать как идеальный газ, у него при столкновениях будут возрастать кинетические энергии как поступательного, так и вращательного движения молекул, что соответствует классической теории теплоемкостей двухатомных газов.

6. В предыдущих рассуждениях мы не учитывали энергию колебательного движения молекул, молчаливо предполагая, что при рассматриваемых температурах она является постоянной величиной. Причина такого положения вещей также хорошо объясняется на основе квантовой механики, где доказывается, что в первом приближении энергия колебания

$$\varepsilon_{\text{колеб}} = \hbar\omega(n + 1/2).$$

Здесь  $\omega$  — собственная частота колебаний атомов в молекуле, а  $n$  — целое число:  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Отсюда следует, что минимальное изменение энергии колебания  $\varepsilon_{\text{колеб}} = \hbar\omega$ .

Собственные частоты колебаний молекул определяются оптическими методами. Для водорода  $\omega_{\text{H}_2} = 7,86 \cdot 10^{14}$  рад/с; для кислорода  $\omega_{\text{O}_2} = 2,94 \cdot 10^{14}$  рад/с.

Вычислим температуру, при которой за счет соударения между молекулами возрастает энергия колебаний. Получим  $(3/2)k\Delta T = \Delta\varepsilon_{\text{колеб}} = \hbar\omega$ , откуда

$$\Delta T_{\text{колеб}} = \frac{2\hbar\omega}{3k}. \quad (27.34)$$

Для водорода

$$\Delta T_{\text{колеб}} \approx \frac{2 \cdot 10^{-34} \cdot 7,86 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \text{ К} \approx 3800 \text{ К};$$

для кислорода

$$\Delta T_{\text{колеб}} \approx \frac{2 \cdot 10^{-34} \cdot 2,94 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \text{ К} \approx 1400 \text{ К}.$$

Естественно, что в диапазоне температур порядка до 1300–1500 К энергия колебаний в молекуле водорода слабо меняется и теплоемкость водорода возрастает не так быстро, как теплоемкость кислорода (см. рис. 27.8).

В молекуле же кислорода энергия колебаний возрастает при значительно более низких температурах. Уже при температурах порядка 700–900 К примерно половина молекул оказывается способной увеличить энергию колебаний, вследствие чего  $C_{mV} \approx 3R$ , что больше классического значения для двухатомного газа, равного  $2,5R$ . При температурах же порядка 1400–1500 К все молекулы должны при соударениях изменять энергию колебаний.

Можно вычислить предел, к которому в этом случае стремится изохорная теплоемкость кислорода, воспользовавшись тем же правилом, которое мы в § 27.8 применили для учета кинетической энергии поступательного и вращательного движений. При колебаниях меняется как кинетическая, так и потенциальная энергия молекулы. Оказывается, что их изменения одинаковы и равны каждое  $kT/2$ . Взамен (27.28) получится выражение

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{7}{2} kT. \quad (27.35)$$

Отсюда следует, что

$$C_{mV} = \frac{7}{2} R, \quad C_{mP} = \frac{9}{2} R, \quad \gamma = \frac{9}{7} = 1,29.$$

Сравнив с табл. 27.2, мы видим, что полученный нами результат соответствует эксперименту.

7. Итак, мы убедились, что на основе квантовых представлений можно объяснить характерные особенности поведения теплоемкостей двухатомных газов. Классическая же статистика не в состоянии объяснить все эти явления, хотя и позволяет в некоторых случаях получить предельные значения интересующих нас величин.

## Глава 28

### ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

#### § 28.1. Квазистатические процессы

1. В предыдущих главах, рассматривая различные процессы, происходящие с идеальным газом, мы говорили о его температуре, плотности, давлении. При этом молчаливо предполагалось, что во всех точках данного объема газа его давление, плотность и температура одинаковы. Эти величины называются *термодинамическими параметрами* состояния.

Строго говоря, равенство термодинамических параметров во всех точках системы возможно только при условии, что она находится в состоянии равновесия. Если же в системе происходят какие-либо процессы, то данное условие нарушается.

Так, если слегка передвинуть поршень в цилиндре, то газ вблизи поршня слегка сожмется, и в этой области его давление,

плотность и температура возрастут. В других же участках параметры газа не успеют сразу измениться. Через некоторое время  $\tau$ , которое называется *временем релаксации*, нарушенное равновесие восстановится. При этом термодинамические параметры газа во всех точках примут новые, но повсюду вновь одинаковые значения.

Пусть сжатие происходит настолько медленно, что время его протекания много больше времени релаксации. В этом случае весь процесс можно представить в виде суммы большого числа очень малых сжатий, так что длительность каждого микросжатия окажется все же больше времени релаксации. Тогда в течение каждого из микросжатий в системе успеет установиться равновесие, и весь процесс будет представлять собой совокупность переходов через множество равновесных состояний.

Процессы, при которых система проходит через ряд положений равновесия, называются *квазистатическими*, т. е. как бы равновесными (от латинского *quasi* — как будто, вроде).

2. Скорость изохорного, изобарного или изотермического процесса ничем не ограничена, так что эти процессы можно проводить сколь угодно медленно. А поэтому в сосуде небольших размеров, стенки которого обладают большой теплопроводностью, можно любой из этих процессов с наперед заданной точностью приблизить к квазистатическому.

Значительно труднее осуществить квазистатический адиабатный процесс. С одной стороны, он должен протекать настолько быстро, чтобы не было заметного теплообмена с окружающей средой. С другой стороны, время его протекания должно быть много больше времени релаксации. Поскольку оба эти условия противоречивы, удовлетворить им одновременно нелегко, и процессы, происходящие на практике, лишь с известным приближением являются адиабатными и в то же время квазистатическими.

3. На графиках изображаются только квазистатические процессы, ибо каждая точка на графике характеризует какое-либо промежуточное состояние равновесия. Вопрос о методике изображения реальных, а не квазистатических процессов здесь не будет рассматриваться.

## § 28.2. Обратимые процессы

1. *Обратимым* называется процесс, который отвечает следующим условиям:

а) его одинаково легко можно провести в двух противоположных направлениях;

б) в каждом из этих случаев система проходит через одни и те же промежуточные состояния;

в) после проведения прямого и обратного процесса система и окружающие ее тела возвращаются к исходному состоянию.

Всякий процесс, не удовлетворяющий хотя бы одному из этих условий, является необратимым.

2. *Обратимыми являются процессы, протекающие в системах, где действуют консервативные силы* (см. § 18.5).

Действительно, пусть абсолютно упругий шарик падает в вакууме на абсолютно упругую плиту. Пользуясь законами упругого удара (см. § 17.3), нетрудно показать, что шарик, упав на плиту, вернется после отражения в исходную точку, пройдя в обратном направлении все те промежуточные состояния, которые он проходил при падении. После окончания процесса шарик и все окружающие его тела вернутся в первоначальное состояние, и это может повториться сколько угодно раз.

Так же легко убедиться, что колебания маятника в вакууме или тела на абсолютно упругой пружине тоже представляют собой обратимые процессы.

3. Нетрудно убедиться, что все *квазистатические тепловые процессы также обратимы*. Рассмотрим для примера квазистатический изотермический процесс.

Пусть газ квазистатически и вместе с тем изотермически расширился и его объем возрос на малую величину  $\Delta V$ . Поскольку при данном процессе система все время проходила через равновесные состояния, то очевидно, что в любой момент его можно направить в обратном направлении, т. е. сжать на ту же величину  $\Delta V$ . При этом вся система пройдет через те же промежуточные состояния, которые она проходила при расширении.

Как известно (см. § 27.6), газ при изотермическом расширении совершает работу, получая из окружающей среды путем теплообмена некоторое количество теплоты:  $Q_T = A_T$ . Пусть эта работа пошла на увеличение потенциальной энергии какого-то тела массой  $m$ , которое поднимается на высоту  $h$ . Тогда из закона сохранения энергии следует, что  $Q_T = A_{\text{расш}} = mgh$ . При обратном процессе тело опустится на ту же высоту  $h$ ; потенциальная энергия груза пойдет на совершение работы по сжатию газа; при этом газ отдаст окружающей среде путем теплообмена такое же количество теплоты, которое он получил при расширении.

Итак, после проведения процесса расширения, а затем сжатия газа он сам и все окружающие тела вернутся к начальным условиям, пройдя через одни и те же промежуточные состояния. Следовательно, квазистатический изотермический процесс обратим.

Аналогичные рассуждения позволяют доказать обратимость и любых других квазистатических процессов, ибо в предыдущем рассмотрении важен был не характер теплообмена системы с окружающей средой, а равновесный способ прохождения системой всех промежуточных состояний, т. е. квазистатический характер процесса.

### § 28.3. Необратимость реальных тепловых процессов

1. Рассмотренные примеры обратимых процессов представляют собой идеализацию реальных природных явлений. На самом деле в природе нет строго консервативных систем; например, в любой реальной системе действуют силы трения. В природе нет также строго квазистатических процессов, ибо все тепловые процессы протекают не бесконечно медленно, а с конечной скоростью. А отсюда вытекает, что все *реальные процессы в природе необратимы*.

Не следует, однако, думать, что понятие об обратимом квазистатическом процессе является бессодержательным, а потому излишним. Аналогично таким идеализациям, как материальная точка, точечный заряд, консервативная система и т. п., понятие об обратимом процессе оказывается весьма удобной идеализацией реальных процессов, позволяющей в ряде случаев упростить решение той или иной конкретной задачи. Следует только всегда вначале тщательно проверить, в какой степени применение этой идеализации законно, в какой степени результаты идеализированного расчета приближаются к результатам эксперимента.

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие необратимость реальных тепловых процессов.

2. Как показывает опыт, при диффузии выравнивание концентраций происходит самопроизвольно, без внешнего воздействия. Обратный же процесс сам по себе никогда не пойдет: сколько бы времени мы ни ждали, не получится так, чтобы, например, смесь газов разделилась на исходные компоненты или растворенное в жидкости вещество (соль, сахар, краска и т. п.) само по себе выделилось из этой жидкости.

Конечно, смесь можно разделить на исходные компоненты. Но при этом, во-первых, система не проходит через те промежуточные состояния, которые она проходила в процессе диффузии. А во-вторых, возвращение системы к исходному состоянию приводит к существенному изменению свойств окружающих ее тел. Так, разделяя газовую смесь, возникшую при диффузии, на

исходные компоненты (см. § 25.6), мы должны затратить энергию на работу насосов; точно так же, выделяя, скажем, соль из водного раствора путем дистилляции, мы расходуем энергию на испарение воды, что связано с изменением состояния окружающих данную систему тел.

Итак, диффузия является односторонним, а тем самым и необратимым процессом.

3. Опыт показывает, что теплообмен, как и диффузия, является односторонне направленным процессом. В результате теплообмена энергия передается сама собой всегда от тела с более высокой температурой к телу с более низкой температурой. Вследствие этого теплообмен всегда сопровождается выравниванием температур. Обратный процесс передачи энергии в форме тепла от холодных тел к горячим сам по себе никогда не происходит.

Одностороннее направление имеет также процесс превращения механической энергии во внутреннюю при неупругом ударе или при трении. Механическая энергия соприкасающихся тел превращается во внутреннюю, за счет чего их температура повышается. Однако сколько бы мы ни ждали, не произойдет обратный процесс самопроизвольного превращения внутренней энергии в механическую.

## § 28.4. Необратимость и статистика

1. На первый взгляд необратимость тепловых процессов представляется парадоксальной. Действительно, все тепловые процессы в конечном счете сводятся к механическим — к движению и взаимодействию молекул. Но ведь механические процессы обратимы; чем же вызвана необратимость тепловых явлений? Разрешить это кажущееся противоречие удастся с помощью молекулярной статистики, в которой методы теории вероятностей применяются для изучения процессов, происходящих в системе, состоящей из огромного множества частиц. Суть ее идей мы вначале рассмотрим на более простом примере модели сосуда с двумя сортами шаров.

2. Пусть на дне сосуда лежат два слоя шаров одинакового размера и одинаковой массы, но окрашенных в два цвета (рис. 28.1). При встряхивании сосуда они перемешаются (рис. 28.2). Сколько бы мы затем ни встряхивали сосуд, практически никогда не восстановится первоначальное состояние. Итак, *процесс перемешивания шаров необратим* — при встряхивании ящика упорядоченное

расположение самопроизвольно переходит в беспорядочное, а обратный процесс сам по себе практически никогда не идет.

В чем же причина необратимости этого процесса? Откуда шары «знают», что нужно располагаться в беспорядке, а не упорядоченно?

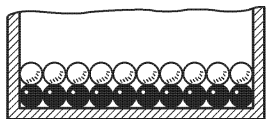


Рис. 28.1

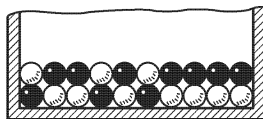


Рис. 28.2

Ответить на этот вопрос можно будет, если мы сможем подсчитать, сколько всего имеется возможных комбинаций для распределения десяти черных и десяти белых шаров в два слоя.

3. Для облегчения расчета обозначим как-то шары, например, все белые — заглавными буквами алфавита, все черные — строчными:

Белые	$A, B, B, G, D, E, Ж, З, И, K$
Черные	$a, б, в, г, д, е, ж, з, и, к$

Пусть в верхнем ряду лежат три белых шара и семь черных (рис. 28.2). Естественно, что в нижнем ряду их число будет обратным — семь белых и три черных, так что выбор какого-либо распределения шаров в верхнем ряду автоматически определяет их распределение в нижнем. Вычислим, сколько комбинаций шаров соответствует данному распределению. Из десяти белых шаров можно выбрать три шара разными способами: *АВВ*, *АБЖ*, *ДЕК* и т. д. Их число равно числу сочетаний, которые можно составить из 10 элементов по 3:

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Аналогично подсчитывается число способов, с помощью которых можно выбрать семь черных шаров из десяти <sup>1)</sup>:

$$C_{10}^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = C_{10}^3 = 120.$$

Поскольку черные шары могут выбираться независимо от белых (лишь бы их число было равно 10), то общее число комбинаций, с помощью которых можно осуществить распределение из трех белых и семи черных шаров в верхнем ряду, равно произ-

<sup>1)</sup> Заметим, что всегда  $C_m^n = C_m^{m-n}$ . Рекомендуется проверить это свойство сочетаний на примерах. Общее доказательство дается в курсе математики.



ведению числа сочетаний из белых и из черных шаров, т. е. равно  $C_{10}^3 \cdot C_{10}^7 = 120^2 = 14\,400$ .

Аналогично можно подсчитать число комбинаций, соответствующих расположению из двух белых и восьми черных шаров, из четырех белых и шести черных и т. д. Результаты подсчета сведем в табл. 28.1.

Таблица 28.1

Номер со- стоя- ния	Расположение шаров в верхнем ряду		Число комбинаций, соответствующих данному состоянию	%
	белых	черных		
1	10	0	$C_{10}^{10}C_{10}^0 = 1$	0,00054
2	9	1	$C_{10}^9C_{10}^1 = (C_{10}^1)^2 = 10^2 = 100$	0,05412
3	8	2	$C_{10}^8C_{10}^2 = (C_{10}^2)^2 = \left(\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}\right)^2 = 2025$	1,096
4	7	3	$C_{10}^7C_{10}^3 = (C_{10}^3)^2 = \left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)^2 = 14\,400$	7,794
5	6	4	$C_{10}^6C_{10}^4 = (C_{10}^4)^2 = \left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right)^2 = 44\,100$	23,87
6	5	5	$C_{10}^5C_{10}^5 = \left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\right)^2 = 63\,504$	34,37
7	4	6	$C_{10}^4C_{10}^6 = (C_{10}^4)^2 = 44\,100$	23,87
8	3	7	$C_{10}^3C_{10}^7 = (C_{10}^3)^2 = 14\,400$	7,794
9	2	8	$C_{10}^2C_{10}^8 = (C_{10}^2)^2 = 2025$	1,096
10	1	9	$C_{10}^1C_{10}^9 = (C_{10}^1)^2 = 100$	0,05412
11	0	10	$C_{10}^0C_{10}^{10} = 1$	0,00054
			Всего: 184 756	100

4. Будем встряхивать сосуд и каждый раз при этом фотографировать возникшее распределение шаров. Если сделать большое число снимков, например миллион, то из них примерно 5–6 снимков будут соответствовать распределению, когда внизу лежат все белые, а сверху — все черные шары; столько же снимков дадут обратную картину; число же снимков, соответствующих распределению, когда в каждом ряду находится пять белых и пять черных шаров, будет равно примерно 344 000!

Итак, система из десяти белых и десяти черных шаров может находиться в одиннадцати различных состояниях. Однако каждое из этих состояний может быть реализовано разным числом комбинаций шаров.

*Термодинамической вероятностью данного состояния некоторой системы тел называется число комбинаций отдельных*

элементов системы, с помощью которых реализуется это состояние.

Из табл. 28.1 видно, что наибольшая термодинамическая вероятность соответствует равномерному распределению черных и белых шаров в обоих рядах (состояние № 6) и состояниям № 5 и 7, близким к равномерному. Наименьшая же термодинамическая вероятность соответствует полностью упорядоченному расположению шаров (состояния № 1 и 11), а также состоянием № 2 и 10, близким к полной упорядоченности.

5. Можно показать, что *время пребывания некоторой системы в том или ином состоянии пропорционально термодинамической вероятности этого состояния*. Тем самым становится ясной причина необратимости процесса перемешивания шаров. При встряхивании сосуда шары располагаются случайным образом, и в принципе может возникнуть любая комбинация. Однако чаще всего реализуется то состояние, термодинамическая вероятность которого больше. Так, если сосуд с шарами непрерывно встряхивать в течение суток, то в состоянии № 6 система будет пребывать около 8 ч, в состоянии № 5 или 7 — около 6 ч, а в состоянии № 1 или 11 — всего лишь около 0,5 с!

Итак, *необратимость процесса перемешивания шаров определяется термодинамической вероятностью тех состояний, в которых может пребывать данная система*. Самопроизвольно идет процесс перехода из состояния с малой термодинамической вероятностью в более вероятное состояние.

Обратный же процесс перехода из беспорядочного (и тем самым наиболее равномерного) распределения элементов системы (шаров) в упорядоченное состояние практически никогда сам по себе не происходит именно потому, что вероятность такого процесса совершенно ничтожна.

Аналогичный результат мы получим при анализе явлений в любой системе, состоящей из большого числа однородных элементов, например в системе, состоящей из множества молекул, движущихся беспорядочно.

## § 28.5. Диффузия и термодинамическая вероятность

1. Явление диффузии во многом аналогично процессу перемешивания шаров, который был рассмотрен в предыдущем параграфе. Поэтому можно для объяснения причины необратимости этого явления воспользоваться тем же методом. Представим себе сосуд, разделенный пополам непроницаемой перегородкой; обе половины сосуда заполнены одинаковым числом молекул разных

газов, например водорода и кислорода. Если убрать перегородку, то в результате диффузии самопроизвольно возникнет однородная смесь газов. Однако сколько бы мы ни ждали, смесь не разделится самопроизвольно на исходные компоненты.

Сравним вероятность «молекулярного беспорядка», соответствующего однородной смеси газов, с вероятностью «молекулярного порядка», соответствующего исходному распределению обоих газов по разным половинам сосуда.

2. Исходное распределение может быть реализовано только одним способом, следовательно, его термодинамическая вероятность равна единице. Однородную же смесь можно получить огромным числом способов: оно равно произведению числа сочетаний из  $N$  молекул водорода по  $N/2$  молекул в каждой половине сосуда на такое же число сочетаний из  $N$  молекул кислорода по  $N/2$  молекул в каждой половине. Итак, термодинамическая вероятность этого состояния

$$W_{\text{однородн}} = (C_N^{N/2})^2. \quad (28.1)$$

3. В обычных условиях даже в небольших объемах газа содержится колоссальное количество молекул, например, в одном кубическом миллиметре — около  $10^{16}$ . При  $N \approx 10^{16}$  термодинамическая вероятность состояния, соответствующего однородной смеси газов, выражается огромным числом:

$$W_{\text{однородн}} \approx 10^{10^{15}}.$$

Отсюда ясна причина необратимости явления диффузии. Термодинамическая вероятность состояния однородной смеси несоизмеримо больше вероятности состояния, при котором обе компоненты смеси разделены. А поэтому система самопроизвольно за счет беспорядочного движения молекул переходит в наиболее вероятное состояние, соответствующее однородной смеси газов. Обратный же процесс разделения смеси на исходные компоненты настолько маловероятен, что практически никогда не происходит.

## § 28.6. Термодинамическая вероятность и другие тепловые процессы

1. Понятие термодинамической вероятности может быть применено и для объяснения причины необратимости процесса превращения механической энергии во внутреннюю при неупругом ударе. Однако, в отличие от случая диффузии, здесь подсчитать термодинамическую вероятность очень трудно, и мы ограничимся лишь качественной оценкой этой величины.

Пусть тело, движущееся со скоростью  $v$ , неупруго соударяется со стенкой. В этом состоянии все молекулы тела, участвуя в беспорядочном тепловом движении, вместе с тем движутся в одном направлении с одной и той же скоростью  $v$ . После неупругого удара тело останавливается, но его кинетическая энергия не пропадает — она расходуется на увеличение внутренней энергии тела и стенки:

$$K = U_2 - U_1 + Q, \quad (28.2)$$

где  $K$  — кинетическая энергия тела до столкновения,  $U_2 - U_1$  — изменение внутренней энергии тела,  $Q$  — количество теплоты, переданное стенке, воздуху и т. п.

2. Кинетическая энергия тела есть мера механического процесса — именно процесса упорядоченного переноса всех молекул в одном направлении с одной скоростью. Такое состояние может быть реализовано одним способом, следовательно, его термодинамическая вероятность равна единице.

Переходу кинетической энергии тела во внутреннюю соответствует переход от упорядоченного движения к беспорядочному. Мы не можем элементарно подсчитать число комбинаций, соответствующих различному распределению молекул по всевозможным величинам и направлениям скоростей, характеризующих беспорядочное тепловое движение. Но можно уверенно сказать, что число этих комбинаций при огромном числе молекул исключительно велико. Следовательно, термодинамическая вероятность данного состояния выражается очень большим числом.

Итак, процесс превращения механической энергии во внутреннюю есть переход из состояния с малой термодинамической вероятностью в более вероятное состояние. При огромном числе молекул этот процесс идет самопроизвольно. Обратный процесс перехода внутренней энергии в механическую означал бы переход от более вероятного состояния к менее вероятному. При большом числе молекул такой процесс столь мало вероятен, что практически он никогда не произойдет. Именно поэтому процесс преобразования механической энергии во внутреннюю необратим.

3. Читатель легко убедится самостоятельно, что все рассуждения, примененные при анализе явления неупругого удара, можно применить и для рассмотрения процесса преобразования энергии при трении, при нагревании проводников электрическим током и т. п.

Аналогичные рассуждения позволяют выяснить причину необратимости процесса теплообмена. Однако здесь мы этот вопрос рассматривать не будем, а сделаем это несколько более простым способом в § 28.8.

### § 28.7. Термодинамическая вероятность и энтропия

1. *Термодинамическая вероятность служит характеристикой направленности тепловых процессов.* Сравнив вероятности двух состояний термодинамической системы, мы сразу установим направление процесса, который возможен в данной системе: это будет переход из менее вероятного в более вероятное состояние. Однако вычисление термодинамической вероятности является весьма сложной задачей, так как практически чрезвычайно трудно подсчитать число различных комбинаций молекул, соответствующих тому или иному состоянию системы. Поэтому для термодинамических расчетов используется иная физическая величина, введенная Р. Клаузиусом и названная им *энтропией*.

*Энтропия*, как и термодинамическая вероятность, — *это физическая величина, характеризующая направленность процессов в природе.* Обе эти величины могут служить мерой беспорядка в системе, состоящей из множества частиц.

2. Больцман установил, что *энтропия пропорциональна логарифму термодинамической вероятности*, а Планк показал, что коэффициентом пропорциональности между энтропией и натуральным логарифмом термодинамической вероятности служит постоянная Больцмана:

$$S = k \ln W. \quad (28.3)$$

Если система переходит из одного состояния в другое, то с изменением термодинамической вероятности меняется и энтропия:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln W_2 - k \ln W_1 = k \ln \frac{W_2}{W_1}, \quad (28.4)$$

где индекс 1 относится к первому состоянию, индекс 2 — ко второму.

Выясним основные свойства энтропии, играющей исключительно важную роль в термодинамике.

3. Прежде всего, *энтропия системы полностью определяется состоянием, в котором находится система*; она не зависит от того процесса, с помощью которого система пришла в это состояние. В этом отношении энтропия аналогична энергии и отличается от работы или количества теплоты. Причина заключается в том, что

каждое состояние системы определяется каким-то числом комбинаций молекул. Следовательно, ему соответствует определенная термодинамическая вероятность, а согласно (28.3) каждому значению вероятности соответствует одно определенное значение энтропии.

4. Далее, *энтропия системы, состоящей из двух (или нескольких) независимых частей, равна сумме энтропий этих частей*. И в этом отношении энтропия похожа на энергию, ибо при отсутствии взаимодействия между двумя частями системы ее энергия равна сумме энергий этих частей.

Для доказательства вычислим сперва термодинамическую вероятность. Пусть состояние первой части системы реализуется с помощью  $W^{(1)}$  комбинаций молекул, второй части — с помощью  $W^{(2)}$  комбинаций. Поскольку обе части независимы, то каждому сочетанию молекул в первой части системы могут быть поставлены в соответствие  $W^{(2)}$  сочетаний в другой части. Тогда число комбинаций молекул, с помощью которых реализуется состояние всей системы, равно  $W^{(1)}W^{(2)}$ . Но это и есть ее термодинамическая вероятность. Итак,

$$W = W^{(1)}W^{(2)}. \quad (28.5)$$

Прологарифмировав выражение (28.5) и умножив полученное равенство на постоянную Больцмана, получим

$$k \ln W = k \ln W^{(1)} + k \ln W^{(2)}$$

или, согласно (28.3),

$$S = S^{(1)} + S^{(2)}. \quad (28.6)$$

5. Наконец, очевидно, что *при необратимых процессах*, таких, как диффузия или превращение механической энергии во внутреннюю, *энтропия возрастает*. В самом деле, как было показано выше, при этих процессах возрастает термодинамическая вероятность, а тогда, согласно (28.4), растет и энтропия: если  $W_2 > W_1$ , то и  $S_2 > S_1$ .

## § 28.8. Энтропия и теплообмен

1. Пусть тело изотермически получает или отдает некоторое количество теплоты  $Q$ ; при этом его энтропия меняется. Как показал Клаузиус, в этом случае изменение энтропии

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q}{T}, \quad (28.7)$$

где  $S_1$  — энтропия начального состояния,  $S_2$  — энтропия конечного состояния,  $T$  — температура, при которой происходит теплообмен,  $Q$  — отданное или полученное количество теплоты. При этом, согласно определению понятия «количество теплоты» (см. § 21.3), справедливо следующее правило знаков:  $Q > 0$ , если тело при теплообмене получает энергию;  $Q < 0$ , если тело при теплообмене теряет энергию, отдавая ее другому телу.

2. Вычислим изменение энтропии системы из двух тел, если между ними происходит теплообмен. Для простоты расчета положим, что эта система окружена адиабатной оболочкой, так что теплообмен с окружающей средой исключен (рис. 28.3).

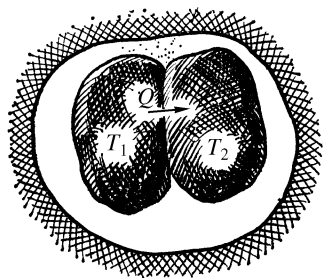


Рис. 28.3

Согласно (28.6) имеем

$$\Delta S = \Delta S^{(1)} + \Delta S^{(2)}, \quad (28.8)$$

где  $\Delta S^{(1)}$  — изменение энтропии первого тела, а  $\Delta S^{(2)}$  — второго.

Пусть температура первого тела до теплообмена равна  $T_1$ , температура второго —  $T_2$ , причем  $T_2 < T_1$ . Как известно из опыта, при теплообмене энергия (в форме теплоты) передается всегда от горячего тела к холодному; тогда, согласно правилу знаков для количества теплоты,  $Q^{(1)} = -Q$ ,  $Q^{(2)} = Q$ , ибо первое тело отдает энергию, а второе — получает. В результате теплообмена температуры тел изменятся и станут: у первого  $T_1 - \Delta T_1 = T_{\text{ср}}^{(1)}$  у второго  $T_2 + \Delta T_2 = T_{\text{ср}}^{(2)}$ . Изменение энтропии всей системы, согласно (28.7) и (28.8), равно

$$\Delta S = \frac{Q^{(1)}}{T_{\text{ср}}^{(1)}} + \frac{Q^{(2)}}{T_{\text{ср}}^{(2)}} = -\frac{Q}{T_{\text{ср}}^{(1)}} + \frac{Q}{T_{\text{ср}}^{(2)}} = \frac{Q(T_{\text{ср}}^{(1)} - T_{\text{ср}}^{(2)})}{T_{\text{ср}}^{(1)}T_{\text{ср}}^{(2)}}. \quad (28.9)$$

Но термодинамические температуры  $T_{\text{ср}}^{(1)}$  и  $T_{\text{ср}}^{(2)}$  — положительные числа; согласно условию теплообмена  $T_{\text{ср}}^{(1)} - T_{\text{ср}}^{(2)} > 0$  и  $Q > 0$ . Итак, в выражении (28.9) правая часть — существенно положительное число. Отсюда следует, что  $\Delta S > 0$ , т. е. *энтропия замкнутой и адиабатически изолированной системы в результате теплообмена между ее составными частями возрастает.*

3. Заметим, что рассмотренный процесс теплообмена *необратим*: энергия (в форме тепла) сама собой переходит от горячего

тела к холодному, что ведет к выравниванию температур во всех частях этой системы. Обратный же процесс передачи тепла от холодного тела к горячему сам по себе никогда не идет.

Итак, мы видим, что *при необратимых процессах энтропия замкнутой и адиабатически изолированной системы возрастает*,

$$\Delta S_{\text{необр}} > 0. \quad (28.10)$$

4. Наконец, покажем, что при обратимых процессах энтропия не меняется. Для этой цели исследуем в качестве примера квазистатический изотермический и адиабатный процессы расширения или сжатия газа.

Пусть газ квазистатически изотермически расширяется. При этом он совершает работу по подъему груза и получает некоторое количество теплоты из окружающей среды. Изменение энтропии всей системы

$$\Delta S = \Delta S_c + \Delta S_r + \Delta S_m, \quad (28.11)$$

где индексы «с», «г» и «м» относятся соответственно к среде, газу и механической системе. Но  $\Delta S_c = -Q/T$  и  $\Delta S_r = Q/T$ , ибо среда отдает энергию (в форме тепла), а газ столько же получает. Что же касается изменения энтропии механической системы, то оно равно нулю, ибо в консервативных системах при любых процессах термодинамическая вероятность и соответственно энтропия не меняются:  $\Delta S_m = 0$ . Тогда получим, что

$$\Delta S = -\frac{Q}{T} + \frac{Q}{T} = 0.$$

Очевидно также, что при квазистатическом адиабатном процессе энтропия системы не меняется: из условия адиабатности  $Q = 0$  следует, согласно (28.7), что и  $\Delta S = 0$ .

5. Но *квазистатические процессы* (как изотермический, так и адиабатный) *обратимы*. Следовательно, на этих примерах мы показали, что

$$\Delta S_{\text{обр}} = 0. \quad (28.12)$$

Итак, мы получили весьма важный результат: *при любых процессах энтропия замкнутой и адиабатически изолированной системы не убывает*,

$$\Delta S \geq 0. \quad (28.13)$$

Здесь знак равенства относится к обратимым процессам, знак неравенства — к необратимым.



## § 28.9. Второе начало термодинамики

1. При рассмотрении реальных тепловых процессов мы убедились в том, что им присуща определенная направленность. Именно, все они самопроизвольно протекают таким образом, что их результатом является *выравнивание термодинамических параметров*: давления, температуры, плотности, химического состава и т. п. Между тем из основных законов природы — законов сохранения импульса, момента импульса и энергии (в форме первого начала термодинамики) — направленность и, таким образом, необратимость тепловых процессов никак не вытекает.

В самом деле, первое начало термодинамики не накладывает запрета на процесс, при котором некоторое количество теплоты передавалось бы от холодного тела к горячему. Первое начало требует лишь одного: чтобы количество теплоты, отданное одним телом, в точности равнялось количеству теплоты, которое получит другое, иными словами, чтобы полная энергия замкнутой и адиабатически изолированной системы не изменилась. А вот вопрос о том, от какого тела к какому перейдет энергия при теплообмене, от горячего к холодному или наоборот, остается открытым: ответ на него из первого начала термодинамики не следует.

Точно так же, исходя из первого начала, нельзя объяснить необратимость процесса превращения механической энергии во внутреннюю при неупругом ударе, трении и т. п. Первое начало требует лишь одного: чтобы сумма механической и внутренней энергии замкнутой и адиабатически изолированной системы не изменилась. Но и здесь закон сохранения энергии допускает в равной мере возможность превращения как механической энергии во внутреннюю, так и внутренней в механическую. Истинное направление процесса на основе первого начала термодинамики предсказать нельзя.

2. Таким образом, мы пришли к выводу, что направленность и, таким образом, необратимость реальных тепловых процессов определяется не законами сохранения, а каким-то другим законом природы. Он называется *вторым началом термодинамики*.

Существуют различные формулировки второго начала термодинамики, эквивалентные друг другу. Наиболее общая такова:

*При любых процессах, протекающих в замкнутой и адиабатически изолированной макроскопической системе, ее энтропия не убывает, т. е.  $\Delta S \geq 0$ .*

3. Из второго начала термодинамики следует принцип запрета, сформулированный Клаузиусом: *невозможен процесс,*

*единственным результатом которого была бы передача энергии в форме тепла от холодного тела к горячему* (см. также § 29.5).

Действительно, если бы такой процесс был возможен, то он сопровождался бы убылью энтропии (см. § 28.8). А это противоречит сформулированному выше второму началу термодинамики.

4. Следует обратить внимание на смысл слов «единственным результатом». Это значит, что передача энергии в форме тепла от холодного тела к горячему невозможна в том случае, когда больше никакие процессы в природе не происходят. Если же наряду с теплообменом происходит еще один процесс (называемый *компенсирующим*, см. § 29.4), то запрет, налагаемый вторым началом термодинамики, снимается и становится возможной передача энергии в форме тепла от тела с низкой температурой к телу с более высокой температурой. Условия, при которых происходит такой процесс, будут рассмотрены в § 29.7.

### § 28.10. Статистический смысл второго начала термодинамики. Флуктуации

1. Законы сохранения имеют неограниченную область применения. Они одинаково справедливы как для микрочастиц, так и для макроскопических систем. *Второе же начало термодинамики применимо только к макроскопическим системам, состоящим из огромного числа молекул.*

Как мы видели, возрастание энтропии есть следствие роста термодинамической вероятности. Но молекулярная статистика вовсе не исключает *принципиальной* возможности процесса, при котором термодинамическая вероятность некоторой системы убывает, хотя такие процессы при большом числе молекул в системе и происходят крайне редко. Следовательно, мы не можем, хотя бы в принципе, исключить возможность процессов, при которых энтропия убывает, как бы ни была мала вероятность их реализации на практике.

2. Отсюда следует необходимость уточнения формулировки второго начала термодинамики. С учетом идей молекулярной статистики его нужно формулировать так:

*В замкнутой и адиабатически изолированной макроскопической системе наиболее вероятным является процесс, сопровождающийся возрастанием энтропии.*

Для макроскопических систем, состоящих из огромного числа молекул, второе начало термодинамики здесь дает такие же надежные результаты, как и законы сохранения. Что же касается микросистем, состоящих из сравнительно малого числа молекул,

то в них вполне возможны отклонения истинных значений физических величин от их средних значений, называемые *флуктуациями*.

### § 28.11. Броуновское движение и флуктуации

1. Результатом флуктуации давления является броуновское движение (см. § 25.3). Пользуясь законами динамики, нельзя объяснить, почему броуновское движение наблюдается из частиц, размеры которых составляют около 0,5–1 мкм, а частицы размерами более 5 мкм уже не участвуют в этом движении.

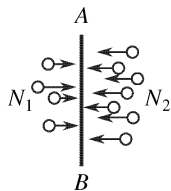


Рис. 28.4

Предположим для простоты расчета, что броуновская частица имеет форму длинной и тонкой нити  $AB$  (рис. 28.4).

Подсчитаем, какова вероятность интересующей нас флуктуации давления при различных размерах нити. Примем, что длина нити равна 0,5 мкм, а расстояние между молекулами газа — около 0,001 мкм. Тогда с обеих сторон нити расположится примерно 1000 молекул.

Если число молекул справа и слева одинаково, скажем,  $N_1 = N_2 = 500$ , то частица находится в равновесии. Если же слева окажется  $N_1 = 470$ , а справа  $N_2 = 530$  молекул, то давление справа окажется в  $530/470 = 1,13$  раза больше, иными словами, возрастает на 13 %. Сравним вероятность такой флуктуации с вероятностью равновесного состояния.

Термодинамическая вероятность равновесного состояния равна числу сочетаний, которое можно составить из 1000 молекул по 500 молекул с каждой стороны нити:

$$W_{\text{равн}} = C_{1000}^{500} = \frac{1000 \cdot 999 \cdot 998 \dots 503 \cdot 502 \cdot 501}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 498 \cdot 499 \cdot 500}.$$

Термодинамическая же вероятность рассматриваемой флуктуации давления

$$W_{\text{флукт}} = C_{1000}^{470} = \frac{1000 \cdot 999 \dots 533 \cdot 532 \cdot 531}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 468 \cdot 469 \cdot 470}.$$

Их отношение:

$$w = \frac{W_{\text{флукт}}}{W_{\text{равн}}} = \frac{C_{1000}^{470}}{C_{1000}^{500}} = \frac{(1000 \cdot 999 \dots 532 \cdot 531)(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 469 \cdot 470 \cdot 471 \dots 500)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 469 \cdot 470)(1000 \cdot 999 \dots 531 \cdot 530 \dots 501)}.$$

Сократив одинаковые множители, получим

$$w = \frac{471 \cdot 472 \cdot 473 \dots 498 \cdot 499 \cdot 500}{501 \cdot 502 \cdot 503 \dots 528 \cdot 529 \cdot 530} = 0,165.$$

2. Вычислить эту величину элементарными методами трудно, но можно определить ее границы. Для этого учтем, что  $471/501 = 0,9401$  и  $500/530 = 0,9434$ . Таким образом,

$$0,9401^{30} < w < 0,9434^{30},$$

откуда следует

$$0,157 < w < 0,174.$$

Более точный расчет дает

$$w = 0,165 \approx 17\%.$$

Итак, мы получили важный результат: для броуновской частицы размером около 0,5 мкм вероятность флуктуации давления на 13 % составляет  $0,1654 \approx 17\%$  от вероятности равновесного состояния. Следовательно, если такая частица в течение часа будет находиться в покое (равновесное состояние), то около 10 мин на нее будут действовать значительные силы, которые приведут частицу в движение. Полагая, что длительность «скачка» составляет около одной секунды, получим, что в течение часа броуновская частица совершит около 600 «скачков».

Рекомендуем читателю самостоятельно показать, что вдвое большая частица будет совершать всего около 100 «скачков» в течение часа.

3. Чтобы получить аналогичный «скачок» броуновской частицы размером 5 мкм, которую окружают при тех же условиях 10 000 молекул, необходимо, чтобы слева расположилось 4700 молекул, а справа 5300 молекул. Флуктуация давления опять оказалась бы равной 13 %. Для вероятности флуктуации получим

$$w = \frac{W_{\text{флукт}}}{W_{\text{равн}}} = \frac{C_{10\,000}^{4700}}{C_{10\,000}^{5000}} = 2,2 \cdot 10^{-8}.$$

Таким образом, вероятность флуктуации для этой частицы настолько мала, что ее практически можно положить равной нулю. Чтобы заметить только один «скачок», длящийся около секунды, за частицей следует наблюдать примерно  $4,5 \cdot 10^7$  с, или, поскольку 1 год  $= 3,16 \cdot 10^7$  с, около полутора лет! Совершенно ясно, почему частицы аналогичных или еще больших размеров в броуновском движении не участвуют.

Заметим, что наш расчет является весьма упрощенным. Но порядок величин, полученный выше, близок к истине.

## § 28.12. Броуновское движение и постоянная Больцмана

1. Попытаемся оценить, куда переместится броуновская частица за время наблюдения  $t$ , которое значительно больше времени свободного пробега молекулы  $\tau$ . Для этой цели разобьем время наблюдения на большое число равных интервалов  $\Delta t = t/N$  с таким расчетом, чтобы и эти интервалы были много больше времени свободного пробега. Ниже мы оценим этот интервал.

За время  $\Delta t$  частица сместится на расстояние  $L$ , которое мы назовем «шагом» частицы. На протяжении этого пути частица испытывает огромное число ударов ( $\Delta t/\tau \approx 10^{11}$ ) со стороны окружающих ее молекул. А это означает, что каждый последующий «шаг» броуновской частицы абсолютно не зависит от направления предыдущего «шага» и угол между ними меняется совершенно случайным образом.

Итак, мы никоим образом не в состоянии предсказать, где будет находиться броуновская частица в любой момент времени. *Движение броуновской частицы абсолютно хаотично.*

2. Двигаясь беспорядочно, частица то отдаляется, то приближается к своему первоначальному положению (рис. 28.5). И так

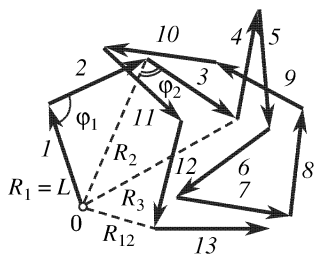


Рис. 28.5

как ее перемещения во всех направлениях равновероятны, то может показаться, что частица будет все время топтаться около своего начального положения. Однако опыт показывает, что это не так. Например, капля чернил в воде постепенно растекается. Частицы краски — это и есть броуновские частицы. А это значит, что за достаточно большой промежуток времени они постепенно удаляются от первоначального положения.

Среднее расстояние, на которое броуновская частица удаляется от начального положения за промежуток времени, значительно больший времени среднего пробега молекулы, называется *средним квадратичным перемещением* частицы. Метод вычисления этой величины предложили в 1904–1907 гг. А. Эйнштейн и М. Смолуховский.

3. Для решения этой задачи обратимся к рис. 28.5. Здесь  $L$  — «шаг» частицы; расстояния от частицы до первоначального ее положения в следующие друг за другом промежутки времени  $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots, \Delta t_N$  обозначены соответственно через  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_N$  (на рисунке обозначены только  $R_1 = L, R_2, R_3$  и  $R_{12}$ ). Углы, характеризующие направления последующих перемещений частицы, обозначены соответственно через  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{N-1}$ .

На основе теоремы косинусов составим систему равенств:

$$R_2^2 = R_1^2 + L^2 - 2R_1L \cos \varphi_1,$$

$$R_3^2 = R_2^2 + L^2 - 2R_2L \cos \varphi_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$R_N^2 = R_{N-1}^2 + L^2 - 2R_{N-1}L \cos \varphi_{N-1},$$

Легко заметить, что при сложении левых и правых частей квадраты промежуточных перемещений сокращаются; останутся только  $R_N^2$  и  $R_1^2 = L^2$ . Итак,

$$R_N^2 = NL^2 - 2L(R_1 \cos \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_2 + \dots + R_{N-1} \cos \varphi_{N-1}).$$

Все слагаемые в скобках суть случайные величины, принимающие с равной вероятностью любые положительные и отрицательные значения. Следовательно, при большом числе наблюдений

среднее значение суммы в скобках равно нулю. Отсюда следует выражение для квадрата среднего квадратичного перемещения:

$$\Delta^2 = \langle R^2 \rangle = NL^2. \quad (28.14)$$

4. Как показали Эйнштейн и Смолуховский, эту величину можно выразить через время наблюдения, свойства жидкости и размеры частицы. Сделаем приближенный, но зато достаточно простой расчет. Для этого вначале оценим промежуток времени  $\Delta t$ .

Броуновская частица с массой  $m \approx 10^{-14}$  кг и радиусом  $r \approx 10^{-6}$  м представляет собой объект одновременно и макроскопический, и микроскопический. С энергетической точки зрения — это микроскопический объект, ибо частица участвует в тепловом движении и ее кинетическая энергия равна средней энергии теплового движения молекул, т.е.  $(3/2)kT$ . Но с точки зрения импульса — это макроскопический объект: импульс броуновской частицы  $p = \sqrt{2mK} = \sqrt{2m \cdot (3/2)kT}$  существенно больше импульса молекулы  $p_0 = \sqrt{2m_0 \cdot (3/2)kT}$ . Отношение импульсов

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{\frac{m}{m_0}} \approx \sqrt{\frac{10^{-14}}{10^{-26}}} = 10^6.$$

Естественно, что столкновение молекулы с броуновской частицей похоже на абсолютно упругое столкновение частицы со стенкой (см. § 17.3): молекула отскакивает от частицы практически с той же скоростью в противоположном направлении, а импульс броуновской частицы меняется на малую величину  $\Delta p \approx 2p_0$ . Потребуется огромное количество столкновений молекул с броуновской частицей, чтобы она «забыла» о первоначальном направлении своего движения и стала двигаться в другом направлении. Число этих ударов можно оценить так:

$$N_0 \approx \frac{p}{p_0} \approx 10^6.$$

Это позволяет оценить промежуток времени  $\Delta t$ , в течение которого частица проходит один «шаг»:

$$\Delta t \approx N_0 \tau \approx 10^6 \cdot 10^{-10} \text{ с} \approx 10^{-4} \text{ с}.$$

Естественно, что за время наблюдения порядка  $t \approx 1$  ч число «шагов» составит

$$N = \frac{t}{\Delta t} \approx \frac{10^3}{10^{-4}} = 10^7. \quad (28.15)$$

5. Поскольку с точки зрения силового воздействия броуновскую частицу можно рассматривать как макроскопический объект, то суммарное воздействие сталкивающихся с ней молекул можно приравнять силе вязкого трения  $F = 6\pi r\eta v$  (см. § 11.8). Однако если воздействие силы вязкого трения на макроскопический объект сводится к его торможению, то в случае броуновской частицы эта сила на длине «шага» сначала затормозит частицу, а затем вновь разгонит ее до прежней скорости движения, но в другом направлении.

Итак, работа средней силы вязкого трения на длине «шага» примерно равна удвоенному значению средней кинетической энергии теплового движения:  $F_{\text{ср}}L \approx 2\langle \varepsilon_{\text{к}} \rangle$ .

Подставив значения величин, имеем

$$\frac{1}{2} \cdot 6\pi r\eta v L \approx 2 \cdot \frac{3}{2} kT.$$

Умножим обе части равенства на время наблюдения и учтем, что  $vt \approx NL$ ; получим  $\pi r\eta NL^2 \approx kTt$ .

Итак,

$$\Delta^2 = NL^2 = \frac{kTt}{\pi r\eta}.$$

Мы получили формулу Эйнштейна, пользуясь которой можно из результатов наблюдений за поведением броуновской частицы определить постоянную Больцмана, а затем и постоянную Авогадро (см. § 26.8). Такие опыты поставил в 1908–1913 гг. Ж. Б. Перрен, получивший впервые для числа Авогадро надежное значение:

$$6 \cdot 10^{26} < N_A < 7 \cdot 10^{26}.$$

Эти классические работы сыграли огромную роль в обосновании статистической физики.

## Глава 29

### ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ

#### § 29.1. Тепловые машины и развитие техники

Прогресс человечества теснейшим образом связан с развитием энергетики. Овладение новым источником энергии, открытие новых путей ее преобразования и использования — это обычно целая эпоха в истории материальной культуры.

Так, мощный расцвет промышленности в XIX в. был связан с изобретением первого теплового двигателя — паровой машины. Создание двигателя внутреннего сгорания послужило базой для развития автомобильного

транспорта и самолетостроения. Газовая турбина в последние десятилетия вызвала переворот в авиации — замену тихоходных самолетов с поршневым двигателем реактивными и турбовинтовыми лайнерами, скорость которых приближается к скорости звука, а в последнее время — и сверхзвуковыми. С помощью реактивных тепловых двигателей осуществлена вековая мечта человечества — выход в космическое пространство.

Основная доля электроэнергии вырабатывается тепловыми электростанциями, генераторы которых приводятся в действие паровыми турбинами. На атомных электростанциях энергия, выделяющаяся при ядерных реакциях, также преобразуется сначала во внутреннюю энергию пара, который затем приводит в движение паровую турбину, а последняя — ротор генератора, в котором вырабатывается ток.

В данной главе, чтобы изучить общие свойства всех тепловых машин и назначение их основных узлов, а также выяснить параметры, определяющие КПД этих машин и пути его повышения, мы воспользуемся началами термодинамики.

## § 29.2. Тепловой двигатель

1. Все тепловые двигатели, независимо от их конструктивных особенностей, решают одну и ту же задачу — *превращение внутренней энергии в механическую*. Для этой цели энергия, выделяющаяся при сгорании топлива или при ядерных реакциях, передается путем теплообмена какому-либо газу. Расширяясь, газ производит работу против внешних сил, приводя в движение какой-либо механизм.

2. Очевидно, что в тепловом двигателе газ не может беспрестанно расширяться, ибо машина имеет конечные размеры. Следовательно, после расширения газ должен быть сжат так, чтобы он сам и все детали машины пришли в первоначальное состояние. После этого может быть произведено повторное расширение и т. д. Итак, мы пришли к выводу, что *тепловой двигатель должен работать циклично*; в течение цикла за процессом расширения газа следует его сжатие до первоначального состояния.

Реальные тепловые двигатели обычно работают по так называемому *разомкнутому циклу*, когда газ после расширения выбрасывается, а новая порция газа сжимается. Однако это существенно не влияет на термодинамику процесса, и мы будем ниже рассматривать *замкнутый цикл*, когда расширяется и сжимается одна и та же порция газа.

3. Для того чтобы двигатель в течение цикла совершил полезную работу, необходимо, чтобы работа в процессе расширения была больше работы сжатия. В этом случае внешние тела, окружающие двигатель, получают больше механической энергии, чем отдадут при сжатии. Покажем, что для этого температура газа при его сжатии должна быть ниже, чем при расширении. Для



доказательства этого положения вновь обратимся к рисункам 27.2 и 27.3. Начальные и конечные состояния газа при расширении и сжатии совпадают; следовательно, работа сжатия будет меньше работы расширения лишь в том случае, если во всех промежуточных состояниях давление в процессе сжатия будет меньше, чем при расширении. А это возможно лишь

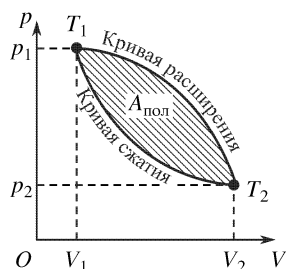


Рис. 29.1

в том случае, когда во всех промежуточных точках температура газа в процессе сжатия ниже, чем при расширении.

Обратимся к рис. 29.1. Здесь работа расширения численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком зависимости давления от объема в процессе расширения — *кривой расширения*. Работа сжатия — площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху *кривой сжатия*. Наконец, полезная работа изображается площадью, заштрихованной на рисунке; эта площадь ограничена графиком цикла, т. е. кривыми расширения и сжатия.

### § 29.3. Схематическое устройство и энергетический баланс теплового двигателя

1. На основе предыдущих рассуждений можно рассмотреть схему устройства любого теплового двигателя независимо от его конструктивных особенностей и характерные для него энергетические процессы.

Любой тепловой двигатель состоит из трех основных частей: рабочего тела, нагревателя и холодильника (рис. 29.2). Рабочим телом служит какой-либо газ (или пар), за счет расширения которого совершается работа. Рабочее тело получает некоторое количество теплоты  $Q_1$  от *нагревателя* — тела, у которого за счет сгорания топлива или за счет ядерных реакций поддерживается постоянной высокая температура  $T_1$ . Наконец, при сжатии газ передает некоторое количество теплоты  $Q_2$  *холодильнику* — телу, температура которого  $T_2$  постоянна и всегда ниже температуры нагревателя. За счет

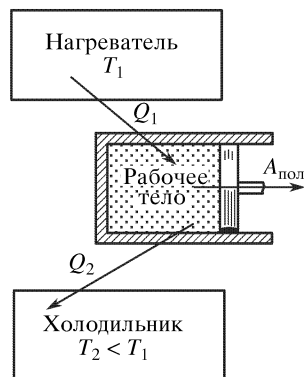


Рис. 29.2

го  $T_2$  постоянна и всегда ниже температуры нагревателя. За счет

этого давление газа при сжатии ниже, чем при расширении, что, как показано в предыдущем параграфе, является необходимым условием успешной работы двигателя.

Заметим, что холодильником может служить и окружающая среда, как это имеет место в двигателях внутреннего сгорания и в реактивных двигателях.

2. Баланс энергии за цикл можно получить на основе первого начала термодинамики (27.6). Поскольку при завершении цикла рабочее тело приходит в первоначальное состояние, его внутренняя энергия не меняется:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 0,$$

отсюда

$$Q_1 = Q_2 + A_{\text{пол}} + Q_{\text{потерь}}, \quad (29.1)$$

где  $Q_{\text{потерь}}$  — энергия, теряемая в процессе цикла на теплообмен с окружающей средой, на трение и т. п. Отсюда следует, что полезная работа, совершаемая двигателем за цикл,

$$A_{\text{пол}} \leq Q_1 - Q_2, \quad (29.2)$$

где случай неравенства характеризует реальные машины, а случай равенства — идеальную машину, где нет потерь энергии.

3. Коэффициентом полезного действия двигателя  $\eta$  называется отношение полезной работы к энергии, которую рабочее тело получило от нагревателя, т. е. к количеству теплоты  $Q_1$ :

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{Q_1} \leq \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (29.3)$$

Из (29.3) следует, что даже у идеального теплового двигателя, работающего без потерь, КПД принципиально ниже 100 %. Он мог бы быть равен 100 % только в том случае, если бы в течение цикла не отдавалась энергия холодильнику, т. е. если бы  $Q_2$  могло быть равным нулю. Но, как уже говорилось, это невозможно, ибо газ в процессе сжатия необходимо охладить, для чего необходимо передать холодильнику количество теплоты  $Q_2 \neq 0$ .

## § 29.4. Тепловой двигатель и второе начало термодинамики

1. На основе анализа принципа работы теплового двигателя У. Томсон и М. Планк пришли к выводу, который формулируется в виде принципа запрета:

*Невозможен процесс, единственным результатом которого было бы охлаждение нагревателя и превращение полученного количества теплоты полностью в работу.*

Можно показать, что запрет Томсона–Планка является следствием второго начала термодинамики. Действительно, преобразование внутренней энергии в механическую есть процесс перехода системы из состояния с беспорядочным движением молекул в состояние их упорядоченного движения. Но при таком процессе энтропия системы должна убывать, а это противоречит второму началу термодинамики.

Поэтому преобразование внутренней энергии в механическую не может быть *единственным* процессом. Параллельно с ним должен идти еще один процесс, ведущий к росту энтропии и *компенсирующий убывание энтропии* при преобразовании внутренней энергии в механическую.

2. Хотя при изотермическом расширении идеального газа работа целиком совпадает с полученным количеством теплоты (см. § 27.6), это не ведет к убыванию энтропии системы. Дело в том, что сам процесс расширения газа сопровождается ростом энтропии. Этот компенсирующий процесс и снимает запрет, налагаемый вторым началом.

То же относится и к работе теплового двигателя. Действительно, здесь в течение цикла не только охлаждается нагреватель и совершается работа, но и часть энергии передается холодильнику. Вот этот компенсирующий процесс и снимает запрет, налагаемый вторым началом термодинамики на явление преобразования внутренней энергии в механическую.

3. Принцип запрета Клаузиуса (см. § 28.9), принцип запрета Томсона–Планка и принцип возрастания энтропии являются тремя равносильными формулировками второго начала термодинамики.

Часто первое и второе начала термодинамики формулируют как законы, запрещающие создание вечных двигателей.

*Первое начало:* невозможен вечный двигатель первого рода (perpetuum mobile I), т. е. машина, которая совершала бы периодическую работу, не получая энергию от других источников.

*Второе начало:* невозможен вечный двигатель второго рода (perpetuum mobile II), т. е. машина, которая совершала бы периодически работу только за счет охлаждения одного источника теплоты, например земной суши или океана, имеющих колоссальный запас внутренней энергии, без передачи тепла более холодному телу.

### § 29.5. Цикл Карно

1. Для упрощения анализа принципа действия теплового двигателя и расчета его КПД рассмотрим мысленный эксперимент, предложенный Н. Карно.

Рабочим телом в идеализированной машине Карно является идеальный газ. В начале цикла рабочее тело имеет одинаковую температуру  $T_1$  с нагревателем. Это состояние изображено на графике точкой 1 (рис. 29.3). Находясь в контакте с нагревателем, газ изотермически расширяется, получая количество теплоты  $Q_1$ , и приходит в состояние 2. Далее он расширяется адиабатно до состояния 3. Его температура уменьшается и становится равной  $T_2$  — температуре холодильника. За расширением следует сжатие газа. Находясь в контакте с холодильником, газ под действием внешних сил изотермически сжимается из состояния 3 в состояние 4, передавая холодильнику количество теплоты  $Q_2$ . Затем путем адиабатного сжатия температура газа повышается до первоначальной. Цикл замыкается, и рабочее тело возвращается в исходное состояние.

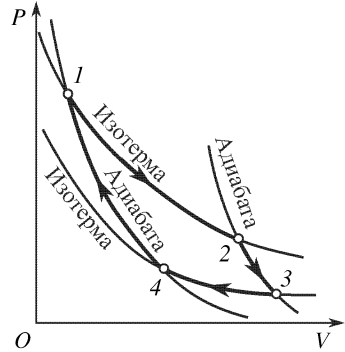


Рис. 29.3

2. Цикл Карно представляет собой идеализацию цикла реальной тепловой машины. Предполагается, что здесь нет потерь энергии на теплообмен с окружающей средой, в машине нет трения, а процессы расширения и сжатия газа идут квазистатически и, следовательно, обратимо. Отсюда следует, что общее изменение энтропии всей системы за цикл равно нулю.

Рассмотрим, как же меняется энтропия отдельных частей системы.

Естественно, что энтропия рабочего тела не меняется, ибо оно возвращается в исходное состояние. Не меняется и энтропия окружающих тел, поскольку они не участвуют в теплообмене, а механические процессы не вызывают изменения энтропии. Энтропия нагревателя, согласно (28.7), убывает на величину  $\Delta S_{\text{нагр}} = -Q_1/T_1$ , а энтропия холодильника возрастает на величину  $\Delta S_{\text{хол}} = Q_2/T_2$ . А так как изменение энтропии всей системы

$\Delta S = 0$ , то

$$\Delta S = \Delta S_{\text{нагр}} + \Delta S_{\text{хол}} = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (29.4)$$

Отсюда следует, что  $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$ , или

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (29.5)$$

3. Согласно (29.3) и (29.5) для идеальной машины, работающей по обратимому циклу Карно,

$$\eta_{\text{Карно}} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (29.6)$$

Мы получили фундаментальной важности результат: *КПД идеальной машины, работающей по обратимому циклу Карно, определяется лишь температурами нагревателя и холодильника.*

### § 29.6. КПД реального двигателя

1. Во всяком реальном двигателе существуют потери. Кроме того, происходящие в нем процессы необратимы. Естественно, что энтропия системы в течение цикла возрастает:  $\Delta S > 0$ . Выражение (29.4) превратится в неравенство:

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} > 0. \quad (29.7)$$

Отсюда следует, что для необратимо работающего теплового двигателя

$$\frac{Q_2}{Q_1} > \frac{T_2}{T_1}. \quad (29.8)$$

2. КПД реальной машины, согласно (29.3), выражается неравенством  $\eta < 1 - Q_2/Q_1$ . Если в этом выражении заменить вычитаемое, т. е.  $Q_2/Q_1$ , меньшей дробью  $T_2/T_1$ , то неравенство лишь усилится. Итак,

$$\eta < \frac{1 - Q_2}{Q_1} < \frac{1 - T_2}{T_1}. \quad (29.9)$$

Мы видим, что *КПД реального теплового двигателя всегда меньше КПД машины Карно, работающей в том же температурном интервале, т. е.*

$$\eta < \eta_{\text{Карно}}. \quad (29.10)$$

3. Следует обратить внимание на принципиальное отличие тепловых двигателей от механических или электрических машин. Совершенствуя последние, мы приближаем их КПД к теоретическому предельному значению 100 %. И хотя этот предел недостижим в реальных условиях, можно путем уменьшения потерь приблизиться к нему. Совершенствуя тепловые двигатели, мы приближаем их КПД не к 100 %, а к КПД машины Карно, работающей в том же температурном интервале. Отсюда следует, что решающим фактором в процессе повышения КПД теплового двигателя является повышение температуры нагревателя и снижение температуры холодильника.

Естественно, что снижение всякого рода потерь также служит повышению КПД теплового двигателя, но наиболее эффективным методом является увеличение разности температур нагревателя и холодильника.

### § 29.7. Обратный цикл Карно

1. Цикл Карно обратим, следовательно, его можно провести в обратном направлении. Посмотрим, какой энергетический эффект получится в этом случае.

Пусть рабочее тело, состояние которого изображено на рис. 29.4 точкой 1, адиабатно расширяется до состояния, изображенного точкой 4. При этом температура газа снизится до температуры холодильной камеры  $T_2$ . Далее рабочее тело изотерми-

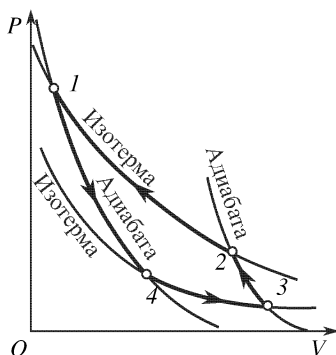


Рис. 29.4

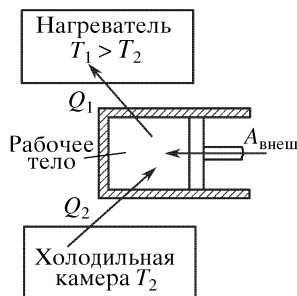


Рис. 29.5

чески расширяется до состояния 3, совершая работу расширения и поглощая от холодильной камеры количество теплоты  $Q_2$ . Из состояния 3 в состояние 2 газ переходит путем адиабатного сжа-

тия, и его температура повышается до температуры нагревателя  $T_1$ . Наконец, из состояния 2 в состояние 1 рабочее тело переходит путем изотермического сжатия за счет работы, совершаемой внешними силами. При этом рабочее тело передает нагревателю некоторое количество теплоты  $Q_1$ .

Общая схема преобразования энергии показана на рис. 29.5.

2. Поскольку в обратном цикле сжатие рабочего тела совершается при более высокой температуре, чем расширение, работа сжатия больше работы расширения. Следовательно, за цикл внешние силы совершают положительную работу:

$$A_{\text{внешн}} = A_{\text{сж}} - A_{\text{расш}} > 0. \quad (29.11)$$

Согласно (27.23)  $Q_1 = A_{\text{сж}}$ ,  $Q_2 = A_{\text{расш}}$ . Подставив в предыдущее выражение, получим, что  $A_{\text{внешн}} = Q_1 - Q_2$ , или

$$Q_1 = Q_2 + A_{\text{внешн}}. \quad (29.12)$$

3. Итак, в результате данного цикла некоторое количество теплоты переходит от холодного тела к телу с более высокой температурой. Может показаться, что это противоречит второму началу термодинамики (см. § 28.9). Однако нетрудно убедиться, что это не так. Переход энергии в форме тепла от холодного тела к горячему — это процесс, ведущий к уменьшению энтропии. Второе начало термодинамики запрещает такой процесс, если он *единственный*. Однако в рассматриваемом случае обратного цикла Карно происходит еще один процесс: превращение механической энергии окружающих тел во внутреннюю энергию нагревателя. А этот процесс сопровождается возрастанием энтропии.

Оказывается, что процесс возрастания энтропии за счет превращения механической энергии во внутреннюю компенсирует убыль энтропии при переходе теплоты от холодильника к нагревателю. Компенсирующий процесс снимает запрет, налагаемый вторым началом термодинамики, и делает возможным обратный цикл Карно.

4. Поскольку цикл Карно обратим, то полное изменение энтропии в течение цикла равно нулю. Следовательно, соотношение (29.5) остается в силе и для обратного цикла Карно.

Если же обратный цикл провести необратимо, то выражение (29.7) несколько изменится. Взамен (29.7) получим

$$\Delta S = -\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} > 0, \quad (29.13)$$

откуда

$$\frac{Q_2}{Q_1} < \frac{T_2}{T_1}. \quad (29.14)$$

Однако и в этом случае КПД реального цикла ниже КПД цикла Карно.

## § 29.8. Холодильная установка и тепловой насос

1. Если машина Карно является идеализацией теплового двигателя, то обратный цикл Карно служит идеализацией цикла двух других тепловых машин — холодильной установки и теплового насоса.

*Холодильная установка* имеет своей целью поддержание в холодильной камере температуры, которая ниже температуры окружающей среды. Это оказывается возможным, если рабочее тело тепловой машины провести по обратному циклу, аналогичному обратному циклу Карно. Рабочим телом в холодильной установке служат обычно пары легкокипящих жидкостей — аммиака, фреона и т. п. К машине подводится энергия от электрической сети. За счет этой энергии и совершается процесс «перекачки теплоты» от холодильной камеры к более нагретым телам — именно к окружающей среде. Для оценки эффективности холодильной установки найдем отношение количества теплоты, отнятого за цикл от холодильной камеры, к работе внешних сил — холодильный коэффициент

$$\xi = \frac{Q_2}{A}.$$

Пользуясь соотношениями (29.12) и (29.14), легко убедиться, что

$$\xi = \frac{Q_2}{A} \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \quad (29.15)$$

где знак равенства относится к обратимому, а знак неравенства — к необратимому циклу. Заметим, что чем меньше разность температур между холодильной камерой и окружающей средой, тем меньше нужно затратить механической (или электрической) энергии для «перекачки тепла» от холодного тела к горячему. Следует обратить внимание и на тот факт, что холодильный коэффициент может быть больше 100 %. Это ни в коей мере не противоречит тому факту, что КПД теплового двигателя всегда значительно меньше 100 %.

2. Холодильная установка может быть использована в качестве *теплового насоса* для отопительных целей.

Если отапливать помещение с помощью обычных электронагревателей, то количество теплоты, выделенное в нагревательных элементах, в точности равно расходу электроэнергии. Если же электроэнергию использовать для приведения в действие холодильной установки, в которой нагревателем служит отапливаемое помещение, а холодильной камерой — наружная атмосфера, то отапливаемое помещение получит больше тепла, чем его выделилось бы при непосредственном преобразовании электроэнергии во внутреннюю в нагревателях типа электроплиток, электропечей и т. п.

В самом деле, при отсутствии потерь в машине количество теплоты, полученное отапливаемым помещением,  $Q_1 = Q_2 + A$ , где  $A$  — расход электроэнергии,  $Q_2$  — количество теплоты, перекачиваемое от наружной атмосферы в помещение. В реальной установке благодаря потерям  $Q_1 < Q_2 + A$ . Но все



же и при наличии потерь можно при хорошей конструкции теплового насоса получить  $Q_1 > A$ .

3. Эффективность теплового насоса определяется отношением количества теплоты, которое получило отапливаемое помещение, к расходу электроэнергии. Рекомендуем читателю, пользуясь предыдущими соотношениями, самостоятельно показать, что отопительный коэффициент

$$\Psi = \frac{Q_1}{A} \leq \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (29.16)$$

Заметим, что при обратимом цикле отопительный коэффициент всегда больше 100 %.

4. Итак, тепловой двигатель, холодильная установка и тепловой насос — это три типа тепловых машин, действие которых определяется первым и вторым началами термодинамики. В дальнейшем нам встретится еще ряд явлений, для объяснения которых мы будем пользоваться этими основными законами природы.

## Глава 30 ОСНОВЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

### § 30.1. Термодинамические параметры движущегося газа

В данной главе основные законы термодинамики будут применены для изучения явлений в движущихся газах.

Состояние движущегося газа определяется не только его давлением, плотностью и температурой, но и скоростью его движения. Следовательно, скорость  $v$ , давление  $p$ , плотность  $\rho$  и температура  $T$  — это четыре термодинамических параметра, изменением которых определяются все процессы, происходящие в газе.

Пусть газ течет по некоторой трубе переменного сечения (рис. 30.1). Тогда в каждом сечении термодинамические параметры будут различными.

Если в любом сечении трубы термодинамические параметры газа не зависят от времени, то такое движение называется *установившимся*, или *стационарным*. Если же параметры со временем меняются, то это движение — *нестационарное*.

Ниже будут рассмотрены только установившиеся течения газа со скоростями, много меньшими скорости света ( $v \ll c$ ).

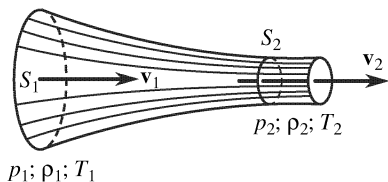


Рис. 30.1

### § 30.2. Уравнение неразрывности

1. *Расходом* жидкости или газа называется масса вещества, которая протекает через поперечное сечение трубы в единицу времени:

$$\mu = \frac{dm}{dt}. \quad (30.1)$$

Если скорость потока в некотором сечении площадью  $S$  равна  $v$ , то за время  $dt$  через это сечение пройдет объем газа  $dV = Sv dt$ . Масса этого газа  $dm = \rho Sv dt$ . Подставив в (30.1), получим для расхода следующее выражение:

$$\mu = \rho Sv. \quad (30.2)$$

2. Из закона сохранения массы для *стационарного потока* следует, что *расход в любом сечении трубы один и тот же*. В самом деле, если бы, например, в сечение  $S_1$  на рис. 30.1 втекало ежесекундно больше газа, чем его вытекает из сечения  $S_2$ , то масса газа внутри этого объема со временем возрастала бы. Это привело бы к возрастанию плотности и давления газа и в конечном счете к изменению скорости потока. А это означает нарушение условия стационарности.

Итак, для стационарных (установившихся) течений получается следующее уравнение:

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2. \quad (30.3)$$

Данное уравнение выражает собой закон сохранения массы вещества; оно называется *уравнением неразрывности струи*.

3. В гидродинамике и газодинамике принята следующая терминология. Вещество, протекающее по трубе, принято называть жидкостью независимо от того, в каком агрегатном состоянии оно находится, жидком или газообразном. Различают *сжимаемую жидкость* (обычно это газ) и *несжимаемую жидкость* — это так называемые капельные жидкости, а также газы в тех случаях, когда их сжимаемостью можно пренебречь (см. § 30.6).

4. У несжимаемой жидкости  $\rho_1 = \rho_2 = \text{const}$ , откуда следует

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (30.4)$$

### § 30.3. Уравнение импульса

1. При установившемся потоке импульс некоторой массы газа в данном сечении остается постоянной величиной. При переходе же в другое сечение импульс меняется за счет действия сил давления и сил внутреннего трения (вязкости).

Учет сил внутреннего трения представляет собой исключительно сложную задачу. Некоторые замечания по этому поводу будут сделаны в конце главы (см. § 30.16). Здесь же мы пренебрежем вязкостью газа и будем учитывать только силы давления. Жидкость, в которой не учитываются силы внутреннего трения, называется *идеальной*.

2. Согласно основному уравнению динамики (7.2) изменение импульса в единицу времени равно действующей силе; учитывая, что скорость жидкости в данном сечении постоянна, имеем

$$F_1 - F_2 = \frac{dm \cdot v_2 - dm \cdot v_1}{dt}, \quad (30.5)$$

где  $F_1 = p_1 S_1$ ,  $F_2 = p_2 S_2$  — силы давления в сечениях  $S_1$  и  $S_2$ . Но согласно (30.1) и (30.2)  $dm/dt = \rho S v$ . Подставив в (30.5), получим

$$p_1 S_1 - p_2 S_2 = \rho_2 S_2 v_2^2 - \rho_1 S_1 v_1^2,$$

или

$$S_1(p_1 + \rho_1 v_1^2) = S_2(p_2 + \rho_2 v_2^2). \quad (30.6)$$

Формула (30.6) называется *уравнением импульса для потока идеальной сжимаемой жидкости*.

### § 30.4. Уравнение Бернулли

1. Применим к потоку газа закон сохранения энергии — первое начало термодинамики (21.9). Рассматривая газ как идеальную сжимаемую жидкость, мы не будем учитывать силы внутреннего трения. Процессы, протекающие в газе, будем считать адиабатными.

В сечении  $S_1$  (см. рис. 30.1) масса газа  $dm$  обладает кинетической энергией  $K_1 = dm \cdot v_1^2/2$  и внутренней энергией  $U_1 = dm \cdot c_V T_1$ ; в сечении  $S_2$  имеем соответственно  $K_2 = dm \cdot v_2^2/2$  и  $U_2 = dm \cdot c_V T_2$ . Тогда изменение полной энергии газа при его переходе из сечения  $S_1$  в сечение  $S_2$  выразится так:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = \\ &= dm \cdot \frac{v_2^2}{2} + dm \cdot c_V T_2 - dm \cdot \frac{v_1^2}{2} - dm \cdot c_V T_1. \end{aligned}$$

Элементарная работа, произведенная газом,

$$\Delta A = p_2 dV_2 - p_1 dV_1,$$

где  $dV_1$  и  $dV_2$  — объемы данной массы газа в сечениях  $S_1$  и  $S_2$  соответственно. Подставив в (21.9) и учитывая, что при адиабат-

ном процессе теплообмена нет, т. е.  $Q = 0$ , имеем

$$dm \cdot \frac{v_2^2}{2} - dm \cdot \frac{v_1^2}{2} + dm \cdot c_V T_2 - dm \cdot c_V T_1 + p_2 dV_2 - p_1 dV_1 = 0.$$

Разделим обе части равенства на  $dm$  и учтем, что  $dm/dV = \rho$  есть плотность газа. Перенеся все члены с индексом 1 в одну часть равенства, а с индексом 2 — в другую, получим

$$\frac{v_1^2}{2} + c_V T_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + c_V T_2 + \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (30.7)$$

Формула (30.7) есть *уравнение энергии* (или уравнение Бернулли) для потока идеального газа, т. е. идеальной сжимаемой жидкости.

2. Подставив в (30.7) значение давления  $p = R\rho T/M$  (см. (26.18)) и учитывая, что  $c_p = c_V + (R/M)$ , имеем

$$\frac{v_1^2}{2} + c_p T_1 = \frac{v_2^2}{2} + c_p T_2. \quad (30.8)$$

Используя значение (26.18), получим

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{Mc_p}{R} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{Mc_p}{R} \frac{p_2}{\rho_2}.$$

Но  $\frac{Mc_p}{R} = \frac{c_p}{c_p - c_V} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ , ибо  $\frac{c_p}{c_V} = \gamma$ . Итак,

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (30.9)$$

Это выражение для уравнения Бернулли нам понадобится в дальнейшем.

3. При движении идеальной несжимаемой жидкости ее плотность и температура остаются неизменными. Полагая в равенстве (30.7)  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  и  $T_1 = T_2$ , имеем

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{v_2^2}{2} + p_2. \quad (30.10)$$

Это и есть *уравнение Бернулли* для несжимаемой идеальной жидкости.

### § 30.5. Скорость распространения упругих возмущений

1. Представим себе, что в каком-то слое неподвижного газа внезапно повысилось давление в результате быстрого сжатия или нагревания. За счет избытка давления этот слой станет расширяться, передавая импульс давления соседним слоям. Сжатие

этих слоев будет передаваться все дальше, и в газе возникнет *волна упругих возмущений*.

Аналогичное явление можно наблюдать, если бросить в воду камень. Здесь также возмущение передается от слоя к слою, и по воде бежит круговая волна.

*Фронтом волны* называется поверхность, во всех точках которой термодинамические параметры (скорость, плотность, давление и температура) газа имеют одинаковые значения. *Скоростью перемещения фронта волны* (скоростью волны)  $w$  называется скорость передачи упругого возмущения от слоя к слою (рис. 30.2 а).

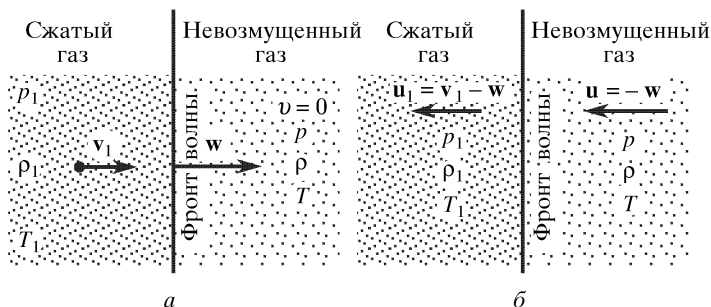


Рис. 30.2

2. Для вычисления скорости волны удобно перейти к системе отсчета, которая движется вместе с фронтом волны (рис. 30.2 б).

Действительно, в системе отсчета, связанной с невозмущенным газом, процесс распространения волны является неустановившимся, ибо параметры газа меняются со временем. В системе же отсчета, движущейся вместе с фронтом волны, процесс установившийся, и к нему можно применить уравнения неразрывности, импульса и энергии, рассмотренные в предыдущих параграфах.

В системе отсчета, связанной с фронтом волны, невозмущенный газ набегаёт на фронт волны со скоростью  $u = -w$ ; сжатый газ отстает от фронта волны и движется влево со скоростью  $u_1 = v_1 - w$  (рис. 30.2 б). Применив к потоку уравнения неразрывности (30.3) и импульсов (30.6), получим

$$\rho u = \rho_1 u_1, \quad p + \rho u^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2. \quad (30.11)$$

Выразив из первого равенства  $u_1 = \rho u / \rho_1$  и подставив во второе, получим для скорости распространения фронта волны выраже-

ние

$$w = |u| = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho} \cdot \frac{p_1 - p}{\rho_1 - \rho}} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta \rho}}. \quad (30.12)$$

3. В газах возможны волны двух типов — ударные и звуковые.

*Ударная волна* характерна тем, что на фронте волны термодинамические параметры меняются скачком и разности давлений  $p_1 - p$  и плотностей  $\rho_1 - \rho$  могут быть весьма значительными. Поэтому говорят, что фронт ударной волны — это *скачок уплотнения*.

*Звуковые волны* представляют собой *волны слабых возмущений*. Разности давлений и плотностей — очень малые величины:  $dp \ll p$  и  $d\rho \ll \rho$ . Поэтому можно в формуле (30.12) положить  $\rho_1 = \rho + d\rho \approx \rho$ , и для скорости звуковой волны получится следующее выражение:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (30.13)$$

4. Звуковые волны распространяются довольно быстро, и при прохождении фронта волны через газ процесс его сжатия следует считать адиабатным. Это позволяет вывести более удобное выражение для вычисления скорости звуковой волны.

Уравнение адиабаты:  $pV^\gamma = \text{const}$  (см. 27.26). Дифференцируя, получим

$$dp \cdot V^\gamma + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0,$$

откуда следует

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}. \quad (30.14)$$

Плотность газа  $\rho = m/V$ . Полагая, что масса газа не меняется, получим  $d\rho = -m dV/V^2$ . Разделив обе части этого равенства на плотность, получим

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}. \quad (30.15)$$

Подставив в (30.14), имеем

$$\gamma \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p}. \quad (30.16)$$

Скорость звука, согласно (30.13) и (30.16), выразится следующим образом:

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad (30.17)$$

или, учитывая, что по уравнению газового состояния  $p = R\rho T/M$  (см. (26.18)), имеем

$$a = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}. \quad (30.18)$$

Таким образом, *скорость звука в идеальном газе целиком определяется его температурой*.

### § 30.6. Учет сжимаемости газа. Число Маха

1. Выше уже говорилось, что в некоторых случаях можно сжимаемостью газа пренебречь и полагать, что его плотность является постоянной величиной. Введем критерий, позволяющий оценить те условия, когда такое упрощение задачи допустимо.

Наибольшее возрастание давления в газе, очевидно, получится в том случае, когда он полностью затормозится. Пусть до торможения его скорость равна  $v$ , давление  $p$  и плотность  $\rho$ . После торможения скорость  $v_1 = 0$ , давление  $p_1 = p + \Delta p$  и плотность  $\rho_1 = \rho + \Delta \rho$ . Согласно уравнению Бернулли (30.9)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{(p + \Delta p)}{(\rho + \Delta \rho)}.$$

Или так:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p + \Delta p}{\rho + \Delta \rho} - \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\Delta \rho}{\rho + \Delta \rho} \left( \frac{\Delta p}{\Delta \rho} - \frac{p}{\rho} \right).$$

Но согласно (30.13) и (30.17)  $\Delta p / \Delta \rho \approx a^2$ ,  $p / \rho = a^2 / \gamma$ . Подставив в предыдущее равенство и учитывая, что  $\Delta \rho \ll \rho$ , имеем

$$\frac{v^2}{2} \approx \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\Delta \rho}{\rho} \left( a^2 - \frac{a^2}{\gamma} \right) = a^2 \frac{\Delta \rho}{\rho}.$$

2. Итак, относительное изменение плотности газа при полном торможении потока

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx \frac{v^2}{2a^2}. \quad (30.19)$$

Отношение скорости потока  $v$  к скорости распространения звука  $a$  называется *числом Маха*:

$$M = v/a. \quad (30.20)$$

Число Маха служит критерием сжимаемости газа. Именно, из (30.19) следует, что если число  $M$  мало, то  $\Delta \rho \ll \rho$ , и сжимаемостью газа можно пренебречь; если же число  $M$  велико, то плотность газа меняется существенно, т. е. сжимаемостью газа пренебречь нельзя.

### § 30.7. Конус Маха

1. Источником звуковых волн является любое тело, движущееся в газе. Это тело, набегая на неподвижный газ, создает впереди себя область повышенного давления, что и служит причиной возникновения волны упругих возмущений. Форма этой волны существенно зависит от скорости движения тела.

Для простоты рассмотрим вначале точечный источник: тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

2. Пусть скорость движения тела  $v$  меньше скорости звука,  $M = v/a < 1$ . Фронт звуковой волны представляет собой сферу, центр которой лежит в точке, где находился источник в тот момент, когда он возбудил волну. Пусть в начальный момент тело находилось в точке  $O_1$ , через секунду — в точке  $O_2$ , еще через секунду — в точке  $O_3$  и т. д. (рис. 30.3). Через 4 с тело будет находиться в точке  $O_5$ . Фронт волны, вышедшей из точки  $O_1$ , есть сфера с радиусом  $R_1 = 4a$ ; из точки  $O_2$  — сфера с радиусом  $R_2 = 3a$ ; из точки  $O_3$  — сфера с радиусом  $R_3 = 2a$  и т. д. Из рис. 30.3 видно, что в этом случае тело все время движется внутри сферической волны, которая его опережает. Путь, пройденный телом за время  $t$ , равен  $l = vt$ ; он меньше радиуса сферической звуковой волны  $R = at$ .

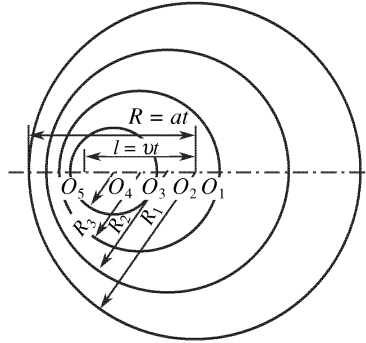


Рис. 30.3

Совершенно иной результат получится, если скорость точечного источника  $v$  больше скорости звука ( $M > 1$ ). В этом случае тело перегоняет звуковую волну: путь, пройденный телом за время  $t$ , т. е.  $l = vt$ , больше радиуса волны  $R = at$  (рис. 30.4).

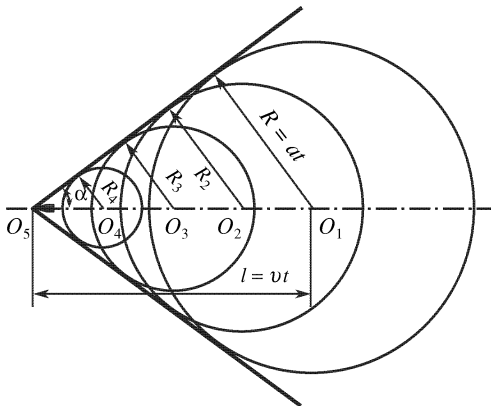


Рис. 30.4

Действительно, пусть тело в первую секунду, находясь в точке  $O_1$ , излучает звуковую волну; через секунду, перегнав фронт волны,



оно окажется в точке  $O_2$  и излучает там волну и т. д. Через 4 с оно будет находиться в точке  $O_5$ , обогнав все волны, которые оно излучило за время движения. В этом случае волны, излучаемые телом в процессе движения, представляют собой семейство сфер, как бы вложенных в конус, в вершине которого находится движущийся точечный источник. Этот конус называется конусом слабых возмущений, или *конусом Маха*, в честь ученого, который его первым описал. Угол раствора этого конуса, как видно из рис. 30.4, находится из соотношения

$$\sin \alpha = \frac{R}{l} = \frac{a}{v} = \frac{1}{M}. \quad (30.21)$$

### § 30.8. Ударная головная волна

1. Рассмотренный в предыдущем параграфе случай точечного источника представляет собой весьма упрощенную идеализацию явлений, возникающих при движении в газе тела со скоростью, превосходящей скорость звука. На самом деле впереди тела, имеющего конечные размеры, возникает *ударная* головная волна, или скачок уплотнения — очень тонкий слой с размерами

порядка длины свободного пробега молекул, на котором скачком меняются термодинамические параметры газа.

2. На скачке уплотнения плотность газа резко меняется. Это приводит к значительному изменению коэффициента преломления световых лучей, что позволяет с помощью специальных установок получить фотографию ударной головной волны. На рис. 30.5 изображена фотография

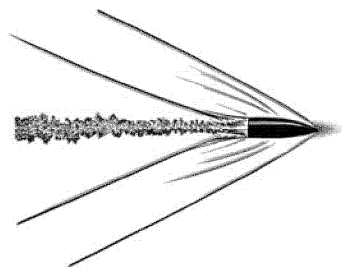


Рис. 30.5

фотография косого скачка уплотнения, возникающего впереди клинообразного или конусообразного тела (при числе Маха  $M \approx 2,5$ ).

### § 30.9. Волновое сопротивление

1. Так как перед телом, которое движется в газе со сверхзвуковой скоростью, возникает скачок уплотнения, то в этом случае тело испытывает гораздо большее сопротивление, чем при движении со скоростью, меньшей скорости звука. Одной из основных

причин возникновения сопротивления является разность давлений на передней и задней кромках обтекаемого тела (см. § 11.8). Но при возникновении скачка уплотнения давление на передней кромке резко возрастает, вследствие чего значительно увеличивается и сопротивление давления. Поскольку это сопротивление вызывается ударной волной, то оно называется *волновым*.

2. Для уменьшения волнового сопротивления передней кромке тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью, придают заостренную форму — коническую (*а*) или овальную (*б*) (рис. 30.6), а реактивным самолетам — стреловидный профиль (рис. 30.7). Дело в том, что если перед тупой вершиной возникает прямой скачок уплотнения, то на заостренной кромке образуется косой скачок (рис. 30.5). На прямом скачке скорость меняется гораздо сильнее, чем на косом скачке. А из уравнения импульса (30.6) следует, что чем меньше меняется скорость потока, тем меньше и разность давлений. Именно поэтому волновое сопротивление на косом скачке уплотнения значительно меньше, чем на прямом.

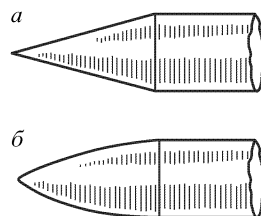


Рис. 30.6

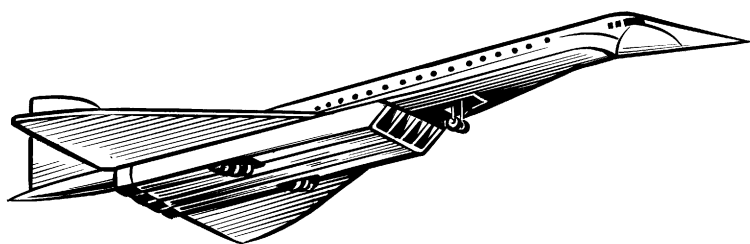


Рис. 30.7

3. Возникновение скачка уплотнения сопровождается возрастанием энтропии, при этом кинетическая энергия движущегося тела необратимо превращается во внутреннюю энергию газа. Это явление используется для торможения космических кораблей в атмосфере.

Именно этот принцип используется при мягкой посадке космических кораблей, возвращающихся, например, на Землю после облета Луны. Высокая точность, с которой осуществляется управление космическим кораблем, позволяет ввести его в атмосферу Земли под вполне определенным углом. Это обеспечивает

нужную степень торможения и вместе с тем не вызывает недопустимых перегрузок.

При торможении космического корабля атмосфера вокруг него очень сильно нагревается — до нескольких десятков тысяч градусов. Поэтому космический корабль должен быть покрыт теплозащитным кожухом из термостойкого материала с малой теплопроводностью. Для этой цели используются специальные пластмассы.

### § 30.10. Сопло

1. Труба, в которой при расширении жидкости происходит преобразование ее внутренней энергии в кинетическую, называется *соплом*. Нас интересует, при каких условиях вытекающий из сопла поток имеет максимальную скорость. Для несжимаемой жидкости задача решается элементарно: из (30.4) следует, что максимальная скорость получится в самом узком участке трубы.

Для газа же результат существенно зависит от того, является ли поток дозвуковым ( $M < 1$ ) или сверхзвуковым ( $M > 1$ ).

2. Дифференцируя уравнение неразрывности (30.2)  $\rho S v = \text{const}$ , получим

$$\rho v dS + S v d\rho + \rho S dv = 0.$$

Разделив на  $\rho S v$ , имеем

$$\frac{dS}{S} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0. \quad (30.22)$$

Дифференцируя уравнение Бернулли (30.9)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \text{const},$$

получим

$$v dv + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\rho dp - p d\rho}{\rho^2} = 0,$$

но согласно (30.13)  $dp = a^2 d\rho$ , а согласно (30.17)  $p = \rho a^2 / \gamma$ . Подставив в предыдущую формулу, получим после сокращений

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v dv}{a^2}. \quad (30.23)$$

3. Используя равенства (30.22) и (30.23), получим выражение, связывающее изменение скорости потока с изменением сечения

сопла:

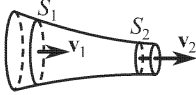
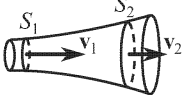
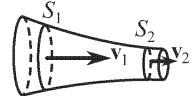
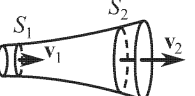
$$\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} \left( 1 - \frac{v^2}{a^2} \right) = 0$$

или

$$\frac{dv}{v} (1 - M^2) = -\frac{dS}{S}. \quad (30.24)$$

Из данного выражения вытекает важное следствие: если  $M < 1$ , то знак  $dv$  противоположен знаку  $dS$ ; если же  $M > 1$ , то знак  $dv$  совпадает со знаком  $dS$ . Это означает, что скорость дозвукового потока возрастает при сужении сопла и уменьшается при его расширении. Наоборот, сверхзвуковой поток ускоряется при расширении сопла и замедляется при его сужении (табл. 30.1).

Таблица 30.1

	Сужающееся сопло $S_2 < S_1, \Delta S < 0$	Расширяющееся сопло $S_2 > S_1, \Delta S > 0$
Дозвуковой поток: $M < 1$	 <p><math>v_2 &gt; v_1, \Delta v &gt; 0</math>. Поток ускоряется</p>	 <p><math>v_2 &lt; v_1, \Delta v &lt; 0</math>. Поток замедляется</p>
Сверхзвуковой поток: $M > 1$	 <p><math>v_2 &lt; v_1, \Delta v &lt; 0</math>. Поток замедляется</p>	 <p><math>v_2 &gt; v_1, \Delta v &gt; 0</math>. Поток ускоряется</p>

Максимальная скорость в наиболее узком участке сопла не превосходит местной скорости звука.

### § 30.11. Аналогия между соплом и тепловой машиной

1. Пусть сопло присоединено к некоторому резервуару (например, паровому котлу или камере сгорания газовой турбины), в котором поддерживаются постоянными давление  $p_0$ , плотность  $\rho_0$  и температура  $T_0$  идеального газа. Соответствующие параметры окружающей атмосферы обозначим через  $p_{ат}$ ,  $\rho_{ат}$ ,  $T_{ат}$ . Газ, выходя из резервуара и протекая по соплу, ускоряется. Его скорость при истечении из сопла обозначим буквой  $v$ . Эту скорость можно найти с помощью уравнения Бернулли (30.8), если учесть, что скорость газа в резервуаре  $v_0 = 0$ :

$$\frac{v^2}{2} + c_p T_{ат} = c_p T_0,$$

откуда следует выражение для кинетической энергии единичной массы газа:

$$\frac{v^2}{2} = c_p(T_0 - T_{\text{ат}}). \quad (30.25)$$

2. Максимальная скорость и соответственно максимальное значение кинетической энергии единичной массы газа были бы получены при условии  $T_{\text{ат}} = 0$ , т. е. если бы газ вырывался в вакуум, где температура равна абсолютному нулю:

$$\frac{v_{\text{макс}}^2}{2} = c_p T_0. \quad (30.26)$$

В этом случае внутренняя энергия газа полностью превратилась бы в кинетическую.

3. Найдем отношение истинного значения кинетической энергии единицы массы газа к максимальному значению этой величины:

$$\eta = \frac{v^2}{v_{\text{макс}}^2} = \frac{T_0 - T_{\text{ат}}}{T_0}. \quad (30.27)$$

Полученное отношение равно КПД цикла Карно для тепловой машины, работающей в том же интервале температур. Оно выражает максимальный коэффициент использования внутренней энергии газа в резервуаре.

## § 30.12. Сопло Лавалья

1. Для того чтобы из сопла вытекал сверхзвуковой поток, необходимо, чтобы оно было специальным образом профилировано. В самом деле, газ вытекает из резервуара с малой скоростью, меньшей скорости звука. Следовательно, для ускорения потока, согласно (30.24), необходимо, чтобы сопло на начальном участке сужалось. При достаточно большой разности давлений скорость потока в самом узком сечении станет равной местной скорости звука. Если сопло дальше расширяется, то, согласно (30.24), поток будет продолжать ускоряться.

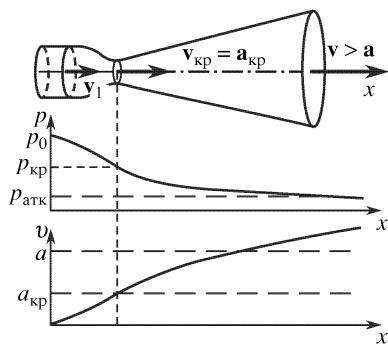


Рис. 30.8

Сопло, работающее в данном режиме, называется *соплом Лавалья* (рис. 30.8). Такие сопла применяются в паровых и газовых турбинах, в реактивных двигателях и ракетах.

2. При протекании газа через сопло Лавалья его давление, плотность и температура непрерывно уменьшаются; соответственно уменьшается и его внутренняя энергия. За счет этого непрерывно растет кинетическая энергия струи, и ее скорость может значительно превзойти скорость звука (рис. 30.8).

### § 30.13. Реактивный двигатель

1. Сопло Лавалья является основным элементом любого реактивного двигателя. Для получения большой реактивной силы тяги необходимо, чтобы скорость истечения струи была максимально большой (см. (15.8)). А большую, именно сверхзвуковую скорость истечения газа можно получить только с помощью сопла Лавалья.

Реактивные двигатели бывают разных конструкций. Мы ограничимся рассмотрением простейшего — прямоточного воздушно-реактивного двигателя (ПВРД). Схематически двигатель данного типа изображен на рис. 30.9.

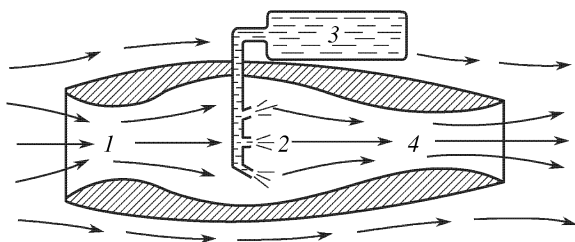


Рис. 30.9

2. Прямоточный двигатель успешно работает и дает достаточно большую реактивную силу тяги в том случае, когда он движется со сверхзвуковой скоростью. Для простоты рассуждений перейдем к системе отсчета, связанной с двигателем. В этой системе отсчета поток воздуха набегаёт на входное сопло со скоростью, превосходящей скорость звука. В области 1, за входным соплом, образуется один или несколько скачков уплотнения, и скорость газа становится меньше скорости звука. Двигаясь вдоль расширяющегося канала, дозвуковой поток еще больше тормозится — его скорость падает, а давление, плотность и температура возрастают. В области 2, называемой камерой сгорания, в сжатый воздух вбрызгивается из резервуара 3 топливо. Энергия, выделившаяся при его сгорании, идет на увеличение внутренней энергии газа. Из камеры сгорания газ поступает в сопло Лавалья 4. Если правильно подобрать термодинамические параметры газа в камере сгорания, то в области наибольшего сужения сопла скорость потока станет равна местной скорости звука, и из выходного сопла начнет вытекать сверхзвуковой поток.

Заметим, что прямоточный двигатель очень прост в конструктивном отношении и весьма надежен. Однако он может рабо-

тать только в том случае, если его разогнать предварительно до сверхзвуковой скорости. Для этой цели могут быть использованы стартовые ракеты.

3. На рис. 30.10 изображена схема турбокомпрессорного воздушно-реактивного двигателя (ТКВРД). Он может работать

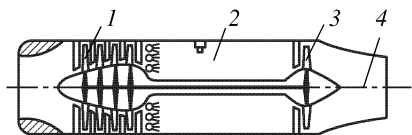


Рис. 30.10

на любых, в том числе и на малых, скоростях. В отличие от прямоточного двигателя, здесь сжатие воздуха достигается с помощью компрессора 1. Энергия потока за камерой сгорания 2 частично используется в газовой турбине 3, которая

вращает компрессор, а иногда и пропеллер. Оставшаяся часть энергии используется для создания реактивной тяги в сопле 4, расположенном за турбиной.

### § 30.14. Крыло самолета

1. Пластина, обтекаемая жидкостью или газом и профилированная таким образом, что подъемная сила значительно превосходит силу сопротивления, называется *крылом*. В зависимости от того, для движения с какой скоростью предназначено крыло, его форма меняется: у самолетов, скорость которых меньше скорости

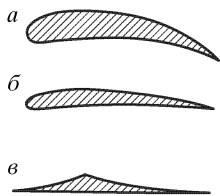


Рис. 30.11

звука, профиль крыла имеет вид, изображенный на рис. 30.11 а и б; у сверхзвуковых самолетов передняя кромка заостренная (рис. 30.11 в) с тем, чтобы уменьшить волновое сопротивление (см. § 30.9).

2. Причину возникновения подъемной силы можно качественно объяснить на основании уравнения Бернулли. Поток газа, обтекая крыло, разветвляется. Крыло имеет несимметричную форму: сверху оно выпуклое, снизу — слегка вогнутое или плоское. Благодаря этой несимметричности скорость потока над крылом  $v_1$  оказывается больше скорости под крылом  $v_2$ , а давление  $p_1$  соответственно меньше  $p_2$  (рис. 30.12). Эта разность давлений и создает подъемную силу.

Подъемную силу можно увеличить разными способами.

3. Прежде всего, можно сделать крыло сверху более выпуклым, а внизу — вогнутым (рис. 30.11 а). В этом случае поток под крылом замедлится, а над крылом его скорость возрастет. С увеличением разности скоростей возрастет и разность давлений,

а вместе с этим и подъемная сила. Но крыло с таким профилем испытывает и большое сопротивление. Поэтому профили такого типа характерны для тихоходных самолетов.

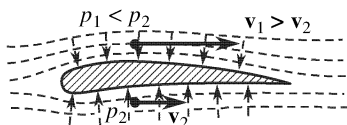


Рис. 30.12

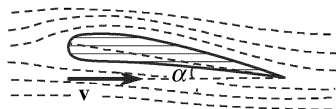


Рис. 30.13

4. Можно создать некоторый угол между хордой крыла и направлением набегающего потока — так называемый *угол атаки*  $\alpha$  (рис. 30.13). Это также приведет к замедлению скорости потока под крылом и, как следствие, к росту подъемной силы. Но с увеличением угла атаки растет сила сопротивления. Кроме того, при больших углах атаки происходит отрыв потока от крыла, что ведет к уменьшению подъемной силы. Поэтому у современных самолетов угол атаки не превосходит  $3\text{--}4^\circ$ .

5. Наконец, подъемную силу можно увеличить путем увеличения скорости набегающего потока. Действительно, разность скоростей над верхней и под нижней поверхностями крыла при малых углах атаки и малой выпуклости крыла (рис. 30.11 б) невелика. Поэтому полусумма этих скоростей мало отличается от скорости набегающего потока,  $(v_1 + v_2)/2 \approx v$ . Это позволяет привести формулу (30.10) к виду

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho (v_2 + v_1)(v_2 - v_1) \approx \rho v \Delta v.$$

Следовательно, при больших скоростях потока подъемная сила будет велика даже в том случае, когда крыло имеет небольшую изогнутость и малые размеры. Именно такую форму имеют крылья современных скоростных самолетов. Это позволяет существенно уменьшить силу лобового сопротивления, что безусловно выгодно.

### § 30.15. Давление в потоке жидкости

1. В этом параграфе мы рассмотрим случай дозвукового потока ( $M < 1$ ), когда сжимаемостью можно пренебречь. Выясним, как можно измерить давление в движущейся жидкости с помощью неподвижного манометра и как по измерениям давления судить о скорости движения жидкости.

Поместим в поток небольшую трубку, у которой в боковой поверхности имеется одно или несколько отверстий (рис. 30.14). Трубка этой формы практически не искажает поток, вследствие чего его скорость, а потому и давление существенно не меняются. Благодаря силам упругости жидкость поступает



в трубку и поднимается на некоторую высоту  $h$  до тех пор, пока гидростатическое давление не уравнивает давление жидкости в потоке. Давление может быть вычислено по формуле  $p = \rho gh$ .

Для измерения давления в газе трубку с помощью шланга присоединяют к обычному манометру для газов — жидкостному или металлическому.

2. Поместим в ту же точку потока трубку, входное отверстие которой обращено навстречу потоку, — так называемую *трубку Пито* (рис. 30.15). Столбик жидкости в манометрической трубке поднимается выше, чем

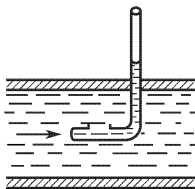


Рис. 30.14

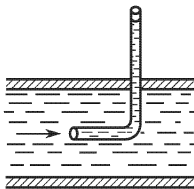


Рис. 30.15

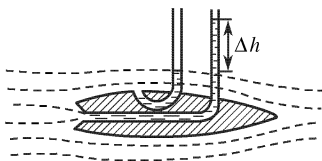


Рис. 30.16

в предыдущем случае, что свидетельствует о росте давления. Действительно, в трубке Пито жидкость останавливается, и давление столбика жидкости в манометрической трубке уравнивается давлением *заторможенной жидкости*, а не давлением движущейся жидкости, как это имело место в предыдущем эксперименте. Давление заторможенной жидкости определяется по уравнению Бернулли (30.10), если в нем положить  $v_2 = v_{\text{торм}} = 0$ ,  $p_2 = p_{\text{торм}}$ . Итак,

$$p_{\text{торм}} = p + \frac{\rho v^2}{2}. \quad (30.28)$$

Часто давление заторможенной жидкости  $p_{\text{торм}}$  не совсем удачно называют *полным* давлением, давление в незаторможенной жидкости  $p$  — *статическим*, а их разность  $p_{\text{торм}} - p = \rho v^2 / 2$  — *динамическим* давлением.

3. Скорость потока в некоторой точке измеряется с помощью трубки Пито–Прандтля (рис. 30.16). Поскольку разность давлений в обеих манометрических трубках пропорциональна квадрату скорости потока, то можно манометр проградуировать непосредственно в единицах скорости.

Из принципа относительности следует, что показания данного прибора не зависят от того, набегают ли поток жидкости на трубку или, наоборот, трубка движется в неподвижной жидкости или газе. На этом принципе основано использование трубки Пито–Прандтля для определения скорости движения самолета относительно воздуха или скорости судна относительно воды.

## § 30.16. Учет вязкости

1. Пусть жидкость течет по трубопроводу с постоянным сечением. Применив к этому случаю уравнение неразрывности (30.3) и уравнение импульсов (30.6) и учитывая, что  $\rho_1 = \rho_2$  и  $S_1 = S_2$ , мы видим, что и давления одинаковы во всех сечениях,  $p_1 = p_2$ . Мы получим парадоксальный результат: жидкость может якобы течь по трубопроводу без всякого перепада давления, сама собой! Это полностью противоречит результатам эксперимента. Убедиться в этом можно с помощью несложной установки, схема которой изображена на рис. 30.17. Когда по трубопроводу протекает жидкость, то манометрические трубки регистрируют наличие перепада давления. Оказы-

вадается, что давление в начале трубопровода значительно больше, чем в его конце.

Причина расхождения между теорией и экспериментом заключается в том, что при выводе уравнения (30.6) мы пренебрегли силами внутреннего трения, которые в данном случае играют существенную роль.

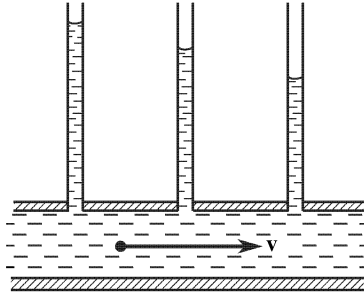


Рис. 30.17

2. Перепад давления, т. е. разность давлений в двух сечениях, отстоящих друг от друга на расстоянии  $l$ , можно вычислить по формуле

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}, \quad (30.29)$$

где  $\lambda$  — коэффициент гидравлического трения.

При  $Re \leq 2320$  справедливо соотношение  $\lambda = 64/Re$ . Для гладких труб (например, стеклянных) при  $Re > 2320$  справедлива эмпирическая формула

$$\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}}.$$

# Часть IV

## МОЛЕКУЛЯРНЫЕ СИЛЫ И АГРЕГАТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

---

### Глава 31

#### МОЛЕКУЛЯРНЫЕ СИЛЫ

##### § 31.1. Плотность и сжимаемость вещества

1. Как было показано в § 26.3, сравнив плотности вещества в твердом, жидком и газообразном состояниях, можно судить о расстояниях между частицами в этих веществах. При этом оказывается, что расстояния между частицами в жидком и твердом состояниях мало отличаются — всего лишь на несколько процентов, а в газах расстояние между ними (при не очень больших давлениях) примерно в 10 раз больше. Поэтому говорят, что в жидком и твердом состояниях частицы вещества плотно упакованы. Плотная упаковка частиц приводит к тому, что жидкости и твердые тела сжимаются значительно слабее, нежели газы.

2. Пусть тело подвергается всестороннему сжатию или растяжению. В результате этого изменится его объем и, как следствие, его плотность. Обозначим через  $\varepsilon$  *относительное изменение объема*:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \rho}{\rho}, \quad (31.1)$$

знак минус в этой формуле объясняется тем, что при возрастании объема тела его плотность при неизменной массе уменьшается.

Избыточное по сравнению с атмосферным давление  $\sigma$  иногда называется *напряжением*:

$$\sigma = \Delta p. \quad (31.2)$$

*Сжимаемостью вещества*  $\beta$  называется частное от деления относительного изменения объема на напряжение:

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\sigma} = -\frac{\Delta V}{V \Delta p} = \frac{\Delta \rho}{\rho \Delta p}. \quad (31.3)$$

Обратная величина называется *модулем объемного сжатия*:

$$K = \frac{1}{\beta} = -\frac{V\Delta p}{\Delta V}. \quad (31.4)$$

3. Как следует из (30.16), сжимаемость газа при адиабатном процессе

$$\beta_{\text{ад}} = \frac{1}{\gamma p}. \quad (31.5)$$

Рекомендуем читателю, пользуясь уравнением газового состояния, самостоятельно показать, что при изотермическом процессе

$$\beta_{\text{изот}} = \frac{1}{p}. \quad (31.6)$$

При давления порядка 2 МПа изотермическая сжимаемость газов  $\beta \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ Па}^{-1}$ .

Таблица 31.1

Вещество	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Сжимаемость $\beta$ , 10 <sup>-11</sup> Па <sup>-1</sup>
Вода (0 °С)	999,9	48,9
Лед (0 °С)	916,8	40
Спирт этиловый (15 °С)	790	76
Ртуть (20 °С)	13 545,9	3,8
Медь	8930	0,73
Алюминий	2690	1,37
Алмаз	3514	0,23
Графит	2300	3,0

Сжимаемость жидкостей и твердых тел примерно в  $10^3$ – $10^5$  раз меньше, чем у газов. Это видно из табл. 31.1, где приведены плотности и сжимаемости некоторых жидкостей и твердых тел при одинаковых значениях избыточного давления.

## § 31.2. Молекулярные силы

1. Из анализа данных о сжимаемости жидкостей и твердых тел, а также из анализа ряда явлений, рассмотренных в начальном курсе физики (прилипание друг к другу хорошо шлифованных твердых тел, смачивание твердых тел жидкостями и т. п.), вытекает, что между частицами вещества действуют значительные по величине силы, называемые *молекулярными силами*. Эти силы обладают рядом интересных особенностей.

При удалении молекул друг от друга молекулярное взаимодействие проявляется в виде сил *притяжения*, при сближении на расстояния порядка линейных размеров самих молекул — в виде сил *отталкивания*. Следовательно, существует определенное расстояние  $d$  между молекулами, когда силы отталкивания и притяжения уравновешены и их равнодействующая равна нулю. Система молекул, расположенных на расстояниях  $d$  друг от друга, находится в состоянии устойчивого равновесия, а энергия взаимодействия между молекулами в этом случае должна быть минимальной (см. § 19.5, 19.6).

Молекулярные силы проявляются только в том случае, когда расстояния между молекулами весьма малы, порядка эффективных размеров самих молекул (см. § 25.3). При увеличении расстояния между ними в несколько раз силы становятся практически равными нулю.

Именно этим и объясняется тот факт, что при анализе явлений в газах, где расстояния между молекулами примерно в 10 раз больше, чем в жидкостях или твердых телах, можно в большинстве случаев пренебречь действием молекулярных сил.

2. Величина молекулярных сил не зависит от общего числа молекул. Так, плотность или упругие свойства жидкостей и твердых тел не зависят от размеров исследуемого образца; капля воды и вода в океане при одинаковой температуре и одинаковом внешнем давлении имеют совершенно одинаковую плотность и сжимаемость и т. п. Этим молекулярные силы принципиально отличаются от гравитационных или кулоновских сил, где равнодействующая определяется действием всех тел, входящих в систему. Причина того, что молекулярные силы действуют только между соседними молекулами, будет выяснена в следующих параграфах.

### § 31.3. Электрическое происхождение молекулярных сил

1. Тщательные исследования, проведенные рядом ученых в первой половине XX в., позволили прийти к выводу, что *молекулярные силы имеют электрическое происхождение*.

На первый взгляд такой результат может показаться странным, поскольку известно, что молекулы нейтральны, а электрическое взаимодействие характерно только для заряженных тел. Однако ранее было показано, что электрическое взаимодействие возникает и между диполями — нейтральными частицами с несимметрично расположенными зарядами, равными по модулю, но

противоположными по знаку (см. § 10.4). Это позволяет понять природу электрического взаимодействия между молекулами.

2. Молекулы ряда веществ имеют симметричное строение, как это схематически показано на рис. 31.1. Здесь сфера, имеющая положительный заряд, изображает ядра атомов, входящих в молекулу, а отрицательно заряженная сфера — электронное облако этих атомов.

Допустим, что молекула деформировалась так, как это изображено на рис. 31.2. Такую деформированную молекулу можно в первом приближении рассматривать как электрический диполь с некоторым моментом  $p_e = ql$ . В этом случае молекула создает вне себя электрическое поле, напряженность которого (см. (10.10))

$$E \approx \frac{p_e}{\varepsilon_0 r^3}.$$

3. Поле этой молекулы вызовет деформацию близлежащих молекул. На положительное ядро молекулы действует сила отталкивания, направленная вдоль вектора напряженности, а на

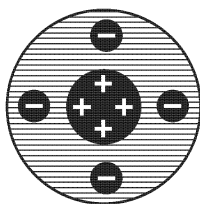


Рис. 31.1

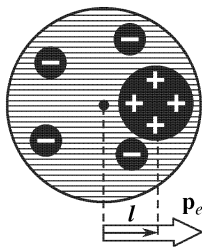


Рис. 31.2

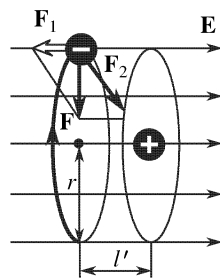


Рис. 31.3

отрицательно заряженное электронное облако — силы, направленные в противоположную сторону (рис. 31.3). Эти силы и деформируют молекулу.

Итак, молекула, имеющая дипольный момент  $p_e$ , индуцирует (наводит) у соседних молекул дипольный момент  $p'_e$ .

Нетрудно убедиться, что индуцированный дипольный момент пропорционален напряженности поля. В самом деле, момент диполя  $p'_e = el'$ , где  $l'$  — плечо индуцированного диполя. Напряженность внешнего электрического поля  $E$  не превосходит  $10^4$ – $10^6$  В/м, обычно оно значительно слабее. Напряженность поля, создаваемого на орбите положительно заряженным ядром,  $E_y = e/(4\pi\varepsilon_0 r^2) \approx 10^{11}$  В/м (радиус атома  $r \approx 10^{-10}$  м). Следовательно, сила  $F_1$ , действующая на электрон со стороны внешнего

поля, значительно меньше силы  $F_2$ , с которой ядро действует на электрон. Поэтому смещение электронного облака оказывается значительно меньше радиуса орбиты.

Из рис. 31.3 видно, что

$$\frac{l'}{r} = \frac{F_1}{F} \approx \frac{F_1}{F_2}.$$

Подставив значения  $F_1 = eE$  и  $F_2 = eE_{\text{я}} = e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ , получим

$$l' \approx \frac{4\pi r^3}{e} \epsilon_0 E.$$

Отсюда индуцированный дипольный момент

$$p'_e = El' = 4\pi r^3 \epsilon_0 E = \alpha \epsilon_0 E. \quad (31.7)$$

Величина  $\alpha \approx 4\pi r^3$  называется *поляризуемостью молекулы*.

В нашем случае

$$p'_e \approx \frac{\epsilon_0 \alpha p_e}{\epsilon_0 r^3} = \frac{\alpha p_e}{r^3}. \quad (31.8)$$

4. Если две молекулы с одинаково ориентированными дипольными моментами  $p_e$  и  $p'_e$  находятся недалеко друг от друга, то они притягиваются (см. (10.7)):

$$f = -\frac{6p_e p'_e}{4\pi \epsilon_0 r^4}.$$

Если подставить в эту формулу выражение для момента индуцированного диполя (31.8), то окончательно

$$f \approx -\alpha p_e^2 \epsilon_0 r^7. \quad (31.9)$$

Мы получили очень важный результат: *если молекулы индуцируют у ближайших соседей дипольный момент, то между ними возникает сила притяжения, обратно пропорциональная седьмой степени расстояния между ними.*

### § 31.4. График молекулярных сил

1. В предыдущем параграфе был рассмотрен простейший случай молекулярного притяжения — взаимодействие между индуцированными диполями. На самом деле между молекулами могут возникнуть силы притяжения и по ряду других причин, которые мы здесь рассмотреть не можем, ибо строгая теория молекулярных сил может быть создана только на базе квантовой механики. Оказывается, что во всех случаях сила молекулярного

притяжения обратно пропорциональна седьмой степени расстояния между молекулами:

$$f_{\text{пр}} = -\frac{A}{r^7}. \quad (31.10)$$

Здесь знак минус свидетельствует о том, что мы имеем дело с силой притяжения,  $A$  — некоторый коэффициент, зависящий от строения молекулы и характера сил притяжения.

2. Как показывает опыт по сжатию тел, при значительном сближении молекул между ними возникают силы отталкивания. Происхождение этих сил также электрическое. Оказывается, что здесь начинают играть существенную роль силы отталкивания между положительно заряженными ядрами. Кроме того, здесь проявляются квантовомеханические эффекты, рассмотрение которых выходит за рамки данной книги.

При сближении молекул сила отталкивания меняется очень быстро, значительно быстрее силы притяжения. Приблизительно она может быть выражена в виде

$$f_{\text{отт}} = \frac{B}{r^{13}}. \quad (31.11)$$

Здесь коэффициент  $B$  зависит от тех же причин, что и  $A$ . В квантовой механике удастся получить более точную формулу, на которой мы останавливаться не будем.

3. Естественно, что на молекулу действует равнодействующая сила

$$f = -\frac{A}{r^7} + \frac{B}{r^{13}}. \quad (31.12)$$

Знак этой силы зависит от расстояния между молекулами. Существует некоторое расстояние  $r = d$ , при котором силы отталкивания уравновешивают силы притяжения. Из (31.12) следует, что  $f = 0$ , если  $d = \sqrt[6]{B/A}$ . При  $r < d$  равнодействующая сила положительна, т.е. сила отталкивания превосходит притяжение; при  $r > d$  мы имеем обратную картину — притяжение оказывается сильнее отталкивания и равнодействующая станет отрицательной.

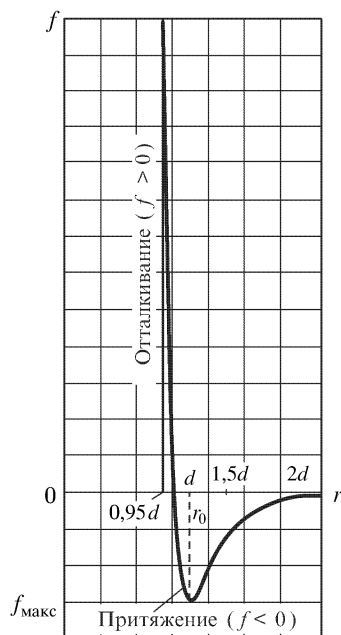


Рис. 31.4



Можно показать, что при  $r_0 = d\sqrt[6]{13/7} = 1,11d$  молекулы притягиваются с максимальной силой  $f_{\text{макс}} \approx -0,2A/d^7$  (рис. 31.4). При  $r = 1,5d$  сила притяжения уменьшается примерно в 4 раза, при  $r = 2d$  — в 30 раз и при  $r = 3d$  — почти в 400 раз. Если расстояние уменьшить до  $r = 0,95d$ , то возникнет сила отталкивания  $f \approx 9|f_{\text{макс}}|$ , при  $r = 0,7d$  — сила отталкивания  $f \approx 400|f_{\text{макс}}|$ .

4. Такая сильная зависимость силы от расстояния означает, что молекулярные силы являются короткодействующими —

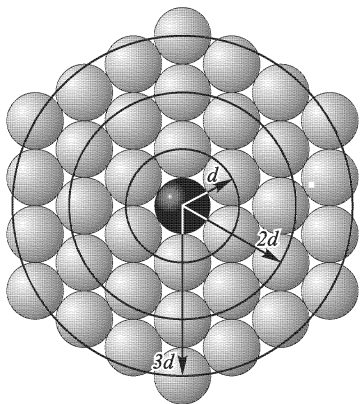


Рис. 31.5

молекулы взаимодействуют только со своими ближайшими соседями. Если изобразить молекулы в виде плотно упакованных шариков (рис. 31.5), что в общем соответствует упаковке молекул во многих жидкостях и твердых телах, то зачерненная молекула взаимодействует только с первым окружающим ее слоем. С погрешностью, не превосходящей 3 %, можно пренебречь взаимодействием молекулы со вторым, а тем более с третьим и далее лежащими слоями.

Этим и объясняются все особенности молекулярных сил, рассмотренные в § 31.2, в частности — независимость величины молекулярных сил от общего числа молекул в системе и отсутствие молекулярного взаимодействия в газах (кроме случая очень больших давлений).

### § 31.5. Потенциальная кривая молекулярного взаимодействия

1. Зная характер молекулярных сил, можно построить график энергии молекулярного взаимодействия — так называемую *потенциальную кривую* (см. § 19.5). При этом следует учесть рассмотренные там свойства этой кривой.

Прежде всего, согласно (19.12), потенциальная кривая при  $r < d$  должна быть наклонена к оси абсцисс под тупым углом, ибо здесь действует положительная сила отталкивания. Из этих же соображений при  $r > d$  кривая должна быть наклонена к оси абсцисс под острым углом, ибо здесь действует сила притяжения. А отсюда следует, что при  $r = d$  кривая имеет минимум.

Этим подтверждается высказанное в § 31.2 положение, что в состоянии равновесия система молекул обладает минимальной энергией.

2. Поскольку сила отталкивания меняется с расстоянием значительно сильнее силы притяжения, то потенциальная кривая оказывается *несимметричной*. Левее точки минимума, при  $r < d$ , она спадает очень круто. Правее точки минимума, при  $r > d$ , она вначале возрастает, но по более пологой кривой, а затем ее рост вообще прекращается, ибо при  $r > 2d$  сила взаимодействия практически равна нулю.

Как известно, нулевой уровень потенциальной энергии может быть выбран произвольно. Удобно положить, что потенциальная энергия равна нулю при бесконечном удалении молекул друг от друга. Тогда практически она станет равна нулю уже при  $r > 2d$ .

3. Потенциальная кривая молекулярного взаимодействия изображена на рис. 31.6. Здесь  $U_0$  — минимальная энергия взаимодействия между молекулами, которой они бы обладали, если бы на-

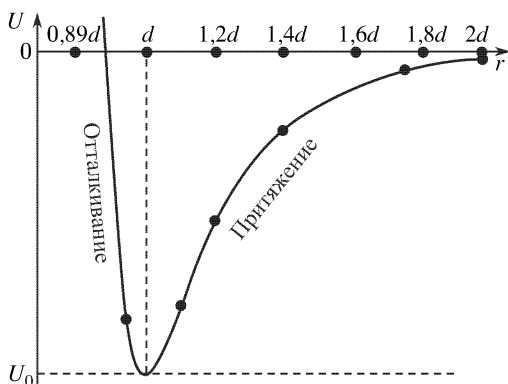


Рис. 31.6

ходились друг от друга на расстоянии  $d$  и покоились. Анализ этой кривой позволяет судить о многих свойствах твердых тел и жидкостей. Одно из этих свойств, а именно причину их теплового расширения, мы рассмотрим в следующем параграфе.

## § 31.6. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей

1. Опыт показывает, что при повышении температуры объем твердых тел и жидкостей возрастает. Выясним причину теплового расширения. При этом следует учесть, что хотя структура и свойства твердых тел и жидкостей различны, о чем речь пойдет в последующих главах, для механизма теплового расширения эти различия существенной роли не играют.

В твердом теле или жидкости при заданной температуре частицы находятся друг от друга на определенных расстояниях

и совершают колебания около положений равновесия. Изобразим на потенциальной кривой значения полной энергии частицы для ряда значений температуры тела (рис. 31.7). Здесь  $\varepsilon_0$  — так называемая нулевая энергия — минимальная энергия колебаний частицы при абсолютном нуле температуры (см. § 26.8);  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — энергии колебания при температурах  $T_1$  и  $T_2$ . Из рис. 31.7 видно,

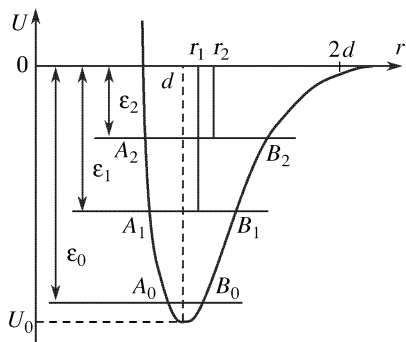


Рис. 31.7

что при абсолютном нуле частицы колеблются около положений равновесия, расстояние между которыми равно  $d$ . При повышении температуры тела энергия колебаний возрастает. Следовательно, если при температуре  $T_1$  частица колеблется между точками  $A_1$  и  $B_1$ , то при температуре  $T_2$  она станет колебаться между точками  $A_2$  и  $B_2$ . А так как потенциальная кривая имеет несимметричную форму, то точка  $B$  смещается

вправо значительно сильнее, чем точка  $A$  влево. Отсюда следует, что положение равновесия при повышении температуры тоже смещается вправо. Иными словами, расстояние между частицами при повышении температуры увеличивается за счет несимметричной формы потенциальной кривой молекулярного взаимодействия.

2. Воспользуемся вышеизложенными соображениями для вывода закона теплового расширения твердых тел и жидкостей.

Если нагреть длинный стержень, то его длина возрастет. В небольшом интервале температур

$$l = l_0(1 + \alpha_l t), \quad (31.13)$$

где  $l_0$  — длина стержня при  $0^\circ\text{C}$ ,  $l$  — его длина при температуре  $t^\circ\text{C}$ . Величина  $\alpha_l$  называется *температурным коэффициентом линейного расширения* и представляет собой относительное изменение длины, приходящееся на один градус.

3. Покажем, что для твердых тел коэффициент объемного расширения втрое больше коэффициента линейного расширения. Для этого учтем, что  $V = l^3$ . Подставив в это выражение (31.13), получим

$$l_0^3(1 + \alpha_l t)^3 = V_0(1 + \alpha_V t).$$

Сократив на  $V_0 = l_0^3$  и раскрыв скобки, имеем

$$\alpha_V = 3\alpha_l + 3\alpha_l^2 t + \alpha_l^3 t^3.$$

Для всех твердых тел коэффициент линейного расширения очень мал и по порядку величины равен  $10^{-5}$ – $10^{-6}$   $\text{K}^{-1}$ . А это означает, что при малом интервале температур ( $t < 100$  °C) можно в последнем равенстве отбросить члены, содержащие  $\alpha_l^2$  и  $\alpha_l^3$ . Отсюда следует

$$\alpha_V = 3\alpha_l. \quad (31.14)$$

4. Значение температурного коэффициента линейного расширения  $\alpha_l$  можно выразить через сжимаемость и плотность вещества. Для этого воспользуемся следующими соображениями.

При возрастании температуры расстояние между частицами вещества возрастает в среднем на величину  $\langle x \rangle$ , причем  $\langle x \rangle \ll \ll d$ . Поскольку и в этом случае частицы колеблются около нового положения равновесия, то средняя сила взаимодействия между ними оказывается равной нулю. Согласно (31.12) имеем

$$\langle F(T) \rangle = \left\langle -\frac{A}{(d+x)^7} + \frac{B}{(d+x)^{13}} \right\rangle = \left\langle -\frac{A}{(d+x)^7} + \frac{Ad^6}{(d+x)^{-13}} \right\rangle = 0.$$

Вынесем за скобки  $d$  и запишем дроби в виде степеней с отрицательными показателями; после сокращений получим

$$-\left(1 + \frac{x}{d}\right)^{-7} + \left(1 + \frac{x}{d}\right)^{-13} = 0. \quad (31.15)$$

В курсах математики доказывается, что выражение  $(1+y)^n$  раскладывается в степенной ряд:

$$(1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \dots$$

Поскольку в нашем случае  $y = x/d \ll 1$ , то можно в разложении ограничиться первыми тремя слагаемыми; итак,

$$\left(1 + \frac{x}{d}\right)^{-7} \approx 1 - \frac{7x}{d} + \frac{(-7) \cdot (-8)}{1 \cdot 2} \frac{x^2}{d^2} = 1 - \frac{7x}{d} + \frac{28x^2}{d^2},$$

$$\left(1 + \frac{x}{d}\right)^{-13} \approx 1 - \frac{13x}{d} + \frac{(-13) \cdot (-14)}{1 \cdot 2} \frac{x^2}{d^2} = 1 - \frac{13x}{d} + \frac{91x^2}{d^2}.$$

Условие равновесия (31.15) примет вид

$$\left\langle -\left(1 - \frac{7x}{d} + \frac{28x^2}{d^2}\right) + \left(1 - \frac{13x}{d} + \frac{91x^2}{d^2}\right) \right\rangle = 0.$$

откуда для средних значений получим

$$\langle x \rangle = \frac{21}{2d} \langle x^2 \rangle. \quad (31.16)$$

Заметим, что  $\langle x^2 \rangle \neq \langle x \rangle^2$ .

Среднее значение потенциальной энергии колеблющейся частицы  $\langle \mathcal{E}_{\text{пот}} \rangle = G\langle x^2 \rangle / 2$ , где  $G$  — жесткость связи (коэффициент упругости). Ее можно выразить через сжимаемость элементарной ячейки кристалла. В самом деле, согласно (31.3) сжимаемость вещества  $\beta = -\Delta V / (V \Delta p)$ . Но объем элементарной ячейки  $V = d^3$ ; изменение объема  $\Delta V = (d + \langle x \rangle)^3 - d^3 = 3d^2 \langle x \rangle + 3d \langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^3 \approx 3d^2 \langle x \rangle$ , так как  $\langle x \rangle \ll d$ . Наконец,  $\Delta p = F_{\text{упр}} / S = -G \langle x \rangle / d^2$ . Итак,  $\beta = \frac{3d^2 \langle x \rangle d^2}{d^3 G \langle x \rangle} = \frac{3d}{G}$ . Таким образом,  $\langle \mathcal{E}_{\text{пот}} \rangle = 3d \langle x^2 \rangle / 2\beta$ .

Если колебания системы близки к гармоническим, то средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной (см. § 49.3). Полное значение средней энергии колеблющейся частицы

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle \mathcal{E}_{\text{пот}} \rangle + \langle \mathcal{E}_{\text{кин}} \rangle = \frac{3d \langle x^2 \rangle}{\beta},$$

откуда, согласно (31.16), имеем

$$\langle x \rangle = \frac{21}{2d} \langle x^2 \rangle = \frac{7\beta}{2d^2} \langle \mathcal{E} \rangle. \quad (31.17)$$

## 6. Температурный коэффициент линейного расширения

$$\alpha_l = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta T} \approx \frac{\Delta \langle x \rangle}{d \Delta T} = \frac{7\beta}{2d^3} \frac{\Delta \langle \mathcal{E} \rangle}{\Delta T}. \quad (31.18)$$

Согласно закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы  $\langle \mathcal{E}_{\text{пот}} \rangle = \langle \mathcal{E}_{\text{кин}} \rangle = kT/2$ , следовательно,  $\langle \mathcal{E} \rangle = kT$ . Подставив в (31.18), получим

$$\alpha_l = \frac{7\beta k}{2d^3} = \frac{7\beta k}{2V}, \quad (31.19)$$

где  $V$  — объем элементарной ячейки кристалла.

5. В качестве примера рассмотрим кристалл с объемноцентрированной кубической решеткой (см. § 33.4). Здесь каждая частица в вершине куба принадлежит восьми соседним кубикам, а одна частица находится в центре куба (см. рис. 33.7). Следовательно, на каждую элементарную ячейку кристалла приходятся две частицы. Объем элементарной ячейки равен молярному объему, деленному на половину постоянной Авогадро (см. § 26.9):

$$V = \frac{V_m}{N_A/2} = \frac{2V_m}{N_A} = \frac{2M}{\rho N_A}, \quad (31.20)$$

где  $M$  — молярная масса вещества и  $\rho$  — его плотность. Подставив в (31.19) и учитывая, что  $N_A k = R$ , получим окончательно

$$\alpha_l = \frac{7\rho\beta R}{4M}. \quad (31.21)$$

В табл. 31.2 приведены расчетные и экспериментальные значения температурных коэффициентов линейного расширения для вольфрама и железа и объемного расширения для ртути. Как видно, результаты расчета неплохо согласуются с экспериментальными данными. Заметим, что для веществ с другой структурой кристаллической решетки выражение (31.21) должно быть уточнено, но мы этот вопрос рассматривать на будем.

Таблица 31.2

Вещество	$\beta$ , Па <sup>-1</sup>	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$M$ , кг/моль	$\alpha$ , К <sup>-1</sup>	
				расчет.	эксперим.
Вольфрам (0–100 °С)	$3,0 \cdot 10^{-12}$	$19,35 \cdot 10^3$	183,85	$4,6 \cdot 10^{-6}$	$4,5 \cdot 10^{-6}$
Железо (0–100 °С)	$6,0 \cdot 10^{-12}$	$7,87 \cdot 10^3$	55,85	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Ртуть (20 °С)	$4,0 \cdot 10^{-11}$	$13,55 \cdot 10^3$	200,59	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$

6. Заметим еще раз, что линейный закон теплового расширения — это первое приближение, справедливое лишь в определенном интервале температур, зависящем от свойств вещества. При расширении интервала температур линейность нарушается. Так, например, нарушение линейности легко обнаружить у воды при температуре около 4 °С, когда у нее максимальная плотность, а при охлаждении ниже 4 °С она начинает расширяться вплоть до точки замерзания (см. § 33.5).

Кроме того, как следует из теории и подтверждается в эксперименте, вблизи абсолютного нуля тепловое расширение отсутствует у всех веществ.

## Глава 32

# ДАЛЬНИЙ ПОРЯДОК

## § 32.1. Монокристалл

1. В природе некоторые твердые тела встречаются в виде *кристаллов* — тел, грани которых представляют собой правильные многоугольники. Форма возникающих многогранников зависит от условий образования кристалла, но самым характерным

свойством кристалла является постоянство углов между его ребрами и соответственно между гранями.

Так, кристалл поваренной соли может иметь форму куба, параллелепипеда или призмы, а также тела неправильной конфигурации (рис. 32.1). Но всегда в его вершине встречаются три ребра, образующие между собой прямой угол. Точно так же в вершине кристалла кальцита (исландского шпата) встречаются три ребра, образующие один острый угол  $78^\circ 08'$  и два тупых угла по  $101^\circ 52'$  каждый (рис. 32.2).

В ряде кристаллов, таких, как исландский шпат или кварц, имеется некоторое определенное направление, называемое *кристаллографической*, или *оптической осью*. На рис. 32.3 оптическая ось — это направление, параллельное прямой  $MN$ . О значении и роли этой оси будет рассказано в гл. 64.

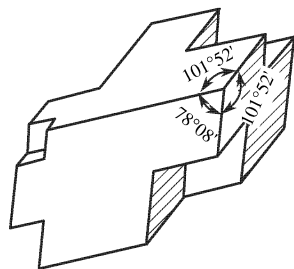
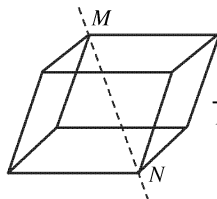
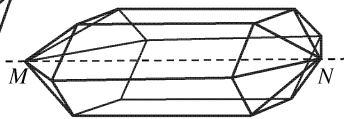


Рис. 32.2



Кальцит



Кварц

Рис. 32.3

2. Большой одиночный кристалл, имеющий более или менее правильную форму, называется *монокристаллом* (от греческого *monos* — один). Характерной особенностью монокристалла является его *анизотропия*, т. е. различие его физических свойств в разных направлениях.

Анизотропия механических свойств монокристалла сказывается прежде всего в том, что его прочность в разных направлениях различна. Если, например, изготовить из некоторого монокристалла шар, а затем ударом разбить его, то он расколется на куски, грани которых образуют углы, характерные для данного вещества. А это и означает, что прочность монокристалла в этих направлениях минимальна.

Различной является и упругость монокристалла в разных направлениях. А так как скорость звука зависит от упругих свойств

вещества и от его плотности, то, как показывает опыт, скорость распространения звука в монокристаллах в разных направлениях различна.

3. Анизотропия тепловых свойств монокристалла сказывается в том, что коэффициенты линейного расширения и теплопроводности имеют разные значения в разных направлениях. Эксперимент по измерению коэффициента теплового расширения малых образцов довольно сложен, и мы его здесь рассматривать не будем. Результаты измерений для некоторых монокристаллов представлены в табл. 32.1.

Таблица 32.1

Вещество	$\alpha, 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	
	вдоль оси	поперек оси
Кварц	7,5	13,7
Кадмий	52	20
Цинк (кристалл)	60	13
Олово (кристалл)	30,5	15,5

Экспериментально легко обнаружить различие в теплопроводности монокристалла в различных направлениях. Для этого вырежем, например, из кварца пластинку параллельно его оптической оси и покроем ее тонким слоем воска. Если прикоснуться к пластинке раскаленной иглой, то вблизи ее контакта с кварцем воск расплавится. Опыт показывает, что расплавленный участок имеет форму эллипса, большая ось которого направлена параллельно кристаллографической оси. А это означает, что теплопроводность кварца вдоль оси значительно больше, чем в перпендикулярном направлении; их отношение  $K_{\parallel}/K_{\perp} = 1,72$ , где  $K_{\parallel}$  — теплопроводность вдоль оптической оси,  $K_{\perp}$  — теплопроводность в перпендикулярном направлении.

## § 32.2. Поликристалл

1. Из расплавов металлов можно получить монокристаллы, если принять специальные меры. Если же просто охладить, скажем, расплавленное железо, то полученное твердое тело не обладает анизотропией. Причину этого можно выяснить, если хорошо отшлифовать его поверхность и обработать ее кислотой, а затем изучить под микроскопом (рис. 32.4). Оказывается, что вещество состоит из отдельных зерен размерами порядка  $10^2$ – $10^3$  нм. Каждое такое зерно — это кристалл, который принял неправильную форму потому, что его росту помешали соседние кристаллики. Возникшая зернистая структура называется *поликристаллической* (от греческого poly — много).

Поскольку кристаллографические оси всех зерен ориентированы совершенно беспорядочно, их анизотропия на больших



расстояниях не может проявиться. Вследствие этого поликристалл *изотропен* — его свойства в среднем во всех направлениях одинаковы.

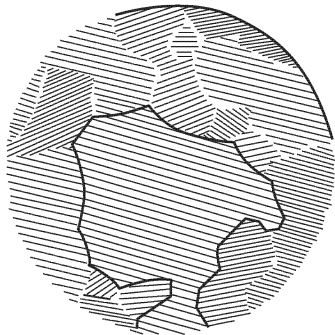


Рис. 32.4

2. Огромное большинство твердых тел, встречающихся в природе, — камни, песок, металлы, соли и т.п. — имеют поликристаллическую структуру. Возникновение крупных монокристаллов представляет собой исключительное явление, осуществляющееся при особо благоприятных условиях. Вместе с тем в природе встречаются твердые тела типа стекла, которые не имеют зернистой структуры. Они называются *аморфными*. Строение и свойства

этих тел будут рассмотрены в § 34.6.

### § 32.3. Кристаллическая решетка. Дальний порядок

1. Еще в XVIII в. на основе изучения макроскопических свойств кристаллов было выдвинуто предположение, что кристалл состоит из ячеек правильной геометрической формы. Однако лишь в 1912 г. эта гипотеза была подтверждена М. Лауэ, открывшим явление дифракции рентгеновских лучей в кристаллах. Оказалось, что частицы, из которых состоит кристалл, образуют в пространстве правильную *кристаллическую решетку*. В этой решетке можно выделить некоторую ячейку минимальных размеров, характеризующуюся тем, что если ее переносить параллельно самой себе каждый раз на расстояние, равное ее ребру, то таким способом можно образовать сколь угодно большой монокристалл. Период кристалла равен длине ребра элементарной ячейки (см. § 62.7).

Вершина ячейки называется узлом кристаллической решетки; прямая, проходящая через узлы решетки, — *узловой линией*; плоскость, проходящая через узлы решетки, называется *узловой плоскостью*. Плоскости и линии, которые гуще всего усеяны узлами, образуют грани и ребра кристалла.

2. В 1891 г. Е.С. Федоров установил, что всего в природе возможны 230 различных пространственных видов симметрии (федоровские группы), которые могут быть разбиты на 7 кристаллических систем или на 32 класса. Эти классы различаются формой ячейки — углами между ребрами и гранями и соотношениями между размерами ребер.

С помощью рентгеноструктурного анализа блестяще подтверждена классификация, предложенная Е.С. Федоровым. Оказалось, что в природе нет ни одного кристалла, который не принадлежал бы к той или иной федоровской группе.

3. Обычно в узлах кристаллической решетки размещаются центры атомов, ионов или молекул. Как мы увидим ниже, не все атомы попадают при этом в узлы. Но важно то, что в кристаллической решетке наблюдается правильное, регулярное распределение вещества, а также электрических зарядов и связанных с ними электрических полей.

Величина периодов повторяемости очень невелика — в металлах, например, она составляет от 0,3 до 0,7 нм, что соответствует нескольким атомным слоям, поскольку расстояние между двумя атомами в твердом теле равно примерно 0,1 нм. Даже в поликристаллах зерна имеют размеры порядка  $10^2$ – $10^3$  нм, монокристаллы же имеют гораздо большие размеры.

Мы приходим к выводу, что в кристаллических телах регулярное расположение элементов кристаллической решетки повторяется в пределах сотен, тысяч и десятков тысяч слоев. На этом основании и говорят, что в кристалле наблюдается *дальний порядок* в упаковке атомов или других частиц (ионов, молекул и т. п.), из которых построена ячейка кристалла.

### § 32.4. Дефекты упаковки и блочная структура кристалла

1. Если бы кристалл имел идеальную структуру, то дальний порядок наблюдался бы на сколь угодно больших расстояниях. Однако такие идеальные кристаллы в природе не образуются. В реальном кристалле мы встречаемся с систематическими нарушениями дальнего порядка, которые возникают в процессе кристаллизации вещества.

Одним из важнейших видов нарушения регулярной структуры кристалла является дефект, который называется *дислокацией*.

2. *Простая, или краевая дислокация* заключается в том, что в каком-либо участке кристалла образуется лишняя узловая плоскость (рис. 32.5). В результате кристалл оказывается разбитым на

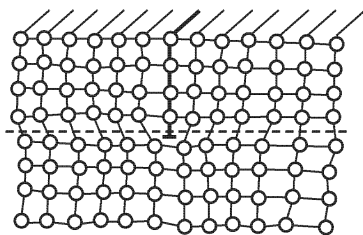


Рис. 32.5

два блока, на линии раздела которых и лежит ядро дислокации, обозначенное знаком  $\perp$ .

*Спиральная дислокация* образуется в том случае, если линия узлов одного из блоков некоторой своей частью как бы соскользнет на один период выше или ниже своего нормального направления. Наибольшие искажения здесь также возникают вдоль оси дислокации (рис. 32.6), в остальных участках, особенно вдали от оси, дальний порядок оказывается ненарушенным.

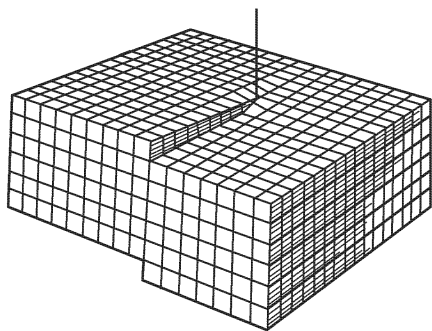


Рис. 32.6

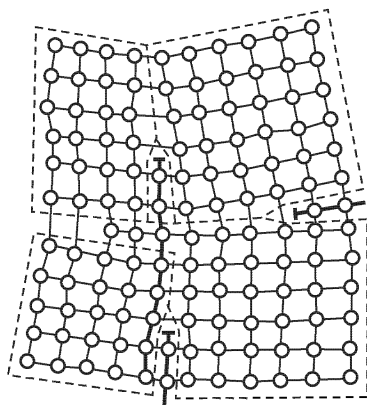


Рис. 32.7

3. При наличии малого числа дислокаций образуется монокристалл, состоящий из больших блоков, в каждом из которых царит относительно идеальный дальний порядок. Часто эти блоки оказываются несколько повернутыми друг относительно друга, что изображено на рис. 32.7.

4. Нарушения дальнего порядка возможны и в том случае, если узловая точка окажется вакантной (рис. 32.8) или заполненной чужеродным атомом (рис. 32.9), а также если чужеродный

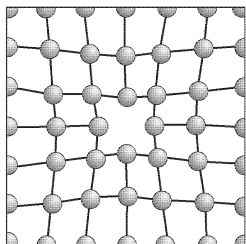


Рис. 32.8

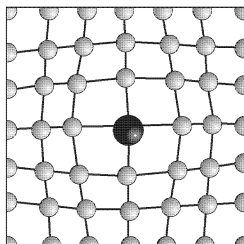


Рис. 32.9

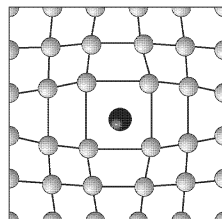


Рис. 32.10

атом внедрится между линиями узлов (рис. 32.10). Такие дефекты могут возникнуть как в месте возникновения дислокации, так и внутри блока.

Наличие дефектов в кристалле сильно влияет на его свойства. Так, примеси в кристаллической решетке германия или кремния, составляющие всего лишь 0,1 %, практически никак не влияют на структуру кристалла, но очень существенно — в тысячи раз — меняют его электрическое сопротивление. Причина этого явления будет рассмотрена в главах 45 и 75.

В последующих параграфах мы рассмотрим, как влияют дефекты кристалла на некоторые его тепловые и механические свойства.

### § 32.5. Движение дефектов и диффузия

1. Опыт показывает, что при длительном контакте двух твердых тел они диффундируют друг в друга. Особенно удобно следить за явлением диффузии в твердых телах с помощью «меченых атомов» — радиоактивных изотопов данного вещества. Между тем нетрудно убедиться, что в идеальном кристалле диффузия почти невозможна. В идеальном кристалле все узловые точки заняты «своими» атомами, поэтому внедрение «чужеродного» атома в узловую точку должно сопровождаться значительной работой по вырыванию атома из узла, на что обычно энергии не хватает. Внедрение же чужеродного атома между узлами решетки также требует значительной энергии, ибо нужно «раздвинуть» соседей и преодолеть возникающие при этом весьма значительные силы отталкивания.

2. Совершенно иначе обстоит дело в реальном кристалле. Наличие дефектов типа дислокаций или вакансий в существенной мере облегчает процесс внедрения в кристалл чужеродных атомов. Эти атомы могут попасть либо в вакансию, либо в область простой или спиральной дислокации, причем энергии теплового движения оказывается вполне достаточно, чтобы атом мог попасть в дефектную область.

Аналогично обстоит дело и с дефектом типа замещения (см. рис. 32.9). Здесь при достаточно высокой температуре вполне вероятен процесс, при котором чужеродный атом и атом основного вещества меняются местами, что и приводит к перемещению чужеродного атома по кристаллу.

Итак, процесс диффузии в кристалле сводится к движению дефектов в решетке. Естественно, что чем более дефектна решетка, тем вероятнее диффузия. В частности, в поликристаллах при

прочих равных условиях диффузия идет значительно быстрее, чем в монокристаллах.

3. Опыт показывает, что при повышении температуры кристалла диффузия ускоряется. Дело в том, что по мере роста температуры частицы начинают более интенсивно колебаться, средние расстояния между ними возрастают, и при удачном перемещении двух соседних атомов или молекул в противоположных направлениях третий атом может как бы «протолкнуться» между ними, заняв новое место в решетке. Этим объясняется и принципиальная возможность диффузии в идеальном кристалле, хотя ее вероятность мала. Тем более высокая температура будет способствовать диффузии в кристалле с дефектами.

### § 32.6. Движение дислокаций и деформация кристалла

1. Опыт показывает, что любые, даже упругие, а тем более пластические деформации кристалла связаны с перемещением (сдвигом) блоков кристалла друг относительно друга. И здесь важнейшую роль играет движение дислокаций.

Рассмотрим механизм деформации сдвига в бездефектном кристалле и в кристалле с простой дислокацией.

2. Допустим, что мы хотим вызвать сдвиг кристаллической решетки на один узел по плоскости  $AB$  идеального кристалла. Нам придется передвинуть за один прием все атомы, т. е. установить атом 1 против 2', 2 против 3' и т. д. (рис. 32.11). Для этого нужно приложить значительное усилие, равное произведению силы сцепления между двумя атомами на общее число соприкасающихся атомов по всей площади сдвига.

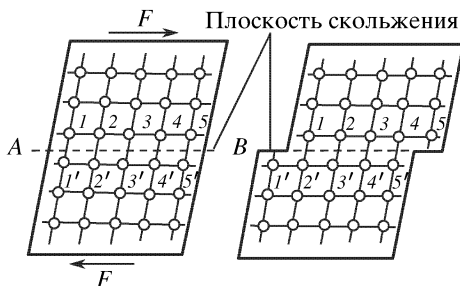


Рис. 32.11

Пусть теперь плоскости  $AB$  совпадает с границей раздела двух блоков, на которой расположено ядро простой дислокации (рис. 32.12). Здесь под действием силы слои 3, 4 и 5 практически

смещаться не будут, слой 2 сместится на половину расстояния между узлами и встанет на свое «естественное» место против узла  $3'$ . И только слою 1 придется переместиться на полное расстояние между узлами, и то после того, как слой 2 уже сдвинется и перемещению первого слоя будет мешать только притяжение к слою  $1'$ , но не отталкивание слоя 2. Как показывает расчет, здесь на сдвиг потребуется усилие примерно в 100 раз меньшее, чем при отсутствии дислокаций.

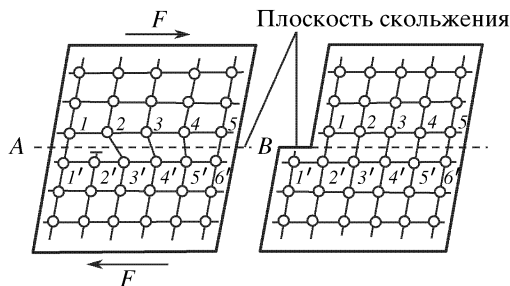


Рис. 32.12

3. Как мы убедились, при деформации кристалла частично увеличивается порядок в расположении атомных плоскостей и уменьшается число простых дислокаций. Отсюда следует, что по мере того как кристалл подвергается деформациям, его прочность должна возрастать. Опыт показывает, что действительно такие деформации, как ковка, прокат и т. п., приводят к упрочнению материала, но далеко не в 100 раз, как это следует из теории. Оказывается, что здесь важную роль играют спиральные дислокации, которые далеко не всегда исчезают при деформациях.

4. Прочность кристаллов резко понижается за счет трещин, возникающих на его поверхности, по-видимому, в месте выхода дислокаций. Эти трещины снижают прочность на разрыв. Например, для кристаллов каменной соли разрывное напряжение падает с теоретического значения порядка 2 ГПа до 4,5 МПа, т. е. примерно в 450 раз; для монокристалла цинка — с 20 ГПа до 50 МПа и т. д. Это подтвердили опыты А.Ф. Иоффе. Он показал, что если все время растворять поверхность кристалла, снимая тем самым возникающие трещины и другие поверхностные дефекты, то прочность образца возрастает. Так, производя растяжение кристалла каменной соли в горячей воде, он наблюдал разрыв при напряжениях примерно 1,5–1,6 ГПа, что весьма близко к теоретическому значению.

## Глава 33

## ПЛОТНАЯ УПАКОВКА ЧАСТИЦ

## § 33.1. Типы кристаллических связей

1. До сих пор мы рассматривали в основном геометрические характеристики кристалла, не вникая ни в природу частиц, образующих кристалл, ни в характер сил, удерживающих эти частицы на определенных расстояниях друг от друга. Между тем именно анализ физической природы этих сил позволяет понять как геометрию кристаллических решеток, так и различие в свойствах различных типов кристаллов. С точки зрения сил, действующих между частицами, образующими кристаллы, их можно условно разбить на четыре типа: *ионные*, *атомные*, *молекулярные* и *металлические* кристаллы. Ниже будет дан анализ характерных свойств этих типов кристаллов. Но предварительно мы должны сделать следующее замечание.

Как уже говорилось, условием устойчивого состояния любой системы частиц является минимальное значение ее энергии в данных условиях (см. § 19.5, 19.6). Это полностью относится к системе молекул, атомов или ионов, образующих кристалл: частицы расположатся на таких расстояниях друг от друга, чтобы их энергия была минимальной, — иными словами, на расстояниях, где сила притяжения равна силе отталкивания.

2. *Ионные кристаллы.* К их числу относится большинство неорганических соединений, например соли. В пространственной решетке этих кристаллов размещаются поочередно ионы противоположных знаков.

Механизм образования ионного кристалла объясним на примере поваренной соли ( $\text{NaCl}$ ). Атом натрия легко теряет один электрон, который присоединяется к атому хлора. Так возникают два иона с противоположными по знаку электрическими зарядами (см. § 74.2).

Образовавшиеся ионы имеют сферически симметричное электрическое поле, вследствие чего силы кулоновского притяжения, возникающие между ними, имеют одинаковое значение в любом направлении. Это позволяет рассматривать структуру ионного кристалла как систему шаров определенного радиуса, плотно упакованных в некоторую пространственную решетку. Центры этих шаров располагаются на таком расстоянии, чтобы энергия взаи-

модействия ионов была минимальной, — иными словами, чтобы сила притяжения уравнивалась силами отталкивания.

3. *Атомные кристаллы.* Пространственная решетка в кристаллах данного типа образуется путем плотной упаковки атомов, чаще всего одинаковых. При взаимодействии одинаковых атомов ионы не образуются.

Типичными примерами таких кристаллов являются алмаз и графит — два разных состояния углерода, а также некоторые неорганические соединения (сернистый цинк  $\text{ZnS}$ , окись бериллия  $\text{BeO}$  и т. п.).

Атомы, расположенные в пространственной решетке, связаны *ковалентными* (иначе — гомеоплярными) силами квантовомеханического происхождения (см. § 74.3). Эти силы имеют резко выраженную пространственную направленность, вследствие чего взаимодействие между атомами будет зависеть от характера их ориентации друг относительно друга. Поэтому геометрию кристалла данного типа нельзя получить из анализа характера упаковки шаров.

4. *Молекулярные кристаллы.* К ним относится ряд неорганических, а также большинство органических соединений, у которых в процессе кристаллизации молекулы сохраняют свою индивидуальность. В узлах кристаллической решетки здесь находятся молекулы. Примерами могут служить кристаллы брома ( $\text{Br}_2$ ), иода ( $\text{I}_2$ ), сухого льда — твердой углекислоты ( $\text{CO}_2$ ), а также нафталина, парафинов, жирных кислот и т. п. Характерным признаком кристаллов данного типа является то, что расстояние между частицами внутри молекулы значительно меньше межмолекулярных расстояний в кристалле. Поэтому здесь можно каждую молекулу изобразить в виде тела, ограниченного частями сферических поверхностей, а сам кристалл — как плотную упаковку молекул, построенных из срезанных шаров (рис. 33.1).

Между молекулами действуют ван-дер-ваальсовы силы типа сил взаимодействия между индуцированными диполями (см. § 31.3). Вследствие того что эти силы довольно слабые, молекулярные кристаллы легко разрушаются за счет теплового

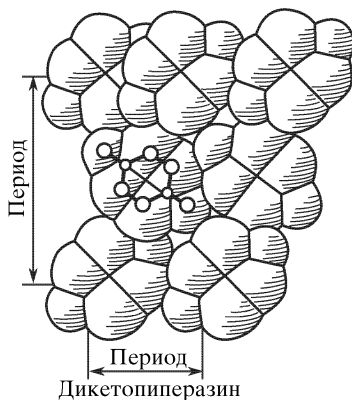


Рис. 33.1



движения молекул — они плавятся при очень низких температурах, а также легко испаряются. Так, кристаллы иода при нормальном атмосферном давлении испаряются (возгоняются) при  $+39,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а кристаллы сухого льда при  $-78,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

5. *Металлические кристаллы.* Как говорит само их наименование, данный тип связи представляет собой способ упаковки атомов металлов в кристаллическую решетку. При кристаллизации металлов их атомы сближаются и между ними возникают большие силы квантовомеханического происхождения. За счет этих сил электроны, находящиеся на внешних орбитах (валентные электроны), отделяются от атомов. Однако, в отличие от случая ионной связи, здесь электроны не могут присоединиться к другому атому и образовать отрицательный ион, ибо все атомы металла одинаковы. Поэтому *валентные электроны коллективизируются* — они уже принадлежат не одному атому, как в случае ионной связи, и не паре соседних атомов, как при ковалентном взаимодействии, а всему кристаллу в целом.

Металлическая связь обеспечивается притяжением между ионной решеткой, образованной положительно заряженными ионами, и отрицательно заряженным электронным облаком, так называемым *электронным газом*. Заметим, что наличие свободных электронов, способных под действием электрического поля перемещаться по кристаллу, обеспечивает хорошую электрическую проводимость металлов.

В общем случае упаковка ионов в металлическом кристалле не может быть сведена к упаковке шаров, как это может быть сделано в случае ионной или молекулярной связи. Однако в некоторых случаях вполне целесообразно рассматривать металлические кристаллы как систему плотнейшим образом упакованных шаров одинакового радиуса.

### § 33.2. Плотнейшая упаковка одинаковых шаров

1. Рассмотрим, как можно плотнейшим образом упаковать шары одинакового радиуса. На плоскости это будет фигура, изображенная на рис. 33.2. Здесь каждый шарик окружен шестью соседями — это так называемая симметрия шестого порядка. Если мы начнем шары упаковывать в пространстве, то нам нужно такую же плоскую решетку несколько повернуть и сместить так, чтобы шары второго слоя уложились в лунки первого слоя. Но при этом шары заполняют только половину лунок. В оставшиеся лунки шары попасть не могут. На рис. 33.3 показано, как укла-

дываются друг на друга два слоя одинаковых шаров. Центры верхних шаров разместились над лунками.

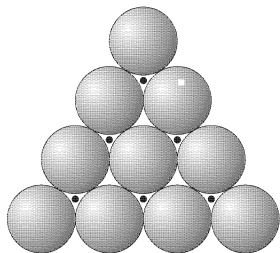


Рис. 33.2

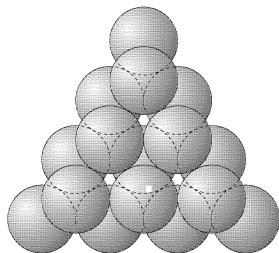


Рис. 33.3

Аналогично может быть наложен сверху третий слой. Однако здесь возможны два варианта упаковки.

2. Центры шаров третьего слоя могут быть расположены над центрами первого слоя. В этом случае третий слой повторяет первый. Если теперь уложить четвертый слой над вторым, пятый — над третьим, шестой — над четвертым и т. д., то получится двухслойная плотнейшая упаковка одинаковых шаров — так называемая *гексагональная* упаковка. На рис. 33.4 изображена модель такой упаковки. Символически повторяемость слоев записывается так:  $ABABAB \dots$ . Ячейка представляет собой прямую призму, в основании которой лежит правильный шестиугольник. Высота призмы больше сторон оснований. Заметим, что не все атомы расположены в узлах решетки.

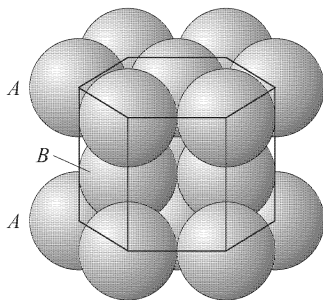


Рис. 33.4

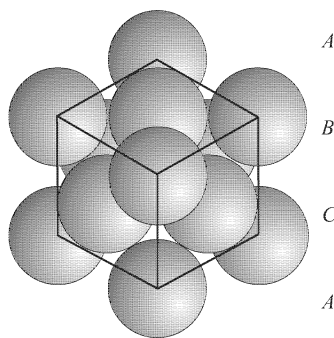


Рис. 33.5

Плотнейшая гексагональная упаковка характерна для кристаллов бериллия, магния, скандия, цинка, кадмия и ряда других металлов, а также многих неорганических соединений.

3. Во втором варианте упаковки третий слой располагается так, что центры его шаров размещены над лунками первого слоя, четвертый слой повторяет первый, пятый — второй, шестой — третий и т. д. Символически повторяемость слоев записывается так:  $ABCABCABC \dots$ . На рис. 33.5 изображена упаковка данного типа. Ее ячейка представляет собой куб. Частицы находятся как в вершинах куба (узлах решетки), так и в центрах граней. Поэтому упаковка данного типа называется *кубической гранецентрированной*. По данному типу строится решетка таких металлов, как никель, платина, медь, золото, серебро, алюминий, свинец, при высоких температурах — железо. Кобальт, например, встречается в виде кристаллов как с гексагональной, так и с кубической гранецентрированной решеткой. Такой *полиморфизм* характерен для ряда металлов и других веществ.

Возможны и более сложные многослойные комбинации плотнейших шаровых упаковок, но мы их рассматривать не будем.

### § 33.3. Плотнейшие упаковки шаров с разными радиусами

Мы ограничимся рассмотрением только одного примера — кристалла поваренной соли. Это, как уже говорилось, ионный кристалл. Рентгеноструктурный анализ позволил определить

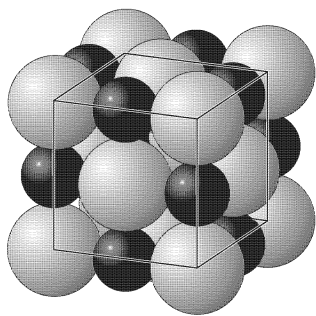


Рис. 33.6

радиусы ионов: у хлора это 0,181 нм, у натрия 0,098 нм. Крупные ионы хлора образуют плотнейшую трехслойную упаковку, у которой большие пустоты заполнены меньшими по размеру ионами натрия (рис. 33.6). Оказывается, что каждый ион натрия окружен шестью ионами хлора и, наоборот, каждый ион хлора — шестью ионами натрия. При такой упаковке ионов образуется *гранецентрированная кубическая* решетка. Ее ячейка представляет собой куб, у которого в вершинах (узлах)

и в центрах граней расположены ионы одного знака, а в серединах ребер — ионы противоположного знака.

Как видно из рисунка, в кристалле нет молекул  $\text{NaCl}$  — весь кристалл представляет собой одну гигантскую молекулу.

### § 33.4. Решетки, которые нельзя представить как упаковку шаров

1. При высокой температуре атомы железа упакованы в плотнейшую трехслойную структуру — гранецентрированный куб. Оказывается, что при комнатных температурах атомы железа упакованы иначе. Как показывает рентгеноструктурный анализ, здесь возникает кубическая решетка, у которой атомы железа располагаются в вершинах куба и в его центре; такая решетка называется *объемноцентрированным кубом* (рис. 33.7). Такая же кристаллическая решетка характерна для всех щелочных металлов: лития, натрия, калия, рубидия и цезия, а также для бария, хрома, молибдена, вольфрама.

Структура такого рода не может быть представлена в виде плотной упаковки шаров, ибо шары одинакового радиуса нельзя плотно уложить в куб, в центре которого находился бы шар такого же радиуса. По-видимому, здесь электронное облако положительного иона, возникшего после потери атомом валентного электрона, не имеет сферически симметричной структуры. Это не должно нас удивлять. Скорее наоборот, удивительно то, что такие сложные системы, как атомы, могут во многих случаях вести себя как шары, плотно упакованные в пространственную решетку.

2. Физические свойства железа при разных типах упаковки его атомов различны. При плотнейшей гранецентрированной упаковке, когда каждый атом имеет 12 соседей, получается твердое, упругое железо; при объемноцентрированной упаковке, когда каждый атом имеет только 8 соседей, возникает мягкое, пластичное железо.

3. Четырехвалентные атомы, например углерод, могут связываться друг с другом ковалентными силами, имеющими резко выраженную пространственную направленность. Атомы углерода могут образовывать два типа пространственных решеток.

В первой из них, характерной для *алмаза*, четыре атома располагаются по вершинам правильного тетраэдра, в центре которого находится пятый атом. Ковалентные силы направлены от центрального атома к вершинам тетраэдра (на рис. 33.8 эти силы изображены штриховыми линиями). Как нетрудно подсчитать, угол между связями равен  $\varphi = 109^\circ 29'$ . Длина связи, по данным

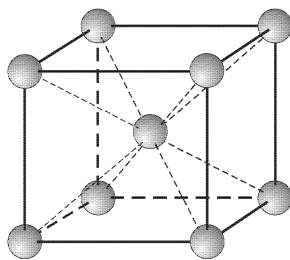


Рис. 33.7

рентгеноструктурного анализа, 0,154 нм. Ясно, что такой характер упаковки атомов не может быть получен по типу плотной упаковки одинаковых шаров.

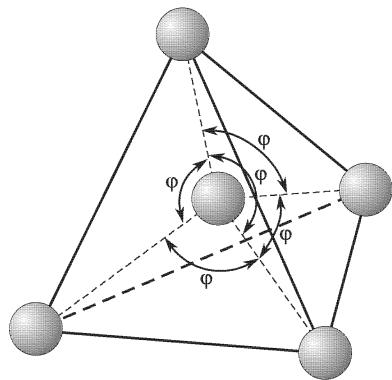


Рис. 33.8

связей разные. Сильная связь возникает с тремя атомами, лежащими с ним в одном слое под углами  $120^\circ$ ; слабая связь — с четвертым атомом, лежащим в соседнем слое. Направление этой связи составляет  $90^\circ$  с плоскостью слоя. Ячейка имеет форму

Аналогичную с алмазом структуру имеют кристаллы кремния, германия и белого олова. Ячейка имеет форму куба, где атомы расположены не только в вершинах, но и в центрах граней и внутри куба (рис. 33.9).

Второй тип упаковки атомов углерода, характерный для *графита*, изображен на рис. 33.10. Здесь каждый атом углерода также связан с четырьмя соседями, но силы и направленность

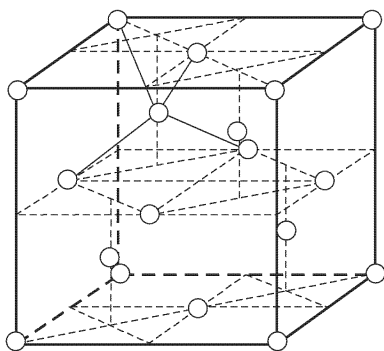


Рис. 33.9

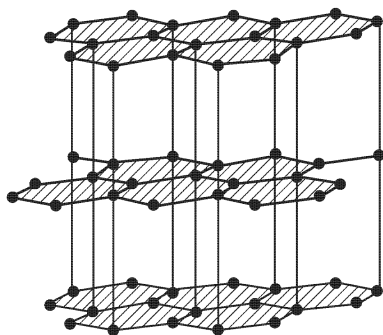


Рис. 33.10

прямой шестиугольной призмы; длина ребер 0,142 нм и 0,335 нм. Поскольку расстояние между слоями в 2,36 раза больше расстояния между атомами внутри слоя, сила связи между слоями мала.

4. Разница в строении кристаллических решеток алмаза и графита и объясняет резкое различие их физических свойств. Алмаз является одним из самых твердых веществ в природе — он режет стекло, а также любые твердые породы типа гранита, базальта и т. п. Графит очень мягок, он пишет на бумаге, ибо его слои могут

легко скользить друг относительно друга. Алмаз — изолятор, в нем нет свободных электронов, графит является проводником электрического тока. Алмаз прозрачен, графит сильно поглощает свет. Плотность алмаза  $3514 \text{ кг/м}^3$ , графита —  $2300 \text{ кг/м}^3$ .

Как показали исследования, при давлении порядка 6 ГПа и температуре выше  $1500^\circ\text{C}$  кристаллическая решетка графита путем сближения и перегруппировки атомов может перейти в решетку алмаза. Практически эту проблему решили ученые Института физики высоких давлений под руководством Л.Ф. Верещагина. Разработанные в этом институте «алмазные» прессы позволили получить искусственные алмазы с твердостью примерно такой же, как и у естественных.

### § 33.5. Структура льда и воды

1. Молекула воды  $\text{H}_2\text{O}$  имеет следующую структуру. Из четырех электронов, находящихся на внешней электронной оболочке атома кислорода, два вступают в ковалентную связь с двумя атомами водорода. Расстояние между центром атома кислорода и протоном (ядром атома водорода), называемое длиной связи, равно  $l = 0,099 \text{ нм}$ , а угол между связями  $\varphi = 109^\circ 30'$  (рис. 33.11). Оставшиеся на внешней оболочке атома кислорода два неспаренных электрона образуют вытянутые электронные орбиты, плоскость которых перпендикулярна плоскости, в которой лежит молекула воды. В результате молекула воды оказывается полярной с большим дипольным моментом  $p_e = 6,07 \cdot 10^{-30} \text{ Кл} \cdot \text{м}$ .

Структура молекулы воды диктует условия возникновения кристаллической решетки льда. В самом деле, при сближении двух молекул воды они ориентируются таким образом, что протон одной молекулы оказывается вблизи неспаренной, отрицательно заряженной связи другой молекулы и образует с ней ковалентную связь. Но в отличие, например, от железа или углерода, где ковалентная связь между одинаковыми атомами осуществляется непосредственно спаренными электронами, связь между молекулами воды осуществляется с помощью обобществленного протона. Поэтому ковалентная связь данного типа называется *водородной связью*.

2. Поскольку молекула воды имеет два протона и два неспаренных электрона, она легко вступает в связь с четырьмя сосед-

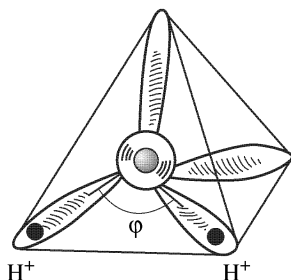


Рис. 33.11

ними молекулами. Следует также учесть, что угол между водородными связями почти точно равен углу между направлениями от центра правильного тетраэдра к его вершинам ( $109^{\circ}29'$ ). Поэтому элементарная ячейка льда очень похожа на элементарную ячейку алмаза. Она представляет собой тетраэдр с длиной ребра 0,276 нм. В вершинах тетраэдра и в его центре находятся ионы кислорода  $O^{2-}$ , на соединяющей их линии — один протон, который половину времени находится около «своего» иона кислорода, вторую половину времени — около «чужого». Так осуществляется водородная связь.

3. Рентгеноструктурный анализ показывает, что кристаллы льда имеют весьма рыхлую структуру, изображенную на рис. 33.12. Здесь большие шарики с дырками условно изображают

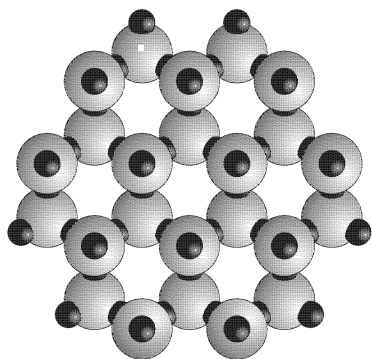


Рис. 33.12

атомы кислорода, маленькие перешейки между ними — атомы водорода. Каждый атом кислорода окружен четырьмя атомами водорода, атом водорода служит связующим звеном между двумя соседними атомами кислорода. Формула для молекулы воды  $H_2O$ , конечно, сохраняется, но выделить в кристалле отдельную молекулу невозможно.

Структура льда, естественно, не является плотной упаковкой, в решетке имеются большие «дыры». При плавлении льда вещество уплотняется.

Поэтому плотность воды при  $0^{\circ}C$  и нормальном давлении больше плотности льда при этих же условиях:

$$\rho_{\text{воды}} = 999,9 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_{\text{льда}} = 916,8 \text{ кг/м}^3.$$

4. Однако следует отметить, что при плавлении льда не происходит сразу полного разрушения кристаллической решетки. Разрывается лишь небольшое число водородных связей — при  $0^{\circ}C$  число таких разрушенных связей составляет около 15 %.

Остальные молекулы сохраняют кристаллоподобную структуру внутри небольших областей.

Освободившиеся молекулы воды частично заполняют пустоты в сохраняющейся структуре льда, что приводит к уменьшению объема вещества и соответственно к росту плотности. При повышении температуры возрастает число разорванных ковалентных

связей и тем самым число пустот, заполненных молекулами воды. Поэтому при нагревании воды от 0 до 4 °С она не расширяется, а сжимается и ее плотность растет. И только при более высоких температурах начинает оказывать преобладающее действие рассмотренный в § 31.6 общий механизм теплового расширения, и плотность воды начинает уменьшаться (рис. 33.13).

5. Особенности теплового расширения воды имеют исключительно важное значение для жизни обитателей водоемов. Дело в том, что при охлаждении воды зимой на дне водоемов оказывается более плотная вода с температурой 4 °С, сверху — более холодная вода, а на поверхности — лед, плотность которого меньше плотности

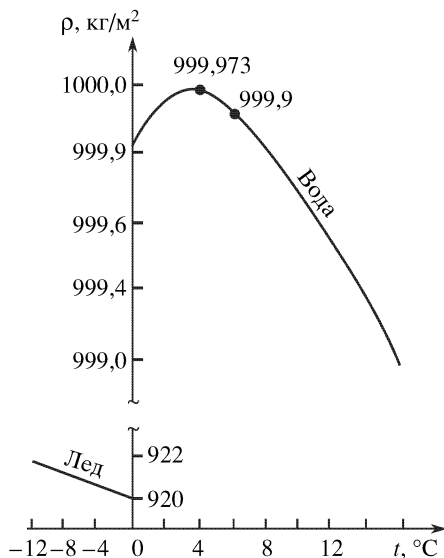


Рис. 33.13

воды. Плохая теплопроводность льда и покрывающего его снежного покрова предохраняет водоемы от замерзания до дна и создает тем самым условия для жизни обитателей водоемов зимой.

### § 33.6. Полимеры

1. Высокополимерные вещества (кратко — *полимеры*) состоят из очень длинных молекул вида цепей. В каждой цепи имеется правильно повторяющаяся группа атомов, связанных ковалентными силами; эти же силы обеспечивают сцепление между группами атомов в цепи. Так, например, молекула газа этилена ( $C_2H_4$ ) имеет строение, изображенное на рис. 33.14. При высокой темпе-

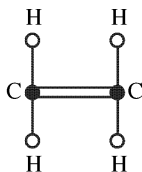


Рис. 33.14

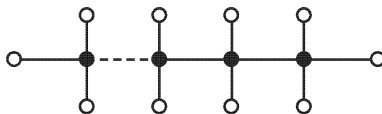


Рис. 33.15



ратуре и высоком давлении возникает полимерное вещество — *полиэтилен*, молекулярная цепочка которого может состоять из тысяч мономерных звеньев (рис. 33.15).

Упаковка таких длинных молекул в плотную структуру является довольно сложной задачей. Здесь имеются две возможности: либо цепи сворачиваются в плотный клубок (*глобулу*), либо они вытягиваются в длину и укладываются в *пачку*. Сами же глобулы или пачки образуют плотную упаковку аналогично плотной упаковке шаров.

2. Глобулы имеют размеры примерно от 10 до 30 нм, так что их можно наблюдать с помощью электронного микроскопа.

Оказывается, что глобулы упакованы по принципу плотной упаковки шаров. Вместе с тем рентгеноструктурный анализ дает несколько размазанную картину. Дело в том, что, в отличие от рассмотренных выше кристаллов, где все частицы, образующие кристалл, совершенно одинаковы, в глобулярном кристалле частицы обладают индивидуальностью. Глобулы различаются как длиной молекулярной цепи, которая у разных комплексов различна, так и характером свернутости этой цепи. Таким образом, хотя глобулярный кристалл и характеризуется дальним порядком, внутри каждой глобулы этот порядок нарушается.

3. Пачечные полимеры имеют иногда дальний порядок внутри пачки. Сами пачки могут легко загигаться и сворачиваться. Этим объясняется высокая эластичность резины. Пачки каучуковых молекул свернуты, и при растяжении происходит разворот пачечного клубка. После снятия внешней нагрузки клубок опять сворачивается, возвращаясь к состоянию с минимальной энергией.

## Глава 34

# БЛИЖНИЙ ПОРЯДОК

### § 34.1. Особенности жидкого состояния

1. В предыдущих главах были рассмотрены два предельных случая пространственной упаковки частиц — газ и кристалл. Идеальный газ характеризуется большой степенью разрежения и полным беспорядком в пространственном распределении частиц. Идеальный кристалл, наоборот, характерен более или менее плотной упаковкой частиц и полностью упорядоченным их расположением в некоторой пространственной решетке (дальний порядок).

Жидкость занимает некоторое промежуточное положение между кристаллом и газом. Молекулы (или другие частицы) упакованы в жидкости достаточно плотно, в особенности вблизи точки плавления, вследствие чего плотность жидкости всего лишь на 9–10 % меньше плотности твердого тела, а у расплавленных металлов — всего лишь на 3 %. Плотность воды даже больше плотности льда на 9 %.

В то же время жидкости полностью изотропны, и обнаружить у них анизотропные зерна, такие, как у поликристаллов, не удается. Естественно, что это означает отсутствие в жидкости дальнего порядка.

2. До 30-х годов текущего столетия считали, что структура жидкости полностью не упорядочена и по своему строению жидкость аналогична очень сильно уплотненному газу. Распространению этой точки зрения способствовала возможность применения в ряде случаев одинаковых законов в гидро- и газодинамике (см. гл. 30). Однако эта аналогия оказалась весьма поверхностной, основанной на сходстве только одного свойства — текучести жидкостей и газов. Рентгеноструктурный анализ жидкостей (и аморфных тел) показал, что имеется определенный порядок в расположении частиц в жидкости, особенно вблизи точки затвердевания. Но этот порядок соблюдается только на небольших расстояниях, порядка двух-трех молекулярных слоев. Это позволяет говорить о *ближнем порядке* в жидкостной упаковке частиц. Оказывается, что на этой основе можно качественно объяснить многие свойства жидкостей, что будет сделано ниже. В то же время строго количественная теория жидкого состояния до сих пор в полной мере еще не создана.

3. Выдающуюся роль в развитии нового взгляда на структуру жидкостей сыграли работы Я.И. Френкеля. Он не только высказал идею о близости свойств жидкости и кристалла (вдали от критической точки, см. § 35.5), но и сумел получить отсюда ряд количественных зависимостей для процессов диффузии, вязкого течения и теплопроводности, а также для анализа процесса кристаллизации и свойств сплавов. Некоторое понятие о его идеях будет дано ниже.

## § 34.2. Структура жидкости и ее свойства

1. В 60-е годы Дж.Д. Бернал выдвинул идею о том, что в жидкостях мы встречаемся с так называемой симметрией пятого порядка. Это означает, что в плоской модели (рис. 34.1) каждая

частица имеет в среднем около пяти ближайших соседей, а в пространственной упаковке — около одиннадцати. Отсюда вытекает ряд интересных следствий.

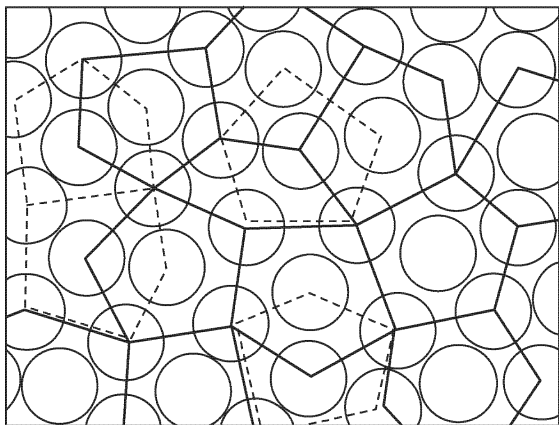


Рис. 34.1

Легко убедиться, что в такого рода упаковке может осуществиться только ближний порядок; дальний порядок здесь невозможен, так как плоскость можно покрыть сеткой, состоящей из правильных треугольников, квадратов и шестиугольников, но не пятиугольников. Точно так же пространство нельзя заполнить многогранниками, у которых грани были бы правильными пятиугольниками.

2. Отсюда следует, что пятиугольники, которые характеризуют упаковку частиц в жидкости, имеют несколько различные ребра. Если в кристаллах все частицы находятся друг от друга на расстоянии  $d$ , где силы притяжения между ними уравновешены силами отталкивания (см. § 31.4), то в жидкостях расстояния между молекулами на одних ребрах несколько больше  $d$ , на других — меньше  $d$  и лишь в среднем они близки к  $d$ .

Энергия взаимодействия между частицами зависит от расстояния между ними (см. § 31.5). Она имеет минимальное значение при  $r = d$ , а при  $r > d$  или  $r < d$  энергия взаимодействия возрастает. Следовательно, *при одной и той же температуре внутренняя энергия кристалла меньше, чем энергия его расплава*. Это позволяет понять, почему при плавлении кристалла к нему нужно подвести *теплоту плавления*  $Q_{\text{пл}} = m\lambda$ . Здесь  $m$  — масса вещества,  $\lambda$  — удельная теплота плавления, т. е. энергия, которую нужно сообщить единице массы вещества, находящегося

при температуре плавления, чтобы перевести его из кристаллического в жидкое состояние.

Сравнение внутренней энергии кристалла и его расплава позволяет объяснить, почему при низких температурах жидкости, как правило, кристаллизуются. Здесь проявляется общий закон: стремление любой системы частиц к состоянию с минимальной энергией.

3. Многогранники, имеющие симметрию пятого порядка, при плотной упаковке не могут дать правильную кристаллическую решетку. Они группируются в компактные пространственные образования, плотность которых может быть даже больше плотности кристалла. Бернал их назвал *псевдоядрами*, т. е. ложными ядрами. Между этими ядрами обязательно должны возникнуть большие отверстия, или *дырки* по терминологии Френкеля. Наличие этих «дырок» компенсирует избыточную плотность ядер и приводит к тому, что плотность жидкостей обычно меньше плотности кристалла.

4. Псевдоядра не являются достаточно стабильными образованиями. Благодаря большому числу «дырок» частицы могут легко переходить от одного ядра к другому, образуя при этом многогранники различной формы. В результате жидкость, в отличие от кристалла, имеет не одну определенную структуру, а большое число эквивалентных, сходных друг с другом структур, соответствующих одному и тому же значению энергии системы. Поскольку энтропия системы определяется числом различных структур, соответствующих данному состоянию (см. § 28.7), то мы видим, что *при одной и той же температуре энтропия кристалла значительно меньше энтропии его расплава.*

### § 34.3. Среднее время оседлой жизни

1. Структура жидкости непрерывно меняется. Причина заключается в том, что большое число «дырок» в жидкостной упаковке частиц способствует их перемещению. Частица жидкости колеблется около мгновенного положения равновесия в течение некоторого времени, которое Френкель образно назвал *временем оседлой жизни*. Затем она перескакивает на место дырки и присоединяется к другому псевдоядру. Эти процессы происходят случайным образом, разные частицы переходят из одного состояния в другое в течение разных промежутков времени, но при огромном числе частиц можно ввести понятие о *среднем времени оседлой жизни*  $\tau$  как о промежутке времени, в течение которого

не меняется структурная конфигурация псевдоядер, характеризующая ближний порядок.

Среднее время оседлой жизни обратно пропорционально вероятности перехода частицы на место дырки, а дырки — на место частицы. Вероятность «переселения» можно подсчитать следующим образом.

2. Для того чтобы частица оторвалась от псевдоядра, она должна обладать кинетической энергией, превосходящей работу, которую нужно затратить на преодоление молекулярных сил притяжения. Эта энергия называется *энергией активации*; обозначим ее буквой  $\varepsilon$ . Чем больше энергия активации, тем меньше вероятность переселения частицы.

С другой стороны, при повышении температуры жидкости вероятность переселения возрастает. Температура характеризует *среднюю* кинетическую энергию молекул, но благодаря максвелловскому закону распределения частиц по скоростям всегда найдется некоторое число частиц, кинетическая энергия которых больше средней. При повышении температуры процент таких более быстрых молекул возрастает, следовательно, возрастает и процент частиц, энергия которых окажется большей, чем энергия активации. Тем самым возрастает и вероятность переселения.

3. Обозначим через  $x$  отношение энергии активации к средней кинетической энергии частицы (см. § 26.11):

$$x = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_k} \approx \frac{\varepsilon_0}{kT}$$

(так как  $\varepsilon_k \approx kT$ ). Вероятность переселения  $w$  будет некоторой функцией этого отношения:

$$w = f(\varepsilon_0/kT) = f(x). \quad (34.1)$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в § 26.11, приведут нас к выводу, что вероятность «переселения» частицы на место дырки выражается показательной функцией вида

$$f(x) = a^{-\alpha x}.$$

Знак минус в показателе появляется по следующим соображениям. С ростом энергии активации или с понижением температуры вероятность переселения должна уменьшаться, как было показано ранее. Следовательно, функция  $w = f(x)$  должна быть убывающей. А при основании степени  $a > 1$  показательная функция убывает, если показатель степени является отрицательным числом.

4. Итак, вероятность «переселения» частицы

$$w = \exp \left( -\frac{\varepsilon_0}{kT} \right). \quad (34.2)$$

При низких температурах показатель степени по модулю очень велик; при этом он будет отрицательным числом, и вероятность переселения будет близка к нулю ( $a^{-\infty} = 0$ ). При высоких температурах показатель степени стремится к нулю, а вероятность переселения частицы стремится к единице ( $a^0 = 1$ ).

5. Среднее время оседлой жизни частицы обратно пропорционально вероятности ее переселения, так что  $\tau \sim 1/w$ . Из (34.2) следует

$$\tau = \tau_0 \exp \frac{\varepsilon_0}{kT}, \quad (34.3)$$

где  $\tau_0$  — характерная для данной жидкости постоянная величина. Графики зависимости вероятности переселения и среднего времени оседлой жизни частицы от температуры изображены на рис. 34.2. Видно, что с ростом температуры среднее время оседлой жизни очень быстро убывает, а вероятность переселения частицы на место дырки растет.

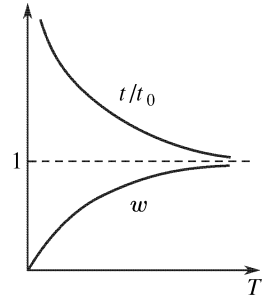


Рис. 34.2

### § 34.4. Диффузия в жидкостях

1. Наличие «дырок» между псевдоядрами позволяет качественно объяснить механизм явления диффузии и внутреннего трения в жидкости и выяснить характер зависимости коэффициентов диффузии и вязкости от температуры.

Механизм диффузии в газах был выяснен в § 25.5. Там же было получено выражение для коэффициента диффузии:  $D = \lambda v/3$ , где  $\lambda$  — средняя длина свободного пробега молекулы,  $v$  — средняя скорость беспорядочного поступательного движения молекул (теплового движения).

2. Диффузия в жидкостях происходит гораздо медленнее, чем в газах. Но с повышением температуры коэффициент диффузии возрастает очень быстро. Опыты, проведенные с мечеными атомами, приводят к выводу, что коэффициент диффузии в жидкостях (а также в кристаллах) меняется с ростом температуры по закону

$$D = A \exp \left( -\frac{\varepsilon_0}{kT} \right). \quad (34.4)$$

Здесь  $A$  — некоторая постоянная, характерная для данного вещества,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — термодинамическая температура,  $\varepsilon_0$  — энергия активации. Для жидких металлов  $\varepsilon_0$  имеет значение примерно 1–3 эВ. График зависимости коэффициента диффузии от температуры изображен на рис. 34.3.

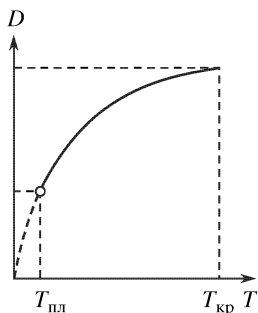


Рис. 34.3

3. Механизм диффузии в жидкостях, следуя идеям Френкеля, можно объяснить следующим образом. Обозначим среднюю длину свободного пробега частицы в жидкости через  $\delta$  (это, по существу, расстояние между псевдоядрами). Тогда средняя скорость перемещения частицы внутри жидкости  $u \approx \delta/\tau$ , где  $\tau$  — среднее время

ее оседлой жизни. По аналогии с (25.10) имеем

$$D = \frac{1}{3} \delta u = \frac{\delta^2}{3\tau} = \frac{\delta^2}{3\tau_0} \exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{kT}\right). \quad (34.5)$$

Этот результат соответствует данным эксперимента (см. (34.4)).

### § 34.5. Вязкость жидкостей

1. Сопоставив размерности плотности  $[\rho] = \text{ML}^{-3}$ , коэффициента диффузии  $[D] = \text{L}^2\text{T}^{-1}$  и вязкости  $[\eta] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$ , мы увидим, что

$$\frac{[\eta]}{[\rho]} = [D],$$

откуда следует

$$\eta = K \rho D, \quad (34.6)$$

где  $K$  — некоторый безразмерный коэффициент.

Соотношение (34.6) хорошо выполняется для газов. Здесь, как следует из эксперимента,  $K \approx 1$  и

$$\eta \approx \rho D \approx \frac{\lambda v \rho}{3}. \quad (34.7)$$

С ростом температуры вязкость газов возрастает. В самом деле, подставив в (34.7) значения  $\rho = m_0 n$ ,  $\lambda = 1/n\sigma$  и  $v = \sqrt{3kT/m_0}$ , получим

$$\eta = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{m_0 k T}{3}}. \quad (34.7')$$

Итак, вязкость газов пропорциональна корню квадратному из термодинамической температуры.

2. Что касается жидкостей, то для них соотношение (34.7') оказывается несправедливым. Оно не выполняется даже качественно: в отличие от газов, вязкость жидкостей с ростом температуры не только не возрастает, но резко падает.

На этот факт впервые обратил внимание Френкель, который показал, что *вязкость жидкостей должна быть обратно пропорциональна коэффициенту диффузии*. Для доказательства воспользуемся уравнением (11.12), которое выражает зависимость силы сопротивления трения от вязкости, относительной скорости и характерных размеров тела, движущегося в жидкости.

При возникновении в жидкости градиента скоростей (см. § 11.7) псевдоядра скользят друг относительно друга. Возникающее при этом взаимодействие сводится к сопротивлению трения, которое испытывает «дырка», переходя от одного псевдоядра к другому. Следовательно, в формуле (11.12) можно заменить скорость  $v$  средней скоростью перемещения дырок  $u$ , а характерный размер  $L$  — размером дырки  $\delta$ . Итак, сопротивление трения

$$F = B\eta u\delta, \quad (34.8)$$

где  $B$  — некоторый числовой коэффициент. Но согласно (34.5)  $u\delta = 3D$ , следовательно,

$$F = 3B\eta D.$$

Последнее выражение можно записать так:

$$\eta = f/D, \quad (34.9)$$

где  $f = F/(3B)$  — некоторая постоянная величина, имеющая размерность силы. Тем самым показано, что вязкость жидкостей обратно пропорциональна коэффициенту диффузии. Подставив в (34.9) значение коэффициента диффузии из (34.4), получим

$$\eta = \eta_0 \exp \frac{\varepsilon_0}{kT}, \quad (34.10)$$

где  $\eta_0$  — значение коэффициента вязкости при  $\varepsilon_0 = 0$ , т. е. при отсутствии энергии активации. Таким образом, как видно из (34.10), вязкость жидкостей действительно резко падает с ростом температуры. График этой зависимости показан на рис. 34.4. Такая зависимость коэффициента вяз-

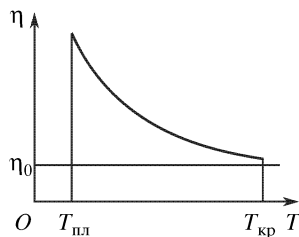


Рис. 34.4

Такая зависимость коэффициента вяз-



кости от температуры хорошо согласуется с экспериментальными данными.

3. Заметим, что выведенные выше выражения для зависимости коэффициента диффузии (34.5) и вязкости (34.10) от температуры имеют смысл лишь в определенном интервале температур: от точки плавления до так называемой *критической температуры*  $T_{кр}$ , выше которой жидкость существовать не может (см. § 35.5). Это и показано на рисунках 34.3 и 34.4.

### § 34.6. Аморфные тела

1. В природе встречаются тела, которые по своим механическим свойствам близки к твердым, но у которых, по данным рентгеноструктурного анализа, молекулы имеют жидкостную упаковку, т.е. ближний порядок. К ним относится, например, стекло, а также разные смолы, вар, загустевший расплав сахара (леденец) и ряд других веществ. Особенностью этих веществ, называемых *аморфными*, является отсутствие у них определенной точки плавления. При повышении температуры эти тела постепенно размягчаются, их вязкость падает и они начинают вести себя как обычные вязкие жидкости.

Отсутствие у этих веществ определенной точки плавления и дальнего порядка в упаковке молекул приводит нас к выводу, что аморфные тела — это не твердые тела, а переохлажденные и вследствие этого очень вязкие жидкости.

2. Причина образования аморфных тел может быть понята, если воспользоваться идеей о существовании в жидкости компактных псевдоядер, между которыми имеются скважины — «дырки». Может оказаться, что внутренняя энергия хорошо упакованных псевдоядер меньше внутренней энергии кристалла, и только благодаря наличию дырок, обладающих избытком энергии, суммарная внутренняя энергия жидкости оказывается больше, чем энергия кристалла.

При образовании кристалла часть молекул должна продиффундировать в дырки и тем самым образовать регулярную структуру — дальний порядок. Но при низкой температуре вероятность диффузии очень мала, ибо время оседлой жизни молекулы стремится к бесконечности (см. рис. 34.2). Поэтому при быстром охлаждении некоторых расплавов более вероятным оказывается образование аморфного тела, а не упорядоченной кристаллической решетки.

3. Заметим, что при аморфном состоянии тело обладает некоторым избытком энергии по сравнению с устойчивым кристалли-

ческим состоянием. Поэтому аморфное состояние — это так называемое *метастабильное*, т. е. не вполне устойчивое состояние.

Естественно, что со временем аморфные тела кристаллизуются. Так, в леденце через некоторое время образуются кристаллики сахара. Этим объясняется, почему при длительном хранении варенья оно может «засахариться». Точно так же стекло «стареет» — в нем образуются поликристаллические зерна. При этом оно теряет прозрачность и становится хрупким.

### § 34.7. Энергия поверхностного слоя и поверхностное натяжение жидкости

1. Частицы, находящиеся в поверхностном слое жидкости (или твердого тела), обладают избытком энергии по сравнению с частицами, находящимися внутри жидкости. Внутри жидкости частица окружена в среднем  $Z$  ближайшими соседями ( $Z \approx 11$ ), а в поверхностном слое она имеет вдвое меньше соседей (рис. 34.5). При температурах, близких к температуре плавления, энергия взаимодействия между двумя ближайшими молекулами  $\varepsilon \approx U_0$ , где  $U_0$  — глубина потенциальной ямы молекулярного взаимодействия (см. рис. 31.6). Отсюда следует, что энергия частицы внутри жидкости  $\varepsilon_{\text{внутр}} \approx Z\varepsilon \approx ZU_0$ , а энергия этой же частицы на поверхности  $\varepsilon_{\text{пов}} \approx (1/2)Z\varepsilon \approx (1/2)ZU_0$ . А так как  $U_0$  — отрицательное число, то  $\varepsilon_{\text{пов}} > \varepsilon_{\text{внутр}}$ . Итак, избыток энергии, которой обладает частица, находящаяся в поверхностном слое, по сравнению с энергией этой же частицы внутри жидкости выразится так:

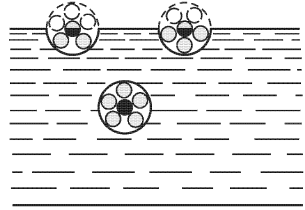


Рис. 34.5

$$\Delta\varepsilon_{\text{пов}} = \varepsilon_{\text{пов}} - \varepsilon_{\text{внутр}} = -\frac{1}{2} ZU_0 = \frac{1}{2} Z|U_0|.$$

Благодаря избытку энергии среднее расстояние между молекулами возрастает (см. § 31.5, 31.6). А это означает, что поверхностный слой является более рыхлым, чем внутренние участки жидкости.

2. Пусть на единице площади поверхностного слоя содержится  $n'$  частиц. Поверхностный слой площадью  $S$  будет обладать избытком энергии

$$\mathcal{E}_{\text{пов}} = \Delta\varepsilon_{\text{пов}} n' S \approx \frac{1}{2} Z n' S |U_0|. \quad (34.11)$$

На единицу площади приходится энергия

$$\alpha = \frac{\mathcal{E}_{\text{пов}}}{S} \approx \frac{1}{2} Z n' |U_0|. \quad (34.12)$$

Эта величина называется *поверхностной энергией* жидкости.

3. Всякая система частиц стремится перейти в состояние с минимальной энергией. Для жидкости это сводится к тому, что при отсутствии внешних сил она будет принимать такую форму, чтобы при заданном объеме она имела наименьшую поверхность. В геометрии доказывается, что такой формой является сфера. Этим и объясняется, что в состоянии невесомости, условия которого рассмотрены в § 7.3, капля жидкости имеет строго сферическую форму.

Стремление жидкости уменьшить свою поверхность приводит к тому, что на границе между поверхностной пленкой и твердым телом возникают *силы поверхностного натяжения*. В этом

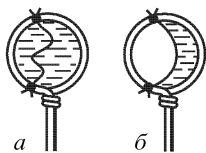


Рис. 34.6

позволяет убедиться простой опыт. Привяжем к проволочному кольцу нить, как это показано на рис. 34.6 а, и окунем кольцо в мыльный раствор. В образовавшейся мыльной пленке нить расположится случайным образом. Если теперь разрушить пленку по одну сторону нити, то оставшаяся пленка сократится так, чтобы ее поверхность стала минимальной (рис. 34.6 б).

Нить удерживается в натянутом состоянии силами поверхностного натяжения, направленными внутрь пленки по касательным к ее поверхности.

4. *Поверхностным натяжением*  $\sigma$  называется отношение силы, с которой пленка действует на ограничивающий ее контур, к длине этого контура  $l$ :

$$\sigma = F/l. \quad (34.13)$$

### § 34.8. Давление под искривленной поверхностью жидкости

1. При контакте жидкости с твердым телом возможны случаи, когда жидкость либо смачивает, либо не смачивает это тело. Так, ртуть хорошо смачивает чистые поверхности металлов и не смачивает чистое стекло; вода смачивает чистое стекло и не смачивает жирные поверхности и т. д.

Свободная поверхность жидкости на границе с твердым телом искривляется; в зависимости от характера смачивания образуется *мениск* той или иной формы. Смачивающие жидкости образуют вогнутый, несмачивающие — выпуклый мениск. Угол между

смоченной поверхностью твердого тела и касательной к мениску в точке его пересечения с твердым телом называется *краевым углом*  $\theta$ .

Пусть  $\sigma_{\text{жт}}$ ,  $\sigma_{\text{жг}}$  и  $\sigma_{\text{тг}}$  — поверхностные натяжения соответственно на границах жидкость–твердое тело, жидкость–газ и твердое тело–газ. Тогда на участок жидкости длиной  $\Delta l$  около точки  $O$  действуют три силы:  $F_{\text{жт}}$ ,  $F_{\text{жг}}$  и  $F_{\text{тг}}$  (рис. 34.7). Очевидно, что жидкость будет находиться в равновесии при условии  $F_{\text{жт}} + F_{\text{жг}} \cos \theta = F_{\text{тг}}$ . Выразив силы через поверхностные натяжения согласно (34.13), получим

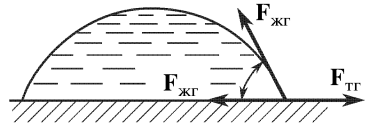


Рис. 34.7

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{\text{тг}} - \sigma_{\text{жт}}}{\sigma_{\text{жг}}}. \quad (34.14)$$

Если жидкость смачивает поверхность твердого тела, то краевой угол оказывается острым (рис. 34.8 а):  $0 \leq \theta < \pi/2$ . Если жидкость не смачивает поверхность твердого тела, то краевой угол тупой (рис. 34.8 б):  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ . Величина краевого угла зависит от химического состава твердого тела, жидкости и окружающего газа, от чистоты этих веществ и от их температуры. При идеальном смачивании  $\theta = 0$ , при идеальном несмачивании  $\theta = \pi$ .

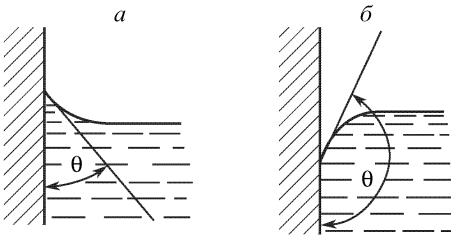


Рис. 34.8

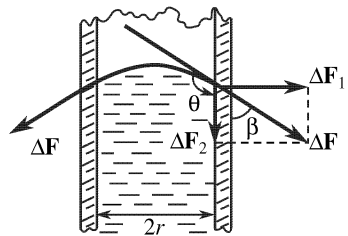


Рис. 34.9

2. Искривленная поверхность оказывает на жидкость избыточное давление. Для расчета этого давления ограничимся случаем, когда жидкость находится в трубке, радиус которой равен  $r$  (рис. 34.9). Искривленная поверхность жидкости образует сферический сегмент, поверхность которого составляет с поверхностью трубки краевой угол  $\theta$ .

На участок границы контакта жидкости с твердой стенкой длиной  $\Delta l$  действует сила поверхностного натяжения  $\Delta F = \sigma \Delta l$ . Эта сила направлена по касательной к поверхности жидкости.

Разложим эту силу на две компоненты:  $\Delta F_1$  и  $\Delta F_2 = \Delta F \cos \beta = -\sigma \Delta l \cos \theta$ . Компонента  $\Delta F_2$  вызывает давление, избыточное по сравнению с атмосферным.

3. Для вычисления избыточного давления следует силу давления  $F_2 = -\sigma \cdot 2\pi r \cos \theta$  разделить на площадь круга  $S = \pi r^2$ . Имеем

$$p = \frac{F_2}{S} = -\frac{2\sigma \cos \theta}{r}. \quad (34.14)$$

Мы видим, что избыточное давление оказывается отрицательным, если краевой угол острый: при  $0 \leq \theta < \pi/2$  имеем  $\cos \theta > 0$ . Если же краевой угол тупой, т. е.  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ , то  $\cos \theta < 0$  и избыточное давление оказывается положительным.

Формулу (34.14) можно переписать в виде

$$p = 2\sigma/R, \quad (34.15)$$

где  $R = -r/\cos \theta$  — радиус искривленной сферической поверхности. Положительным мы считаем радиус выпуклой поверхности, отрицательным — вогнутой.

Предоставляем читателю возможность самостоятельно показать, что в случае цилиндрической искривленной поверхности избыточное давление

$$p = \sigma/R. \quad (34.16)$$

### § 34.9. Капиллярные явления

1. Трубки с узким внутренним каналом называются *капиллярами* (от латинского capillus — волос). Если такую трубку опустить в жидкость, которая ее смачивает, то жидкость внутри трубки поднимется выше поверхности жидкости в широком сосуде (рис. 34.10 а). Несмачивающая жидкость, наоборот, опустится ниже ее уровня в сосуде (рис. 34.10 б).

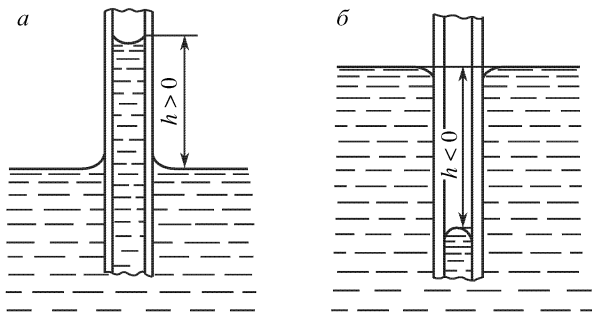


Рис. 34.10

Для вычисления высоты капиллярного подъема (или опускания) жидкости следует учесть, что жидкость в трубке будет находиться в равновесии, если сумма гидростатического давления  $\rho gh$  и давления под искривленной поверхностью  $p = -2\sigma \cos \theta / r$  будет равна нулю:

$$\rho gh - \frac{2\sigma \cos \theta}{r} = 0,$$

отсюда следует

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{r\rho g}. \quad (34.17)$$

Мы видим, что в случае смачивающей жидкости, когда краевой угол острый ( $\cos \theta > 0$ ), высота подъема положительна; в случае несмачивающей жидкости краевой угол тупой ( $\cos \theta < 0$ ) и высота капиллярного подъема отрицательна. Уровень несмачивающей жидкости в капиллярной трубке будет ниже ее уровня в широком сосуде.

2. Капиллярные явления часто встречаются в природе. Ими объясняется гигроскопичность ряда тел, т. е. их способность впитывать влагу. Такова причина гигроскопичности ваты, тканей, почвы, бетона. Последнее учитывается в строительной практике: между фундаментом здания и стенами прокладывается слой толя, смолы или другого вещества, что препятствует проникновению влаги по стенам в жилые помещения.

Подпочвенная влага по капиллярам почвы поднимается на поверхность и испаряется. Для сохранения влаги в почве следует капилляры разрушить. Это достигается путем ее вспашки и боронования.

## Глава 35

### ПАР

#### § 35.1. Испарение

1. Как известно из опыта, жидкости способны испаряться, т. е. переходить в газообразное состояние. Скорость испарения оценивается числом молекул, переходящих в пар с единицы поверхности за единицу времени. У разных жидкостей она различна: эфир, налитый в блюдце, испарится при комнатной температуре в течение нескольких минут, вода при тех же условиях сохранится в течение нескольких часов, а ртуть — нескольких лет. Испарение жидкостей происходит при любой температуре, но с ростом

температуры скорость испарения очень быстро возрастает. Этим пользуются на практике: если нужно быстро высушить какую-либо вещь, то ее помещают рядом с нагретым телом, например, с печкой или батареей отопления.

2. Испаряются не только жидкости, но и твердые тела; например, нафталин или камфара испаряются при комнатной температуре и нормальном давлении, минуя жидкое состояние. Точно так же испаряются кристаллы брома или иода, особенно если их подогреть. Испаряется также лед. Если влажное белье развесить на морозе, то вода замерзает, а затем лед испаряется, и белье становится сухим.

Испарение кристаллических тел называется *сублимацией* или *возгонкой*, обратный процесс — *десублимацией*.

Скорость сублимации также зависит от температуры и химической природы вещества. Молекулярные кристаллы, такие как бром или иод, испаряются легко, так как силы молекулярного притяжения, связывающие молекулы в кристаллической решетке, являются весьма слабыми. Легко испаряется лед, имеющий очень рыхлую кристаллическую решетку. Наоборот, плотно упакованные ионные, ковалентные или металлические кристаллы испаряются очень плохо.

3. Механизм испарения можно объяснить следующим образом. Молекула (или атом), находящаяся на поверхности жидкости или кристалла, втягивается внутрь силами молекулярного взаимодействия и тем самым удерживается на поверхности. Для того чтобы эта частица могла покинуть вещество, ее кинетическая энергия должна быть больше *энергии испарения*  $u_0$ , которая равна той работе, которую нужно совершить, чтобы преодолеть силы молекулярного притяжения и удалить молекулу на такое расстояние от поверхности, где молекулярные силы уже не проявляются. Следовательно, условием испарения будет  $\epsilon_k \geq u_0$  или

$$\frac{m_0 v^2}{2} \geq u_0. \quad (35.1)$$

Отсюда следует, что покинуть поверхностный слой могут не любые молекулы, а только более быстрые, скорость которых удовлетворяет условию (35.1). Это позволяет понять, почему при испарении происходит охлаждение жидкости. Мы знаем, что температура тела определяется средней кинетической энергией движения молекул. Естественно, что если из жидкости улетают наиболее быстрые молекулы, то средняя энергия оставшихся молекул уменьшается, что и означает понижение температуры.

4. Вероятность испарения можно найти с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые в § 34.3 позволили определить вероятность «переселения» частицы в «дырку». Получим, заменив  $\varepsilon_0$  на  $u_0$ :

$$w_{\text{исп}} = \exp\left(-\frac{u_0}{kT}\right). \quad (35.2)$$

Скорость испарения пропорциональна вероятности испарения, ибо чем вероятнее переход молекул с поверхности тела в пар, тем больше будет число молекул, переходящих в пар с единицы площади в единицу времени. Итак, скорость испарения  $G \sim w_{\text{исп}}$  или

$$G = G_0 \exp\left(-\frac{u_0}{kT}\right). \quad (35.3)$$

В этом выражении  $G_0$  пропорционально числу молекул, способных покинуть поверхностный слой, т.е. молекул, скорости которых удовлетворяют условию (35.1). Естественно, что с повышением температуры тела число таких молекул возрастает. Можно показать, что  $G_0 = BT^\alpha$ , где  $B$  — постоянная, зависящая от химического состава вещества,  $\alpha \approx 1/2$ . Подставив в (35.3), получим окончательное выражение для скорости испарения:

$$G = BT^\alpha \exp\left(-\frac{u_0}{kT}\right). \quad (35.4)$$

## § 35.2. Насыщенный пар

1. Если достаточно большое количество жидкости поместить в закрытый сосуд, то часть ее испарится, и далее количество жидкости будет оставаться неизменным сколь угодно долго. Но процесс испарения прекратиться не может — молекулы, энергия которых соответствует условию (35.1), будут все время покидать поверхность жидкости. Следовательно, наряду с процессом испарения непрерывно происходит компенсирующий его процесс *конденсации* пара в жидкость. Скорость конденсации определяется числом молекул, переходящих из пара в жидкость через единицу поверхности в единицу времени.

Таким образом, в закрытом сосуде через некоторое время устанавливается *динамическое равновесие* между процессами испарения и конденсации. Скорость конденсации становится равной скорости испарения, и начиная с этого момента времени количество жидкости перестает уменьшаться.

Пар, находящийся в состоянии динамического равновесия со своей жидкостью (или кристаллом), называется *насыщенным* (насыщающим) паром.



2. Вычислим, от каких параметров зависит концентрация молекул насыщенного пара. Для этого следует учесть, что скорость испарения, согласно (35.4), не зависит от концентрации молекул пара над жидкостью, а скорость конденсации пропорциональна концентрации молекул пара — чем больше молекул содержится в единице объема над жидкостью, тем вероятнее, что молекула приблизится к поверхностному слою и будет им поглощена. Итак, скорость конденсации

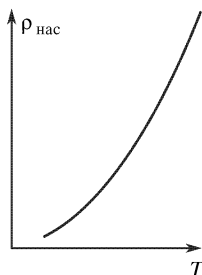
$$g = \beta n, \quad (35.5)$$

где  $\beta$  — некоторый коэффициент,  $n$  — концентрация молекул пара.

При динамическом равновесии скорость конденсации равна скорости испарения. Приравняв правые части равенств (35.4) и (35.5), получим выражение для концентрации молекул насыщенного пара:

$$n_{\text{нас}} = AT^{\alpha} \exp\left(-\frac{u_0}{kT}\right). \quad (35.6)$$

3. Плотность насыщенного пара получим, умножив концентрацию на массу молекулы:



$$\rho_{\text{нас}} = m_0 n_{\text{нас}} = Am_0 T^{\alpha} \exp\left(-\frac{u_0}{kT}\right). \quad (35.7)$$

Рис. 35.1

График этой зависимости изображен на рис. 35.1. Мы видим, что с ростом температуры плотность насыщенного пара резко возрастает.

### § 35.3. Давление насыщенного пара

1. Подставив в формулу (26.10) выражение для концентрации молекул (35.6), получим выражение для давления насыщенного пара:

$$p_{\text{нас}} = n_{\text{нас}} kT = AkT^{\alpha+1} \exp\left(-\frac{u_0}{kT}\right). \quad (35.8)$$

График этой зависимости изображен на рис. 35.2. Для сравнения здесь же вычерчен график зависимости давления идеального газа от температуры (при постоянном объеме). Давление идеального газа растет линейно с ростом температуры, давление насыщенного пара возрастает значительно быстрее. Причина

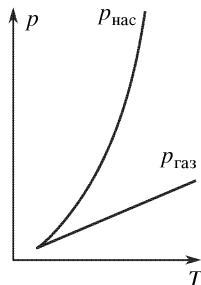


Рис. 35.2

заключается в том, что у газа рост давления обусловлен только ростом кинетической энергии молекул, а у насыщенного пара с ростом температуры возрастает не только кинетическая энергия молекул, но и их концентрация.

2. Следует отметить, что выражение (35.8) не является вполне строгим, поскольку при его выводе мы воспользовались формулой (26.10) для давления идеального газа, у которого силами молекулярного взаимодействия пренебрегают вследствие большого расстояния между молекулами. Между тем концентрация молекул насыщенного пара может оказаться довольно большой, расстояния между ними — доста-

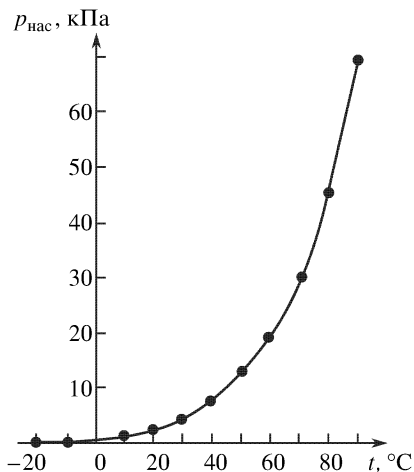


Рис. 35.3

точно малыми, и влияние молекулярных сил может оказаться существенным. И все же выражение (35.8) в основном правильно передает свойства насыщенного пара. Об этом свидетельствует табл. 35.1, а также рис. 35.3, на котором изображен график зависимости давления насыщенных паров воды от температуры, построенный по данным этой таблицы. Видно, что характер этой зависимости в общем совпадает с тем, что дает теоретическая кривая (рис. 35.2) или выражение (35.8).

3. Из выражения (35.8) следует, что давление насыщенного пара зависит только от его химического состава и температуры, но не зависит от величины свободного от жидкости объема сосуда, где находится пар.

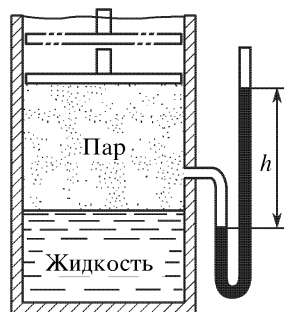


Рис. 35.4

Опыт подтверждает этот вывод, и его легко объяснить следующим образом.

Допустим, что мы увеличим свободное пространство над жидкостью, подняв поршень в установке, изображенной на рис. 35.4. Вначале манометр регистрирует некоторое уменьшение давления, что свидетельствует об уменьшении концентрации молекул пара. Но при этом уменьшится скорость конденсации

Таблица 35.1

## Давление и плотность насыщенного водяного пара

$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{кПа}$	$\rho, \text{г/м}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{кПа}$	$\rho, \text{г/м}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{кПа}$	$\rho, \text{г/м}^3$
-30	0,0373	0,33	0	0,611	4,84	30	4,242	30,3
-29	0,0413	0,37	1	0,657	5,22	31	4,493	32,1
-28	0,0467	0,41	2	0,705	5,60	32	4,754	33,9
-27	0,0507	0,46	3	0,759	5,98	33	5,030	35,7
-26	0,0573	0,51	4	0,813	6,40	34	5,320	37,6
-25	0,0627	0,55	5	0,872	6,84	35	5,624	39,6
-24	0,0693	0,60	6	0,935	7,3	36	5,941	41,8
-23	0,0773	0,66	7	1,001	7,8	37	6,276	44,0
-22	0,0853	0,73	8	1,073	8,3	38	6,625	46,3
-21	0,0933	0,80	9	1,148	8,8	39	6,991	48,7
-20	0,103	0,88	10	1,228	9,4	40	7,376	51,2
-19	0,113	0,96	11	1,312	10,0	45	9,583	65,4
-18	0,125	1,05	12	1,403	10,7	50	12,33	83,0
-17	0,137	1,15	13	1,497	11,4	55	15,73	104,3
-16	0,151	1,27	14	1,598	12,1	60	19,92	130
-15	0,165	1,38	15	1,705	12,8	65	25,00	161
-14	0,181	1,51	16	1,817	13,6	70	31,16	198
-13	0,199	1,65	17	1,937	14,5	75	38,54	242
-12	0,217	1,80	18	2,064	15,4	80	47,34	293
-11	0,237	1,96	19	2,197	16,3	85	57,81	354
-10	0,260	2,14	20	2,338	17,3	90	70,10	424
-9	0,284	2,33	21	2,486	18,3	95	84,51	505
-8	0,309	2,54	22	2,644	19,4	100	101,3	588
-7	0,337	2,76	23	2,809	20,6	120	198,5	1091
-6	0,368	2,99	24	2,984	21,8	140	361,3	1890
-5	0,401	3,24	25	3,168	23,0	160	618,1	3083
-4	0,437	3,51	26	3,361	24,4	180	1003	4782
-3	0,476	3,81	27	3,565	25,8	200	1555	7099
-2	0,517	4,13	28	3,780	27,2			
-1	0,563	4,47	29	4,005	28,7			

(см. (35.5)) и состояние динамического равновесия нарушится. А так как скорость испарения, которая зависит только от температуры, останется неизменной, то это приведет к добавочному испарению какой-то части жидкости и к восстановлению состояния динамического равновесия между паром и жидкостью.

При этом манометр покажет, что восстановится первоначальное значение давления насыщенного пара.

Аналогичный процесс будет наблюдаться при опускании поршня. При сжатии пара его концентрация возрастет и ско-

рость конденсации превысит скорость испарения. Нарушенное динамическое равновесие восстановится за счет того, что часть пара конденсируется. При этом восстановится первоначальное значение концентрации молекул и давления пара, которые зависят только от температуры.

### § 35.4. Изотерма пара

1. В установке, изображенной на рис. 35.4, будем непрерывно выдвигать поршень. При этом жидкость будет все время испаряться, и при некотором объеме  $V_1$  жидкости в сосуде не станет. Давление насыщенного пара вплоть до объема  $V_1$ , естественно, будет оставаться неизменным.

Если продолжать выдвижение поршня так, чтобы объем пара стал больше  $V_1$ , то давление пара станет уменьшаться. В самом деле, если жидкость в сосуде исчезнет, то уменьшение концентрации молекул при расширении пара уже не будет компенсироваться испарением жидкости. Такой пар называется *ненасыщенным*, или *перегретым*. При неизменной температуре его давление уменьшается при увеличении объема примерно по закону Бойля–Мариотта.

2. Проведем теперь обратный процесс: опуская поршень, станем сжимать перегретый пар. Его давление будет возрастать, и при  $V = V_1$  оно станет вновь равно давлению насыщенного пара. Если продолжать дальше уменьшать объем, то часть пара конденсируется, а давление будет оставаться равным давлению насыщенного пара.

Наконец, при некотором объеме  $V_2 < V_1$  весь пар конденсируется и поршень вплотную придвинется к поверхности жидкости. Дальнейшее уменьшение объема потребует колоссальных давлений, поскольку частицы в жидкости упакованы достаточно плотно и ее сжимаемость мала.

3. Графически весь описанный процесс изображен на рис. 35.5. Участок 0–1 соответствует перегретому пару, участок 1–2 — насыщенному пару и участок 2–3 — жидкости. Вся кривая называется *изотермой пара*, или изотермой Эндрюса в честь ученого, который первым получил и исследовал изотермы такого рода.

Заметим, что процесс расширения и сжатия пара следует проводить достаточно медленно. Испарение жидкости сопровождается ее охлаждением (см. § 35.1), а конденсация пара — нагреванием жидкости. Постоянство температуры обеспечивается теплообменом установки с окружающей средой. А так как теплообмен

протекает довольно медленно, то столь же медленно следует перемещать поршень.

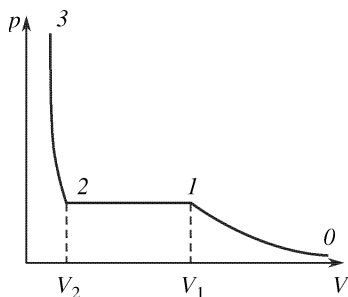


Рис. 35.5

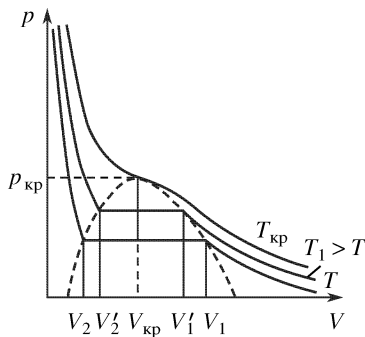


Рис. 35.6

4. Произведем процесс сжатия пара при более высокой температуре  $T_1 > T$ . Мы заметим, что состояние насыщенного пара получится при новом объеме  $V_1' < V_1$  (рис. 35.6). Это легко объяснить: с ростом температуры давление насыщенного пара быстро нарастает (см. § 35.3) и для того, чтобы давление перегретого пара сравнялось с ним, следует объем пара существенно уменьшить.

В то же время полная конденсация насыщенного пара и касание поршнем поверхности жидкости произойдет при объеме  $V_2' < V_2$ . Причина заключается в тепловом расширении жидкости, которая при более высокой температуре занимает больший объем.

### § 35.5. Критическое состояние вещества

1. При повышении температуры область насыщенного пара уменьшается. Поэтому можно высказать предположение, что при некоторой температуре  $T_{кр}$  насыщенный пар вообще не образуется и перегретый пар при определенном объеме  $V_{кр}$  и давлении  $p_{кр}$  будет непрерывно переходить в жидкое состояние (см. рис. 35.6). Опыт подтверждает это предположение.

Температура  $T_{кр}$ , соответствующая такому состоянию вещества, называется *критической температурой*, давление  $p_{кр}$  — *критическим давлением*, а плотность  $\rho_{кр} = m/V_{кр}$  — *критической плотностью*. Для воды, например,  $t_{кр} = 374^\circ\text{C}$ ,  $p_{кр} = 22,1 \text{ МПа}$ ,  $\rho_{кр} = 329 \text{ кг/м}^3$ .

2. К понятию о критическом состоянии вещества можно подойти и из несколько иных соображений. Как было показано,

с ростом температуры плотность насыщенного пара очень быстро возрастает (см. § 35.2). Плотность жидкости при повышении температуры убывает за счет ее теплового расширения. Построив графики зависимости плотности пара и жидкости от температуры (рис. 35.7), мы увидим, что при некоторой температуре они

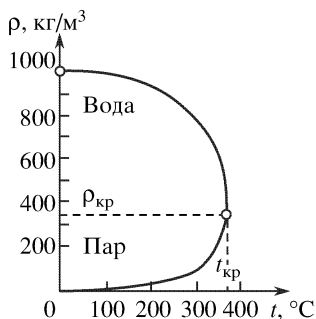


Рис. 35.7

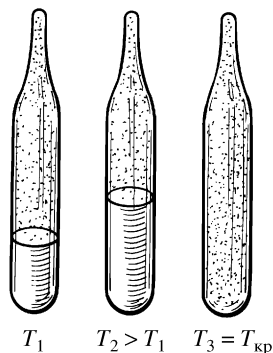


Рис. 35.8

сливаются. Это позволяет дать такое определение: *критической* называется *температура, при которой плотность насыщенного пара равна плотности жидкости*.

Критическое состояние вещества можно наблюдать на опыте, предложенном М. П. Авенариусом (рис. 35.8). В запаянной стеклянной колбочке находится некоторое количество эфира. При низкой температуре видна резкая граница между жидкостью и насыщенным паром. Если сосуд нагреть, то уровень жидкости повышается, несмотря на то, что часть ее при нагревании испарилась. Это свидетельствует о существенном уменьшении плотности жидкости и возрастании плотности пара. При критической температуре граница между жидкостью и паром исчезает и весь объем вещества внутри сосуда становится мутным. Это вызвано тем, что при критической температуре за счет флуктуаций плотности во всем объеме непрерывно возникают и тут же испаряются микроскопические капельки жидкости. Они-то и рассеивают свет.

3. Выше критической температуры жидкость, а тем более кристалл не образуются даже при больших давлениях. Причина заключается в том, что здесь интенсивность теплового движения молекул (или атомов) оказывается настолько большой, что даже при относительно плотной их упаковке, вызванной большим давлением, молекулярные силы не могут обеспечить создание даже ближнего, а тем более дальнего порядка.

Это значит, что при сверхкритических температурах даже при очень больших давлениях возможно только газообразное состояние вещества, ха-

рактизирующееся полной неупорядоченностью движения частиц, из которых оно состоит.

4. При очень высоких температурах и чудовищных давлениях, вызванных сильным гравитационным полем, в некоторых типах звезд, называемых «белыми карликами», вещество переходит в особое сверхплотное состояние. При этом электроны отрываются от ядер, образуя электронный газ, наподобие того, как это имеет место в металлических кристаллах. Однако между этими состояниями имеется существенное отличие.

В металлах атомы теряют только внешние (валентные) электроны, а возникающие ионы образуют пространственную кристаллическую решетку. В сверхплотном состоянии атомы лишаются всех электронов, и оставшиеся голые ядра, размеры которых примерно в 10 тысяч раз меньше размеров атомов, образуют очень плотную, но совершенно неупорядоченную упаковку. Плотность вещества при этом оказывается колоссальной, порядка  $10^7$ – $10^8$  кг/м<sup>3</sup>. стакан такого вещества (200 см<sup>3</sup>) имел бы массу около 20 т (стакан ртути имеет массу около 3 кг).

И тем не менее данное состояние вещества, называемое *сверхплотной плазмой*, по своей структуре и свойствам ближе к газу, чем к кристаллу или жидкости. Но этот газ по своим свойствам резко отличается от идеального.

### § 35.6. Влажность воздуха

1. *Абсолютную влажность воздуха*  $f$  оценивают по массе водяных паров, содержащихся в 1 м<sup>3</sup> воздуха при данных условиях, т. е. *по плотности водяного пара*. Для удобства вычислений плотность выражают не в единицах СИ, а в граммах на кубический метр:

$$f = \rho_{\text{пар}} [\text{г/м}^3]. \quad (35.9)$$

В метеорологии обычно абсолютную влажность оценивают не по плотности пара, а по его давлению:  $f_m = p$ .

2. Абсолютную влажность можно определить по *точке росы*. Так называется температура, при которой пары, не насыщавшие ранее воздух, станут насыщающими. Так, из табл. 35.1 следует, что если абсолютная влажность воздуха равна 5,60 г/м<sup>3</sup>, то при 2 °С пары

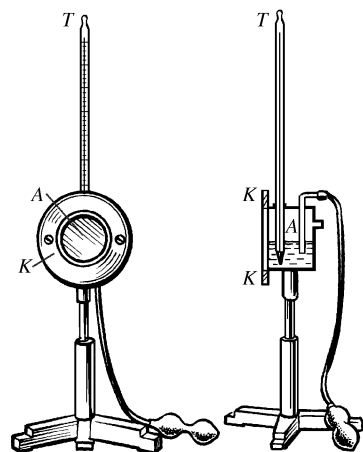


Рис. 35.9

станут насыщенными и выпадет роса.

Точку росы определяют с помощью *гигрометров* (от греческого *hygros* — влажный). Гигрометр Ламберта изображен (схематично) на рис. 35.9. В сосуд  $A$  наливается эфир, и через

него грушей продувается воздух. При интенсивном испарении эфира температура понижается; когда она станет равна точке росы, стенки сосуда запотевают. Кольцо  $K$  отделено от сосуда шайбой из материала, который плохо проводит тепло, поэтому оно не охлаждается. Контраст между блестящим кольцом и запотевшим сосудом облегчает регистрацию момента запотевания. Точку росы определяют по термометру  $T$ , ртутный шарик которого погружен в эфир.

3. Введенное выше понятие абсолютной влажности является недостаточным, ибо нас интересует не только абсолютное содержание влаги в воздухе, но и то, в какой степени влажность близка к состоянию насыщения. Поэтому вводится понятие относительной влажности  $B$ . *Относительной влажностью называется отношение абсолютной влажности к плотности (в метеорологии — к давлению) насыщенного пара при данной температуре:*

$$B = \frac{f}{\rho_{\text{нас}}} \approx \frac{f_m}{p_{\text{нас}}}. \quad (35.10)$$

4. Измерив с помощью гигрометра точку росы и зная температуру воздуха, можно с помощью табл. 35.1 определить относительную влажность. Например, если точка росы равна  $8^\circ\text{C}$ , а температура воздуха  $19^\circ\text{C}$ , то относительная влажность

$$B = \frac{8,3}{16,3} \approx \frac{1,073}{2,197} \approx 50\%.$$

Однако обычно относительную влажность определяют другими приборами — волосяными, пленочными или полупроводниковыми гигрометрами, а также с помощью *психрометров*. Так называется прибор, состоящий из двух термометров; шарик одного из них обмотан батистом, конец которого опущен в сосуд с дистиллированной водой (рис. 35.10). Сухой термометр регистрирует температуру воздуха, влажный — температуру испаряющейся воды. Мы уже говорили о том, что при испарении жидкости ее температура понижается (см. § 35.1). Очевидно, что чем суше воздух, т. е. меньше его относительная влажность, тем интенсивнее идет процесс испарения воды с влажного батиста и тем больше он охлаждается. Наоборот, если воздух содержит много паров и его относительная влажность

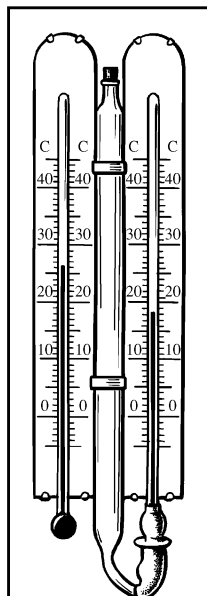


Рис. 35.10



велика, то испарение воды с батиста будет идти медленно и он будет слабо охлаждаться. Таким образом, разность показаний сухого и влажного термометров (так называемая *психрометрическая разность*) зависит от относительной влажности воздуха. С помощью специальных таблиц можно легко найти влажность воздуха по психрометрической разности.

## Глава 36

### ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

#### § 36.1. Изменение агрегатного состояния

1. Опыт показывает, что при нагревании твердых тел они плавятся, а затем испаряются; охлаждение вещества приводит к обратному процессу. Возможны случаи, когда при повышении температуры кристалла он не плавится, а сразу испаряется (сублимирует). Оказывается, что существенную роль здесь играет не только температура, но и давление над поверхностью вещества.

Агрегатное состояние вещества зависит от его температуры и давления над его поверхностью.

Переходы вещества из одного агрегатного состояния в другое, сопровождающиеся изменением характера упаковки частиц (дальний порядок, ближний порядок или полная неупорядоченность), называются *фазовыми переходами первого рода*.

2. Как показал Л.Д. Ландау, существуют и *фазовые переходы второго рода*. При этих переходах меняются некоторые свойства вещества, но характер упаковки частиц не меняется, о чем свидетельствует рентгеноструктурный анализ. Некоторые фазовые переходы второго рода будут рассмотрены при изложении магнитных свойств (см. гл. 42) и сверхтекучести гелия (см. § 36.12).

#### § 36.2. Диаграмма перехода жидкость–газ

1. Рассмотрим несколько подробнее график функции (35.8), выражающей зависимость давления насыщенного пара от температуры (рис. 36.1). Здесь точка *A*, лежащая на графике, соответствует *двухфазному* состоянию — насыщенному пару, расположенному над жидкостью и находящемуся с ней в состоянии динамического равновесия. Выясним, каким состояниям соответствуют точки *B*, *C*, *D* и *E*, расположенные вне кривой.

2. Переход из состояния *A* в состояние *B* происходит путем изотермического повышения давления. Но мы уже выяснили в

§ 35.4, что при изотермическом сжатии насыщенного пара он переходит в жидкость. Следовательно, точка  $B$  соответствует жидкости, сжатой до давления, которое больше давления насыщенного пара при данной температуре. Легко убедиться, что точка  $C$  соответствует состоянию жидкости, температура которой ниже температуры насыщенного пара при данном давлении.

Таким образом, точки, лежащие над кривой, соответствуют жидкому состоянию вещества.

3. Переход из состояния  $A$  в состояние  $D$  совершается путем изотермического понижения давления. Как было показано в § 35.4, изотермическое расширение насыщенного пара приводит к испарению жидкости и дальнейшему превращению насыщенного пара в ненасыщенный, т. е. в газообразное состояние. Точка  $D$  соответствует газу, давление которого ниже давления насыщенного пара при данной температуре.

Точно так же нетрудно убедиться, что точка  $E$  соответствует газообразному состоянию вещества, температура которого выше температуры насыщенного пара при данном давлении, т. е. перегретому пару.

Таким образом, точки, лежащие под кривой, соответствуют газообразному состоянию вещества.

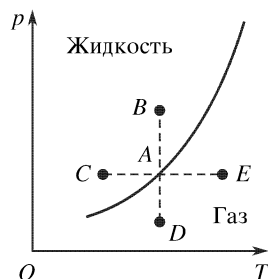


Рис. 36.1

### § 36.3. Диаграмма перехода кристалл–газ

1. Давление насыщенного пара над кристаллом при его сублимации может быть выражено той же функцией (35.8), что и давление пара над жидкостью, если заменить энергию испарения  $u_0$  энергией сублимации  $w_0$  и постоянную  $A$  — новой постоянной  $B$ , характеризующей это вещество. Мы получим такую же кривую, как на рис. 36.1, но с несколько другим наклоном. Оказывается, что в некоторой точке, соответствующей температуре  $\Theta$ , эти кривые пересекаются (рис. 36.2).

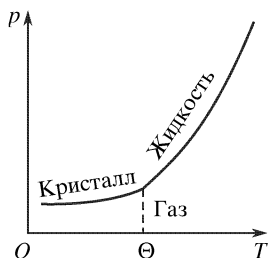


Рис. 36.2

2. При повышении температуры кристалл превращается в газ. При повышении

давления газ превращается в кристалл, поскольку упаковка частиц в кристаллах значительно более плотная, чем в газах.

Таким образом, диаграмма фазового перехода кристалл–газ совершенно аналогична диаграмме перехода жидкость–газ. И здесь точки, лежащие ниже и правее кривой (меньшее давление и высокая температура), соответствуют газообразному состоянию вещества; точки, лежащие выше и левее кривой (высокое давление и низкая температура), — кристаллическому состоянию.

### **§ 36.4. Диаграмма перехода кристалл–жидкость**

1. Оба рассмотренных выше случая — переходы вещества из газообразного в жидкое или кристаллическое состояние и наоборот имеют много общего. В обоих случаях повышение температуры способствует переходу в газообразное состояние, так как повышение температуры приводит к росту неупорядоченности молекулярного движения, что характерно именно для газа.

Точно так же повышение давления способствует переходу в более конденсированное состояние — жидкое или кристаллическое, так как при возрастании давления частицы вещества сближаются и возникающие при этом силы притяжения способствуют наведению какого-то порядка в их упаковке: ближнего при высокой температуре и дальнего при более низкой. В результате диаграммы, характеризующие оба этих перехода, очень похожи (см. рис. 36.2). Кривые, разделяющие области с разными агрегатными состояниями, наклонены здесь к оси абсцисс под острым углом.

2. Несколько сложнее обстоит дело с диаграммой фазового перехода кристалл–жидкость.

Повышение температуры и здесь способствует переходу от более упорядоченного в менее упорядоченное состояние, т. е. от кристалла к жидкости. Поэтому на диаграмме область жидкого состояния лежит правее области кристаллического. Что же касается влияния давления, то здесь возможны два случая.

3. У большинства веществ частицы в кристаллическом состоянии упакованы более плотно, чем в жидком. Следовательно, у этих веществ повышение давления будет способствовать переходу от более «рыхлой» жидкостной упаковки частиц к более плотной кристаллической. Это значит, что в данном случае точки, соответствующие жидкому состоянию вещества, будут расположены правее и ниже кривой фазового перехода (более высокие температуры и меньшие давления), а точки, соответствующие кристаллическому состоянию, — левее и выше кривой (более

низкие температуры и высокие давления). Диаграмма состояния и фазовых переходов такого вещества изображена на рис. 36.3.

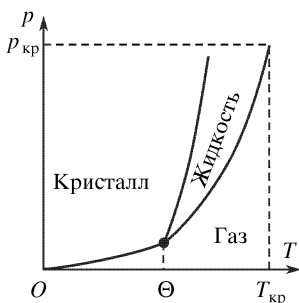


Рис. 36.3

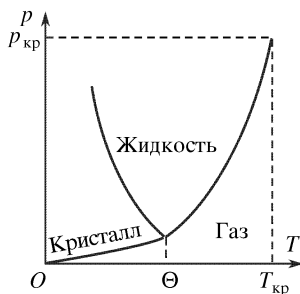


Рис. 36.4

4. Вместе с тем встречаются и вещества, у которых кристаллическая упаковка более «рыхлая», чем жидкостная. У этих веществ плотность кристалла меньше плотности жидкости.

Примером может служить вода, а также некоторые металлы и сплавы (висмут, серый чугун). Увеличение давления способствует уплотнению молекулярной упаковки и тем самым плавлению этих веществ. К такому же результату приводит и повышение температуры. В данном случае точки, соответствующие жидкому состоянию, располагаются правее и выше кривой фазового перехода (более высокие температуры и большие давления), а точки, соответствующие кристаллическому состоянию, — левее и ниже кривой (низкие температуры и малые давления).

Диаграмма состояния и фазовых переходов такого вещества изображена на рис. 36.4. Здесь кривая плавления наклонена к оси абсцисс под тупым углом.

### § 36.5. Диаграмма перехода кристалл–кристалл

1. У любого вещества имеется только одно жидкое и одно газообразное состояние, но кристаллических состояний может быть несколько. Причина заключается в разной степени упорядоченности молекулярной упаковки в этих трех агрегатных состояниях.

Газообразному состоянию вещества соответствует полный молекулярный беспорядок. Такому распределению молекул (или атомов) соответствует очень большое число всевозможных перегруппировок молекул в пространстве. Однако физические свойства вещества при всех этих перегруппировках остаются неизмен-

ными. Поэтому им всем соответствует одно газообразное состояние.

Жидкое состояние характеризуется ближним порядком в молекулярной упаковке (см. гл. 34). Однако и здесь пространственная перегруппировка частиц не отражается на физических свойствах вещества. Поэтому у вещества имеется лишь одно жидкое состояние.

Совершенно иначе обстоит дело с кристаллическим состоянием вещества. Здесь оказываются вполне возможными различные способы пространственной упаковки частиц, различающиеся своими свойствами. Примеры такого рода были подробно рассмотрены в гл. 33.

2. Тот или иной порядок упаковки частиц в кристаллической решетке определяется условиями, при которых происходит кристаллизация, а именно — температурой вещества и внешним давлением. При изменении этих условий меняется и характер упаковки частиц. Таким образом, процессы перекристаллизации вещества, т. е. процессы перестройки кристаллической решетки при изменении внешних условий являются также примерами фазовых переходов первого рода, и их можно изобразить с помощью диаграмм состояния.

3. Рассмотрим в качестве примера серу. При давлении 133,3 Па и температуре 95,5 °С из паров серы выделяются как желтые, так и красные кристаллы. При меньших давлениях и более низких температурах — только желтые кристаллы, при более высоких давлениях и температурах — только красные (рис. 36.5).

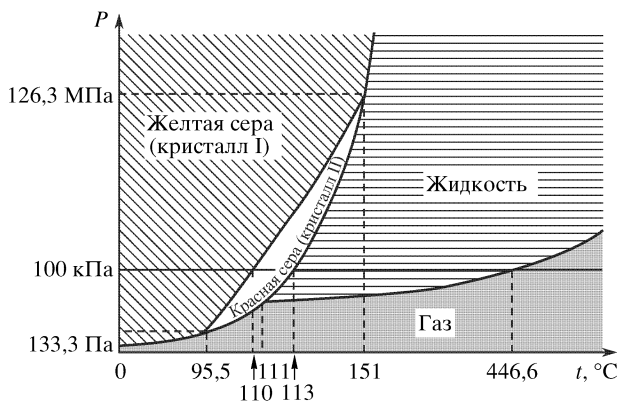


Рис. 36.5

Аналогичная картина наблюдается при кристаллизации из расплава. При температуре 151 °С и давлении 126,3 МПа из расплава одновременно выделяются кристаллы обоих сортов, при более высоком давлении — только

желтые, а при меньшем давлении — только красные кристаллы. Диаграмма состояния и фазовых переходов изображена на рис. 36.5. Заметим, что масштаб на осях координат не выдержан из-за большого диапазона давлений и температур.

4. Очень много различных модификаций имеет лед. В настоящее время их известно девять, и все они возникают при высоких давлениях. Так, при давлении  $2,075 \cdot 10^8$  Па образуется лед III, плотность которого больше плотности воды. При давлении  $1,96 \cdot 10^9$  Па образуется лед IV, точка плавления которого  $80^\circ\text{C}$ . Обычно мы имеем дело с модификацией лед I, свойства которого и были рассмотрены в § 33.5.

### § 36.6. Тройная точка

1. На всех диаграммах состояния имеются характерные точки, где пересекаются три графика, соответствующие фазовым переходам. На рисунках 36.3 и 36.4 это точки  $\Theta$ , где встречаются кривые, соответствующие переходам газ–жидкость, газ–кристалл и жидкость–кристалл, т. е. процессам кипения, сублимации и плавления. На рис. 36.5 это точка  $\Theta_1 = 95,5^\circ\text{C}$ , соответствующая переходам газ–кристалл I, газ–кристалл II и кристалл I–кристалл II; точка  $\Theta_2 = 151^\circ\text{C}$ , соответствующая переходам кристалл I–кристалл II, кристалл I–жидкость и кристалл II–жидкость; точка  $\Theta_3 = 111^\circ\text{C}$ , соответствующая переходам газ–кристалл II, газ–жидкость и жидкость–кристалл II. При этих температурах и соответствующих им вполне определенных давлениях возможно сосуществование трех фаз, например газа, жидкости и кристалла.

Точка на диаграмме состояния, соответствующая условиям, при которых возможно сосуществование трех фаз (трех различных агрегатных состояний вещества), называется *тройной точкой*.

2. Поскольку тройная точка является вполне определенной постоянной для данного вещества, то она может служить реперной точкой при построении температурной шкалы. В СИ тройная точка воды принята в качестве реперной точки для построения абсолютной шкалы температур. Именно тройной точке воды приписывается температура точно  $273,16\text{ K}$  (см. § 26.6). Давление водяных паров в тройной точке равно  $611\text{ Па}$ .

### § 36.7. Изменение внутренней энергии и энтропии при фазовых переходах первого рода

1. Фазовые переходы первого рода сопровождаются изменением внутренней энергии системы частиц, из которых построено тело. Рассмотрим с этой точки зрения процессы плавления и па-

рообразования. При кристаллической упаковке частицы колеблются около положений равновесия, расстояния между которыми соответствуют минимальному значению энергии взаимодействия при данной температуре вещества. При плавлении кристалла пространственная решетка разрушается и дальний порядок в упаковке частиц переходит в ближний. Обычно в этом случае происходит разрыхление упаковки, расстояние между частицами возрастает, что ведет к возрастанию энергии взаимодействия между ними. Если же жидкостная упаковка оказывается более компактной, чем кристаллическая (как у воды), то расстояние между молекулами становится меньше расстояния, соответствующего минимуму энергии взаимодействия, что также приводит к возрастанию внутренней энергии.

Итак, *плавление кристалла сопровождается возрастанием его внутренней энергии* за счет увеличения энергии взаимодействия между частицами. Естественно, что при этом процессе телу необходимо сообщить некоторую энергию — так называемую *теплоту плавления*. Энтропия системы при этом также возрастает благодаря переходу от дальнего к ближнему порядку в упаковке частиц.

2. С помощью аналогичных рассуждений читатель самостоятельно убедится, что *процессы сублимации и парообразования также сопровождаются возрастанием внутренней энергии системы*. Для этого следует учесть, что согласно условию, сформулированному в § 31.5, энергия взаимодействия частиц в газах считается равной нулю, а при плотной упаковке она отрицательна. Следовательно, при сублимации кристалла и при испарении жидкости требуется подвести к телу некоторую энергию — *теплоту фазового перехода* (теплоту сублимации, теплоту парообразования).

При фазовых переходах энергия каждой частицы меняется на величину  $\varepsilon_0$ . Умножив  $\varepsilon_0$  на число частиц  $N$  и учитывая, что  $m = Nm_0$  есть масса вещества, найдем изменение внутренней энергии при фазовом переходе:

$$\Delta U = N\varepsilon_0 = \frac{Nm_0\varepsilon_0}{m_0} = \frac{m\varepsilon_0}{m_0}. \quad (36.1)$$

Согласно первому началу термодинамики (27.6) теплота фазового перехода

$$Q = \Delta U + A = \frac{m\varepsilon_0}{m_0} + p(V_2 - V_1) = m \left[ \frac{\varepsilon_0}{m_0} + p \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \right],$$

где  $p$  — давление в процессе фазового перехода,  $\rho_2$  и  $\rho_1$  — плотность вещества в конечном и начальном состояниях. Удельная

теплота фазового перехода

$$\lambda = \frac{Q}{m} = \frac{\varepsilon_0}{m_0} + p \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) = \frac{\varepsilon_0}{m_0} + p(v_2 - v_1), \quad (36.2)$$

где  $v = V/m = 1/\rho$  — удельный объем.

3. Расстояния между частицами при плавлении вещества меняются незначительно по сравнению с расстояниями между ними в кристалле. При испарении или сублимации расстояния между молекулами становятся примерно в 10 раз большими, чем в жидком или твердом состоянии. Отсюда следует, что удельная теплота парообразования должна быть значительно больше, чем теплота плавления. Так, для льда при нормальном атмосферном давлении удельная теплота плавления  $\lambda_{\text{плавл}} = 0,335$  МДж/кг, а удельная теплота парообразования при этом же давлении  $\lambda_{\text{пар}} = 2,26$  МДж/кг.

Из закона сохранения энергии вытекает, что при обратном процессе (конденсации пара в жидкое или кристаллическое состояние или при кристаллизации расплава) внутренняя энергия соответственно уменьшается и теплота фазового перехода выделяется. Этот вывод подтверждается экспериментально.

Тело может получить теплоту фазового перехода за счет теплообмена с окружающей средой. В этом случае фазовый переход происходит при постоянной температуре, которая зависит от давления, при котором находится вещество. Температура фазового перехода может быть найдена с помощью диаграммы состояния. Так, из рис. 36.5 видно, что при нормальном атмосферном давлении сера плавится при  $113^\circ\text{C}$  и кипит при  $446,6^\circ\text{C}$ .

4. Из приведенных графиков видно, что с ростом давления температура кипения жидкости и сублимации кристалла возрастает, ибо здесь всегда из  $p_2 > p_1$  следует, что и  $T_2 > T_1$ . Что же касается точки плавления, то при возрастании давления она повышается у тех сил, где кристаллическая упаковка компактнее жидкостной (см. рис. 36.3).

Тела типа льда, у которых кристаллическая упаковка более «рыхлая», чем жидкостная, ведут себя иначе. Здесь с ростом давления точка плавления понижается. В самом деле, здесь из  $p_2 > p_1$  следует  $T_2 < T_1$  (см. рис. 36.4).

5. Если поступления энергии за счет теплообмена недостаточно, то теплота фазового перехода может быть получена только за счет изменения энергии молекулярного движения. Это сопровождается изменением температуры тела.

Такой процесс делает возможным, например, хранение сжиженных газов в сосуде Дьюара. Здесь теплообмен с окружающей



средой сведен к минимуму (см. § 21.5). Жидкость интенсивно испаряется, что приводит к ее охлаждению. По этой причине сосуд Дьюара со сжиженным газом нельзя закупоривать. Закупорка приведет к прекращению испарения и тем самым — к нагреванию жидкости до температуры окружающей среды. А так как эта температура выше критической, то жидкость при этом сразу же перейдет в газообразное состояние, что приведет к взрыву.

Благодаря интенсивной сублимации сохраняется при атмосферном давлении твердая углекислота — сухой лед. Его температура составляет — 75 °С, хотя температура окружающей среды значительно выше.

6. Выясним, от чего зависит наклон кривой фазового перехода на диаграммах (см. рисунки 36.3; 36.4). Для этой цели воспользуемся мысленным экспериментом с установкой, изображенной на рис. 35.4.

Представим себе, что жидкость при температуре  $T_1$  заполняет весь объем под поршнем, пара над ней нет. Подведем к жидкости некоторое количество теплоты  $Q = m\lambda_1$ ; при этом температура не изменится, часть жидкости испарится, и пар совершит работу расширения  $A_1$ . Затем охладим пар до температуры  $T_2 < T_1$  и сожмем его так, чтобы весь пар сконденсировался, а температура вернулась к первоначальному состоянию. На это расходуется работа  $A_2$ , и окружающей среде передается количество теплоты  $Q_2 = m\lambda_2$ .

По теореме Карно (см. § 29.5) имеем  $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ , откуда следует  $(\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda_1 = (T_1 - T_2)/T_1$ . Воспользовавшись (36.2), получим

$$\lambda_1 - \lambda_2 = p_1(v_2 - v_1) - p_2(v_2 - v_1) = (p_1 - p_2)(v_2 - v_1).$$

Таким образом,

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1} = \frac{(p_1 - p_2)(v_2 - v_1)}{\lambda_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Перепишем это равенство так:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{\lambda_1}{T_1(v_2 - v_1)}. \quad (36.3)$$

Перейдя к пределу при  $\Delta T \rightarrow 0$ , получим уравнение Клапейрона–Клаузиуса:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{\lambda_1}{T(v_2 - v_1)}. \quad (36.4)$$

При испарении или сублимации  $\lambda > 0$  и  $v_2 > v_1$ , следовательно, производная давления по температуре положительна, и кри-

вая фазового перехода наклонена к оси температур под острым углом (см. рис. 35.3). А вот при плавлении возможны два случая. Если  $v_2 > v_1$  (соответственно,  $\rho_2 < \rho_1$ ), то  $dp/dT > 0$ , и кривая плавления имеет вид, как на рис. 36.3. Если же  $v_2 < v_1$  и, соответственно,  $\rho_2 < \rho_1$  (лед, висмут, чугун), то кривая плавления имеет вид, как на рис. 36.4.

Такие же два случая возможны и при фазовых переходах типа «кристалл I – кристалл II» (см. рис. 36.5).

### § 36.8. Метастабильные состояния

1. Не следует думать, что как только изменится температура или давление, тело сразу же перейдет в новое агрегатное состояние, соответствующее диаграмме состояния. Только два фазовых перехода осуществляются при изменении температуры или давления без задержек — это сублимация или плавление кристалла. Все остальные фазовые превращения часто задерживаются. Хотя температура и давление тела могут соответствовать новому агрегатному состоянию, фазовый переход может и не произойти.

Если тело находится в агрегатном состоянии, которое, согласно фазовой диаграмме, не соответствует его температуре и давлению, то говорят, что оно находится в *метастабильном состоянии*.

Один из примеров метастабильного состояния был рассмотрен в § 34.6. Это аморфное состояние вещества, которое представляет собой *переохлажденную жидкость*. Возможно также состояние *перегретой жидкости*, *переохлажденного пара*, а также существование кристаллической решетки некоторого типа при условиях, когда более устойчивой является иной вид кристаллической упаковки.

2. Рассмотрим более подробно последний процесс. Перестройка кристаллической решетки при изменении внешних условий происходит при наличии сильной связи между частицами, плотно упакованными в пространственную решетку. Частицам «тесно», им очень трудно перегруппироваться в новую кристаллическую решетку, которая лучше соответствует изменившимся условиям. В результате переход из одного кристаллического состояния в другое, как правило, задерживается. Так, если желтую серу при нормальном атмосферном давлении нагреть до  $110^\circ\text{C}$ , то она, согласно фазовой диаграмме (см. рис. 36.5), должна превратиться в красную. На самом деле это не происходит, и дальнейший нагрев до  $113^\circ\text{C}$  приведет к ее плавлению. При охлаждении расплавленной серы ниже  $113^\circ\text{C}$  она образует красные кристаллы, од-

нако при их дальнейшем охлаждении ниже  $110\text{ }^{\circ}\text{C}$  до комнатных температур они сразу в желтую серу не перейдут. Потребуется значительное время, порядка суток, пока красные кристаллы превратятся в желтый порошок.

3. Процесс перекристаллизации резко ускорится, если привести в контакт с красными кристаллами, находящимися в метастабильном состоянии, небольшой желтый кристаллик. Оказывается, что в этом случае частицам гораздо легче укладываться на готовые грани кристаллической решетки, стабильной при новых условиях.

В процессе возникновения новой кристаллической решетки из метастабильного кристалла существенную роль играют флуктуации. Именно они и образуют микроскопические зародыши стабильной кристаллической упаковки, вокруг которых начинается рост нового кристалла.

Так как микроскопические зародыши возникают одновременно в разных точках и ориентированы они беспорядочно, то более вероятным является образование поликристаллической структуры, а не монокристалла.

4. Наличие зародышей, которые служат центрами кристаллизации, облегчает переход переохлажденной жидкости в кристаллическое состояние. Так, расплавленный гипосульфит можно осторожно охладить до комнатной температуры, и в таком переохлажденном состоянии он может находиться сутками. Но достаточно бросить в него маленький кристаллик, как жидкость почти мгновенно кристаллизуется. Заметим, что при этом температура гипосульфита возрастает благодаря выделению теплоты плавления.

Что касается перегретой жидкости и переохлажденного пара, то о них речь пойдет в следующих параграфах.

## § 36.9. Конденсация. Пересыщенный пар

1. Если при неизменном давлении понизить температуру пара ниже точки росы, то должна образоваться двухфазная смесь жидкость — насыщенный пар. Однако опыт показывает, что образование капелек жидкости возможно лишь в том случае, если в газе имеются *центры конденсации* — пылинки, ионы, острия на поверхности твердых тел и т. п. Если же центры конденсации отсутствуют, то капли жидкости не образуются и возникает метастабильное состояние — *пересыщенный (переохлажденный) пар*.

Пересыщенный пар можно получить и путем изотермического сжатия пара до давления, которое превосходит давление на-

сыщенного пара при данной температуре. График зависимости давления пересыщенного пара от его объема показан на рис. 36.6.

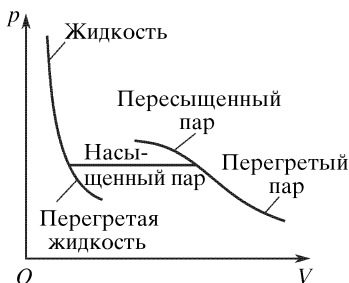


Рис. 36.6

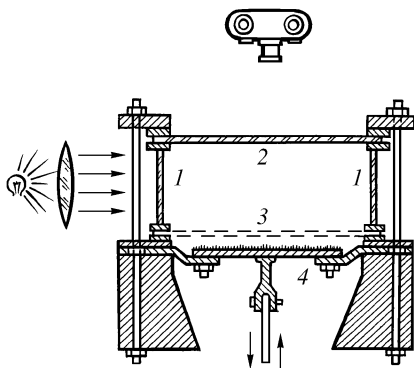


Рис. 36.7

2. Способность ионов играть роль центров конденсации используется в камере Вильсона (рис. 36.7). Камера Вильсона представляет собой стеклянный цилиндрический сосуд 1, покрытый сверху стеклом 2. Снизу сосуд покрыт слоем черного влажного бархата или сукна (на сетке 3), над поверхностью которого образуется насыщенный пар. При быстром опускании поршня 4 происходит адиабатное расширение газа, что сопровождается понижением его температуры. За счет охлаждения пар становится переохлажденным (пересыщенным).

Заряженные частицы, образующиеся при радиоактивном распаде, например  $\alpha$ - или  $\beta$ -частицы, пролетая в газе, создают на своем пути цепочку ионов. На этих ионах как на центрах конденсации образуются капельки жидкости. Таким образом, при полете частица оставляет за собой след (трек), который хорошо виден и может быть сфотографирован. На рис. 36.8 показана фотография треков  $\alpha$ -частиц (короткие и жирные); на рис. 36.9 — треки  $\beta$ -частиц (прерывистые и длинные).

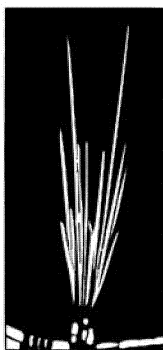


Рис. 36.8



Рис. 36.9

### § 36.10. Кипение. Перегретая жидкость

1. Испарение жидкости происходит с ее свободной поверхности при любой температуре. Чем выше температура, тем быстрее идет испарение.

*Кипением* называется процесс бурного парообразования не только с поверхности жидкости, но и по всему ее объему. Для этого жидкость должна быть нагрета до достаточно высокой температуры. При кипении важную роль играют пузырьки газа, имеющиеся в жидкости. Такие пузырьки образуются на границе жидкости и твердого тела. Пузырьки заполнены насыщенным паром жидкости.

При повышении температуры жидкости давление пара в пузырьке возрастает и его объем увеличивается. Выталкивающая сила, действующая на пузырек по закону Архимеда, возрастает с ростом его объема. При определенных условиях она станет больше силы сцепления между пузырьками и твердой стенкой. В этом случае пузырек отрывается от стенки, всплывает и лопается, выбрасывая пар.

2. Давление насыщенного пара  $p_{\text{нас}}$  внутри пузырька, находящегося у поверхности жидкости, равно сумме внешнего давления на жидкость  $p_{\text{внешн}}$  и давления под искривленной поверхностью:

$$p_{\text{нас}} = p_{\text{внешн}} + 2\sigma/r, \quad (36.3)$$

где  $r$  — радиус пузырька,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения (см. § 34.8). Если пузырек имеет размеры порядка нескольких миллиметров и больше, то вторым слагаемым в (36.3) можно пренебречь. Например, для воды при температуре  $100^\circ\text{C}$  величина  $\sigma = 58,8 \cdot 10^{-3}$  Н/м, и если  $r = 1$  мм, то  $2\sigma/r = 2 \cdot 58,8 \cdot 10^{-3}/10^{-3} = 118$  Па. В то же время нормальное атмосферное давление равно  $1,01 \cdot 10^5$  Па, что примерно в 1000 раз больше. Следовательно, для достаточно больших пузырьков условие всплывания пузырька и его разрыва у поверхности жидкости запишется так:

$$p_{\text{нас}} \geq p_{\text{внешн}}. \quad (36.4)$$

Это и есть *условие кипения*.

Итак, кипение жидкости возможно в том случае, если в ней имеются пузырьки достаточно больших размеров (для воды — порядка миллиметра). Кипение начнется в том случае, когда давление насыщенного пара станет равно внешнему давлению над поверхностью жидкости.

Как мы уже установили, давление насыщенного пара определяется только температурой жидкости. Из условия (36.4) следует,

что точка кипения зависит от внешнего давления — с ростом внешнего давления растет и точка кипения. Точка кипения воды при разных давлениях может быть найдена с помощью табл. 35.1.

3. Если в жидкости нет пузырьков, способствующих процессу кипения, то ее можно перегреть без того, чтобы кипение началось. Жидкость в этом метастабильном состоянии называется *перегретой жидкостью*.

Перегретую жидкость можно также получить, если уменьшить внешнее давление над жидкостью так, чтобы оно стало меньше давления насыщенного пара при данной температуре. График зависимости давления перегретой жидкости от ее объема показан на рис. 36.6.

4. Перегретая жидкость используется в *пузырьковых камерах*, изобретенных Д. Глезером в 1952 г., для визуализации треков релятивистских заряженных частиц, т. е. частиц, движущихся со скоростями, близкими к скорости света. Такие частицы создают в газах очень мало ионов, и их трек в камере Вильсона не виден. В жидкостях, где молекулы плотно упакованы, такие частицы создают значительно больше ионов, чем в газах, и трек может быть зарегистрирован.

Принцип действия пузырьковой камеры аналогичен принципу действия камеры Вильсона. Релятивистская частица, проходя через нагретую жидкость, создает на своем пути цепочку ионов. Если резко понизить давление над жидкостью, то она переходит в перегретое состояние. Ионы служат центрами для вскипания. Возникшие пузырьки образуют трек вдоль пути следования частицы. Этот трек фотографируется (рис. 36.10). В качестве рабочей жидкости в пузырьковых камерах используются сжиженные водород, пропан или ксенон.



Рис. 36.10

### § 36.11. Сжижение газов

1. Для того чтобы газ превратился в жидкость, его температура должна стать ниже критической. Для таких газов, как хлор ( $t_{кр} = 144\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), аммиак ( $t_{кр} = 132,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), углекислый газ ( $t_{кр} = 31,1\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), ксенон ( $t_{кр} = 16,7\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) и некоторых других, критическая температура которых порядка комнатной, проблема сжижения решается довольно просто. Снизив их температуру ниже

критической, их изотермически сжимают и получают жидкость. Гораздо труднее получить жидкий кислород ( $t_{\text{кр}} = -118,8^\circ\text{C}$ ), азот ( $t_{\text{кр}} = -147,1^\circ\text{C}$ ), водород ( $t_{\text{кр}} = -239,9^\circ\text{C}$ ) и в особенности жидкий гелий ( $t_{\text{кр}} = -267,9^\circ\text{C}$ ). Здесь нужны специальные установки, позволяющие получить весьма низкие температуры.

Имеется ряд методов, позволяющих решить проблему сжижения газов. Остановимся на одном из них — охлаждении газов при совершении ими полезной работы путем адиабатного расширения. Холодильные машины, работающие на основе этого принципа, называются *детандерами*. П. Л. Капица разработал весьма производительный *турбодетандер* — миниатюрную турбину, ротор которой приводится во вращение предварительно сжатым газом.

2. Рассмотрим принцип действия установки для сжижения газа. Она состоит из компрессора, теплообменника и детандера (рис. 36.11). Компрессор представляет собой поршневую машину, которая сжимает газ. Избыток тепла, возникающий при сжатии газа, отводится с помощью водяной системы охлаждения.

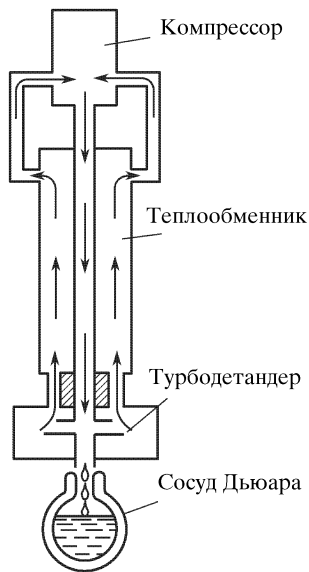


Рис. 36.11

Сжатый газ проходит по внутренней трубе теплообменника, у которого по наружной трубе большего диаметра навстречу течет охлажденный газ. Пройдя через теплообменник и охладившись, сжатый газ проходит через сопло Лавала и попадает на лопасти ротора турбины, приводя последний во вращение. При адиабатном расширении газа совершается работа за счет уменьшения его внутренней энергии. При этом температура падает столь сильно, что часть газа сжижается и стекает в сосуд Дьюара. Другая часть охлажденного, но не успевшего превратиться в жидкость газа идет в теплообменник,

где охлаждает вновь поступающую порцию сжатого газа, а затем поступает в компрессор и вновь сжимается.

3. Развитие методов получения сжиженных газов и в связи с этим низких температур привело к созданию *криогенной техники*. Сжиженные газы находят в настоящее время широкое применение в физических исследованиях, где необходимы низкие температуры, и в технике. Так, при испарении жидкого

воздуха вначале улетучивается азот и остается чистый кислород. В настоящее время это самый дешевый метод получения чистого кислорода, широко применяемого в медицине, для автогенной сварки, для ускорения доменного процесса и для выплавки стали. Жидкий кислород в смеси с органическими горючими веществами (вата, хлопок, опилки) образует взрывчатые вещества (оксиликвиты), которые применяются в горнорудной промышленности. Их преимущество заключается в том, что если взрыва не произошло, то через некоторое время кислород испарится и взрывчатый патрон станет совершенно безопасным.

4. Путем снижения температуры можно сжиженные газы привести в кристаллическое состояние. Для этого надо охладить, например, жидкий кислород до  $-218,8^{\circ}\text{C}$ , азот до  $-210,0^{\circ}\text{C}$  и водород до  $-259,2^{\circ}\text{C}$  (при нормальном давлении). Исключение составляет лишь гелий, который при нормальном давлении остается жидким до абсолютного нуля.

Эту особенность гелия удалось объяснить только на основе квантовой теории. Как было показано (см. § 16.7 и 26.7), при низких температурах вещество переходит в вырожденное состояние, и даже при абсолютном нуле атомы и молекулы совершают «нулевые» колебания (см. также § 70.5). Этим колебаниям соответствует «нулевая энергия», которую у вещества нельзя отнять ни при какой температуре.

Ответ на вопрос о том, кристаллизуется ли вещество или останется жидким, зависит от того, что играет определяющую роль — межмолекулярное (или межатомное) притяжение, вызывающее образование кристаллической решетки, или «нулевые» колебания, препятствующие этому образованию вблизи абсолютного нуля. И в этом отношении гелий отличается от всех других веществ.

В гелии силы взаимодействия между атомами весьма слабы, а энергия «нулевых» колебаний (16.26) благодаря малой массе гелиевых атомов значительна. Поэтому при низких давлениях кристаллическая решетка из атомов гелия образоваться не может, и вплоть до абсолютного нуля он остается жидким. И лишь при давлениях выше 2,53 МПа и температурах ниже 4 К образуется твердый гелий. Фотография кристалла гелия, соседствующего с жидкой фазой, изображена на рис. 36.12.

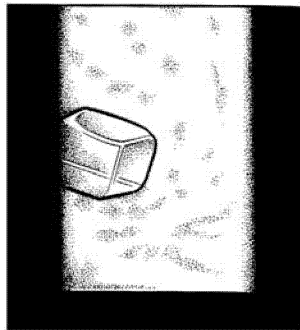


Рис. 36.12



5. Фазовая диаграмма гелия изображена на рис. 36.13. Заметим, что на ней нет тройной точки (см. § 36.6). Это значит, что ни при каких условиях невозможно сосуществование трех фаз

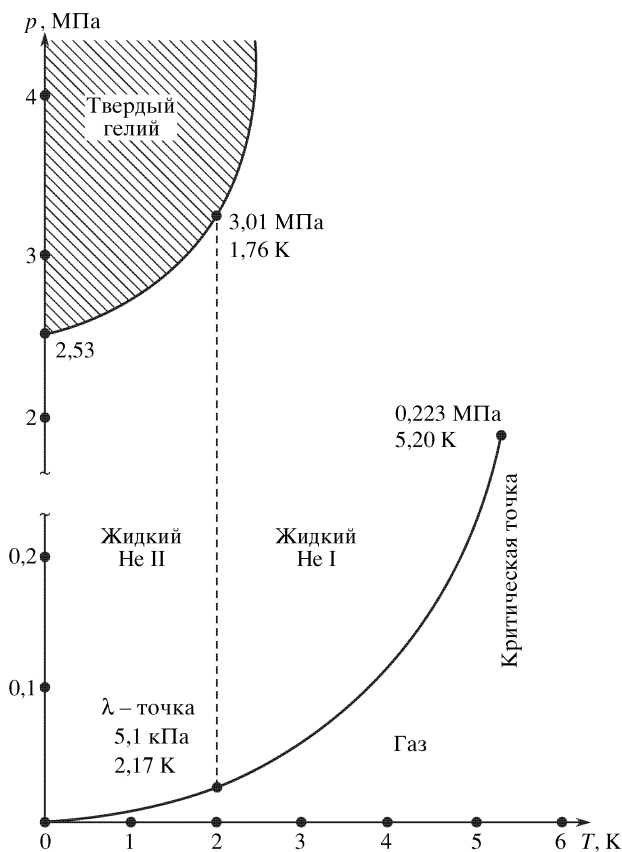


Рис. 36.13

гелия — кристаллической, жидкой и газообразной. Оказывается, что гелий — единственное вещество, у которого тройная точка отсутствует и который вплоть до абсолютного нуля может существовать в жидком состоянии.

### § 36.12. Сверхтекучесть гелия

1. В 1938 г. П.Л. Капица открыл явление сверхтекучести гелия — полное исчезновение вязкости в жидком гелии при температурах ниже 2,17 К. Оказалось, что при этой температуре

в гелии происходит фазовый переход второго рода — обычный жидкий гелий, ведущий себя подобно другим жидкостям, превращается в жидкость с особыми свойствами. Температура 2,17 К называется  $\lambda$ -точкой (лямбда-точка), жидкость выше этой температуры называется гелий I; ниже — гелий II (см. рис. 36.13).

Опыты показывают, что при откачке паров гелий I кипит, как всякая жидкость; ниже  $\lambda$ -точки кипение скачком прекращается, жидкость становится совершенно прозрачной, но сохраняется свободная поверхность и мениск возле стенки сосуда (гелий хорошо смачивает стекло). Камерлинг-Оннес, впервые наблюдавший это явление, понял, что ниже  $\lambda$ -точки состояние гелия качественно изменяется, но объяснить это явление он не смог.

2. Опыты, поставленные П. Л. Капицей, показали, что гелий II свободно протекает через капилляры, и его вязкость при этом во всяком случае меньше  $10^{-12}$  Па · с. Для сравнения укажем, что вязкость жидкого водорода примерно  $10^{-5}$  Па · с, а гелия I при температуре 4,22 К — примерно  $10^{-6}$  Па · с.

Снижение вязкости более чем в миллион раз привели П. Л. Капицу к смелому выводу, что вязкость у гелия II вообще отсутствует, т. е. точно равна нулю. Именно поэтому он и назвал это явление *сверхтекучестью*.

3. Свойства гелия II удалось объяснить на основе *двух-жидкостной модели*, согласно которой гелий II представляет собой смесь двух компонентов — *сверхтекучего* и *нормального*. Сверхтекучий компонент не участвует в переносе энергии и не обменивается импульсом со стенками сосуда, а потому движется без трения. Нормальный компонент ведет себя как обычная жидкость — он взаимодействует со стенками сосуда, испытывает поэтому вязкое трение и осуществляет перенос энергии (теплообмен).

Существование в гелии II двух компонентов обнаруживается следующим опытом (рис. 36.14), поставленным П. Л. Капицей в 1941 г. В сосуде Дьюара находится гелий II; здесь же находится миниатюрный сосуд Дьюара в виде колбочки с отверстием; в широкой части колбочки имеется проволочная спираль — нагреватель. Рядом с отверстием помещена вертушка с двумя крылышками.

При пропускании тока через спираль жидкость слегка разогревается, и из отверстия вытекает струя гелия, что обнаруживается за счет поворота вертушки. Но количество гелия в колбочке при этом не

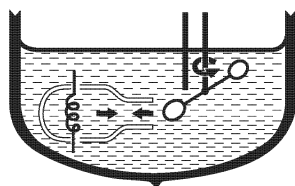


Рис. 36.14

уменьшается, следовательно, гелий не только вытекает из нее, но и втекает, однако этот поток на крылышки не действует. Мы приходим к выводу, что вытекающий поток — это нормальный компонент гелия II; он переносит энергию и импульс и оказывает давление на крылышко вертушки. Втекающий поток — это сверхтекучий компонент, который не переносит энергии и потому не давит на крылышко.

Возле нагретой спирали сверхтекучий компонент поглощает энергию и превращается в нормальный, так что оба компонента движутся навстречу один сквозь другой, не взаимодействуя друг с другом и не обмениваясь энергией.

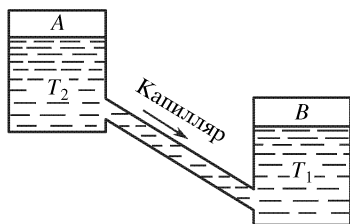


Рис. 36.15

4. При течении гелия II по капиллярам протекает в основном сверхтекучий компонент, а нормальный остается на месте. Об этом свидетельствует следующий эксперимент (рис. 36.15). Два сосуда *A* и *B* соединены капилляром. В начале опыта температуры равны. По-

сле перетекания части гелия II возникает разность температур — в сосуде *A* жидкость нагревается, в сосуде *B* охлаждается.

Причина заключается в том, что из сосуда *A* вытекает практически только сверхтекучий компонент, который не уносит энергию. Следовательно, внутренняя энергия в сосуде *A* не меняется, а масса жидкости уменьшается, что и приводит к повышению температуры. В сосуде *B*, наоборот, масса жидкости возрастает, а энергию сверхтекучий компонент не приносит, и потому температура уменьшается.

5. Двухжидкостная модель позволила Л.Д. Ландау создать гидродинамическую теорию гелия II, в которой нашли объяснение все наблюдаемые особенности этой необычной жидкости. Серьезным успехом этой теории явилось предсказание существования в гелии II *второго звука*. Оказалось, что помимо обычных звуковых волн, распространяющихся в жидком гелии со скоростью 250 м/с, в гелии II возможен и другой тип волн, скорость которых примерно в 10 раз меньше.

Экспериментальное обнаружение этих волн в 1944 г. послужило убедительным подтверждением гидродинамической теории. Однако объяснить природу свойств гелия II гидродинамическая теория не смогла, ибо она не раскрывала микромеханизма явлений. Это было достигнуто в 1941 г., когда Л.Д. Ландау применил квантовые соображения для анализа данного явления.

6. Рассмотрим некоторые основы квантовой теории сверхтекучести гелия II.

В квантовой физике тепловое движение в жидкости рассматривается как совокупность некоторых «элементарных тепловых возбуждений» (колебательных и вращательных). Оказывается, что энергия «тепловых возбуждений» может меняться лишь определенными порциями — квантами. И если энергия внешнего воздействия меньше этой порции энергии, то «тепловые возбуждения» не возникают (см. § 27.9).

Нагревание жидкого гелия II от абсолютного нуля до некоторой малой температуры приводит к появлению определенного числа «элементарных тепловых возбуждений», что сопровождается ростом внутренней энергии гелия и возникновением сил взаимодействия этих возбуждений со стенками сосуда — вязкого трения. Нормальный компонент гелия II и есть та часть жидкости, в которой возникли «тепловые возбуждения». Однако из детального расчета, основанного на совместном рассмотрении законов сохранения энергии и импульса каждого из возбуждений, вытекает, что ниже  $\lambda$ -точки большая часть гелия II не сможет обмениваться энергией с окружающей средой, т. е. в нем не возникнут «элементарные тепловые возбуждения». Этим состояниям соответствует сверхтекучий компонент гелия II.

Оказалось, что частицы сверхтекучего компонента гелия II весьма сильно взаимодействуют друг с другом, образуя связанный коллектив — так называемый *конденсат*, в котором не возникают «тепловые возбуждения». Именно поэтому конденсат не может обмениваться энергией и импульсом с окружающей средой.

При абсолютном нуле весь гелий II является сверхтекучим, и нормальный компонент в нем отсутствует. С ростом температуры растет число «элементарных тепловых возбуждений», т. е. увеличивается доля нормального компонента гелия II. Однако вплоть до  $\lambda$ -точки (2,17 К) в гелии II сохраняется сверхтекучий компонент со всеми своими особыми свойствами. И лишь при  $\lambda$ -точке происходит фазовый переход второго рода, гелий II скачком переходит в гелий I, представляющий собой жидкость с обыкновенными свойствами, в частности, обладающей вязкостью, вполне измеримой, хотя и малой по сравнению с другими жидкостями.

# Часть V

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

---

### Глава 37

## ПОЛЕ НЕПОДВИЖНЫХ ЗАРЯДОВ В ВАКУУМЕ

### § 37.1. Линии напряженности

1. В главах 10 и 18 было рассмотрено взаимодействие точечных электрических зарядов и диполей в вакууме. Для удобства вновь выпишем основные соотношения и вспомним их смысл.

Поле неподвижных зарядов — *электростатическое поле* — характеризуется двумя физическими величинами: напряженностью  $E$  и потенциалом  $\varphi$ . Согласно определению вектор напряженности

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}, \quad (37.1)$$

где  $q$  — пробный заряд,  $\mathbf{F}$  — сила, действующая на пробный заряд в данной точке поля (см. § 10.5). Потенциал

$$\varphi = \frac{U}{q}, \quad (37.2)$$

где  $U$  — потенциальная энергия пробного заряда в данной точке поля (см. § 18.7).

2. Если поле создается точечным зарядом  $Q$ , то модуль напряженности (см. § 10.6)

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (37.3)$$

а потенциал (см. § 18.8)

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (37.4)$$

3. Очень наглядную картину электрического поля можно получить по методу силовых линий, который предложен Фарадеем.

*Силовой линией* (линией напряженности) называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением

вектора напряженности. Силовой линии приписывается определенное направление, совпадающее с направлением вектора напряженности.

Если источником поля является точечный положительный заряд, то вектор напряженности направлен вдоль радиуса-вектора; если же источником поля служит отрицательный заряд, то вектор напряженности направлен в противоположную сторону (рис. 10.7). Отсюда следует, что силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.

4. Не следует приписывать силовым линиям большего смысла, чем просто наглядной картины поля. Нельзя считать, что поле как бы «состоит» из силовых линий (как щетка состоит из волосков), — на самом деле через любую точку поля можно провести силовую линию, так что силовых линий бесчисленное множество.

Не следует отождествлять силовые линии с траекториями движения зарядов в поле; дело в том, что по касательной к траектории направлен вектор скорости, а направление скорости далеко не всегда совпадает с направлением силы и тем самым — с направлением вектора напряженности.

## § 37.2. Эквипотенциальные поверхности

1. Существует еще один метод изображения электростатических полей — метод *эквипотенциальных поверхностей*. Эквипотенциальной поверхностью называется некоторая поверхность, все точки которой имеют одинаковое значение потенциала.

Так, если источником поля является точечный заряд, то из (37.4) следует, что эквипотенциальными поверхностями здесь будет семейство концентрических сфер с центром в точке, где расположен заряд. На рис. 37.1 изображено плоское сечение этой системы эквипотенциальных поверхностей; штрихом показаны силовые линии.

Как видно из рисунка, *направление силовой линии в каждой точке поля нормально эквипотенциальной поверхности*. Докажем, что это — общее свойство силовых линий, характерное для поля произвольного заряда или системы зарядов.

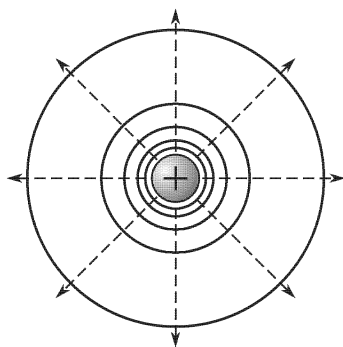


Рис. 37.1

2. Для доказательства выберем на эквипотенциальной поверхности две близкие точки, расстояние между которыми равно  $\Delta l$ . Вычислим работу, которая совершается при перемещении заряда  $q$  между этими точками.

Как известно (см. § 18.7), работа по перемещению заряда между двумя точками поля равна произведению величины заряда на разность потенциалов:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (37.5)$$

Работа эта равна нулю, поскольку точки лежат на одной эквипотенциальной поверхности и  $\varphi_1 = \varphi_2$ ; с другой стороны, эта работа может быть выражена и так (см. § 18.1):

$$A = F \Delta l \cos \alpha = q E \Delta l \cos \alpha. \quad (37.6)$$

Приравнявая оба выражения для работы, получим

$$q E \Delta l \cos \alpha = 0.$$

Но ни заряд, ни напряженность поля, ни расстояние между точками нулю не равны. Следовательно,  $\cos \alpha = 0$ , откуда вытекает, что  $\alpha = \pi/2$ . А так как это произвольные две точки эквипотенциальной поверхности, то отсюда следует, что вектор напряженности направлен по нормали к этой поверхности.

3. Полученный результат имеет очень важное значение. На основании данного свойства можно по известной системе эквипотенциальных поверхностей построить систему силовых линий и, наоборот, по известной системе силовых линий построить систему эквипотенциальных поверхностей.

Так, можно построить картину *однородного поля*. Поле называется однородным, если во всех его точках вектор напряженности имеет одинаковую величину и направление, т. е.  $\mathbf{E} = \text{const}$ . Отсюда следует, что силовые линии во всех точках этого поля имеют одно и то же направление. А это возможно лишь в том случае, если они представляют собой систему параллельных прямых. Эквипотенциальные поверхности, соответственно, представляют собой систему параллельных плоскостей, перпендикулярных силовым линиям (рис. 37.2).

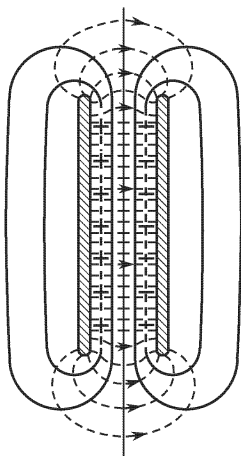


Рис. 37.2

Эквипотенциальные поверхности, соответственно, представляют собой систему параллельных плоскостей, перпендикулярных силовым линиям (рис. 37.2).

4. По картине силовых линий можно судить и о том, как меняется поле от точки к точке. Так, в поле точечного заряда силовые линии расположены гуще вблизи заряда, т. е. там, где модуль вектора напряженности велик (см. рис. 37.1). Наоборот, в однородном поле, где напряженность во всех точках одна и та же, густота силовых линий не меняется (см. рис. 37.2).

### § 37.3. Связь между напряженностью и потенциалом

1. Пусть в некоторой точке поля построен вектор напряженности  $\mathbf{E}$  и проведена эквипотенциальная поверхность  $M_1 N_1$ , все точки которой имеют одинаковый потенциал  $\varphi_1$  (рис. 37.3). На небольшом расстоянии  $\Delta n$  проведем новую эквипотенциальную поверхность  $M_2 N_2$ , все точки которой имеют потенциал  $\varphi_2$ .

Работу по перемещению пробного заряда  $q$  на участке  $\Delta n$  вычислим двумя способами, как это было сделано в предыдущем параграфе. Имеем

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qE\Delta n.$$

Отсюда следует

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta n} = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta n}. \quad (37.7)$$

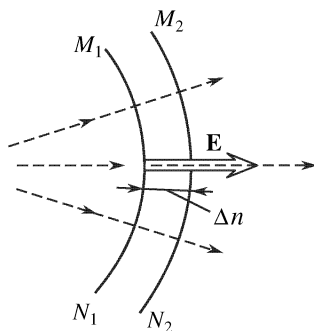


Рис. 37.3

Здесь  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  — изменение потенциала при перемещении на расстояние  $\Delta n$  по нормали к эквипотенциальной поверхности, т. е. вдоль силовой линии.

Из (37.7) следует наименование единицы напряженности электрического поля в СИ — *вольт на метр* (В/м).

2. Полученный результат является не совсем точным, поскольку по формуле  $\Delta A = F\Delta l \cos \alpha = F\Delta n$  можно рассчитать только элементарную работу — иными словами, работу силы на бесконечно малом перемещении. Точное равенство получим, перейдя в выражении (37.7) к пределу, при условии, что перемещение  $\Delta n$  стремится к нулю:

$$E = -\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta n} = -\frac{d\varphi}{dn}. \quad (37.8)$$

Итак, *напряженность электрического поля характеризует изменение потенциала на единице длины по направлению силовой*



линии. Заметим, что вектор напряженности всегда направлен в сторону убывания потенциала.

3. В однородном поле напряженность поля является постоянной величиной, следовательно, в том поле на заряд действует постоянная сила. Это позволяет пользоваться формулой (37.7) для любых достаточно длинных отрезков силовой линии. Итак, в однородном поле

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}. \quad (37.9)$$

### § 37.4. Диполь в электрическом поле

1. Пусть диполь (см. § 10.4) находится в однородном электрическом поле, так что вектор момента диполя образует угол  $\alpha$  с направлением вектора напряженности (рис. 37.4). На диполь

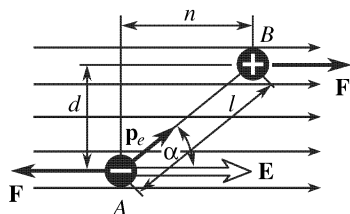


Рис. 37.4

в данном случае действует пара сил. Момент этой пары равен произведению силы на плечо (см. § 22.4):  $M = Fd = qEl \sin \alpha$ . Но так как  $p_e = ql$ , то окончательно имеем

$$M = p_e E \sin \alpha. \quad (37.10)$$

Итак, вращающий момент, действующий на диполь в электрическом поле, равен произведению

электрического момента диполя на напряженность поля и на синус угла между этими векторами.

Под действием вращающего момента сил диполь поворачивается и устанавливается так, что его электрический момент оказывается параллельным вектору напряженности поля. В таком положении как вращающий момент, так и равнодействующая электрических сил равны нулю, следовательно, диполь будет находиться в состоянии устойчивого равновесия. В этом же можно убедиться, вычислив энергию диполя.

2. Энергия диполя в электрическом поле есть сумма энергий обоих зарядов, из которых он состоит

$$\mathcal{E} = U_A + U_B = q\varphi_B - q\varphi_A. \quad (37.11)$$

Преобразовав несколько это выражение, получим

$$\mathcal{E} = -ql \frac{\varphi_A - \varphi_B}{n} \frac{n}{l}.$$

Здесь  $ql = p_e$  — момент диполя,  $(\varphi_A - \varphi_B)/n = E$  — напряженность поля и  $n/l = \cos \alpha$  (см. рис. 37.4). Следовательно, энергия диполя в электрическом поле

$$\mathcal{E} = -p_e E \cos \alpha. \quad (37.12)$$

При  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$  вращающий момент, действующий на диполь, равен нулю (см. (37.10)), следовательно, диполь находится в состоянии равновесия. Но эти случаи различаются по характеру устойчивости.

Если угол  $\alpha = 0$ , то энергия диполя оказывается минимальной:  $\mathcal{E}_{\min} = -p_e E$ . Это означает, что диполь находится в состоянии устойчивого равновесия.

При  $\alpha = \pi$  энергия диполя оказывается максимальной:  $\mathcal{E}_{\min} = -p_e E$ . Этому положению диполя соответствует, как видно, состояние неустойчивого равновесия (см. § 19.6 и 22.5).

3. Ориентирующее действие электрического поля на диполь используется для получения наглядных картин электрических полей. Из металлической фольги вырезают модели электродов и наклеивают их на дно стеклянного сосуда. В сосуд наливают вязкую непроводящую жидкость (скипидар, глицерин, касторовое масло) и насыпают мелкие частицы, например стриженный волос, манную крупу и т. п. Затем между электродами создают большую разность потенциалов, порядка нескольких тысяч вольт. В электрическом поле частицы поляризуются, т. е. приобретают свойства миниатюрных диполей, и вытягиваются вдоль силовых линий поля (рис. 37.5). Мы видим

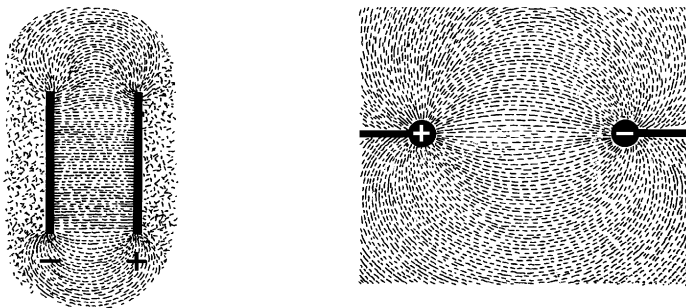


Рис. 37.5

из приведенных рисунков, что вблизи заряженных шариков поле весьма неоднородное, а между параллельными пластинами возникает практически однородное поле, которое искажается только на краях.

4. В неоднородном поле на диполь, кроме вращающего момента, действует еще и равнодействующая сила. Причина заключается в том, что положительный и отрицательный заряды находятся в разных точках поля, имеющих различную напряженность

(рис. 37.6). Равнодействующая сила

$$F = F_A - F_B = qE_A - qE_B = ql \frac{E_A - E_B}{l}. \quad (37.13)$$

Но  $ql = p_e$  есть момент диполя,  $(E_A - E_B)/l = \Delta E / \Delta l$  — *градиент напряженности*, т. е. величина, характеризующая изменение напряженности поля на единице длины. Итак,

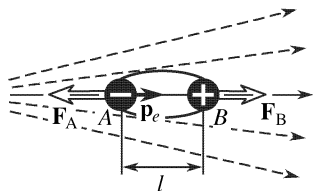


Рис. 37.6

$$F = p_e \frac{\Delta E}{\Delta l}. \quad (37.14)$$

Под действием этой силы диполь втягивается в область более сильного поля.

По этой же причине к заряженному телу притягиваются легкие предметы — ключи бумаги, пылинки, кусочки фольги и т. п. Под действием поля эти предметы приобретают дипольный момент, а затем уже втягиваются в область, где напряженность поля больше, т. е. ближе к наэлектризованному телу.

### § 37.5. Плоский конденсатор

1. Плоский конденсатор представляет собой систему из двух плоских параллельно расположенных металлических пластин площадью  $S$  каждая. Расстояние между пластинами  $d$  много меньше их линейных размеров. В этом случае пластины можно считать бесконечно большими и пренебречь искажениями поля на их краях.

Пусть заряд на одной из пластин равен  $q$ , на второй пластине находится равный по модулю заряд, но противоположного знака. *Поверхностной плотностью заряда*  $\sigma$  называется отношение заряда пластины к ее площади:

$$\sigma = \frac{q}{S}. \quad (37.15)$$

Единица поверхностной плоскости в СИ:

$$[\sigma] = \text{Кл/м}^2.$$

2. Поскольку поле между пластинами плоского конденсатора является однородным (см. рис. 37.2), то напряженность его во всех точках поля одна и та же. Опыт показывает, что напряженность поля пропорциональна поверхностной плотности заряда:

$$\sigma = k\varepsilon_0 E, \quad (37.16)$$

где  $k$  — безразмерный коэффициент. В § 37.9 будет показано, что  $k = 1$ . Следовательно, связь между поверхностной плотностью заряда и напряженностью поля плоского конденсатора выражается так:

$$\sigma = \varepsilon_0 E. \quad (37.17)$$

3. Найдем выражение для разности потенциалов между пластинами конденсатора. Согласно (37.9) имеем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed. \quad (37.18)$$

Подставив значения  $E$  и  $\sigma$ , получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{qd}{\varepsilon_0 S}. \quad (37.19)$$

### § 37.6. Емкость

1. На примере плоского конденсатора видно, что разность потенциалов на его пластинах пропорциональна заряду пластин (см. (37.19)). Оказывается, что аналогичный результат получается для системы заряженных проводников произвольной формы. На этом основании вводится величина, называемая *электрической емкостью* системы (короче — *емкостью*). Емкостью системы проводников называется величина, численно равная отношению заряда к разности потенциалов:

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1}. \quad (37.20)$$

Для плоского конденсатора, как это следует из (37.19) и (37.20), емкость равна

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}. \quad (37.21)$$

2. Единицей емкости в СИ служит *фарад* — это емкость конденсатора, у которого изменение заряда на 1 Кл вызывает изменение потенциала на 1 В:

$$1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/1 В}.$$

Конденсаторы, применяемые в радиотехнике, имеют емкости, значительно меньшие 1 фарада. Поэтому для их маркировки применяют дольные единицы: микрофарад ( $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$ ) и пикофарад ( $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$ ):

3. Из выражения (37.21) вытекает наименование электрической постоянной *фарад на метр*:

$$[\varepsilon_0] = \left[ C \frac{d}{S} \right] = \Phi \cdot \text{м} / \text{м}^2 = \Phi / \text{м}.$$

### § 37.7. Энергия поля. Плотность энергии

1. Вычислим энергию конденсатора с электроемкостью  $C$ , у которого разность потенциалов между пластинами  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Заряды на его пластинах равны по модулю, но отличаются знаком:  $q_1 = -q$ ,  $q_2 = q$ . Подставив эти величины в выражение (18.30), получим

$$W = \frac{1}{2} (q_2\varphi_1 + q_1\varphi_2) = \frac{q}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{q\Delta\varphi}{2}. \quad (37.22)$$

Учитывая, что  $C = q/\Delta\varphi$ , получим окончательно

$$W = \frac{q\Delta\varphi}{2} = C \frac{\Delta\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (37.23)$$

2. В рамках электростатики невозможно решить вопрос о том, где сосредоточена энергия: только ли на заряженных телах или во всех точках поля? Однако переменные поля могут существовать независимо от зарядов. При этом, как показывает опыт, переменные поля распространяются в виде электромагнитных волн, которые переносят энергию. Таким образом, само поле является носителем энергии.

Данную идею впервые высказал Максвелл. Он же ввел понятие о *плотности энергии*  $w = W/v$  как о величине, численно равной отношению энергии  $W$ , содержащейся в некотором объеме  $v$ , к значению этого объема. Согласно Максвеллу, плотность энергии поля (в вакууме)

$$w_0 = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2}. \quad (37.24)$$

### § 37.8. Сила взаимодействия между пластинами конденсатора

1. Воспользовавшись выражением для энергии заряженного конденсатора, мы можем вычислить силу взаимодействия между его пластинами. При этом будем считать, что конденсатор вначале зарядили, а затем отключили от источника, так что заряд на

его пластинах является постоянной величиной. Энергию конденсатора выразим через его емкость и заряд:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 x}{2\varepsilon_0 S},$$

где  $x$  — расстояние между пластинами. Пользуясь выражением (19.12), получим

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}. \quad (37.25)$$

Знак минус показывает, что эта сила является силой притяжения (см. § 10.2 и 31.4).

2. Преобразуем выражение (37.25), учитывая, что  $q = \sigma S$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда. Имеем  $F = -\sigma^2 S/2\varepsilon_0$ . Подставив значение  $\sigma$  из (37.17), получим

$$F = -\frac{\varepsilon_0 E^2 S}{2}. \quad (37.26)$$

3. Поскольку сила, отнесенная к единице площади, есть давление,  $p = F/S$ , то из (37.26) следует, что электрическое поле оказывает на пластину отрицательное давление (в вакууме):

$$p_0 = -\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = -w_0. \quad (37.27)$$

Итак, *давление*, которое электрическое поле оказывает на заряженные поверхности, *равно плотности энергии* электрического поля в той точке, где находится элемент данной поверхности, взятой с обратным знаком. Мы получили этот результат для поля плоского конденсатора. Однако, как показал Максвелл, этот результат справедлив для любых неоднородных полей.

Заметим, что если бы пластины конденсатора имели одинаковый по знаку заряд, то знак силы  $F$  и давления  $p$  был бы положительным, что соответствует силам отталкивания.

### § 37.9. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса

1. Для расчета электрических полей, источниками которых являются заряженные тела конечных размеров (а не только точечные), используется теорема Гаусса. В формулировке этой теоремы используется понятие *потока вектора напряженности*. Рассмотрим это понятие.

Пусть в однородном электрическом поле с напряженностью  $\mathbf{E}$  помещена плоская площадка  $S$  перпендикулярно силовым линиям. В этом случае угол между вектором  $\mathbf{E}$  и нормалью к пло-

щадке  $\mathbf{n}$  равен нулю. Поток вектора напряженности в этом случае называется произведение модуля вектора напряженности на площадь площадки:

$$N = ES. \quad (37.28)$$

В случае же, когда поле неоднородное, и вектор напряженности в каждой точке поверхности составляет с нормалью угол  $\alpha$ , вводится понятие элементарного потока:

$$dN = E dS \cos \alpha. \quad (37.29)$$

Тогда полный поток через данную поверхность

$$N = \int E dS \cos \alpha, \quad (37.30)$$

где интеграл берется по всей поверхности.

2. Для дальнейшего изложения нам понадобится одно геометрическое понятие — *телесный угол*, который является мерой раствора некоторой конической поверхности. Вспомним, что мерой плоского угла  $\alpha$  является отношение дуги окружности  $l$  к радиусу этой окружности  $r$ , т. е.  $\alpha = l/r$  (рис. 37.7 а). Аналогично этому

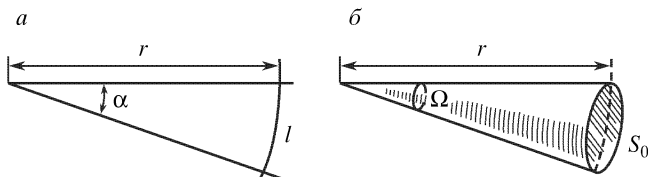


Рис. 37.7

определим телесный угол  $\Omega$  (рис. 37.7 б) как отношение поверхности шарового сегмента  $S_0$  к квадрату радиуса сферы:

$$\Omega = \frac{S_0}{r^2}. \quad (37.31)$$

Единицей телесного угла служит стерадиан (ср) — это телесный угол, вершина которого расположена в центре сферы и который вырезает на поверхности сферы площадь, равную квадрату радиуса:  $\Omega = 1$  ср, если  $S_0 = r^2$ . Нетрудно убедиться, что полный телесный угол вокруг точки равен  $4\pi$  — для этого нужно поверхность сферы разделить на квадрат ее радиуса.

Пусть малый телесный угол  $\Delta\Omega$  опирается на некую малую площадку  $\Delta S$ , нормаль к которой составляет угол  $\alpha$  с радиус-вектором (рис. 37.8). Тогда элемент сферической поверхности  $\Delta S_0 =$

$= \Delta S \cos \varphi$  и телесный угол

$$\Delta \Omega = \frac{\Delta S_0}{r^2} = \frac{\Delta S \cos \alpha}{r^2}. \quad (37.32)$$

3. Элементарный поток вектора напряженности поля, источником которого служит точечный заряд  $Q$ , найдем, под-

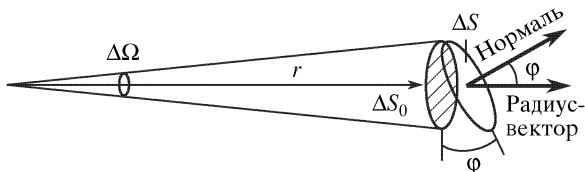


Рис. 37.8

ставив в (37.32) значение модуля напряженности (37.3):  $dN = = Q dS \cos \alpha / (4\pi\epsilon_0 r^2)$ . Сравним с (37.32), выразим элементарный поток через телесный угол:

$$dN = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega. \quad (37.33)$$

4. Пусть положительный точечный заряд  $Q$  расположен внутри замкнутой поверхности (рис. 37.9). Тогда полный поток через замкнутую поверхность равен сумме всех элементарных потоков:

$$N_0 = \int dN = \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega.$$

Но полный телесный угол вокруг точки равен  $4\pi$ , следовательно, полный поток

$$N_0 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (37.34)$$

Мы получили интересный результат: какова бы ни была форма поверхности и где бы внутри ее не находился точечный заряд, полный поток имеет одно и то же значение, равное частному от деления заряда на электрическую постоянную.

5. Представим себе, что внутри замкнутой поверхности находится не один, а несколько точечных зарядов  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ .

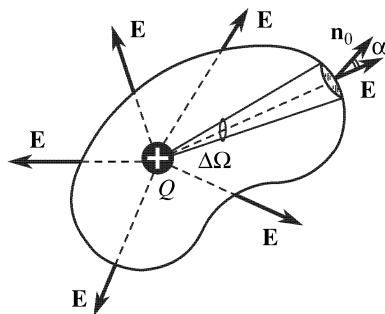


Рис. 37.9



Каждый из них создает электрическое поле, и суммарный поток через замкнутую поверхность равен

$$N_0 = N_0^{(1)} + N_0^{(2)} + \dots + N_0^{(n)} = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{\varepsilon_0}. \quad (37.35)$$

Заметим, что в скобках стоит *алгебраическая сумма* зарядов.

6. Покажем, что если электрический заряд находится вне замкнутой поверхности, то суммарный поток от этого заряда равен нулю. Для доказательства обратимся к рис. 37.10. Элементарный поток через площадки  $S_1$  и  $S_2$  по модулю один и тот же, поскольку обе площадки опираются на один и тот же телесный угол  $\Delta\Omega$ . Однако угол  $\alpha_1$  тупой и  $\cos \alpha_1 < 0$ , а угол  $\alpha_2$  острый и  $\cos \alpha_2 > 0$ . Следовательно, равные по модулю потоки  $\Delta N_1$  и  $\Delta N_2$  имеют противоположные знаки, и их сумма равна нулю. То же относится и ко всем другим элементарным площадкам.

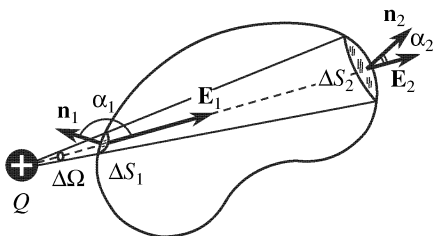


Рис. 37.10

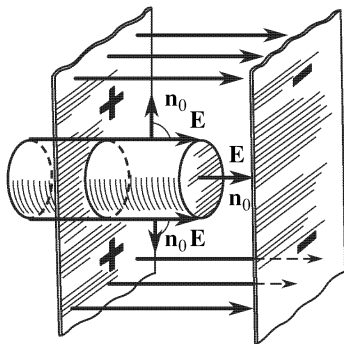


Рис. 37.11

Таким образом, сколько бы электрических зарядов не находилось вне замкнутой поверхности и как бы они не были расположены, их суммарный поток через замкнутую поверхность равен нулю.

Суммируя вышеизложенное, можно сформулировать *теорему Гаусса*: поток вектора напряженности через произвольную замкнутую поверхность равен частному от деления на электрическую постоянную алгебраической суммы электрических зарядов, расположенных внутри этой поверхности (см. (37.35)).

7. С помощью теоремы Гаусса докажем формулу (37.17). Как уже говорилось, внутри плоского конденсатора поле неоднородное, и силовые линии направлены перпендикулярно пластинам; вне конденсатора напряженность поля равна нулю (см. § 37.5). В качестве замкнутой поверхности выберем цилиндр с площадью

основания  $S$ , у которого образующие направлены вдоль силовых линий (рис. 37.11).

Суммарный поток через эту замкнутую поверхность  $N_0 = \sigma S / \varepsilon_0$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность электрического заряда (см. (37.15) и (37.35)). С другой стороны, полный поток  $N_0 = N_1 + N_{\text{бок}} + N_2$ , где  $N_1$  и  $N_2$  — потоки через левое и правое дно цилиндра,  $N_{\text{бок}}$  — поток через боковую поверхность. Но поток через левое дно  $N_1 = 0$ , ибо здесь напряженность поля равна нулю. Поток через боковую поверхность также равен нулю, ибо здесь вектор напряженности перпендикулярен нормали, т. е.  $\cos \alpha = 0$ . Поток через правое дно  $N_2 = ES$ . Итак,

$$N_0 = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} = ES,$$

откуда вытекает формула (37.17).

Аналогично можно с помощью теоремы Гаусса рассчитать поле заряженной нити, заряженного цилиндра, заряженной сферы и другие задачи, где в распределении зарядов имеется определенная симметрия. Рекомендуем читателю решить эти задачи самостоятельно.

### § 37.10. Проводник в электрическом поле

1. Все тела по характеру их проводимости можно разделить на два класса: *проводники* и *диэлектрики* (иначе — изоляторы). Проводники обладают тем свойством, что электрические заряды могут свободно перемещаться по объему этих тел. В отличие от проводников, в диэлектриках заряды остаются в том месте, где они первоначально были распределены.

Внутри проводника напряженность поля равна нулю. Действительно, если бы поле не было равно нулю, то в проводнике возникло бы упорядоченное движение зарядов без всякой затраты энергии от внешнего источника. Но это противоречит закону сохранения энергии. Итак, напряженность поля внутри проводника  $E_{\text{внутр}} = 0$ .

Отсюда следует, что все точки проводника имеют один и тот же потенциал, а *поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью*. В самом деле, из  $E_{\text{внутр}} = (\varphi_1 - \varphi_2)/d = 0$  следует, что  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

Выше было показано, что силовые линии поля перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Поэтому вблизи проводника силовые линии поля перпендикулярны его поверхности.



теля 4. На ленту с помощью щетки 5 и электрода 6 подается заряд от небольшого выпрямителя. Заряд этот переносится внутрь шара, где гребенчатые щетки 7, припаянные к его внутренней поверхности, отводят заряд с ленты на внешнюю поверхность шара.

Принципиально можно таким путем получить сколь угодно высокий потенциал. Фактически величина потенциала ограничена изоляционными свойствами колонны и окружающего воздуха. На практике в атмосфере сухого азота при давлении около 3 МПа достигается потенциал до нескольких миллионов вольт.

### § 37.11. Определение заряда электрона

1. Еще в 30-х годах прошлого столетия Фарадей на основе анализа открытых им законов электролиза (см. § 46.3, 46.4) пришел к выводу, что должны существовать «атомы электричества» — какие-то элементарные электрические заряды. Более четко эти идеи сформулировали в 1874 г. Дж. Стони и в 1881 г. Г. Гельмгольц. Стони и предложил для этого элементарного электрического заряда наименование «электрон».

В конце XIX и начале XX в. Дж. Дж. Томсон, Ф. Ленард, В. Кауфман и др. показали, что катодные лучи (см. § 48.6), частицы, испускаемые металлами при их нагреве (см. § 47.1) и освещении (см. § 68.1), а также бета-частицы, испускаемые некоторыми радиоактивными элементами, имеют одинаковые свойства. Оказалось, что все они заряжены отрицательно, а их удельный заряд (т. е. отношение заряда к массе покоя) — один и тот же и равен примерно  $10^{11}$  Кл/кг.

Стало ясно, что на самом деле все эти виды излучений суть пучки электронов, получаемые разными способами. В связи с этим возникла задача по возможности более точно найти заряд и массу электрона.

2. Метод, основанный на исследовании характера движения заряженных микроскопических частиц в однородном электрическом поле, применил Р. А. Милликен. Измерения, начатые им в 1906 г., продолжались до 1914 г.

Установка, которой пользовался Милликен, изображена на рис. 37.13. Здесь 1 — плоский конденсатор с отверстием сверху, через которое в область между пластинами изредка попадают масляные капельки, создаваемые распылителем 2. Капелька освещается сбоку и наблюдается с помощью короткофокусного микроскопа 3. Рентгеновская трубка 4 включается периодически;

лучи ионизируют капельку, создавая на ней заряд или меняя имеющийся заряд.

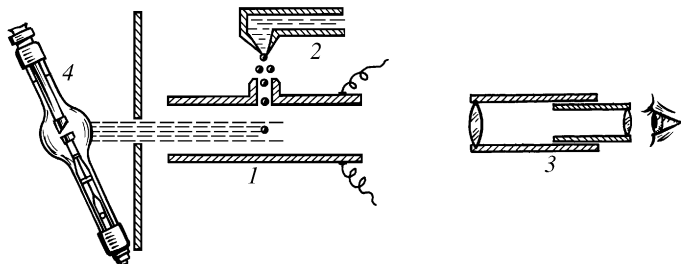


Рис. 37.13

Воспользовавшись выражениями (11.13) и (11.16), нетрудно убедиться, что шарообразная капелька падает в воздухе равномерно со скоростью

$$v = 2r^2 g(\rho - \rho_0)/(9\eta); \quad (37.36)$$

здесь  $\rho$  — плотность масла,  $\rho_0$  — плотность воздуха,  $\eta$  — вязкость воздуха и  $r$  — радиус капли. Скорость движения капли определяется по времени, в течение которого она проходит между двумя нитями, натянутыми в поле зрения микроскопа. Остальные величины известны. Следовательно, по формуле (37.36) можно определить радиус капли.

3. Создадим между пластинами конденсатора электрическое поле с напряженностью  $E$ . Если капля несет в себе заряд  $q$ , то кроме силы тяжести, архимедовой силы и силы сопротивления (см. § 11.9) на нее действует еще электрическая сила  $F_e = qE$ . Уравнение движения примет вид

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g - 6\pi r \eta u + qE = 0, \quad (37.37)$$

где  $u$  — скорость капли в поле. Подставив значение радиуса капли из (37.36), получим

$$q = \frac{6\pi\eta(u - v)}{E} \sqrt{\frac{9\eta v}{2g(\rho - \rho_0)}}. \quad (37.38)$$

4. В опытах регистрировалось изменение заряда капли под воздействием кратковременного рентгеновского облучения. Из (37.38) имеем

$$q_2 - q_1 = \frac{6\pi\eta(u_2 - u_1)}{E} \sqrt{\frac{9\eta v}{2g(\rho - \rho_0)}}. \quad (37.39)$$

Это выражение и служило расчетной формулой.

В работе Милликена возникли многочисленные трудности, в особенности с измерением вязкости воздуха. Оказалось, что для микроскопических капелек вязкость воздуха зависит от размера капель, и пришлось ввести поправку, учитывающую эту зависимость. Для получения надежных результатов пришлось в широких пределах варьировать условия эксперимента. Разность потенциалов менялась от 1700 В до 5000 В; давление в камере, где помещался конденсатор, — от нормального до 6 кПа; в опытах использовались капельки с радиусом от 0,446 до 5,856 мкм.

В результате всех экспериментов получился следующий вывод: *изменение заряда капельки всегда кратно элементарному заряду*. Иными словами,  $\Delta q = Ne$ , где  $N$  — некоторое целое число, а элементарный заряд  $e = (1,592 \pm 0,0017) \cdot 10^{-19}$  Кл — это и есть заряд электрона. В настоящее время для заряда электрона получено более точное значение:

$$e = (1,6021892 \pm 0,0000046) \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

## Глава 38

### ДИЭЛЕКТРИКИ

#### § 38.1. Электрическое поле при наличии диэлектрика

1. Зарядим конденсатор до некоторой разности потенциалов  $\varphi_0$  и отключим его от источника тока. Если мы заполним пространство между пластинами диэлектриком, то оказывается, что разность потенциалов уменьшится до значения  $\varphi < \varphi_0$ , хотя заряд на пластинах не изменился.

Отсюда следует, что напряженность поля в диэлектрике  $E = \varphi/d$  меньше напряженности поля  $E_0 = \varphi_0/d$ , которую создавали те же заряды в вакууме. Отношение напряженности поля в вакууме  $E_0$  к напряженности поля в диэлектрике  $E$  называется *диэлектрической проницаемостью вещества*:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \quad (38.1)$$

Из определения следует, что диэлектрическая проницаемость есть безразмерная величина.

2. Как же объяснить причину уменьшения поля в диэлектрике по сравнению с полем в вакууме? Напряженность поля в вакууме полностью определяется зарядами на пластинах конденсатора:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad (38.2)$$

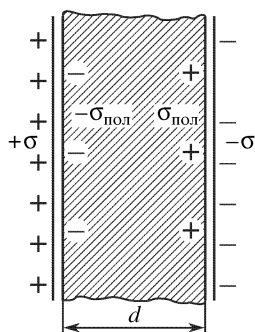


Рис. 38.1

где  $\sigma$  — поверхностная плотность свободных электрических зарядов. Уменьшение напряженности поля в диэлектрике можно объяснить, если предположить, что в диэлектрике под действием электрического поля возникает *поляризационный заряд* с поверхностной плотностью  $\sigma_{\text{пол}}$  (рис. 38.1). Тогда

$$E = \frac{\sigma - \sigma_{\text{пол}}}{\varepsilon_0}. \quad (38.3)$$

Возникновение в диэлектрике поляризационного заряда под действием внешнего электрического поля называется *поляризацией* диэлектрика.

### § 38.2. Вектор поляризации

1. Сущность явления поляризации заключается в том, что частицы, из которых состоит диэлектрик (атомы или молекулы), приобретают дипольный момент, направленный вдоль силовых линий внешнего поля. Механизм поляризации для некоторых типов диэлектриков будет рассмотрен ниже. Здесь же мы введем величину, характеризующую степень поляризации диэлектрика, — *вектор поляризации*.

Вектором поляризации  $\mathbf{P}$  называется дипольный момент единицы объема поляризованного диэлектрика. Чтобы его вычислить, необходимо найти *векторную сумму* дипольных моментов всех молекул или атомов, заключенных в единице объема вещества. Для простоты рассуждений положим, что диэлектрик однородный, следовательно, все молекулы (или атомы) имеют один и тот же дипольный момент  $\mathbf{p}_e$ . Тогда вектор поляризации

$$\mathbf{P} = \frac{N\mathbf{p}_e}{V} = n\mathbf{p}_e, \quad (38.4)$$

где  $n$  — концентрация молекул (или атомов).

2. Размерность модуля вектора поляризации совпадает с размерностью поверхностной плотности заряда:

$$[P] = \left[ \frac{Np_e}{V} \right] = [\sigma].$$

Покажем, что модуль вектора поляризации равен поверхностной плотности поляризационного заряда. Для доказательства обратимся к рис. 38.1. Поляризованный диэлектрик можно рассматривать как диполь, несущий на себе поляризационный

заряд  $q_{\text{пол}} = \sigma_{\text{пол}} S$ . Момент этого диполя равен  $q_{\text{пол}} d = \sigma_{\text{пол}} S d = \sigma_{\text{пол}} V$ . Разделив дипольный момент всего диэлектрика на его объем, мы получим, согласно определению, модуль вектора поляризации:

$$P = q_{\text{пол}} \frac{d}{V} = \sigma_{\text{пол}} \frac{Sd}{V} = \sigma_{\text{пол}}. \quad (38.5)$$

Подставив в выражение (38.3) значение  $\sigma_{\text{пол}} = P$ , получим

$$\sigma_0 E = \sigma - P. \quad (38.6)$$

3. Введем вспомогательный *вектор смещения*  $\mathbf{D}$ , модуль которого равен поверхностной плотности свободных зарядов:  $D = \sigma$ . Получим

$$\varepsilon_0 E = D - P. \quad (38.7)$$

Учитывая, что в однородном и изотропном диэлектрике направления векторов напряженности и поляризации совпадают, мы видим, что и вектор смещения должен иметь то же направление. Отсюда следует, что равенство (38.7) можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (38.8)$$

### § 38.3. Электрическая восприимчивость

1. У большинства диэлектриков, за исключением некоторых типов кристаллов (которые называются сегнетоэлектриками), вектор поляризации пропорционален напряженности поля:

$$\mathbf{P} = \kappa_e \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (38.9)$$

Величина  $\kappa_e$  называется *электрической восприимчивостью* диэлектрика. Рекомендуем читателю путем анализа размерностей убедиться, что электрическая восприимчивость является безразмерной величиной.

2. Подставив в равенство (38.6) выражения для вектора поляризации и для поверхностной плотности свободных электрических зарядов  $\sigma = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon \varepsilon_0 E$ ; получим

$$\varepsilon_0 E = \varepsilon \varepsilon_0 E - \kappa_e \varepsilon_0 E.$$

Отсюда следует, что диэлектрическая проницаемость и электрическая восприимчивость вещества связаны соотношением

$$\varepsilon = 1 + \kappa_e. \quad (38.10)$$



В качестве упражнения рекомендуем читателю показать, что векторы смещения и напряженности связаны соотношением

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (38.11)$$

### § 38.4. Энергия поля в диэлектрике

1. Напряженность электрического поля плоского конденсатора и разность потенциалов при наличии диэлектрика выражаются так:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0 S}, \quad (38.12)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\varepsilon \varepsilon_0 S}. \quad (38.13)$$

Отсюда следует, что емкость плоского конденсатора при наличии диэлектрика между его пластинами равна

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}. \quad (38.14)$$

2. Выражение для энергии заряженного конденсатора (37.23) остается в силе. Выражение для плотности энергии изменится:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{q\varphi}{2V} = \frac{C\varphi^2}{2V} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S \varphi^2}{2d \cdot Sa} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \varphi^2}{2d^2}.$$

Но  $\varphi/d = E$ , следовательно,

$$w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (38.15)$$

Итак, при наличии диэлектрика плотность энергии электрического поля возрастает в  $\varepsilon$  раз по сравнению с плотностью энергии поля в вакууме, если только при этом вектор напряженности поля сохранит неизменную величину. Если же неизменным окажется вектор смещения, то плотность энергии в  $\varepsilon$  раз уменьшится. Действительно, в этом случае следует в (38.15) подставить, согласно (38.11), значение  $E = D/\varepsilon \varepsilon_0$ ; получим

$$w = \frac{D^2}{2\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (38.16)$$

3. Выясним, как изменится сила взаимодействия между пластинами конденсатора, если пространство между ними заполнить газообразным или жидким диэлектриком. С помощью тех же рассуждений, что и в § 37.8, придем к выводу, что давление электрических сил  $p$  равно плотности энергии электрического поля, взятой с обратным знаком:  $p = -w$  (см. (37.27)).

Если пластины конденсатора отключены от источника тока, то заряд на пластинах конденсатора не изменится; следовательно, не изменится и вектор смещения, равный по определению поверхностной плотности заряда на пластинах ( $D = \sigma$ ). Сила взаимодействия

$$F = pS = -wS = -\frac{D^2 S}{2\epsilon\epsilon_0} = -\frac{q^2}{2\epsilon\epsilon_0 S} = \frac{F_0}{\epsilon}. \quad (38.17)$$

Таким образом, в этом случае сила взаимодействия между пластинами при наличии диэлектрика в  $\epsilon$  раз *меньше*, чем в вакууме.

Если же пластины конденсатора остаются все время присоединенными к источнику тока, то разность потенциалов между пластинами не меняется, следовательно, не меняется и напряженность поля. В этом случае сила взаимодействия между пластинами конденсатора при наличии диэлектрика оказывается в  $\epsilon$  раз *больше*, чем в вакууме:

$$F = pS = -wS = -\frac{\epsilon\epsilon^2 E^2}{2} S = -\frac{\epsilon\sigma^2 S}{2\epsilon_0} = \epsilon F_0. \quad (38.17')$$

4. Итак, сила взаимодействия между заряженными телами довольно сложным образом зависит от наличия между ними диэлектрика. Если при наличии диэлектрика вектор смещения не меняется, то сила взаимодействия окажется в  $\epsilon$  раз меньше, чем в вакууме; если не меняется вектор напряженности, то сила взаимодействия окажется в  $\epsilon$  раз больше, чем в вакууме.

Во всех других случаях только детальный анализ позволяет решить задачу о том, как наличие диэлектрика влияет на силу взаимодействия между заряженными телами. Общую формулу, аналогичную закону Кулона в вакууме, здесь написать нельзя.

### § 38.5. Деформационная поляризуемость

1. При введении понятия о векторе поляризации мы допустили, что молекулы или атомы имеют дипольный момент, направленный вдоль напряженности поля (см. § 38.2). Выясним механизм поляризации диэлектриков, т. е. причину возникновения у молекул или атомов дипольных моментов, ориентированных вдоль поля. Для простоты рассуждений ограничимся рассмотрением механизма поляризации газов, когда можно пренебречь действием соседних молекул по сравнению с действием внешнего поля.

Оказывается, что возможны два механизма поляризации, причем у разных веществ, в зависимости от строения их молекул, преобладает тот или иной из них.

2. Атомы и молекулы многих веществ имеют симметричное строение, поэтому у них дипольный момент отсутствует. Под действием внешнего электрического поля электронное облако атома смещается, симметрия его строения нарушается, и атом приобретает дипольный момент. Так как поляризуемость такого рода вызвана деформацией электронного облака атома, она называется *деформационной*, или *электронной* поляризуемостью.

Простейшая модель такого атома изображена на рис. 38.2. В центре атома расположено положительно заряженное ядро, вокруг которого обращается электрон. Чтобы объяснить сферически симметричное строение атома, разумно предположить, что орбита электрона все время должна поворачиваться, так что электрон довольно быстро перемещается по сфере, в центре которой расположено ядро. А так как центр положительно заряженного ядра и центр отрицательно заряженного электронного облака совпадают, то у атома нет дипольного момента.

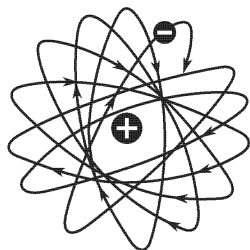


Рис. 38.2

3. Во внешнем электрическом поле на ядро и электрон действуют силы, направленные в противоположные стороны, вследствие чего орбита электрона смещается относительно ядра на расстояние  $l$ . Атом приобретает дипольный момент  $p_e = el$ . Как было показано в § 31.3, дипольный момент деформированного атома

$$p_e = el = 4\pi r^3 \varepsilon_0 E = \alpha \varepsilon_0 E, \quad (38.18)$$

где  $a \approx 4\pi r^3$  называется *поляризуемостью молекулы*. Модуль вектора поляризации

$$P = np_e = n\alpha \varepsilon_0 E. \quad (38.19)$$

Сравнивая это выражение с (38.9) и (38.10), получим выражения для электрической восприимчивости и проницаемости вещества (газа) с полярными молекулами:

$$\kappa_e = n\alpha; \quad \varepsilon = 1 + \kappa_e = 1 + n\alpha. \quad (38.20)$$

4. Оценим полученный результат, приняв радиус атома равным примерно  $r \approx 10^{-10}$  м, а концентрацию молекул газа  $n \approx 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ . Для восприимчивости получим значение:  $\kappa_e \approx 4\pi r^3 n \approx 3 \cdot 10^{-4}$ . Порядок величины оказывается верным: электрическая восприимчивость водорода при нормальных условиях равна  $2,6 \cdot 10^{-4}$ , гелия  $0,7 \cdot 10^{-4}$ , кислорода  $5,2 \cdot 10^{-4}$ ,

аргона  $5,4 \cdot 10^{-4}$ . Учитывая, что модель атома, использованная в наших рассуждениях, весьма примитивна, полученное согласие расчетных и экспериментальных данных следует считать хорошим.

### § 38.6. Ориентационная поляризуемость

1. У ряда веществ молекулы благодаря несимметричному строению имеют дипольный момент и в отсутствие внешнего электрического поля. Примерами могут служить молекулы воды (дипольный момент  $p_e = 6,36 \cdot 10^{-30}$  Кл · м), аммиака ( $4,88 \cdot 10^{-30}$  Кл · м), ацетона ( $9,30 \cdot 10^{-30}$  Кл · м), этилового спирта ( $5,59 \cdot 10^{-30}$  Кл · м), бензола ( $0,27 \cdot 10^{-30}$  Кл · м). Молекулы такого типа называются *полярными*.

При отсутствии внешнего поля дипольные моменты полярных молекул ориентированы совершенно беспорядочно. Следовательно, вектор поляризации, равный *векторной* сумме дипольных моментов единицы объема диэлектрика, при отсутствии внешнего поля оказывается равным нулю. Если поместить вещество с полярными молекулами в электрическое поле, то молекула должна, во-первых, деформироваться и ее дипольный момент должен измениться; во-вторых, за счет момента сил, который действует на любой диполь в электрическом поле (см. § 37.4), молекула должна повернуться так, чтобы ее дипольный момент оказался ориентированным вдоль силовых линий поля. Первый эффект, вызванный деформацией молекул в поле, уже был рассмотрен в предыдущем параграфе. Кроме того, он обычно много слабее второго эффекта, который называется *ориентационной поляризуемостью*.

Степень ориентированности полярных молекул в электрическом поле определяется как напряженностью поля, так и температурой вещества. Под действием поля молекулярные диполи поворачиваются так, что момент диполя ориентируется вдоль поля. Тепловое движение разрушает этот порядок, разбрасывая моменты молекулярных диполей по всевозможным направлениям. Положение здесь вполне аналогично характеру распределения молекул газа в гравитационном поле, когда силовое поле как бы «прижимает» молекулы к поверхности Земли, а тепловое движение разбрасывает их по всевозможным направлениям (см. § 26.10 и 26.11). Так же, как и в случае действия гравитационного поля, вероятность того, что молекулярный диполь имеет в электрическом поле энергию  $\mathcal{E}$ , определяется, согласно формуле

(26.25), выражением  $w = e^{\mathcal{E}/kT}$ , где  $\mathcal{E} = -p_e E \cos \alpha$  — энергия диполя (37.12),  $T$  — термодинамическая температура вещества,  $k$  — постоянная Больцмана.

2. Сделаем упрощенный расчет. В отсутствие внешнего поля молекулярные диполи расположены совершенно беспорядочно, и мы можем считать, что дипольные моменты равномерно распределены по всем осям координат, так что в направлении любой оси располагается одна треть диполей:  $N_x = N_y = N_z = N/3$ . При этом в среднем половина диполей ориентирована вдоль, вторая — против оси координат.

Поместим диэлектрик в электрическое поле, у которого вектор напряженности направлен вдоль оси абсцисс. В этом случае число диполей  $N_1$ , направленных вдоль поля, несколько увеличится, число диполей  $N_2$ , направленных против поля, несколько уменьшится.

Модуль вектора поляризации

$$P = \frac{N_1 p_e - N_2 p_e}{V}. \quad (38.21)$$

Согласно формуле (26.26) имеем

$$N_1 = A e^{-\mathcal{E}_1/kT}, \quad N_2 = A e^{-\mathcal{E}_2/kT}, \quad (38.22)$$

где  $A$  — некоторая постоянная. Для диполя, ориентированного вдоль поля,  $\alpha = 0$  и его энергия  $\mathcal{E}_1 = -p_e E$ ; для диполя, ориентированного против поля,  $\alpha = \pi$  и его энергия  $\mathcal{E}_2 = p_e E$ .

3. Дипольные моменты молекул малы ( $p_e \approx 10^{-30}$  Кл·м), поэтому даже в очень сильных полях ( $E \approx 10^6$  В/м) энергия молекулярного диполя  $\mathcal{E} \lesssim 10^{-24}$  Дж. Это значительно меньше энергии теплового движения при комнатной температуре:

$$kT = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Таким образом, отношение  $x = -\mathcal{E}/kT$  оказывается очень малой величиной:  $|x| < 10^{-3}$ . При столь малых значениях  $x$  справедливо соотношение  $e^x \approx 1 + x$ . Получим следующие выражения для числа диполей, ориентированных вдоль и против поля:

$$\begin{aligned} N_1 &\approx A(1 + x_1) = A \left(1 - \frac{\mathcal{E}_1}{kT}\right) = A \left(1 + p_e \frac{E}{kT}\right), \\ N_2 &\approx A(1 + x_2) = A \left(1 - \frac{\mathcal{E}_2}{kT}\right) = A \left(1 - p_e \frac{E}{kT}\right). \end{aligned} \quad (38.23)$$

Следовательно, в слабых полях справедливо равенство  $N_x = N_1 + N_2 = 2A$ . А так как  $N_x = N/3$ , то  $2A = N/3$ . Итак,

$$A = \frac{N}{6}. \quad (38.24)$$

4. Полученные значения для числа молекул, ориентированных вдоль поля ( $N_1$ ) и против поля ( $N_2$ ), позволяют вычислить модуль вектора поляризации. Подставив (38.23) и (38.24) в (38.21), получим

$$P = \frac{N_1 - N_2}{V} = \frac{2Ap_e^2 E}{V k T} = \frac{N p_e^2 E}{3 k T} = \frac{n p_e^2 E}{3 k T}. \quad (38.25)$$

Отсюда следует, что электрическая восприимчивость газа, состоящего из полярных молекул, имеет вид

$$\chi_e = \frac{n p_e^2}{3 \varepsilon_0 k T}. \quad (38.26)$$

Несмотря на то, что при выводе мы сделали ряд упрощающих предположений, полученный результат оказывается правильным.

Тот факт, что при неизменной концентрации молекул (следовательно, при неизменной плотности газа) электрическая восприимчивость при ориентационной поляризуемости меняется обратно пропорционально термодинамической температуре, называется *законом Дебая*:

$$\chi_e = \frac{B}{T}, \quad (38.27)$$

где  $B = \text{const}$ . Он надежно подтвержден экспериментально для ряда газов и паров.

Естественно, что этот закон не выполняется при низких температурах, где может оказаться, что  $p_e E \approx k T$ . Но тогда и все наши рассуждения оказываются неверными.

## Глава 39 ПОСТОЯННЫЙ ТОК

### § 39.1. Стороннее поле. Напряжение и ЭДС

1. *Электрическим током* называется упорядоченное движение электрических зарядов. Если упорядоченное движение зарядов возникает в проводнике, то электрический ток называется током проводимости.

Можно указать на ряд факторов, способных вызвать упорядоченное движение зарядов. Прежде всего, это могут быть электрические (кулоновские) силы, под действием которых положительные заряды станут двигаться вдоль силовых линий поля, отрицательные заряды — против линий поля. Поле этих сил мы будем называть кулоновским, напряженность этого поля обозначим через  $E_{\text{кул}}$ .

Кроме того, на электрические заряды могут действовать и неэлектростатические силы, например магнитные (см. гл. 41). Действие этих сил аналогично действию некоторого электрического поля. Назовем эти силы *сторонними*, а поле этих сил — *сторонним полем* с напряженностью  $E^*$ .

Наконец, упорядоченное движение электрических зарядов может возникнуть и без действия внешних сил, а за счет явления диффузии или за счет химических реакций в источнике тока. Работа, расходуемая на упорядоченное движение электрических зарядов, совершается за счет внутренней энергии источника тока. И хотя здесь нет прямого действия каких-либо сил на свободные заряды, явление протекает так, как будто бы на заряды действует некоторое стороннее поле. Поэтому для общности рассуждения мы и в этом случае будем вводить эффективное стороннее поле  $E^*$ .

2. Энергетической характеристикой кулоновского поля служит потенциал. Введем величины, которые могли бы служить энергетической характеристикой стороннего поля. Согласно определению (см. § 18.7) разность потенциалов равна отношению работы, которую совершают кулоновские силы при перемещении некоторого заряда, к значению этого заряда:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{\text{кул}}}{q}. \quad (39.1)$$

Если при перемещении заряда работа совершается не только кулоновскими, но и сторонними силами, то полная работа

$$A = A_{\text{кул}} + A_{\text{стор}}, \quad (39.2)$$

где  $A_{\text{кул}}$  — работа кулоновских сил,  $A_{\text{стор}}$  — работа, совершаемая за счет действия неэлектрических источников энергии, например магнитными силами, или за счет изменения внутренней энергии при диффузии заряженных частиц, или за счет изменения внутренней энергии веществ, вступающих в химическую реакцию, или за счет энергии света (фотоэффект, см. § 68.1). Разделив левую и правую части равенства (39.2) на значение перемещаемого за-

ряда, получим

$$\frac{A}{q} = \frac{A_{\text{кул}}}{q} + \frac{A_{\text{стор}}}{q}. \quad (39.3)$$

3. *Напряжением* на данном участке цепи называется величина, равная отношению суммарной работы, совершаемой при перемещении заряда, к значению этого заряда:

$$u = \frac{A}{q}. \quad (39.4)$$

*Электродвижущей силой* (или, сокращенно, ЭДС) на данном участке называется величина, равная отношению работы, совершаемой неэлектрическими источниками энергии при перемещении заряда, к значению этого заряда:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q}. \quad (39.5)$$

Из определений этих величин следует, что как напряжение, так и ЭДС измеряются в СИ в вольтах.

4. Сопоставляя выражения (39.3), (39.4) и (39.5), получим

$$u = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}. \quad (39.6)$$

Итак, напряжение на участке цепи равно сумме разности потенциалов и электродвижущей силы.

Возможны следующие частные случаи:

а. Если участок цепи однородный и на нем не действуют сторонние силы, то ЭДС равна нулю и напряжение равно разности потенциалов:

$$u_{\text{однор}} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (39.7)$$

б. В замкнутой цепи напряжение равно алгебраической сумме ЭДС. В самом деле, пусть замкнутая цепь состоит из трех участков, тогда

$$u_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1, \quad u_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2, \quad u_3 = \varphi_3 - \varphi_1 + \mathcal{E}_3.$$

Работа по перемещению заряда по замкнутой цепи равна сумме работ на участках; следовательно,

$$u_{\text{замкн}} = u_1 + u_2 + u_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3. \quad (39.8)$$

5. Как было показано в § 37.3, напряженность кулоновского поля  $E_{\text{кул}} = -d\varphi/dn$ . Дифференцируя (39.6), получим

$$\frac{du}{dn} = -\frac{d\varphi}{dn} + \frac{d\mathcal{E}}{dn}. \quad (39.9)$$



По аналогии *напряженность суммарного поля*

$$E = \frac{du}{dn}, \quad (39.10)$$

*напряженность стороннего поля*

$$E^* = \frac{d\mathcal{E}}{dn}. \quad (39.11)$$

С учетом этих определений можно выражение (39.9) записать так:

$$E = E_{\text{кул}} + E^*, \quad (39.12)$$

т. е. напряженность суммарного поля есть сумма напряженностей кулоновского и стороннего полей.

### § 39.2. Сила тока и плотность тока

1. Количественной характеристикой тока является величина, равная отношению заряда  $\Delta q$ , который переносится через поперечное сечение проводника за время  $\Delta t$ , к этому промежутку времени:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (39.13)$$

Эта величина не очень удачно названа *силой тока*, хотя ничего общего с силой в общепринятом понимании она не имеет.

Точное значение силы тока мы получим, если в выражении (39.13) перейти к пределу при условии, что промежуток времени  $\Delta t$  бесконечно малый:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = q'(t). \quad (39.14)$$

2. Если сила тока и его направленность не меняются со временем, то он называется постоянным током. Для постоянного тока

$$i = \frac{q}{t}. \quad (39.15)$$

Заметим, что в неразветвленной цепи постоянного тока сила тока во всех сечениях проводника одна и та же. В самом деле, заряд  $\Delta q_1$ , втекающий через сечение проводника  $S_1$  за время  $\Delta t$ , должен быть равен заряду  $\Delta q_2$ , вытекающему через сечение  $S_2$  за то же время. В противном случае в объеме проводника между обоими сечениями стал бы накапливаться заряд, изменилось бы электрическое поле, а это, в свою очередь, привело бы к изменению тока, что противоречит условию его постоянства. Но из  $\Delta q_1 = \Delta q_2$  следует, что  $\Delta q_1/\Delta t = \Delta q_2/\Delta t$ , или  $i_1 = i_2$ , что и требовалось доказать.

3. Единицей силы тока в СИ служит *ампер* (А) — это сила постоянного электрического тока, при котором через поперечное сечение проводника каждую секунду протекает заряд в один кулон:

$$1 \text{ А} = 1 \text{ Кл/1 с.}$$

4. В некоторых случаях удобно воспользоваться величиной, называемой *плотностью тока*. Средняя плотность тока равна отношению силы тока к площади поперечного сечения проводника:

$$j = \frac{i}{S}. \quad (39.16)$$

Единицей плотности тока в СИ служит А/м<sup>2</sup>.

5. Выразим силу тока и плотность тока через скорость упорядоченного движения свободных зарядов в проводнике. Пусть концентрация свободных зарядов равна  $n = \Delta N / \Delta V$ , где  $\Delta V$  — часть объема проводника; электрический заряд одного свободного носителя тока равен  $e$ , и средняя скорость его упорядоченного движения (дрейфа) равна  $v_{\text{др}}$ . Тогда за время  $\Delta t$  через сечение  $S$  переносится заряд  $\Delta q = e \Delta N = en \Delta V = en S v_{\text{др}} \Delta t$ . Сила тока

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = en S v_{\text{др}}. \quad (39.17)$$

Плотность тока

$$j = \frac{i}{S} = en v_{\text{др}}. \quad (39.18)$$

Эти выражения нам понадобятся в дальнейшем при рассмотрении ряда задач.

6. Оценим среднюю скорость упорядоченного движения электронов проводимости в металлах. Концентрация свободных электронов должна здесь примерно совпадать с концентрацией атомов,  $n = 10^{28} - 10^{29} \text{ м}^{-3}$ . Наибольшая плотность тока в металлических проводниках составляет около  $10 \text{ А/мм}^2 = 10^7 \text{ А/м}^2$ . Тогда

$$v_{\text{др}} = \frac{j}{en} \approx \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{28}} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ м/с} = 6 \text{ мм/с}.$$

Опыты подтверждают порядок полученной величины. Столь малая скорость упорядоченного движения электронов проводимости находится на первый взгляд в противоречии с тем, что при включении электрической цепи ток в ней устанавливается практически мгновенно. Однако ничего парадоксального в этом нет. Дело в том, что электрическое поле, созданное источником тока, возникает практически одновременно во всей цепи, поэтому

одновременно к векторам скоростей теплового движения электронов в любом участке цепи прибавляется вектор скорости упорядоченного движения, модуль которого равен примерно 6 мм/с.

### § 39.3. Закон Ома для однородного участка цепи

1. Читателю уже известен один из основных законов цепей постоянного тока — закон Ома для однородного участка цепи. Суть этого закона заключается в следующем. Пусть у нас имеется однородный проводник — им может служить кусок однородного металла постоянного сечения, все точки которого имеют одинаковую температуру. Если на концах этого проводника поддерживается неизменная разность потенциалов  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , то в проводнике течет ток  $i$ , сила которого пропорциональна этой разности потенциалов

$$i = G\Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi}{R}. \quad (39.19)$$

Итак, в однородном участке цепи сила тока пропорциональна разности потенциалов на его концах.

2. Коэффициент  $G$  называется *электрической проводимостью*. Обратная величина

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\Delta\varphi}{i}. \quad (39.20)$$

называется *электрическим сопротивлением* (или сопротивлением).

### § 39.4. Сопротивление

1. Читателю известно, что сопротивление металлического проводника пропорционально его длине  $l$  и обратно пропорционально площади его поперечного сечения  $S$ :

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (39.21)$$

Проводник, сопротивление которого определяется выражением (39.21), иногда называется *резистором* (от англ. resistance — сопротивление). Величина  $\rho$  называется *удельным сопротивлением проводника*.

Обратная величина

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \quad (39.22)$$

называется *удельной проводимостью*.

2. Единицей сопротивления СИ служит *ом* — это сопротивление проводника, ток в котором равен 1 А, если на концах его поддерживается разность потенциалов 1 В:

$$1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/1 А.}$$

Единицей удельного сопротивления в СИ служит  $\text{Ом} \cdot \text{м}$ :

$$[\rho] = \left[ R \frac{S}{l} \right] = \text{Ом} \cdot \text{м}^2 / \text{м} = \text{Ом} \cdot \text{м}.$$

На практике часто пользуются в миллион раз меньшей единицей:

$$1 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2 / \text{м} = 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

3. В довольно широком интервале температур, далеких от абсолютного нуля, удельное сопротивление металлических проводников является линейной функцией температуры  $t$  (по шкале Цельсия):

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t) \approx \rho_0 \alpha T. \quad (39.23)$$

(В самом деле, так как  $\alpha \approx (4-5) \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1} \approx \frac{1}{273} \text{ К}^{-1}$ , то  $1 + \alpha t \approx 1 + \frac{t}{273} = \frac{T}{273} \approx \alpha T$ .)

### § 39.5. Закон Ома в дифференциальной форме

1. Преобразуем несколько выражение для закона Ома на участке цепи. Для этого в формуле (39.19) выразим силу тока через плотность тока согласно (39.16), сопротивление выразим через свойства проводника согласно (39.21), а разность потенциалов — через напряженность поля (37.9); получим  $jS = ElS/\rho l$ , или, после сокращений,  $j = E/\rho$ . Выразив в этой формуле удельное сопротивление через удельную проводимость согласно (39.22), получим

$$j = \gamma E. \quad (39.24)$$

Таким образом, *плотность тока пропорциональна напряженности поля в данной точке проводника*. Это выражение носит название *закона Ома* в дифференциальной форме.

2. Подставив в (39.24) выражение для плотности тока (39.18), имеем  $en v_{\text{др}} = \gamma E$ , откуда следует

$$v_{\text{др}} = \frac{\gamma E}{en}. \quad (39.25)$$

Итак, оказывается, что *средняя скорость упорядоченного движения свободных зарядов в проводнике* (например, свободных электронов в металлах) *пропорциональна напряженности электрического поля в этом проводнике.*

3. Отношение средней скорости упорядоченного движения свободных зарядов к напряженности поля в проводнике называется *подвижностью* заряда:

$$\mu = \frac{v_{\text{др}}}{E} = \frac{\gamma}{en}. \quad (39.26)$$

### § 39.6. Закон Ома для неоднородного участка цепи и для замкнутой цепи

1. В формуле (39.24) фактически фигурирует напряженность кулоновского поля, поскольку это выражение было получено из закона Ома для однородного участка цепи, где действует только кулоновское поле. Однако совершенно безразлично, какое поле действует на заряды — кулоновское, стороннее или суммарное. Отсюда следует, что если на данном участке цепи действует не только кулоновское, но и стороннее поле (неоднородный участок цепи), то *скорость дрейфа зарядов  $u$ , соответственно, плотность тока окажутся пропорциональными напряженности суммарного поля.*

Подставив в (39.24) значение напряженности суммарного поля (39.10) и плотности тока (39.16), получим  $i/S = \gamma u/l$ , откуда следует

$$u = \frac{il}{\gamma S} = \frac{i\rho l}{S} = iR. \quad (39.27)$$

2. Итак, для неоднородного участка цепи закон Ома примет вид

$$i = \frac{u}{R}. \quad (39.28)$$

Подставив значение напряжений из (39.6), можно закон Ома написать и в такой форме:

$$i = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R}. \quad (39.29)$$

При этом следует обратить внимание на знак ЭДС. Если направление вектора напряженности стороннего поля совпадет с направлением вектора напряженности кулоновского поля, то ЭДС и разность потенциалов имеют одинаковый знак, в противном случае их знаки противоположны.

3. В замкнутой цепи разность потенциалов равна нулю, поскольку кулоновское поле является консервативным. Следова-

тельно, для замкнутой цепи закон Ома примет вид

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (39.30)$$

Здесь под  $R$  следует понимать полное сопротивление цепи, включая и внутреннее сопротивление источника тока, под  $\mathcal{E}$  — алгебраическую сумму ЭДС. Часто закон Ома для замкнутой цепи записывают в таком виде:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (39.31)$$

Здесь под  $R$  понимается сопротивление всех резисторов, образующих цепь (сопротивление нагрузки), а под  $r$  — внутреннее сопротивление источника тока.

### § 39.7. Закон Джоуля–Ленца

1. На резисторах происходит необратимое преобразование энергии электрического тока во внутреннюю энергию проводника. Механизм этого явления мы выясним в § 44.6, здесь мы рассмотрим лишь некоторые количественные соотношения.

Если проводники неподвижны и в них под действием тока не происходит химических реакций, а температура проводника не изменяется, то не меняется и его внутренняя энергия. Тогда согласно первому началу термодинамики (27.6) энергия, отдаваемая нагретым проводником во внешнюю среду (т. е. количество теплоты  $Q$ ), равна работе  $A$ , которую совершает суммарное поле при перемещении зарядов:

$$Q = A = qu = iut. \quad (39.32)$$

Воспользовавшись законом Ома (39.28), получим два эквивалентных выражения

$$Q = i^2 R t = u^2 \frac{t}{R}. \quad (39.33)$$

Это и есть *закон Джоуля–Ленца*. Заметим, что здесь количество теплоты  $Q$  выражено в джоулях, как это принято в Международной системе единиц.

2. Для расчета теплового действия тока можно, естественно, пользоваться обеими формулами (39.33). Если же нужно сравнить два резистора по характеру тепловых процессов, происходящих в них, то нужно предварительно выяснить: протекает ли по ним одинаковый ток или они находятся под одинаковым напряжением.

Если по двум резисторам протекают одинаковые токи, то согласно формуле  $Q = i^2 R t$  больше возрастет внутренняя энергия резистора с большим сопротивлением. С таким случаем мы встречаемся, например, в цепи с последовательным соединением резисторов.

Если же оба резистора находятся под одинаковым напряжением, то согласно формуле  $Q = u^2 t / R$  сильнее нагреется резистор с меньшим сопротивлением. Такой эффект, в частности, наблюдается при параллельном соединении резисторов.

### § 39.8. Зарядка и разрядка конденсатора

1. Рассмотрим цепь, состоящую из резистора, конденсатора и источника тока (рис. 39.1). Пусть в начальный момент конденсатор не заряжен, тогда разность потенциалов между его обкладками равна нулю.

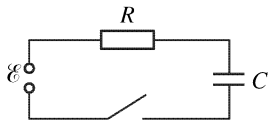


Рис. 39.1

При замыкании цепи по проводнику потечет ток. В начальный момент ток  $i_0 = \mathcal{E} / R$ , поскольку конденсатор не заряжен. По мере зарядки конденсатора между обкладками возникнет разность потенциалов, и кулоновское поле будет противодействовать перемещению свободных зарядов, тем самым уменьшая ток в цепи. Согласно

закону Ома имеем

$$i = \frac{\mathcal{E} - \Delta\varphi}{R}.$$

Когда разность потенциалов между обкладками конденсатора станет равна ЭДС источника, ток прекратится. График изменения потенциала и тока показан на рис. 39.2.

2. Точный расчет явлений в цепи элементарными методами невозможен. Однако, пользуясь законом сохранения энергии, можно оценить приблизительно промежуток времени  $\Delta t$ , в течение которого конденсатор заряжается.

В самом деле, работа, совершаемая источником тока за это время, равна изменению внутренней энергии резистора плюс изменение энергии конденсатора:

$$A = Q + \frac{C\varphi^2}{2}.$$

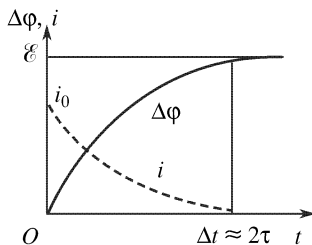


Рис. 39.2

Конечный потенциал конденсатора равен ЭДС источника, а работу источника и изменение внутренней энергии резистора можно выразить через среднюю силу тока:

$$i_{\text{ср}} \mathcal{E} \Delta t = i_{\text{ср}}^2 R \Delta t + \frac{C \mathcal{E}^2}{2}.$$

Приближенно можно положить, что  $i_{\text{ср}} \approx \frac{i_0}{2} = \frac{\mathcal{E}}{2R}$ . Тогда

$$\frac{\mathcal{E}^2}{2R} \Delta t \approx \frac{\mathcal{E}^2 R \Delta t}{4R^2} + \frac{C \mathcal{E}^2}{2},$$

или

$$\Delta t \approx 2RC = 2\tau. \quad (39.34)$$

Произведение  $\tau = RC$  называется *постоянной времени* для цепи, состоящей из резистора и конденсатора, или иначе — *временем релаксации*. Эта величина служит характеристикой того промежутка времени, в течение которого в цепи устанавливается равновесное состояние.

3. Рекомендуем читателю самостоятельно оценить время, в течение которого заряженный конденсатор разряжается через резистор. Для этой цели следует приравнять энергию заряженного конденсатора изменению внутренней энергии резистора. Для простоты расчета положим  $i_{\text{ср}} \approx \varphi_0/2R$ ; тогда окажется, что время разрядки конденсатора  $\Delta t \approx 2RC \approx 2\tau$ .

4. Закон разрядки конденсатора через резистор можно получить с помощью тех же рассуждений, которые позволили вывести барометрическое распределение (см. § 26.10).

Пусть начальный заряд конденсатора равен  $q_0$ . Через время  $t = t_1$  заряд уменьшится и станет равен  $q_1$ ; вероятность этого события  $w(t_1) = q_1/q_0 = f(x_1)$ , где вспомогательная безразмерная переменная  $x = t/\tau = t(RC)$ . Еще через время  $t_2$  заряд на конденсаторе станет равен  $q_2$ ; вероятность этого события  $w(t_2) = q_2/q_1 = f(x_2)$ .

Очевидно, что за время  $t = t_1 + t_2$  от начала разрядки вероятность того, что заряд конденсатора оказался равен  $q_2$ , равняется  $w(t_1 + t_2) = q_2/q_0 = f(x_1 + x_2)$ . Но  $w(t_1 + t_2) = \frac{q_2}{q_0} = \frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{q_1}{q_0} = w(t_2) \cdot w(t_1)$ . Мы получили функциональное уравнение  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ , решением которого является показательная функция  $f(x) = e^{-x} = e^{-t/\tau}$ . Знак минус появился потому, что при разрядке заряд на конденсаторе уменьшается. Закон изменения заряда на конденсаторе имеет вид

$$q = q_0 e^{-t/\tau} = q_0 e^{-t/(RC)}. \quad (39.35)$$

Учитывая, что разность потенциалов между пластинами конденсатора  $\Delta\varphi = q/C$ , а сила разрядного тока  $i = \Delta\varphi/R$ , получим

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 e^{-t/\tau}, \quad i = i_0 e^{-t/\tau}. \quad (39.36)$$

## § 39.9. Правила Кирхгофа

1. Реальные электрические цепи включают в себя комбинации последовательно и параллельно соединенных нагрузок и генераторов. В принципе рассчитывать разности потенциалов на всех участках цепи и силы токов в них, а также электродвижущие силы источников тока, входящих в данную цепь, можно с помощью закона Ома и закона сохранения заряда. Однако для упрощения расчетов Г. Кирхгофом были предложены два простых правила, нашедших широкое применение в электро- и радиотехнике.

2. Первое из них относится к узлам разветвления цепи, в которых сходятся и из которых расходятся токи. Токи, подходящие к узлу, условились считать положительными, а токи, исходящие из узла, — отрицательными. В этом случае *в каждой точке разветвления проводов алгебраическая сумма всех сил токов равна нулю* (первое правило Кирхгофа):

$$\sum i_n = 0. \quad (39.35)$$

Это правило вытекает из закона сохранения электрического заряда. Действительно, суммарный заряд в узле остается постоянным:



$\sum q_n = \text{const.}$  Взяв производную по времени, получим

$$\frac{d}{dt} \sum q_n = \sum \frac{dq_n}{dt} = \sum i_n = 0.$$

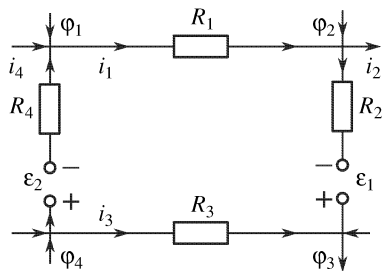
3. Рассмотрим теперь замкнутую цепь, т. е. контур. Токи, текущие вдоль выбранного направления обхода контура, и ЭДС этой полярности будем считать положительными, а противоположные токи и ЭДС — отрицательными. Тогда *алгебраическая сумма произведений сил токов  $i_n$  в отдельных участках контура на их сопротивления  $R_n$  равна алгебраической сумме всех ЭДС  $\mathcal{E}_m$ , действующих в контуре* (второе правило Кирхгофа):

$$\sum i_n R_n = \sum \mathcal{E}_m. \quad (39.36)$$

Например, для контура, схема которого дана на рис. 39.3, имеем

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 - i_3 R_3 + i_4 R_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2. \quad (39.37)$$

Второе правило, по существу, является следствием закона Ома для неоднородного участка цепи (39.29). В самом деле, пусть имеется контур, изображенный на рис. 39.3. Применяя к каждому из четырех участков контура закон Ома, запишем



$$i_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2,$$

$$i_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_1,$$

$$-i_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_4,$$

$$i_4 R_4 = \varphi_4 - \varphi_1 - \mathcal{E}_2.$$

Рис. 39.3

Суммируя левые и правые части равенства, получим (39.37), т. е.

уравнение, соответствующее второму правилу Кирхгофа.

Мы видим, что при расчетах цепей с помощью правил Кирхгофа не обязательно знать разности потенциалов на определенных участках.

4. Практически правила Кирхгофа применяют следующим образом:

а) совершенно произвольно указывают стрелками направления токов на каждом из участков контура, а у источников тока отмечают знаки полюсов. Если после вычислений по правилам Кирхгофа сила тока на данном участке оказывается больше нуля, то это означает, что истинное направление тока совпало с направлением, указанным стрелкой; в противном случае ток направлен противоположно;

б) в выбранном произвольном контуре все его участки обходят в одном направлении — либо по часовой стрелке, либо в противоположном. При этом следует слагаемое  $iR$  считать положительным, если направление обхода контура совпадает с направлением стрелки. В противном случае это слагаемое отрицательное. Далее, если направление обхода контура выбрано от положительного полюса источника к отрицательному, то ЭДС источника считается положительной; в противном случае ЭДС входит в уравнение со знаком минус;

в) произвольные контуры выделяют так, чтобы каждый новый контур содержал хотя бы один участок цепи, не вошедший в те уже рассмотренные контуры, для которых уравнения, согласно второму правилу Кирхгофа, уже составлены.

Совокупность независимых уравнений, составленных по правилам Кирхгофа, оказывается достаточной, чтобы найти все токи, сопротивления или ЭДС в разветвленной цепи. Задача сводится, таким образом, к решению системы линейных уравнений, в которой число уравнений должно совпадать с числом неизвестных величин.

## Глава 40

# МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

### § 40.1. Взаимодействие токов. Магнитные силы

1. Натянем две длинные станиолевые ленты параллельно друг другу и присоединим их к источнику тока. Если по обоим проводникам потекут токи одинакового направления, то ленты притянутся друг к другу. Если же токи потекут по проводникам в противоположных направлениях, то они оттолкнутся друг от друга. Попытаемся выяснить причину этого явления.

В металлах имеются свободные электроны (электронный газ), распределенные внутри ионной решетки. Суммарный заряд положительно заряженной ионной решетки и отрицательно заряженного электронного газа равен нулю; заряды распределены в проводнике равномерно, так что у системы нет дипольного момента. Благодаря этому суммарная напряженность электрического поля ионной решетки и электронного газа вне проводника равна нулю и вокруг проводника отсутствует электрическое поле. Именно поэтому проводники при отсутствии тока не взаимодействуют друг с другом.

Однако при наличии тока, т. е. упорядоченного движения свободных электронов, между проводниками возникает сила взаимодействия. Это приводит нас к выводу, что *силы взаимодействия между движущимися электрическими зарядами отличаются от сил взаимодействия между неподвижными зарядами*.

Дополнительные силы взаимодействия, возникающие между движущимися электрическими зарядами, принято по историческим соображениям называть *магнитными силами*. Дело в том, что на проводник с током, расположенный вблизи постоянного магнита, действуют аналогичные силы.

2. Следует обратить внимание на тот факт, что на базе ньютоновской механики невозможно объяснить происхождение магнитных сил. В самом деле, в ньютоновской механике силы взаимодействия связаны только с ускорениями. Поэтому согласно ньютоновской механике силы взаимодействия между равномерно движущимися зарядами не должны были бы отличаться от сил взаимодействия между неподвижными зарядами, что не соответствует эксперименту.

Можно подойти к этому вопросу и с других позиций. В ньютоновской механике сила является функцией расстояния между взаимодействующими телами и их относительных скоростей. Но расстояния между электронами проводимости при возникновении тока не изменились; их относительная скорость друг относительно друга осталась равной нулю. Казалось бы, что и никаких дополнительных сил возникнуть не должно.

Однако опыт свидетельствует о том, что при движении электронов между ними возникли силы, которых не было при отсутствии тока. Тем самым показана ограниченность ньютоновской механики и непригодность ее представлений для трактовки магнитного взаимодействия.

3. В следующих параграфах мы покажем, что в рамках представлений теории относительности получается правильная трактовка магнитного взаимодействия. Полученные на этой основе закономерности оказываются в полном соответствии с экспериментом.

## **§ 40.2. Закон преобразования для поперечного импульса и поперечной силы**

1. В главах 12 и 13 были выведены релятивистские преобразования для координат и времени — преобразования Лоренца (см. § 12.6), а также выражения для импульса и силы (см. § 13.1 и 13.2). Найдем преобразования для проекций импульса и силы

вдоль оси аппликат, т. е. для *поперечного импульса и поперечной силы*. Пусть некоторое тело (точнее, материальная точка) массой  $m$  движется со скоростью  $u_z = \Delta z / \Delta t$  вдоль оси аппликат. Тогда проекция ее импульса на эту ось

$$p_z = \Gamma m u_z = \frac{m u_z}{\sqrt{1 - u_z^2/c^2}}. \quad (40.1)$$

Проекция силы на эту же ось

$$F_z = \frac{dp_z}{dt}. \quad (40.2)$$

Рассмотрим, каковы будут составляющие импульса  $p'_z$  и силы  $F'_z$  в другой системе отсчета, которая движется равномерно вдоль оси абсцисс со скоростью  $v$  (рис. 40.1).

2. Поскольку рассматривается движение тела только вдоль оси аппликат, то абсцисса тела не меняется ( $x = \text{const}$ ). Согласно преобразованиям Лоренца здесь

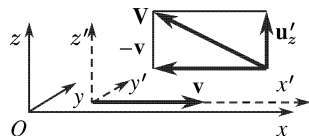


Рис. 40.1

$$z' = z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (40.3)$$

проекция скорости тела на ось аппликат в новой системе отсчета

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} \sqrt{1 - v^2/c^2} = u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (40.4)$$

Релятивистский фактор (13.4) в новой системе отсчета

$$\Gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (40.5)$$

Заметим, что в формулах (40.3) и (40.5) фигурируют разные скорости. Дело в том, что часы мы считаем всегда покоящимися относительно системы отсчета, поэтому в закон преобразования времени входит скорость движения одной системы отсчета относительно другой  $v$ . Тело же движется относительно обеих систем отсчета: относительно  $xyz$  — со скоростью  $u_z$ , относительно  $x'y'z'$  — со скоростью  $V = \sqrt{v^2 + (u'_z)^2}$  (см. рис. 40.1). Именно эта скорость и входит в закон преобразования релятивистского фактора.

Имеем, далее,

$$1 - \frac{V^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{(u'_z)^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u_z^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \left(1 - \frac{u_z^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Подставив в (40.5), получим:

$$\Gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u_z^2/c^2}} = \frac{\Gamma}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (40.6)$$

Найдем поперечный импульс в новой системе отсчета. Используя (40.4) и (40.6), имеем

$$p'_z = \Gamma' m u'_z = \frac{\Gamma m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Gamma m u_z = p_z. \quad (40.7)$$

Итак, при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой *поперечный импульс не меняется*.

3. Поперечная сила в новой системе отсчета имеет вид

$$F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{dp_z}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = F_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (40.8)$$

Итак, в отличие от ньютоновской механики, в теории относительности *поперечная сила зависит от скорости*, что и позволяет объяснить происхождение магнитных сил.

### § 40.3. Взаимодействие между движущимися зарядами

1. Пусть два точечных заряда  $Q$  и  $q$  расположены на расстоянии  $r$  друг от друга и неподвижны относительно системы отсчета  $x_0 y_0 z_0$  (рис. 40.2 а). Между зарядами в этом случае действует кулоновская сила:

$$F_{0z} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (40.9)$$

Рассмотрим, какие силы действуют между этими же зарядами в системе отсчета  $xyz$ , которая движется вдоль оси абсцисс вправо со скоростью  $v_0$  (рис. 40.2 б). Согласно (40.8) имеем

$$F_z = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}. \quad (40.10)$$

2. Относительно системы  $xyz$  заряды  $Q$  и  $q$  движутся со скоростью  $v = -v_0$  параллельно друг другу. Оказывается, что

сила взаимодействия между зарядами в этой системе отсчета меньше, чем в системе отсчета  $x_0y_0z_0$ , относительно которой они

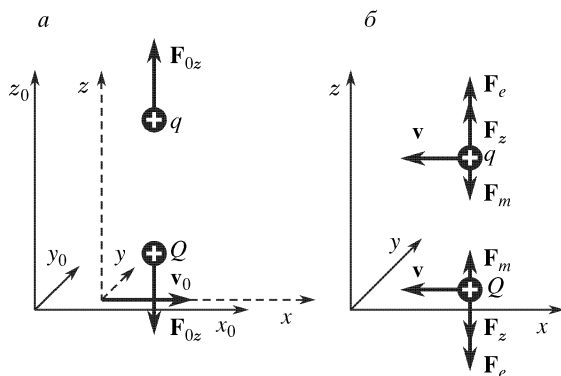


Рис. 40.2

покоятся. Умножив числитель и знаменатель выражения (40.10) на  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  и разложив числитель на два слагаемых, получим

$$F_z = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{qQv^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (40.11)$$

3. Первое слагаемое в этом выражении мы можем рассматривать как *электрическую составляющую поперечной силы*:

$$F_e = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} = qE, \quad (40.12)$$

где  $E$  — напряженность поперечного электрического поля в системе отсчета  $xyz$ :

$$E = \frac{F_e}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (40.13)$$

Второе вычитаемое в (40.11) можно рассматривать как *магнитную составляющую поперечной силы*:

$$F_m = \frac{qQv^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (40.14)$$

4. Разделив (40.14) на (40.12), получим отношение магнитной составляющей к электрической:

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{v^2}{c^2}. \quad (40.15)$$

Итак, магнитная составляющая поперечной силы значительно меньше электрической. Поэтому при вычислении силы взаимодействия между свободными зарядами можно в первом приближении пренебречь магнитными силами и вести расчет по известным формулам электростатики. Однако в случае, когда заряды движутся в проводнике, электрические силы оказываются скомпенсированными (см. § 40.1), и остается одна лишь магнитная сила. Именно этим и объясняется магнитное взаимодействие проводников с током, а также и другие случаи магнитных взаимодействий — в электромагнитах, электродвигателях и т. п.

#### § 40.4. Вектор магнитного поля. Линии индукции

1. Выражение (40.14) запишем так:

$$F_m = qv \frac{Qv}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} = qvB, \quad (40.16)$$

где величина

$$B = \frac{Qv}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\mu_0 Qv}{4\pi r^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (40.17)$$

называется *индукцией магнитного поля*, а  $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$  — *магнитной постоянной*. Таким образом, аналогично тому, как для описания электрического взаимодействия было введено понятие об электрическом поле, введем для описания магнитного взаимодействия понятие о магнитном поле. А именно: положим, что *вокруг движущегося заряда  $Q$  возникает магнитное поле; это поле, в свою очередь, действует на движущийся заряд  $q$ .*

Вектор индукции является силовой характеристикой магнитного поля, аналогично тому как вектор напряженности является силовой характеристикой электрического поля.

2. Индукция магнитного поля равна отношению магнитной силы к произведению заряда на его скорость при условии, что заряд движется перпендикулярно вектору индукции:

$$B = \frac{F_m}{qv_{\perp}}. \quad (40.18)$$

Единицей индукции магнитного поля в СИ называется *тесла* (Тл) — это индукция поля, которое действует на заряд 1 Кл, движущийся со скоростью 1 м/с перпендикулярно вектору индукции, с поперечной силой 1 Н:

$$1 \text{ Тл} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{Кл} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{Кл} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}.$$

3. Направление вектора индукции магнитного поля определяется следующим образом. Пусть положительный заряд  $Q$  движется со скоростью  $\mathbf{v}$ ; радиус-вектор  $\mathbf{r}$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{v}$  и направлен от заряда к точке поля; тогда вектор  $\mathbf{B}$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$ , и образует с ними *правовинтовую* систему; если винт с правой резьбой ввинчивать по направлению вектора  $\mathbf{v}$ , а рукоятку направить вдоль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , то направление ее вращения совпадает с направлением вектора  $\mathbf{B}$  (рис. 40.3). Это правило называется «правилом буравчика».

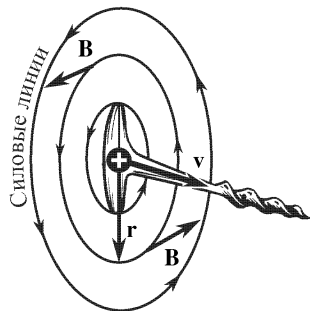


Рис. 40.3

4. Для наглядного изображения электрических полей мы ввели понятие о силовых линиях поля (см. § 37.1). Из этих же соображений введем понятие о *силовой линии магнитного поля* как о кривой, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора индукции магнитного поля.

Из соображений симметрии видно, что силовые линии магнитного поля, возникающего вокруг прямолинейно движущегося заряда, представляют собой концентрические окружности. Силовые линии магнитного поля называются *линиями индукции*.

### § 40.5. Магнитное поле проводника с током

1. Если по проводнику течет ток, то вокруг него возникает магнитное поле, так сказать, в «чистом виде», без электрической составляющей. Причину возникновения такого поля можно понять, исходя из механизма проводимости. Для определенности рассмотрим явления в металлическом проводнике. Ток в металлическом проводнике — это упорядоченное движение свободных электронов. Выше было показано (см. (40.13)), что напряженность поперечного электрического поля движущегося заряда несколько больше напряженности поля неподвижного заряда. Но скорость движения электронов проводимости ничтожно мала по сравнению со скоростью света (см. § 39.2), так что практически напряженность электрического поля электронов проводимости и при наличии тока компенсирует напряженность поля ионной решетки, как это имело место при отсутствии тока. Нескомпенсированной окажется лишь индукция магнитного поля токов проводимости. Следовательно, в этом случае мы и наблюдаем маг-



нитное поле в «чистом виде», без электрической составляющей (рис. 40.4).

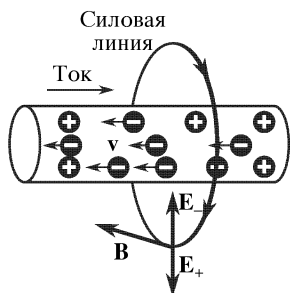


Рис. 40.4

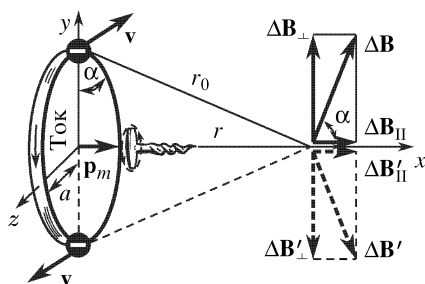


Рис. 40.5

Рекомендуем читателю самостоятельно убедиться в том, что в электролитах, где ток — это упорядоченное движение положительных и отрицательных ионов в противоположных направлениях, механизм возникновения магнитного поля такой же: электрические составляющие поля компенсируют друг друга, а магнитные складываются.

2. Пусть ток  $i$  течет по проводнику в виде кольца радиуса  $a$  (рис. 40.5). Центр кольца совпадает с началом координат, проводник лежит в плоскости  $yz$ , тогда ось абсцисс будет осью симметрии. Вычислим индукцию поля в произвольной точке на этой оси.

Индукция поля некоторого произвольного электрона может быть найдена по формуле (40.17). Полагая  $Q = e$  (заряду электрона) и учитывая, что скорость электрона проводимости много меньше скорости света в вакууме, имеем

$$\Delta B = \frac{\mu_0 e v}{4\pi r_0^2}. \quad (40.19)$$

3. Вектор индукции  $\Delta B$  направлен перпендикулярно радиусу  $r_0$ . Разложим этот вектор на два: вдоль оси симметрии  $\Delta B_{||} = \Delta B \cos \alpha$  и перпендикулярно оси симметрии  $\Delta B_{\perp} = \Delta B \sin \alpha$  (рис. 40.5). Для каждого электрона найдется симметричный электрон, расположенный на противоположном конце диаметра и движущийся в противоположном направлении. Из соображений симметрии видно, что

$$\Delta B'_{||} = \Delta B_{||}, \quad \Delta B'_{\perp} = -\Delta B_{\perp}.$$

Сложим векторы индукции полей, созданных всеми электронами проводимости. Ясно, что *сумма всех поперечных составляющих вектора индукции равна нулю*. Остается лишь *продоль-*

ная составляющая вектора индукции, направленная вдоль оси симметрии:

$$B_{\parallel} = N \Delta B_{\parallel} = N \Delta B \cos \alpha, \quad (40.20)$$

где  $N$  — число электронов проводимости в проводнике.

4. Пусть поперечное сечение проводника равно  $s$ , тогда его объем  $V = 2\pi a s$ , а число электронов в нем  $N = nV = 2\pi n a s$ . Учитывая, что  $\cos \alpha = a/r_0$ , преобразуем выражение (40.20):

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0 e n v s \cdot 2\pi a^2}{4\pi r_0^3}.$$

Но  $e n v s = i$  есть сила тока в проводнике (см. (39.17)), поэтому

$$B_{\parallel} = \frac{2\mu_0 i \pi a^2}{4\pi r_0^3}. \quad (40.21)$$

В случае, если точка поля, где вычисляется вектор индукции, расположена вдали от центра кругового тока, т. е. на расстоянии  $r = \sqrt{r_0^2 - a^2} \gg a$ , то можно приближенно положить  $r \approx r_0$  и заменить в выражении (40.21) расстояние от точки поля до проводника расстоянием от точки поля до центра кругового тока:

$$B_{\parallel} = \frac{2\mu_0 i \pi a^2}{4\pi r^3}. \quad (40.22)$$

Полученная формула весьма напоминает выражение для напряженности электрического поля на оси электрического диполя:  $E_{\parallel} = 2p_e/4\pi\epsilon_0 r^3$  (см. (10.10)). Последняя, кстати, также справедлива только для точек поля, расположенных вдали от центра диполя.

## § 40.6. Магнитный момент

1. Назовем *магнитным моментом* плоской рамки с током произведение силы тока на площадь рамки:

$$p_m = iS. \quad (40.23)$$

Для кругового тока  $p_m = \pi a^2 i$ , где  $a$  — радиус круга. Единицей магнитного момента в СИ является  $\text{А} \cdot \text{м}^2$ .

Магнитный момент можно рассматривать как вектор, приписав ему направление *положительной нормали* к площади рамки. Направление положительной нормали и тем самым вектора магнитного момента находится по правилу буравчика (правило Максвелла): если вращать рукоятку буравчика с правой резьбой по направлению тока, то поступательное движение винта покажет направление вектора магнитного момента (см. рис. 40.5).

2. Воспользовавшись понятием магнитного момента, можно выражение (40.22) записать в векторном виде

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \frac{2\mu_0 \mathbf{p}_m}{4\pi r^3}. \quad (40.24)$$

Итак, на относительно больших расстояниях от рамки с током магнитное поле имеет такую же структуру, как и электрическое поле диполя (см. § 10.6); оно пропорционально магнитному моменту и обратно пропорционально кубу расстояния от источника поля до точки поля.

Воспользовавшись этой аналогией, напомним выражение для индукции магнитного поля в точке, лежащей в плоскости кругового тока, т. е. на перпендикуляре к вектору магнитного момента. Аналогично формуле (10.13) имеем

$$\mathbf{B}_{\perp} = -\frac{\mu_0 \mathbf{p}_m}{4\pi r^3}. \quad (40.25)$$

Строгий расчет подтверждает правильность этого результата. Знак минус показывает, что направление вектора  $\mathbf{B}_{\perp}$  противоположно направлению вектора магнитного момента.

3. Следует обратить внимание на то, что вблизи рамки с током структура магнитного поля принципиально отличается от структуры электрического поля диполя. Электрический диполь состоит из двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов. Силовые линии электрического поля начинаются на положительном заряде и заканчиваются на отрицательном. Силовые линии магнитного поля замкнуты и охватывают рамку с током. Это хорошо видно на рис. 40.6, где изображены силовые

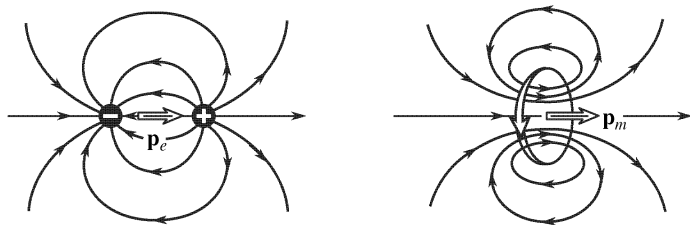


Рис. 40.6

линии поля электрического диполя и магнитного поля рамки с током. Однако на больших расстояниях, как видно из рисунка, форма силовых линий обоих полей одинакова.

Заметим также, что на больших расстояниях от рамки с током структура поля перестает зависеть от размеров и формы рамки. Увеличив площадь рамки и уменьшив соответственно во столько же раз ток, мы получим одно и то же поле, ибо магнитный момент

при этом не меняется. Более того, оказывается, что и форма рамки перестает играть роль. Можно заменить круглую рамку квадратной, треугольной и т. п. — поле на больших расстояниях от рамки не изменится, если сохраняется магнитный момент.

4. Наконец, введем понятие о магнитном моменте циркулирующего заряда. Если заряд  $q$  движется равномерно по окружности со скоростью  $v$ , то возникающее вокруг него магнитное поле непрерывно меняется по направлению. Однако *среднее* значение вектора индукции на оси будет такое же, как будто бы по окружности течет ток  $i = q/T$ , где  $T = 2\pi r/v$  — время одного оборота (период). Отсюда следует, что имеет смысл ввести понятие о магнитном моменте циркулирующего заряда:

$$p_m = i \cdot \pi r^2 = q \frac{\pi r^2}{T} = \frac{\pi r^2 q v}{2\pi r} = \frac{q v r}{2}.$$

Итак, магнитный момент циркулирующего заряда

$$p_m = \frac{q v r}{2}. \quad (40.26)$$

Или так:

$$p_m = \frac{q}{2m} m v r. \quad (40.27)$$

Но  $m v r = L$  — это момент импульса. Мы видим, что *магнитный момент циркулирующего заряда пропорционален моменту импульса тела, несущего этот заряд*:

$$\mathbf{p}_m = \frac{q}{2m} \mathbf{L}. \quad (40.28)$$

Как момент импульса  $\mathbf{L}$ , так и магнитный момент  $\mathbf{p}_m$  являются векторами, перпендикулярными плоскости орбиты. Если на орбите циркулирует положительный заряд, то векторы  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{p}_m$  имеют одинаковое направление и образуют правый винт с направлением вращения заряда. Если же на орбите циркулирует отрицательный заряд (например, электрон), то, согласно (40.28),

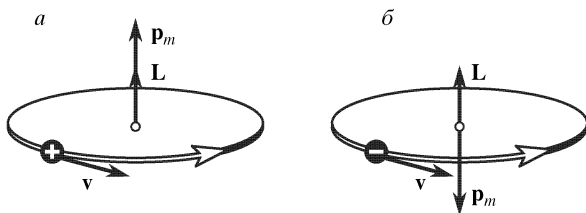


Рис. 40.7

вектор магнитного момента имеет направление, противоположное направлению орбитального момента, т. е. момента импульса  $\mathbf{L}$  (рис. 40.7).

### § 40.7. Напряженность магнитного поля

1. Наряду с вектором индукции  $\mathbf{B}$ , который характеризует силовое действие магнитного поля на движущиеся заряды, часто вводится вспомогательный вектор  $\mathbf{H}$ , называемый *напряженностью магнитного поля*. Напряженность определяется как отношение индукции поля в вакууме  $\mathbf{B}_0$  к магнитной постоянной  $\mu_0$ :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}. \quad (40.29)$$

Заметим, что по аналогии с учением об электрическом поле, где силовой вектор  $\mathbf{E}$  называется напряженностью, а вспомогательный вектор  $\mathbf{D}$  — смещением, следовало бы и в учении о магнетизме назвать силовой вектор  $\mathbf{B}$  напряженностью магнитного поля, а вспомогательный вектор  $\mathbf{H}$  — магнитной индукцией или магнитным смещением. Путаница в терминологии возникла еще тогда, когда физический смысл векторов поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  был недостаточно ясен.

2. Согласно (40.29) и (40.21) напряженность магнитного поля на оси кругового тока

$$H_{\parallel} = \frac{2\pi i a^2}{4\pi r_0^3}. \quad (40.30)$$

В центре кругового тока, где  $r_0 = a$ , имеем

$$H_{\text{ц}} = \frac{i}{2a}. \quad (40.30')$$

На основе этой зависимости можно определить единицу напряженности магнитного поля в СИ: 1 *ампер на метр* (А/м) —

это напряженность магнитного поля в центре круговой рамки с радиусом 1 м, по которой течет ток 2 А.

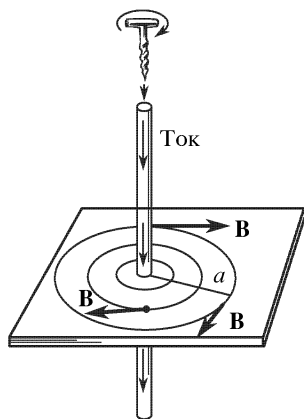


Рис. 40.8

3. Представляет интерес расчет магнитного поля вокруг очень длинного (в пределе — бесконечно длинного) прямолинейного проводника. К сожалению, элементарно вывести искомую формулу не удастся, поэтому напишем результат без вывода. Из соображений симметрии очевидно, что здесь силовые линии имеют вид концентрических окружностей, расположенных в плоскости, перпендикулярной проводнику (рис. 40.8). Вектор индукции (и напряженности) направлен по касательной к силовой линии, образуя с направлением тока правый винт (см. § 40.4). Напряженность и индукция поля на расстоянии  $a$  от проводника выражается формулами

$$H = \frac{i}{2\pi a}, \quad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}. \quad (40.31)$$

4. *Соленоидом* называется цилиндрическая катушка, состоящая из большого числа витков проволоки, намотанных на каркас вплотную друг к другу. Соленоид фактически представляет собой систему круговых токов одинакового радиуса, имеющих общую ось.

Напряженность магнитного поля на оси соленоида равна сумме напряженностей полей от каждого кругового тока. Направление вектора напряженности (и вектора индукции) определяется по правилу буравчика, как это показано на рис. 40.9.

Пусть общее число витков провода на соленоиде равно  $w$ , а длина соленоида  $l$ . Тогда густота обмотки  $n = w/l$  — это число витков на единице длины. Пусть длина соленоида много больше его диаметра:  $l \gg a$ . Оказывается, что в этом случае поле внутри соленоида можно считать однородным, т. е. напряженность его (и индукция) во всех точках практически одна и та же:

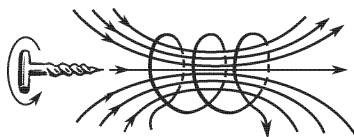


Рис. 40.9

$$H = in. \quad (40.32)$$

Лишь вблизи концов соленоида поле начинает убывать, и на самом конце поле оказывается примерно в два раза слабее, чем внутри катушки:

$$H_{\text{конц}} = \frac{in}{2}. \quad (40.33)$$

## § 40.8. Инвариантность электрического заряда

1. Выше, анализируя природу магнитного взаимодействия, мы полагали, что электрический заряд во всех системах отсчета имеет одну и ту же величину, т. е. что электрический заряд является инвариантом. Выясним те основания, которые приводят нас к такому выводу.

Если допустить, что заряд не является инвариантом, а меняется при изменении скорости частицы, то по аналогии можно судить, что это изменение выражается такой же формулой, что и изменение длины, времени и т. п. (см. § 12.7, 12.8):

$$\left| \frac{\Delta q}{q} \right| \approx 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{v^2}{2c^2}. \quad (40.34)$$

Но скорость электрона в атоме (см. § 16.7) составляет примерно  $10^6$  м/с, откуда следует

$$\left| \frac{\Delta q}{q} \right| \approx \frac{10^{12}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{16}} \approx 10^{-5}.$$

2. На первый взгляд кажется, что это малая величина, которую трудно обнаружить. Однако более внимательный анализ показывает, что это не так.

В самом деле, при изменении температуры тела, а также при химических реакциях энергия электронов меняется в несколько раз (см. § 20.3, 20.4). Аналогично меняется и скорость электронов.

А так как скорость ядра при этом не меняется, то не меняется и его заряд. Отсюда следует, что если в некотором состоянии положительный заряд ядра компенсирует отрицательный заряд электронной оболочки, то в другом состоянии, когда скорость движения электронов меняется, эта компенсация нарушилась бы и атом оказался бы заряженным. И хотя изменение заряда одного атома было бы мало, макроскопический объем тела приобрел бы большой заряд.

Рассмотрим для примера  $1 \text{ см}^3$  газа. В нем содержится  $N = 2,7 \cdot 10^{19}$  атомов (см. § 26.9). Согласно (40.34) этот газ при нагреве приобрел бы избыточный заряд:

$$\Delta Q = N \Delta q \approx \frac{N e v^2}{2 c^2} \approx \frac{2,7 \cdot 10^{19} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{12}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{16}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ Кл.}$$

Это сопровождалось бы возникновением электрического поля с потенциалом

$$\varphi \approx \frac{\Delta Q}{4 \pi \epsilon_0 r} \approx \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 36 \pi \cdot 10^9}{4 \pi \cdot 10^{-2}} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ В.}$$

Но электрическое поле с потенциалом в десятки миллионов вольт легко обнаружилось бы! Однако ничего этого опыт не показывает.

3. Итак, допустив, что электрический заряд не является инвариантом, а меняется с изменением скорости частицы по формуле (40.34), мы пришли к абсурдным следствиям. Следовательно, это допущение ложно.

Тот факт, что ни при тепловых процессах, ни при химических реакциях нейтральность атома не нарушается, является убедительным доказательством инвариантности электрического заряда.

## Глава 41

# ЗАРЯДЫ И ТОКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

## § 41.1. Сила Лоренца

1. В предыдущей главе было показано, что на заряд движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  перпендикулярно вектору индукции  $\mathbf{B}$ , действует сила  $F = qvB$  (40.18). Она называется *силой Лоренца*. Направление силы Лоренца можно определить с помощью *правила левой руки*: если расположить левую руку так, чтобы вектор  $\mathbf{B}$  входил в ладонь, а вектор  $\mathbf{v}$  был направлен вдоль четырех пальцев, то отставленный большой палец покажет направление силы, с которой магнитное поле действует на *положительный*

*заряд* (рис. 41.1). На отрицательный заряд, движущийся в том же направлении и в таком же магнитном поле, действует сила в противоположном направлении.

Если заряд движется вдоль силовых линий поля, т.е. если векторы скорости и индукции поля параллельны или антипараллельны, то магнитное поле на этот заряд не действует.

Отсюда следует, что если вектор скорости движения заряда  $\mathbf{v}$  составляет с вектором индукции  $\mathbf{B}$  некоторый угол  $\alpha \neq \pi/2$ , то можно вектор скорости разложить на две составляющие: продольную  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$  и поперечную  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ . Сила Лоренца определяется только *поперечной составляющей скорости*:

$$F = qv_{\perp} B = qvB \sin \alpha. \quad (41.1)$$

2. Выражение для силы Лоренца может быть записано в векторной форме, если ввести понятие *единичного вектора*  $\mathbf{n}_0$ . Модуль единичного вектора равен единице:  $|\mathbf{n}_0| = 1$ , поэтому умножение единичного вектора на скаляр не изменит абсолютной величины последнего. Направление же единичного вектора выберем таким, чтобы он был перпендикулярен векторам  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  согласно правилу левой руки.

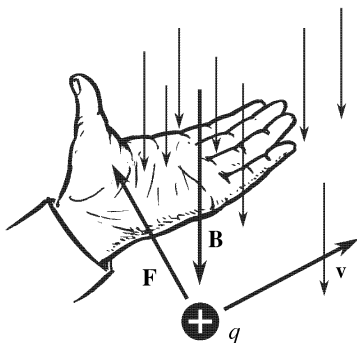


Рис. 41.1

Сила Лоренца как вектор запишется следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{n}_0 qvB \sin \alpha = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (41.2)$$

Как известно, на электрический заряд действует не только магнитное, но и электрическое поле. Следовательно, если электрический заряд движется в *электромагнитном поле*, то действующая на него сила может быть представлена как векторная сумма электрической и магнитной составляющих:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (41.3)$$

Данное выражение называется *обобщенной силой Лоренца*.

3. Следует отметить одно важное отличие электрической и магнитной составляющих обобщенной силы Лоренца. Как уже было показано в § 18.7, при перемещении электрического заряда в электрическом поле совершается работа, равная произведению заряда на разность потенциалов:  $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ . *Магнитная сила* — т.е. сила Лоренца в узком смысле — *работу не совершает*. Действительно, элементарная работа  $\Delta A = F \Delta l \cos \beta$  —



угол между направлением силы и направлением перемещения. Но сила Лоренца перпендикулярна перемещению заряда ( $\mathbf{F}_m \perp \mathbf{v}$ ), следовательно, угол  $\beta = \pi/2$  и работа  $\Delta A = 0$ .

### § 41.2. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле

1. Пусть частица, заряд которой  $q$  и масса  $m$ , влетает в однородное магнитное поле ( $\mathbf{B} = \text{const}$ ) с некоторой скоростью  $\mathbf{v}$  перпендикулярно силовым линиям поля (рис. 41.2). Для определенности положим, что частица имеет положительный заряд. На частицу действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору скорости. Вдоль вектора никакие силы на частицу не действуют. Следовательно, уравнение движения частицы можно записать так:

$$F_t = \frac{dp}{dt} = 0, \quad (41.4 \text{ а})$$

$$F_n = \frac{dp_n}{dt} = qvB. \quad (41.4 \text{ б})$$

Из первого равенства следует, что модуль импульса не меняется:  $p = \Gamma m v = \text{const}$ , поэтому и *модуль скорости частицы в однородном магнитном поле не меняется*.

К этому же заключению можно прийти и иным путем, из закона сохранения энергии. В самом деле, в предыдущем параграфе было показано, что магнитные силы работы не совершают, следовательно, кинетическая энергия частицы в однородном магнитном поле не меняется. А это и свидетельствует о сохранении модуля скорости.

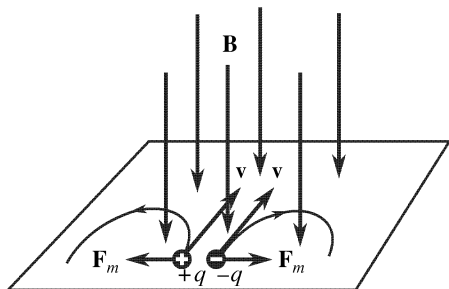


Рис. 41.2

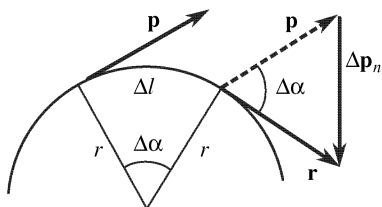


Рис. 41.3

2. Из второго равенства (41.4) следует, что на частицу действует нормальная (центростремительная) сила. Следовательно, направление скорости будет все время меняться и частица будет двигаться по криволинейной траектории.

Покажем, что эта траектория представляет собой *окружность*. Для этой цели найдем радиус кривизны траектории.

Построим рис. 41.3, аналогичный рис. 4.8, только вместо векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  изобразим импульсы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ , учитывая, что согласно (41.1а) модули этих векторов равны. Тогда вместо нормального компонента изменения скорости  $\Delta v_n$  на рисунке изобразится нормальный компонент изменения импульса  $\Delta p_n = p\Delta\alpha = p\Delta l/r$ . Разделив на  $\Delta t$  и перейдя к пределу, получим  $\frac{dp_n}{dt} = \frac{p}{r} \frac{dl}{dt} = \frac{pv}{r}$ . Сравнив с (41.4б), получим  $qvB = pv/r$  и радиус кривизны

$$r = \frac{p}{qB} = \frac{\Gamma mv}{qB}. \quad (41.5)$$

Так как заряд и индукция поля постоянны, а модуль импульса, как было показано выше, — тоже постоянная величина, то  $r = \text{const}$ . Но окружность есть геометрическое место точек, расстояние от которых до центра является постоянной величиной, т. е. линия с постоянной кривизной ( $r = \text{const}$ ). Итак, *заряженная частица, влетевшая в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям, движется в поле равномерно по окружности в плоскости, перпендикулярной вектору индукции*.

3. Вычислим период обращения частицы по этой траектории:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\Gamma m}{qB} = \frac{2\pi m}{qB\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (41.6)$$

Мы видим, что при нерелятивистских скоростях ( $v \ll c$ ) период обращения частицы не зависит от ее скорости и радиуса. Если же скорость частицы близка к скорости света (релятивистские и ультрарелятивистские скорости), то с ростом скорости растет и период обращения частицы.

Заметим, что проверка справедливости выражения (41.6) есть одновременно и проверка справедливости теории относительности. Многочисленные эксперименты по исследованию характера движения заряженных частиц в магнитных полях позволили с большой степенью точности проверить справедливость формулы (41.6) и тем самым основных положений релятивистской динамики.

### § 41.3. Определение знака заряда элементарных частиц

1. Отрицательно заряженная частица, имеющая такую же скорость, массу и абсолютную величину заряда, что и положительная, будет двигаться по такой же траектории, но с одним отличием: поскольку сила Лоренца изменит направление на про-

тивоположное, то и частица будет заворачивать в другую сторону (см. рис. 41.2). Следовательно, по направлению поворота частицы в магнитном поле можно определить знак ее заряда.

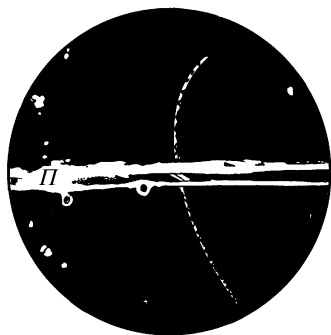


Рис. 41.4

2. Так был обнаружен *позитрон* (иначе — антиэлектрон), частица, не отличающаяся от электрона по массе, но имеющая, в отличие от электрона, положительный заряд. Позитрон был обнаружен К. Андерсоном в 1932 г. по характерному треку, который он оставляет в камере Вильсона (см. § 36.9), помещенной в магнитное поле. На рис. 41.4 изображена фотография трека позитрона, пронизывающего свинцовую пластинку *П*,

помещенную посередине камеры. Магнитное поле направлено на нас из-за плоскости рисунка.

Направление полета частицы определяется по кривизне траектории. Видно, что внизу радиус кривизны траектории больше, следовательно, и скорость частицы там больше, чем над пластинкой. Отсюда мы делаем вывод, что частица движется снизу вверх и, пройдя сквозь свинец, теряет часть энергии. Определив таким образом направление вектора скорости и зная направление вектора индукции магнитного поля, мы найдем и знак заряда этой частицы; он оказался положительным. Аналогично определяется знак других элементарных частиц по фотографиям их треков в камере Вильсона или в пузырьковой камере.

## § 41.4. Циклотрон

1. Для ряда исследований в ядерной физике необходимо иметь пучок частиц (электронов, протонов, положительных ионов) с очень большими энергиями, порядка 10 МэВ–100 ГэВ. Для ускорения частиц используются *ускорители*.

Необходимым элементом ускорителя является электрическое поле со значительной разностью потенциалов. Однако создание электрических полей с разностью потенциалов порядка миллиона вольт связано с колоссальными трудностями. Создание полей с еще большей разностью потенциалов принципиально невозможно из-за возникновения газового разряда. Однако можно заставить частицу пройти ускоряющее электрическое поле не один раз,

а несколько раз. Так, если протон пройдет 30 тысяч раз ускоряющее поле с потенциалом 22 000 В, то он приобретет энергию 660 МэВ. Для этой цели частица должна двигаться по замкнутой траектории или по спирали. Это возможно, если движущуюся частицу поместить в магнитное поле. Ускорители, работающие по этому принципу, называются *циклическими ускорителями*.

2. Первый циклический ускоритель, названный *циклотроном*, был разработан Э. Лоуренсом в 1930 г. Схема его устройства изображена на рис. 41.5.

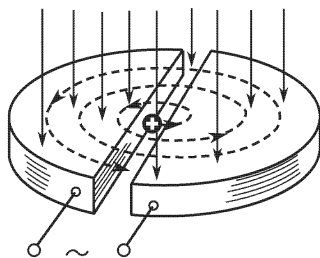


Рис. 41.5

В вакуумной камере, где с помощью вакуумных насосов поддерживается давление, в миллиарды раз меньшее атмосферного, размещаются два полуцилиндра, называемых дуантами. Вблизи центра дуантов располагается источник положительных ионов. К дуантам подводится высокочастотная переменная разность потенциалов с частотой порядка 1–10 МГц. Средняя разность потенциалов — от нескольких сот до нескольких десятков тысяч вольт.

Вакуумная камера помещается между полюсами мощного электромагнита, где создается магнитное поле с индукцией 1,3–1,6 Тл. Масса стального сердечника электромагнита составляет несколько тысяч тонн; обмотки электромагнита питаются от генераторов мощностью несколько мегаватт.

3. Принцип действия циклотрона заключается в следующем. Положительный ион, попав в зазор между дуантами, приобретает кинетическую энергию  $K_1 = p_1^2/2m = q\varphi$  где  $\varphi$  — разность потенциалов между дуантами,  $q$  — заряд иона. Импульс иона при однократном воздействии поля

$$p_1 = \sqrt{2mq\varphi}.$$

Под действием магнитного поля ион движется по полуокружности, радиус которой (см. (41.5))

$$r_1 = \frac{p_1}{qB} = \frac{\sqrt{2mq\varphi}}{qB} = \sqrt{\frac{m}{q}} \frac{\sqrt{2\varphi}}{B}.$$

Если в тот момент, когда ион опять попадет в промежуток между дуантами, электрическое поле изменит свою полярность, то частица получит еще одну порцию энергии. Ее кинетическая энергия станет равной  $K_2 = 2q\varphi$ , импульс  $p_2 = \sqrt{4mq\varphi}$  и ра-

диус полуокружности  $r_2 = \sqrt{\frac{m}{q}} \frac{\sqrt{4\varphi}}{B}$ . Сделав  $N$  оборотов, ион пройдет ускоряющее поле  $2N$  раз, следовательно, его конечная кинетическая энергия  $K = 2Nq\varphi$ , а радиус конечной орбиты иона (радиус дуанта)

$$R = \frac{mv_{\text{макс}}}{qB} = \frac{\sqrt{2mK}}{qB} = \sqrt{\frac{m}{q}} \frac{\sqrt{2N\varphi}}{B}. \quad (41.7)$$

4. Пусть требуется разогнать ион бериллия  $\text{Be}^{++}$  до энергии  $K = 100$  МэВ. Примем, что ускоряющий потенциал  $\varphi = 500$  В, тогда  $N = K/(2q\varphi) = 50\,000$ . Масса иона бериллия  $m = 15,0 \cdot 10^{-27}$  кг, заряд иона  $q = 2e = 3,2 \cdot 10^{-19}$  Кл. При индукции поля  $B = 1,53$  Тл радиус дуанта

$$R = \frac{\sqrt{2 \cdot 15 \cdot 10^{-27} \cdot 100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}}}{1,53 \cdot 3,2 \cdot 10^{-19}} = 1,4 \text{ м.}$$

Заметим, что конечная скорость иона составит

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}}}{15 \cdot 10^{-27}} = 4,6 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

т. е. примерно 15 % от скорости света в вакууме.

5. Для того чтобы ион непрерывно ускорялся, необходимо, чтобы он попадал в ускоряющий промежуток между дуантами в тот момент, когда электрическое поле изменит свою полярность. Следовательно, *период изменения полярности ускоряющего электрического поля должен совпадать с периодом обращения иона*. Это условие называется условием синхронизации. Согласно (41.6) условие синхронизации запишется так:

$$T_{\text{поля}} = T_{\text{иона}} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (41.8)$$

Для рассмотренной выше задачи с ионом бериллия имеем

$$T = \frac{2\pi \cdot 15 \cdot 10^{-27}}{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 1,53} = 1,93 \cdot 10^{-7} \text{ с} \approx 0,2 \text{ мкс.}$$

Частота изменения полярности

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{10^7}{1,93} = 5,2 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 5,2 \text{ МГц.}$$

## § 41.5. Энергия частицы и условие синхронизации

1. В предыдущем параграфе мы считали, что ион движется со скоростью, много меньшей скорости света в вакууме. При этом период обращения частицы в магнитном поле является постоянной величиной, следовательно, и равный ему период изменения полярности ускоряющего электрического поля тоже является постоянной величиной. Обозначив его через  $T_0$ , имеем, согласно (41.6), при  $v \ll c$ :

$$T_0 = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (41.9)$$

2. Если при ускорении частицы ее скорость станет приближаться к скорости света в вакууме, то возрастет и период ее обращения:  $T = \Gamma T_0$ .

Разделим (41.6) на (41.9) и учтем, что  $\Gamma = \mathcal{E}/\mathcal{E}_0 = (\mathcal{E}_0 + K)/\mathcal{E}_0$ , где  $\mathcal{E}$  — полная энергия частицы,  $\mathcal{E}_0$  — энергия покоя и  $K$  — кинетическая энергия. Тогда

$$\Gamma = \frac{T}{T_0} = \frac{\mathcal{E}_0 + K}{\mathcal{E}_0} = 1 + \frac{K}{\mathcal{E}_0}.$$

Отсюда следует

$$T = T_0 \left(1 + \frac{K}{\mathcal{E}_0}\right) = \frac{2\pi m}{qB} \left(1 + \frac{K}{\mathcal{E}_0}\right). \quad (41.10)$$

Итак, период обращения частицы заметно изменится лишь в том случае, если кинетическая энергия частицы станет соизмерима с ее энергией покоя.

В рассмотренной выше задаче с ионом бериллия его энергия покоя

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 = 15 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ Дж} = \frac{15 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{1,6 \cdot 10^{-10}} \text{ ГэВ} = 8,4 \text{ ГэВ},$$

а кинетическая энергия в конце цикла ускорения  $K = 100 \text{ МэВ}$ . Следовательно, период обращения частицы увеличится примерно на 1,2 %, что почти не нарушит условия синхронизации. Если до такой же кинетической энергии ускорить протон, масса (и энергия покоя) которого в 8,94 раза меньше массы иона бериллия, то здесь период обращения увеличится почти на 11 %, что резко нарушит условие синхронизации и тем самым режим ускорения частицы.

3. Если попытаться в циклотроне ускорять протоны до кинетической энергии  $K = 1 \text{ ГэВ}$ , то у нас ничего не выйдет. В самом деле, энергия покоя протона

$$\mathcal{E}_0 = 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 8,99 \cdot 10^{16} \text{ Дж} = 0,938 \text{ ГэВ}.$$

Следовательно, в этом случае  $K \approx \mathcal{E}_0$  и  $T \approx 2T_0$ , т. е. период обращения протона при таких значениях энергии увеличится вдвое по сравнению с периодом обращения нерелятивистского протона. Если при этом период изменения полярности ускоряющего электрического поля остается неизменным, то протоны не будут в нужные моменты времени попадать в ускоряющее поле, т. е. они выпадут из синхронизма и их ускорение прекратится.

4. Итак, циклотрон пригоден для ускорения только нерелятивистских частиц, кинетическая энергия которых много меньше их энергии покоя или, что то же самое, скорость много меньше скорости света. Для получения релятивистских, а тем более ультрарелятивистских частиц циклотрон непригоден.

Циклотрон непригоден для ускорения электронов, энергия покоя которых  $\mathcal{E}_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 8,99 \cdot 10^{16} / (1,6 \cdot 10^{-10}) = 0,511$  МэВ. Естественно, что уже при небольших энергиях, меньших даже 1 МэВ, электрон становится релятивистской частицей и выпадает из синхронизма. Поэтому циклотроны используют только для ускорения относительно массивных ионов. К достоинствам циклотрона относится то, что он работает в непрерывном режиме и может при этом ускорять одновременно много частиц.

### § 41.6. Синхрофазотрон

1. Для получения релятивистских частиц с кинетическими энергиями в десятки гигаэлектронвольт в настоящее время используются приборы, называемые *синхротронами* или *синхрофазотронами*. Первый синхрофазотрон, ускоряющий протоны до кинетической энергии 10 ГэВ, был построен в 1957 г. в Советском Союзе в Объединенном институте ядерных исследований (г. Дубна). С тех пор в России, США и других странах созданы синхрофазотроны, в которых протоны разгоняются до весьма больших и все увеличивающихся значений кинетической энергии. В настоящее время в России крупнейшим является синхрофазотрон на 76 ГэВ, построенный вблизи г. Серпухова в 1967 г. Пущены в ход ускорители на 400 ГэВ (Швейцария, 1975 г.) и на 500 ГэВ (США, г. Батевия, 1972 г.).

2. Вычислим максимальный импульс и соответственно максимальный радиус орбиты протона в Серпуховском синхрофазотроне. Из соотношения между энергией и импульсом частицы (16.8) имеем

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2} = \frac{1}{c} \sqrt{K(K + 2\mathcal{E}_0)}.$$

Энергия покоя протона  $\mathcal{E}_0 = 0,938$  ГэВ, а его кинетическая энергия в Серпуховском синхрофазотроне достигает  $K = 76$  ГэВ. С ошибкой менее 1,5 % можно положить, что кинетическая энергия совпадает с полной, т. е.  $\mathcal{E} = K$ , а импульс  $p = K/c$ . Тогда максимальный радиус, согласно (41.5), окажется равным

$$R = \frac{p_{\text{макс}}}{qB} = \frac{\sqrt{K(K + 2\mathcal{E}_0)}}{qBc} \approx \frac{K}{qBc}. \quad (41.11)$$

При индукции поля в зазоре  $B = 1,07$  Тл получим

$$R = \frac{7,6 \cdot 10^{10} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,07 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ м} \approx 237 \text{ м}.$$

Создание сплошного электромагнита (как у циклотрона) с диаметром около полукилометра представляет собой практически невыполнимую задачу. Поэтому у синхрофазотрона магнитное поле создается в относительно узкой кольцевой камере и *ускоряемые протоны движутся по окружности постоянного радиуса*. Вакуумная камера синхрофазотрона в Дубне имеет ширину около полуметра. В Серпухове, благодаря применению нового метода фокусировки пучка протонов, ширина камеры менее 10 см.

Из этой особенности процесса ускорения протонов в синхрофазотроне вытекает ряд следствий.

3. Прежде всего, в отличие от циклотрона, синхрофазотрон не может начать процесс ускорения частиц «с нуля» — в его камеру необходимо ввести уже релятивистские протоны. В камеру синхрофазотрона в Дубне вводятся протоны, первоначально ускоренные линейным ускорителем до энергии 9 МэВ. В Серпуховском синхрофазотроне начальная энергия протонов еще больше: 100 МэВ.

Далее, для того чтобы при возрастании энергии частиц радиус орбиты не менялся, необходимо, согласно (41.5), с ростом импульса протона увеличивать индукцию магнитного поля так, чтобы их отношение оставалось постоянной величиной. Этим синхрофазотрон принципиально отличается от циклотрона, где индукция магнитного поля в процессе ускорения частиц не меняется.

Наконец, необходимо менять соответственно и период изменения полярности ускоряющего электрического поля. В самом деле, период обращения частицы  $T = 2\pi R/v$ . Поскольку радиус орбиты в синхрофазотроне не меняется, то с ростом скорости частицы период ее обращения убывает. Аналогично должен убывать и период изменения полярности ускоряющего электрического поля.

4. Рассчитаем некоторые характерные параметры синхрофазотрона. Начальная кинетическая энергия протона  $K_1 = 9$  МэВ, конечная  $K_2 = 10$  ГэВ. Максимальная индукция магнитного поля в зазоре, где находится вакуумная камера,  $B_{\text{макс}} = 1,26$  Тл.

Радиус орбиты вычислим по (41.11):

$$R = \frac{K_2}{ceB_{\text{макс}}} = \frac{10^{10} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,26 \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ м} = 26,6 \text{ м}.$$

Период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi Rm\Gamma}{p} = \frac{2\pi R\mathcal{E}}{pc^2}.$$



Импульс  $p = \frac{1}{c} \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2}$ , следовательно,

$$T = \frac{2\pi R \mathcal{E}}{c \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2}} = \frac{2\pi R}{c \sqrt{1 - \mathcal{E}_0^2 / \mathcal{E}^2}}. \quad (41.12)$$

Начальная энергия  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + K_1 = 938 + 9 = 947$  МэВ; начальный период

$$T_1 = \frac{2\pi \cdot 26,6}{3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - (938/947)^2}} = 4,05 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 4,05 \text{ мкс.}$$

Соответственно конечная энергия  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 + K_2 = 0,938 + 10 = 10,938$  ГэВ, а конечный период

$$T = \frac{2\pi \cdot 26,6}{3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - (0,938/10,938)^2}} = 0,57 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 0,57 \text{ мкс.}$$

Итак, частота изменения ускоряющей разности потенциалов электрического поля должна меняться от 0,247 МГц до 1,75 МГц.

За один оборот протон проходит один раз ускоряющее электрическое поле с максимальным потенциалом 2,2 кВ. Чтобы его кинетическая энергия достигла 10 ГэВ, он должен совершить  $N = 10^{10} / 2,2 \cdot 10^3 = 4,5 \cdot 10^6$  оборотов. Весь цикл ускорения длится 3,3 с.

5. В отличие от циклотрона, работающего в непрерывном режиме ускорения, синхрофазотрон работает в импульсном режиме. Дело в том, что в камеру циклотрона можно все время вводить ионы, которые будут непрерывно ускоряться, так как индукция магнитного поля и период изменения полярности ускоряющего электрического поля не меняются в процессе ускорения.

У синхрофазотрона выпуск частиц с определенной энергией в камеру возможен лишь в тот момент, когда магнитное поле минимально, а период изменения ускоряющего потенциала наибольший. Если частицы с заданной энергией впустить в камеру в другой момент, когда индукция магнитного поля увеличилась, а период изменения полярности ускоряющего поля уменьшился, то эти частицы не будут удовлетворять условию синхронизации и потому не будут ускоряться.

Итак, в синхрофазотроне ускоряется лишь определенная порция — «сгусток» частиц, и до тех пор, пока цикл ускорения этих частиц не закончится, новую порцию частиц в камеру впускать нельзя.

6. Важнейшей проблемой является выяснение возможности создания в синхрофазотроне устойчивого сгустка частиц, который не распался бы в процессе ускорения. Возможность создания такого устойчивого сгустка вытекает из принципа автофазировки, который открыл в 1944 г. в Советском Союзе В.И. Векслер,

а в 1945 г. в США Э. Мак-Миллан. Суть этого принципа заключается в следующем.

Если бы в синхрофазотроне ускорялись только те частицы, частота которых *точно* совпадает с частотой изменения поля, то не имело бы смысла создавать установку, так как число таких равновесных частиц ничтожно мало. Векслер показал, что ускоряться будет сгусток частиц, для которых условие синхронизации выполняется приближенно  $T_{\text{поля}} \approx T_{\text{иона}}$ . Эти частицы сначала разгоняются быстрее равновесных и опережают их — тогда поле начинает их тормозить; когда же их скорость станет несколько меньше скорости обращения равновесных частиц, поле опять станет их разгонять. В результате этого процесса частицы в сгустке ускоряются, но их энергия не возрастает монотонно, а колеблется около значения энергии равновесных частиц. Число частиц в сгустке на несколько порядков больше числа равновесных частиц.

### § 41.7. Ускорители на встречных пучках

1. В предыдущих параграфах было показано, как с помощью ускорителей можно получить пучки частиц (протонов, электронов и т. п.) с большими значениями кинетической энергии. Однако обычные ускорители, где ускоренные частицы используются для бомбардировки неподвижных мишеней, весьма неэффективны для порождения новых частиц, причем чем выше энергия ускоренных частиц, тем эта эффективность меньше.

Для простоты расчета ограничимся случаем, когда сталкиваются частицы с одинаковыми массами: электроны с электронами или позитронами, протоны с протонами или антипротонами. Этот случай имеет и наибольшее практическое значение.

2. Как было показано в § 21.7, не вся кинетическая энергия ускоренной частицы может быть использована для порождения новых частиц, а лишь ее часть. Причина заключается в том, что при соударении должен выполняться закон сохранения импульса.

Пусть частица — снаряд с массой  $m$  и зарядом  $e$  разогнана в электрическом поле с разностью потенциалов  $\varphi$ ; тогда ее кинетическая энергия  $K_1 = e\varphi$ . Если эта частица сталкивается неупруго с такой же покоящейся частицей — мишенью, то сначала возникает промежуточная частица с массой  $M$ , которая уже затем распадается на две или несколько новых частиц. Согласно закону сохранения импульса частицы-снаряда  $p$  равен импульсу промежуточной частицы  $P$ :  $p = P$ .

По закону сохранения энергии  $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_2$ , или согласно (16.8),

$$\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + p^2 c^2} + \mathcal{E}_0 = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2},$$

где  $E_0 = Mc^2$  — энергия покоя промежуточной частицы. Возведя в квадрат и сокращая одинаковые слагаемые, получим  $E_0^2 = 2\mathcal{E}_0^2 + 2\mathcal{E}_0\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + p^2 c^2} = 2\mathcal{E}_0^2 + 2\mathcal{E}_0\mathcal{E}$ . Но полная энергия  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + K_1 = \mathcal{E}_0 + e\varphi$  (см. 16.3), следовательно, внутренняя энергия промежуточной частицы

$$E_0 = \sqrt{2\mathcal{E}_0^2 + 2\mathcal{E}_0(\mathcal{E}_0 + e\varphi)} = \sqrt{4\mathcal{E}_0^2 + 2\mathcal{E}_0 e\varphi} = 2\mathcal{E}_0 \sqrt{1 + \frac{e\varphi}{2\mathcal{E}_0}}.$$

3. Эффективность ускорителя оценивается по той части  $Q$  кинетической энергии частицы–снаряда, которая превратится во внутреннюю энергию промежуточной частицы и далее, после распада последней — в энергию рождающихся вновь частиц:  $Q = K_1 - K_2$ . Но по закону сохранения энергии  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ , или  $K_1 + 2\mathcal{E}_0 = K_2 + E_0$ , откуда

$$Q = K_1 - K_2 = E_0 - 2\mathcal{E}_0 = 2\mathcal{E}_0 \sqrt{1 + \frac{e\varphi}{2\mathcal{E}_0}} - 2\mathcal{E}_0.$$

Вынесем  $2\mathcal{E}_0$  за скобки, умножим и разделим это выражение на  $\sqrt{1 + \frac{e\varphi}{2\mathcal{E}_0}} + 1$ , получим окончательно:

$$Q = \frac{e\varphi}{1 + \sqrt{1 + \frac{e\varphi}{2\mathcal{E}_0}}}. \quad (41.13)$$

4. Анализ этого выражения показывает, что эффективность ускорителя с неподвижной мишенью существенно зависит от соотношения между кинетической энергией частицы–снаряда и ее энергией покоя  $\mathcal{E}_0$ . Так, если  $e\varphi \ll 2\mathcal{E}_0$ , что имеет место, например, в циклотронах, то  $Q \approx e\varphi/2$ , т.е. энергия ускорителя используется достаточно эффективно. Если же  $e\varphi \gg 2\mathcal{E}_0$ , то с ростом ускоряющего потенциала эффективность ускорителя резко уменьшается.

Так, при  $e\varphi \approx 6$  ГэВ и энергии покоя протона  $\mathcal{E}_0 = 0,94$  ГэВ эффективность  $Q \approx 2$  ГэВ (см. § 21.7), т.е. только 2 ГэВ используются для образования новых частиц — протона и антипротона, а 4 ГэВ превращаются в кинетическую энергию продуктов реакции. Еще меньше эффективность ускорителей с большей энергией.

5. Выход из этой ситуации заключается в использовании *метода встречных пучков*, который предложил в 1956 г. Д. Керст, а для электрон-позитронных пучков — Г.И. Будкер. Преимущества данного метода заключаются в следующем.

Если сталкиваются две частицы одинаковой массы, движущиеся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, то их суммарный импульс до столкновения равен нулю — таким же он останется и после столкновения. Значит, в данном случае вся кинетическая энергия превратится в энергию покоя, т. е.  $Q = 2K_1 = 2e\varphi$  независимо от массы частицы.

Очевидно, что с энергетической точки зрения ускоритель на встречных пучках (*коллайдер*) значительно эффективнее ускорителя с неподвижной мишенью. Так, если электрон, разогнанный до энергии 5,5 ГэВ, столкнется с неподвижным электроном, то, согласно (41.13), эффективно будет использована энергия  $Q = 0,074 \text{ ГэВ} = 74 \text{ МэВ}$ , что недостаточно даже для рождения мезонов, у которых  $\mathcal{E}_0 \approx 300 \text{ МэВ}$ . Если же столкнутся летящие навстречу друг другу электроны с такой энергией, то эффективно используется  $Q = 2e\varphi = 11 \text{ ГэВ}$ , что достаточно для образования, например, пяти протонно-антипротонных пар, т. е. целой струи массивных частиц.

6. Главный недостаток ускорителей на встречных пучках — малая вероятность столкновения летящих навстречу друг другу частиц. Для повышения вероятности столкновений надо увеличить число частиц в пучке. С этой целью сгустки частиц, разогнанные основным ускорителем, направляют в *накопительные кольца*, где они циркулируют в сильных магнитных полях. Накопленные в течение многих циклов работы основного ускорителя пучки затем фокусируются в некоторой малой области пространства, где и происходят интересующие нас столкновения и рождаются новые частицы.

Заметим, что все новейшие открытия в физике элементарных частиц были получены именно с помощью ускорителей на встречных пучках.

## § 41.8. Удельный заряд электрона

1. *Удельным зарядом* частицы называется величина  $e/m$ , т. е. отношение заряда частицы к ее массе. Заряд частицы может быть определен весьма точно. Поэтому по известным значениям заряда частицы и ее удельного заряда можно вычислить ее массу.

Электрический заряд любой элементарной частицы, как показывает опыт, всегда равен по абсолютной величине заряду

электрона (или равен нулю). Заряд любого иона кратен заряду электрона.

2. Существует множество методов определения удельного заряда электрона. Рассмотрим один из них — метод фокусировки в продольном магнитном поле.

Установка представляет собой осциллографическую трубку (см. § 47.4), которая помещается внутрь длинного соленоида, создающего достаточно однородное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$  (рис. 41.6). Электроны, вылетев из катода, разгоняются в электрическом поле анода, потенциал которого равен  $\varphi$ . Скорость электрона найдем из условия  $e\varphi = mv^2/2$ .

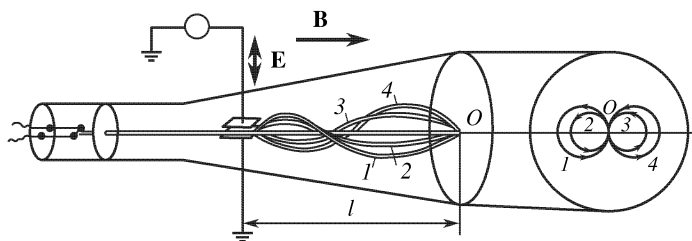


Рис. 41.6

3. Разложим вектор скорости электрона на две составляющие — поперечную  $v_{\perp} = v \sin \alpha$  и продольную  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между направлениями векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ . На продольную составляющую магнитное поле не действует; следовательно, путь, пройденный электроном вдоль поля, равен

$$l = v_{\parallel} t = vt \cos \alpha.$$

На составляющую  $v_{\perp}$  действует сила Лоренца, которая при отсутствии  $v_{\parallel}$  заставила бы электрон двигаться по окружности. В итоге движение электрона происходит по винтовой линии. При малых углах ( $\cos \alpha \approx 1$ ) частицы будут фокусироваться практически в одной точке. В самом деле, фокусировка возникает при условии, что электрон, пройдя расстояние  $l \approx vt$ , успеет обернуться один или несколько раз, т. е. если  $t = nT_0 = 2\pi m_e n / eB$  (где  $n = 1, 2, 3, \dots$ ). При минимальной индукции поля электрон совершит один оборот, следовательно,  $l = 2\pi v m_e / eB$ . Подставляя  $v = \sqrt{2e\varphi / m_e}$ , получим

$$\frac{e}{m_e} = \frac{8\pi^2 \varphi}{B^2 l^2}. \quad (41.14)$$

Потенциал анода, индукция магнитного поля и расстояние между управляющими электродами и экраном трубки легко определяются экспериментально либо вычисляются.

4. В результате тщательного анализа всех методов измерения удельного заряда электрона для него сейчас принято значение

$$\frac{e}{m_e} = (1,7588047 \pm 0,0000049) \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг.}$$

Отсюда следует, что масса электрона

$$m_e = (9,109534 \pm 0,000047) \cdot 10^{-31} \text{ кг.}$$

### § 41.9. Удельный заряд иона

1. При определении удельного заряда иона встречаются значительные трудности, связанные с тем, что в пучке ионов содержатся частицы с весьма различными скоростями, что очень затрудняет их фокусировку. Нужно выделить из пучка ионы, имеющие одну и ту же скорость. Для этой цели часто применяется *фильтр скоростей*. В этой установке (рис. 41.7) вектор напряженности электрического поля

перпендикулярен вектору индукции магнитного поля. На положительный ион, движущийся в скрещенных электрическом и магнитном полях, действуют две силы: электрическая сила  $F_e = qE$ , отклоняющая ион вниз, и сила Лоренца  $F_m = qvB$ , отклоняющая его вверх. Ион пролетит через щелевую

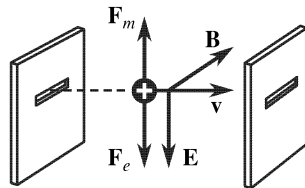


Рис. 41.7

диафрагму только в том случае, если направление его скорости не изменится; это возможно лишь при условии, когда электрическая сила уравнивает силу Лоренца:  $F_e = F_m$ , или  $qE = qvB$ . Итак, через щелевую диафрагму пройдут только те ионы, скорость которых удовлетворяет условию  $v = E/B$ . Остальные ионы отфильтруются.

2. Имеющие одинаковую скорость ионы фокусируются затем с помощью электрических или магнитных полей. В некоторых масс-спектрографах для фокусировки применяется поперечное магнитное поле.

Ионы, вылетев из фильтра скоростей, движутся в поперечном однородном магнитном поле. Их траектории — полуокружности радиуса  $r = mv/qB_{\perp}$  (см. (41.5)), где  $q/m$  — удельный заряд иона,  $B_{\perp}$  — индукция поперечного магнитного поля в масс-спектрографе. Поскольку скорость ионов и индукция поперечного

поля — заданные величины, то радиус полуокружности целиком определяется удельным зарядом иона. Пучки с разным значением удельного заряда иона фокусируются в разных точках.

3. Поместив в месте фокусировки пучков фотопластинку, можно получить так называемый *спектр масс* (следы этих пучков, рис. 41.8). Из соотношения  $q/m = v/rB_{\perp}$  следует, что отклонение следа пучка в спектре масс от точки входа пучка обратно пропорционально удельному заряду иона.

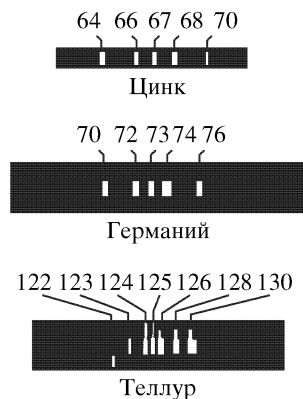


Рис. 41.8

масс-спектрограмма изотопов цинка, у которых массы ядер относятся как 64 : 66 : 67 : 68 : 70, а также масс-спектрограммы германия и теллура.

Для определения удельного заряда некоторого иона нужно на масс-спектрограмме вначале установить опорные линии с помощью пучков ионов с известным удельным зарядом. Обычно для этой цели используются ионы углерода или кислорода.

С помощью масс-спектрографа было показано, что многие вещества представляют собой смесь *изотопов* (см. § 88.1). На рис. 41.8 показана масс-

### § 41.10. Проводник с током в магнитном поле

1. Опыт показывает, что на проводник с током, помещенный в магнитном поле, действует сила, направление которой определяется правилом левой руки — тем же правилом, которое служит для определения направленности силы Лоренца. Причина возникновения этой силы совершенно ясна. Ток в проводнике — это упорядоченное движение электронов. На каждый движущийся электрон магнитное поле действует с силой  $f = evB \sin \alpha$  (41.1). Сила, действующая на весь проводник, является векторной суммой элементарных сил Лоренца, действующих на каждый электрон.

2. Вычисление этой силы, которая называется *силой Ампера*, в общем случае весьма затруднительно. Вычислим силу, с которой однородное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$  действует на прямолинейный проводник с током.

В этих условиях все электроны движутся в одном направлении, вследствие чего все элементарные силы Лоренца, действующие

щие на отдельные электроны, направлены в одну сторону и вместо векторного суммирования нужно просто сложить модули всех элементарных сил. Если средняя скорость дрейфа электронов равна  $v_{др}$ , длина проводника  $l$  и его сечение  $S$ , то сила Ампера

$$F = Nf = nSlev_{др}B \sin \alpha.$$

Подставив значение силы тока согласно (39.17), получим

$$F = ilB \sin \alpha, \quad (41.15)$$

где  $\alpha$  — угол между проводником и вектором индукции. Направление силы Ампера определяется по правилу левой руки (см. рис. 41.1); направление тока совпадает с направлением движения положительных зарядов.

3. Найдем силу, с которой два очень длинных прямолинейных параллельных проводника с током взаимодействуют друг с другом. Пусть длина каждого из проводников  $l$  много больше расстояния между ними  $a$ ; по проводникам протекает ток силой  $i$ . Каждый из проводников на расстоянии  $a$  создает магнитное поле, индукцию которого при условии  $l \gg a$  можно рассчитывать по формуле для индукции магнитного поля бесконечно длинного прямого проводника с током (см. § 40.7). Это поле действует на второй проводник с силой Ампера. Подставив (40.31) в (41.15) и учитывая, что здесь  $\alpha = \pi/2$ , получим

$$F = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi a}.$$

На основе этого вводится определение единицы силы тока в Международной системе единиц:

Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н.

Рекомендуем читателю самостоятельно убедиться в том, что при протекании токов в одинаковых направлениях проводники притягиваются, а в противоположных направлениях — отталкиваются.

### § 41.11. Рамка с током в магнитном поле

1. Поместим в однородное магнитное поле прямоугольную рамку с током так, чтобы угол между направлением нормали к рамке и вектором магнитной индукции был равен  $\alpha$  (рис. 41.9 а). Пользуясь правилом левой руки, легко убедиться, что силы, действующие на участки рамки, перпендикулярные вектору индукции, создают вращающий момент. Для вычисления этого момента обратимся к рис. 41.9 б, где изображено поперечное сечение рамки.



2. Момент пары сил, согласно формуле (22.14), равен произведению силы Ампера на плечо  $d$ :

$$M = Fd = Fa \sin \alpha,$$

где  $a$  — ширина рамки. Подставив значение силы Ампера из (41.15), имеем

$$M = ilBa \sin \alpha = iSB \sin \alpha, \quad (41.16)$$

где  $S = al$  — площадь рамки. Согласно (40.23) произведение

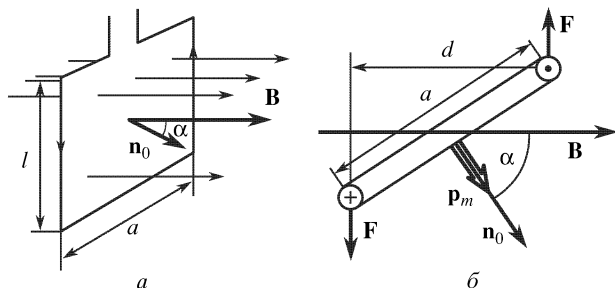


Рис. 41.9

тока на площадь, обтекаемую током, — это магнитный момент рамки  $p_m$ . Итак

$$M = p_m B \sin \alpha. \quad (41.17)$$

3. Сравнив выражения (37.10) и (41.17), мы видим, что они совершенно аналогичны. В § 40.6 было выяснено, что рамка с током создает вокруг себя магнитное поле, аналогичное полю электрического диполя.

Таким образом, наблюдается весьма широкая аналогия между свойствами электрического диполя  $\mathbf{p}_e = q\mathbf{l}$  и «магнитного диполя»  $\mathbf{p}_m = iS\mathbf{n}_0$ , т. е. рамки с током. На этом основании можно без доказательства, используя только аналогию, по формуле (37.12) написать выражение для энергии «магнитного диполя»:

$$\mathcal{E} = -p_m B \cos \alpha. \quad (41.81)$$

На основании этой же аналогии можно утверждать, что в неоднородном магнитном поле рамка с током будет втягиваться в область более сильного поля. Опыт подтверждает это предположение. Сила притяжения согласно (37.41) равна

$$F = p_m \frac{\Delta B}{\Delta l}. \quad (41.19)$$

Она пропорциональна магнитному моменту рамки и градиенту индукции магнитного поля.

## Глава 42

# МАГНЕТИКИ

### § 42.1. Три типа магнетиков

1. Читателю известно, что на кусок железа, помещенный вблизи катушки с током, действует значительная сила притяжения. Известно также, что сила взаимодействия между двумя катушками с током существенно возрастает, если поместить в них железный сердечник. Аналогичными свойствами обладают, кроме железа, различные сорта стали, а также никель, кобальт и некоторые сплавы: пермаллой, альни, магнико. Все эти вещества называются *ферромагнетиками* (от латинского *ferrum* — железо).

В 50-х годах прошлого столетия Фарадей показал, что все вещества обладают магнитными свойствами, но степень и характер их взаимодействия с полем у разных веществ различны. В связи с этим различают вещества с парамагнитными, диамагнитными и ферромагнитными свойствами.

По интенсивности взаимодействия с магнитным полем можно все вещества разбить на два класса. К слабо магнитным веществам относятся все диамагнетики и парамагнетики. Эти вещества при любых температурах очень слабо взаимодействуют с магнитным полем. К сильно магнитным веществам относятся ферромагнетики и антиферромагнетики, которые при определенных температурах сильно взаимодействуют с полем.

2. *Парамагнетиками* называются вещества, которые втягиваются в область более сильного поля. Если в U-образную стеклянную трубку налить парамагнитную жидкость и поместить одно колено между полюсами сильного электромагнита, то жидкость в этом колене поднимется (рис. 42.1). Стержень из парамаг-

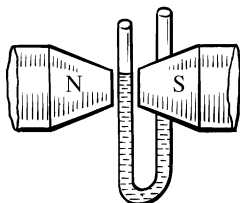


Рис. 42.1



Рис. 42.2

нитного вещества, подвешенный на тонкой нити, ориентируется в магнитном поле вдоль силовых линий.

По своим свойствам парамагнетики несколько напоминают ферромагнетики, но сила их взаимодействия с полем в сотни и тысячи раз слабее. Поэтому для наблюдения парамагнитных эффектов необходимы сильные магнитные поля. Парамагнитными свойствами обладают платина, алюминий, вольфрам, все щелочные и щелочно-земельные металлы; из газов — кислород и в слабой степени окись азота.

3. *Диамагнетиками* называются вещества, которые выталкиваются из магнитного поля. Так, если между полюсами электромагнита зажечь свечу, то пламя вытолкнется из поля (рис. 42.2). Стержень из диамагнитного вещества, подвешенный на нити в сильном магнитном поле, устанавливается поперек силовых линий.

Заметим, что силы, действующие на диамагнетик в магнитном поле, на один-два порядка меньше сил, действующих на парамагнетик в этом же поле. Поэтому для наблюдения диамагнитных эффектов требуются очень сильные поля. К диамагнетикам относятся почти все газы (кроме кислорода), вода, серебро, золото, медь, алмаз, графит, висмут, многие органические соединения.

## § 42.2. Магнитный момент атома

1. В начале XIX в. Ампер пришел к выводу, что магнитные свойства вещества можно объяснить, если допустить, что атомы представляют собой микроскопические элементарные магниты. Однако обосновать происхождение элементарных магнитных моментов Ампер не смог. Ядерная модель строения атома, которой мы уже пользовались для объяснения механизма деформационной поляризуемости (см. § 38.5), поможет нам понять происхождение магнитных моментов атомов. В самом деле, электрон, циркулируя в атоме, представляет собой элементарный ток, обладающий магнитным моментом  $p_m^{\text{орб}}$ . Кроме того, циркулирующий по орбите электрон имеет момент импульса, называемый *орбитальным моментом импульса*  $L^{\text{орб}}$ . Согласно (40.28) между этими величинами должна существовать следующая связь:

$$p_m^{\text{орб}} = \frac{e}{2m_e} L^{\text{орб}}. \quad (42.1)$$

Здесь  $m_e$  — масса электрона,  $e$  — его заряд.

Магнитный момент атома складывается из магнитных моментов электронов, движущихся вокруг ядра, и магнитного момента самого ядра. Однако опыт показывает, что магнитный момент ядра примерно в 2000 раз меньше магнитного момента

электрона. Поэтому при изучении магнитных свойств вещества пренебрегают магнитным моментом ядра и считают, что *магнитный момент атома* равен векторной сумме магнитных моментов электронов, циркулирующих вокруг ядра. Попытаемся оценить величину этого магнитного момента.

2. Пусть в пространстве выделено некоторое направление, например ось  $z$ . Это может означать, что вдоль этой оси направлено какое-либо магнитное поле. В квантовой механике доказывается, что проекция орбитального момента импульса на заданное направление может принимать только некоторые, вполне определенные значения:

$$L_z^{\text{орб}} = m\hbar, \quad (42.2)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m$  — целое число (см. § 72.4). Пользуясь соотношением (42.1), получим для проекции орбитального магнитного момента, которую мы обозначим через  $p_{mz}^{\text{орб}}$ , следующее значение:

$$p_{mz}^{\text{орб}} = \frac{e}{2m_e} L_z^{\text{орб}} = m \frac{e\hbar}{2m_e} = m\mu_B. \quad (42.3)$$

### 3. Величина

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = (9,274078 \pm 0,000036) \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2 \quad (42.4)$$

называется *магнетон Бора*. Она составлена из мировых констант — заряда и массы электрона и постоянной Планка — и поэтому тоже является мировой константой.

Магнетон Бора — это минимальное отличное от нуля значение проекции магнитного момента электрона на произвольное направление. А так как магнитный момент атома есть векторная сумма магнитных моментов электронов, то мы можем утверждать, что проекция магнитного момента атома на некоторую ось либо равна нулю, либо кратна магнетону Бора. Ниже мы увидим, что опыты подтверждают эту оценку.

## § 42.3. Величины, характеризующие магнитное поле в веществе

1. Для характеристики степени поляризации диэлектрика в электрическом поле была введена особая физическая величина — вектор поляризации, равный дипольному моменту единицы объема поляризованного диэлектрика (см. § 38.2). Аналогично введем величину, характеризующую степень намагниченности вещества в магнитном поле, — вектор намагниченности.

*Вектором намагниченности*  $\mathbf{M}$  называется магнитный момент единицы объема намагниченного вещества. Чтобы его вычислить, необходимо найти векторную сумму магнитных моментов всех атомов, заключенных в единице объема намагниченного вещества. Для простоты рассуждений положим, что вещество однородное и все его атомы имеют один и тот же магнитный момент  $\mathbf{p}_m$ . Тогда вектор намагниченности

$$\mathbf{M} = \frac{N\mathbf{p}_m}{V} = n\mathbf{p}_m, \quad (42.5)$$

где  $n$  — концентрация атомов. Единица намагниченности совпадает с единицей напряженности магнитного поля:

$$[M] = \left[ \frac{Np_m}{V} \right] = \text{А} \cdot \text{м}^2 / \text{м}^3 = \text{А} / \text{м} = [H].$$

3. Ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда однородное и изотропное вещество сплошь заполняет магнитное поле. Это можно реализовать, если на тороидальный сердечник из исследуемого вещества равномерно намотать обмотку, по которой течет ток. Вещество сердечника, естественно, намагнитится за счет действия магнитного поля тока.

Оказывается, что если вещество представляет собой парамагнетик или диамагнетик, то его вектор намагниченности пропорционален напряженности намагничивающего поля (см. § 42.4, 42.5):

$$\mathbf{M} = \kappa_m \mathbf{H}. \quad (42.6)$$

Коэффициент пропорциональности  $\kappa_m$  в выражении (42.6) называется *магнитной восприимчивостью* вещества. Читатель легко убедится, что магнитная восприимчивость является безразмерной величиной.

3. Вектор намагниченности определяет индукцию магнитного поля  $\mathbf{B}_{\text{вещ}}$ , создаваемого намагниченным веществом. По аналогии с тем, как связана индукция поля токов с напряженностью этого поля ( $\mathbf{B}_{\text{ток}} = \mu_0 \mathbf{H}$ ), напомним соотношение между индукцией поля вещества и его намагниченностью:  $\mathbf{B}_{\text{вещ}} = \mu_0 \mathbf{M}$ .

Индукция магнитного поля в веществе, которое сплошь заполняет магнитное поле, представляет собой векторную сумму индукций поля намагничивающих токов и поля намагниченного вещества:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{ток}} + \mathbf{B}_{\text{вещ}} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (42.7)$$

На основании (42.6) имеем

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \kappa_m \mathbf{H}) = \mu_0 (1 + \kappa_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \quad (42.8)$$

Величина

$$\mu = 1 + \chi_m \quad (42.9)$$

называется *магнитной проницаемостью* вещества.

#### § 42.4. Диамагнетизм

1. Попытаемся выяснить механизм диамагнитного эффекта. Для анализа используем модель атома гелия. Ядро этого атома имеет заряд  $q = +2e$ , а вокруг ядра обращаются два электрона. Опыт показывает, что атом гелия не имеет магнитного момента. Это можно объяснить, если мы предположим, что оба электрона обращаются вокруг ядра с одинаковой скоростью по одинаковым орбитам, но в противоположных направлениях. Тогда их орбитальные магнитные моменты будут равны по модулю, но противоположны по знаку, и суммарный магнитный момент атома окажется равным нулю (рис. 42.3).

2. Поместим атом гелия в магнитное поле с индукцией  $B_0 = \mu_0 H$ . Для простоты рассуждений положим, что вектор индукции перпендикулярен плоскости орбиты электрона (рис. 42.4).

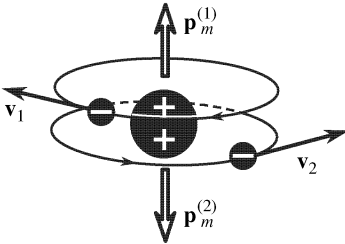


Рис. 42.3

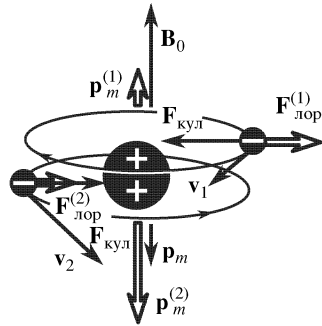


Рис. 42.4

В этом случае на электрон действуют две силы — кулоновская сила притяжения к ядру и сила Лоренца. Их равнодействующая сообщает электрону центростремительное ускорение. Уравнения движения для обоих электронов примут вид

$$\begin{aligned} F_{\text{кул}} - F_{\text{лор}}^{(1)} &= \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - ev_1 B_0 = \frac{mv_1^2}{r}, \\ F_{\text{кул}} + F_{\text{лор}}^{(2)} &= \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + ev_2 B_0 = \frac{mv_2^2}{r}. \end{aligned} \quad (42.10)$$

Следует обратить внимание на тот факт, что в этих уравнениях мы полагаем, что под действием магнитного поля меняется только скорость движения электрона, но не радиус орбиты.

3. Из уравнений (42.10) следует, что под действием магнитного поля скорость движения первого электрона уменьшилась, второго — возросла. Соответственно изменяются и их магнитные моменты. Таким образом, под действием внешнего магнитного поля у атома наводится (индуцируется) магнитный момент

$$p_m = p_m^{(2)} - p_m^{(1)} = \frac{ev_2 r}{2} - \frac{ev_1 r}{2} = \frac{er}{2} (v_2 - v_1). \quad (42.11)$$

Заметим, что индуцированный магнитный момент  $p_m$  направлен противоположно направлению вектора индукции внешнего поля (рис. 42.4).

Разность скоростей найдем из (42.10), если вычтем из нижнего равенства верхнее:

$$eB_0(v_2 + v_1) = \frac{m}{r} (v_2^2 - v_1^2),$$

или после сокращений

$$v_2 - v_1 = \frac{eB_0 r}{m} = \frac{er\mu_0}{m} H. \quad (42.12)$$

Подставив в (42.11), получим для индуцированного магнитного момента

$$p_m = \frac{e^2 r^2 \mu_0}{2m} H. \quad (42.13)$$

Учитывая, что векторы  $p_m$  и  $H$  направлены противоположно, перепишем (42.13) в векторном виде

$$\mathbf{p}_m = -\frac{e^2 r^2 \mu_0}{2m} \mathbf{H}. \quad (42.14)$$

4. Вектор намагниченности, согласно (42.5), равен

$$\mathbf{M} = n\mathbf{p}_m = -\frac{e^2 r^2 n \mu_0}{2m} \mathbf{H}. \quad (42.15)$$

Итак, здесь вектор намагниченности действительно пропорционален напряженности намагничивающего поля (см. (42.6)). Магнитная восприимчивость является отрицательной величиной:

$$\chi_m = -\frac{e^2 r^2 n \mu_0}{2m}.$$

Оценим значение магнитной восприимчивости гелия. Радиус орбиты  $r = 0,5 \cdot 10^{-10}$  м, концентрация атомов при обычных давлениях  $n = 2,69 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>. Имеем

$$\chi_m = -\frac{1,6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 0,5^2 \cdot 10^{-20} \cdot 2,69 \cdot 10^{25} \cdot 4\pi}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^7} = 1,2 \cdot 10^{-9}.$$

Опыт дает для гелия значение магнитной восприимчивости  $\chi_m = -1,05 \cdot 10^{-9}$ . Учитывая весьма приближенный характер нашей модели, следует признать такое совпадение расчета и эксперимента очень хорошим.

5. На модели атома гелия нам удалось объяснить механизм диамагнитных явлений. Обобщая, можно утверждать, что диамагнетиками являются все вещества, у которых атомы при отсутствии внешнего магнитного поля не имеют магнитного момента.

Так как радиусы электронных орбит у атомов разных веществ не отличаются очень сильно, то и магнитные восприимчивости разных веществ при одном и том же агрегатном состоянии примерно равны. В самом деле, магнитная восприимчивость азота равна  $-6,76 \cdot 10^{-9}$ , аргона  $-10,9 \cdot 10^{-9}$ , водорода  $-2,25 \cdot 10^{-9}$  и т. д. У жидкостей и твердых тел концентрация атомов примерно в 1000 раз больше, соответственно возрастает и их магнитная восприимчивость. Так, у воды восприимчивость равна  $-9 \cdot 10^{-6}$ , у серебра  $-25 \cdot 10^{-6}$  и т. д.

## § 42.5. Парамагнетизм

1. Рассмотренный в предыдущем параграфе механизм намагничивая диамагнетиков сводится к наведению дополнительного магнитного момента у атома под действием внешнего магнитного поля. Это явление характерно для атомов любого вещества, следовательно, все вещества должны обладать диамагнитными свойствами. Откуда же берутся парамагнетики?

Оказывается, что в отличие от диамагнетиков, у которых магнитные моменты электронов внутри атома скомпенсированы, атомы парамагнетиков имеют нескомпенсированные магнитные моменты. Под действием внешнего магнитного поля эти магнитные моменты поворачиваются, стремясь расположиться вдоль силовых линий поля. Тепловое движение, естественно, расстраивает этот порядок.

Мы видим, что механизм намагничивания парамагнетиков вполне аналогичен механизму поляризации диэлектриков с полярными молекулами (см. § 38.6). Если провести такие же рас-



суждения, как и при выводе формулы (38.25), получим выражение для намагниченности парамагнетиков:

$$\mathbf{M} = \frac{np_m^2 \mathbf{B}_0}{3kT} = \frac{np_m^2 \mu_0}{3kT} \mathbf{H}. \quad (42.16)$$

2. Магнитная восприимчивость парамагнетиков является положительной величиной:

$$\chi_m = \frac{np_m^2 \mu_0}{3kT}.$$

Как видно, при неизменной концентрации атомов (т. е. при неизменной плотности вещества) магнитная восприимчивость парамагнетиков меняется обратно пропорционально абсолютной температуре (*закон Кюри*):  $\chi_m = \text{const}/T$ . Это явление подтверждается экспериментально.

Заметим, что выражение (42.16) справедливо при условии, если  $p_m B_0/kT \ll 1$ , т. е. если энергия диполя в магнитном поле  $\mathcal{E}_m = p_m B_0$  много меньше энергии теплового движения частицы  $\langle \varepsilon \rangle = kT$ . Поскольку  $p_m \approx \mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ , а максимально достижимая индукция магнитного поля  $B_{\text{макс}} \approx 1,3 \text{ Тл}$ , то при комнатных температурах это условие всегда выполняется. Лишь при очень низких температурах можно получить  $p_m B_0/kT \approx 1$ ; для этого парамагнетик следует охладить до температуры

$$T \approx \frac{p_m B_0}{k} = \frac{\mu_B B_{\text{макс}}}{k} = \frac{9,27 \cdot 10^{-24} \cdot 1,3}{1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 1 \text{ К},$$

т. е. близкой к абсолютному нулю. В этом случае намагниченность парамагнетика будет близка к насыщению, так как все магнитные моменты атомов расположатся вдоль поля, а слабое тепловое движение этот порядок разрушить не сможет.

3. Оценим значение магнитной восприимчивости парамагнетиков при комнатных температурах. Для газов  $n = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ ; полагая  $T \approx 300 \text{ К}$ , получим

$$\chi_m \approx \frac{2,69 \cdot 10^{25} \cdot 9,27^2 \cdot 10^{-48} \cdot 4\pi}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 10^7} \approx 2,3 \cdot 10^{-7}.$$

Опыт дает для кислорода при  $20^\circ \text{С}$  значение магнитной восприимчивости  $18,6 \cdot 10^{-7}$ , для окиси азота (NO)  $0,8 \cdot 10^{-7}$ . У твердых парамагнетиков восприимчивость должна быть примерно в 1000 раз больше. Опыт дает для платины  $2,6 \cdot 10^{-4}$ , для натрия  $8,3 \cdot 10^{-6}$ , для лития  $2,3 \cdot 10^{-5}$ , а для других материалов — значительно меньшие значения.

Итак, магнитная восприимчивость парамагнетиков примерно в 100 раз больше восприимчивости диамагнетиков. Это позволяет

объяснить, почему у парамагнетиков не проявляются диамагнитные свойства. Оказывается, что более сильный парамагнитный эффект перекрывает слабый диамагнитный.

### § 42.6. Ферромагнетизм. Точка Кюри

1. В отличие от парамагнетиков и диамагнетиков, у которых вектор намагниченности пропорционален напряженности намагничивающего поля, у ферромагнетиков намагниченность является весьма сложной нелинейной функцией напряженности. Для никеля эта зависимость изображена на рис. 42.5. Для удобства изображения масштаб нарушен: область напряженности поля от  $0,1 \cdot 10^3$  до  $2 \cdot 10^3$  А/м растянута. Как видно из рисунка, намагниченность никеля сначала быстро нарастает с ростом напряженности магнитного поля. Затем наступает магнитное насыщение, когда намагниченность уже практически перестает зависеть от величины намагничивающего поля.

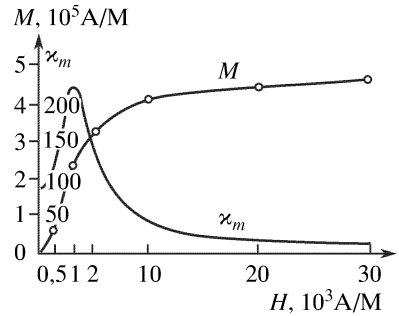


Рис. 42.5

2. Поскольку намагниченность ферромагнетика не пропорциональна напряженности намагничивающего поля, выражения (42.6) и (42.8) теряют смысл. Формально, однако, ими можно пользоваться, учитывая, что для ферромагнетиков магнитная восприимчивость  $\chi_m = M/H$  и магнитная проницаемость  $\mu = B/\mu_0 H$  являются не постоянными величинами, а довольно сложными функциями напряженности намагничивающего поля.

3. Следующее важное отличие ферромагнетиков заключается в том, что если парамагнитные или диамагнитные свойства вещества проявляются в любом агрегатном состоянии, то ферромагнитные свойства наблюдаются только у кристаллов. В жидком или газообразном состоянии ферромагнитные вещества ведут себя как обычные парамагнетики. Отсюда следует, что ферромагнитные свойства некоторых веществ определяются не особыми свойствами их атомов — последние ничем не отличаются от атомов парамагнетиков, — а особой структурой их кристаллической решетки. При изменении структуры решетки должны меняться и магнитные свойства ферромагнетиков. Опыт подтверждает это предположение.

Оказывается, что для каждого ферромагнетика имеется определенная температура — *точка Кюри*, выше которой ферромагнитные свойства исчезают и вещество становится обычным парамагнетиком. Для железа точка Кюри составляет  $770^\circ\text{C}$ , для никеля  $360^\circ\text{C}$ , а для пермаллоя (сплав 70 % Fe и 30 % Ni) всего лишь  $70^\circ\text{C}$ .

4. Как показал Л.Д. Ландау, точка Кюри у ферромагнетиков — это температура фазового перехода второго рода.

При фазовых переходах первого рода меняется структура вещества; например, при плавлении кристалла дальний порядок меняется на ближний. В результате меняется внутренняя энергия и энтропия тела, что требует затраты некоторой энергии — теплоты фазового перехода (см. гл. 36). Фазовые переходы второго рода, например исчезновение ферромагнитных свойств вещества при переходе через точку Кюри, не сопровождаются изменением агрегатного состояния. В частности, при этом кристаллическая решетка не разрушается, хотя тип симметрии решетки меняется. В результате фазовые переходы второго рода не сопровождаются изменением энтропии и внутренней энергии тела, следовательно, здесь нет и теплоты фазового перехода.

Ландау показал, что при фазовых переходах второго рода скачком меняются такие характеристики вещества, как теплоемкость, коэффициент теплового расширения, сжимаемость и т. п., что подтверждается экспериментом. На рис. 42.6 показаны графики изменения намагниченности и теплоемкости некоторого вещества. Как видно, при температуре  $4,2\text{ K}$  намагниченность резко падает; следовательно, эта температура есть точка Кюри для данного вещества. При этой температуре теплопроводность вначале быстро возрастает, а затем падает.

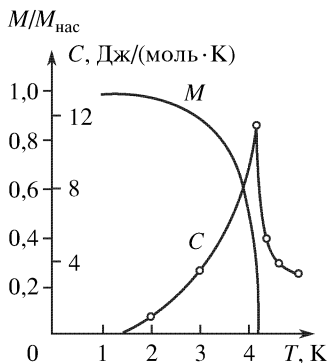


Рис. 42.6

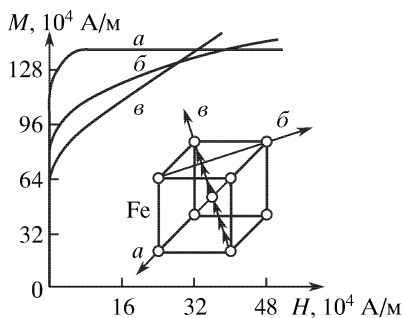


Рис. 42.7

5. Ферромагнетизм присущ только кристаллам, а последние обладают анизотропией (см. § 32.1), поэтому монокристалл ферромагнитного вещества должен обладать анизотропией намагничивания — его магнитные свойства должны быть разными в разных направлениях. Опыт подтверждает это предположение.

На рис. 42.7 изображены графики намагниченности монокристалла железа, имеющего решетку типа объемноцентрированного куба (см. § 33.4). Оказывается, что в направлении ребра куба намагниченность вещества при данном значении напряженности поля наибольшая ( $a$ ), меньше она в направлении диагонали грани ( $b$ ) и наименьшая намагниченность — в направлении пространственной диагонали куба ( $c$ ). Поэтому ребро куба называется направлением легкого намагничивания, а диагональ куба — направлением трудного намагничивания.

Естественно, что в поликристалле анизотропия намагниченности не проявляется, поскольку отдельные микрокристаллики ориентированы беспорядочно (см. § 32.2).

### § 42.7. Гистерезис

1. Характерным свойством ферромагнетиков является *гистерезис*. Явление заключается в том, что намагниченность ферромагнетика зависит не только от напряженности намагничивающего поля в данный момент, но и от предварительного намагничивания образца. Поэтому вообще нельзя указать, какая намагниченность ферромагнетика соответствует данному значению напряженности намагничивающего поля, если не известно, в каком состоянии он до этого находился. То же, естественно, относится к значениям магнитной восприимчивости и проницаемости.

График на рис. 42.5 характеризует ход первоначальной намагниченности, когда ферромагнетик был сначала нагрет выше точки Кюри и тем самым полностью размагничен, а затем охлажден и подвергнут намагничиванию. Совершенно иной вид будет иметь кривая намагниченности, если ферромагнетик был уже ранее намагничен.

2. Изготовим сердечник в форме тороида из размагниченного ферромагнетика и обмотаем его равномерно проводником. Меняя ток в обмотке, мы тем самым меняем напряженность намагничивающего поля. Пусть напряженность поля возрастает до значения  $H_s$  (рис. 42.8). Этому значению поля соответствует намагниченность насыщения, равная  $M_s$ . Будем уменьшать ток в обмотке, уменьшая тем самым напряженность намагничивающего поля. Мы убедимся, что намагниченность сердечника в процессе размагничивания остается все время большей, чем в процессе намагничивания.

Когда ток в обмотке станет равен нулю, исчезнет и намагничивающее поле. Но намагниченность ферромагнетика не об-

ратится в нуль — сердечник сохранит некоторую *остаточную намагниченность*  $M_r$ . И только в том случае, когда по обмотке будет пропущен ток обратного направления и возникнет поле с напряженностью  $-H_c$ , намагниченность сердечника обратится в нуль. Напряженность размагничивающего поля  $H_c$  называется *коэрцитивной силой*.

Кривая, изображенная на рис. 42.8, называется *гистерезисной петлей*.

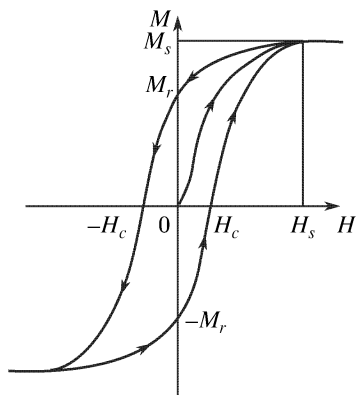


Рис. 42.8

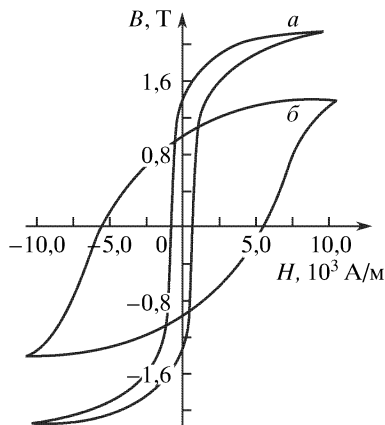


Рис. 42.9

3. В зависимости от химического состава, а также от характера тепловой и механической обработки материала (закалка, отжиг, прокат, холодная штамповка и т. п.) встречаются ферромагнетики с различными свойствами. Вещества с малыми значениями коэрцитивной силы называются «мягкими» магнитными материалами, высококоэрцитивные материалы — «жесткими». На рис. 42.9 изображены гистерезисные петли двух материалов: магнитно-мягкого железа (*а*) и высококоэрцитивной закаленной стали (*б*).

Форма гистерезисной петли определяет область применения того или иного ферромагнетика. «Мягкие» магнитные материалы применяются для изготовления сердечников электромагнитов, где важно иметь большое значение максимальной индукции поля и малую коэрцитивную силу. Эти же материалы используются в качестве сердечников трансформаторов и машин переменного тока (генераторов, двигателей): благодаря малой коэрцитивной силе они легко перемагничиваются. Такие же требования предъявляются к сердечникам магнитов ускорителей.

Магнитно-жесткие материалы используются для изготовления постоянных магнитов. Благодаря большому значению коэрцитивной силы и относительно большой остаточной намагниченности эти магниты могут длительное время создавать сильные магнитные поля.

Постоянные магниты из высококоэрцитивных сплавов применяются в магнитоэлектрических измерительных приборах, в электродинамических репродукторах («динамиках») и микрофонах, в небольших генераторах (например, велосипедных), в микроэлектродвигателях и т. п.

Ферромагнитные порошки, нанесенные на гибкие пластмассовые ленты и диски, служат для записи и последующего воспроизведения всевозможной информации, а также для ее хранения. На этом принципе основано действие магнитофонов, функционирование магнитной памяти ЭВМ и т. п.

## § 42.8. Доменная структура ферромагнетиков

1. Особенности ферромагнетиков можно объяснить, следуя классической теории ферромагнетизма, предложенной П. Вейсом. Согласно этой теории, при температурах ниже точки Кюри ферромагнетик состоит из микроскопических областей, называемых *доменами*, в каждой из которых магнитные моменты атомов расположены строго в одном направлении, соответствующем направлению легкого намагничивания (см. § 42.6). Тем самым каждый домен оказывается намагниченным до насыщения независимо от наличия внешнего магнитного поля и от его величины.

Размеры доменов достигают  $10^{-2}$ – $10^{-3}$  см, вследствие чего их можно наблюдать в микроскоп. Для того чтобы увидеть домены, на полированную поверхность ферромагнетика наносят каплю масла, в которой взвешены мельчайшие частицы ферромагнитного порошка (метод Акулова–Биттера). Частицы ферромагнитного порошка концентрируются на границах доменов, где магнитное поле наиболее неоднородно (рис. 42.10).

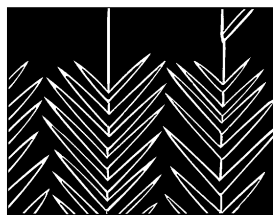


Рис. 42.10

При отсутствии внешнего магнитного поля домены в монокристалле располагаются так, что их магнитные поля замыкают друг друга и суммарное внешнее магнитное поле оказывается

равным нулю. На рис. 42.11 схематически изображены эти домены. Стрелками показаны направления векторов намагниченности внутри доменов. Как показали Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, такая система доменов в монокристалле характеризует состояние с минимальной энергией магнитного поля, что с точки зрения законов термодинамики обеспечивает устойчивое равновесие этой системы.

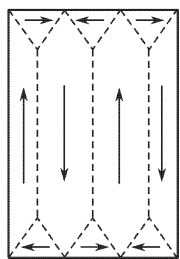


Рис. 42.11

2. Объясним на основе этих представлений механизм намагничивания поликристаллического образца. Поликристалл состоит из отдельных зерен, у которых направления легкого намагничивания ориентированы беспорядочно. Каждое зерно разбивается на несколько доменов, направленных вдоль линии легкого намагничивания (рис. 42.12 а).

При включении слабого внешнего магнитного поля всегда найдется множество доменов, у которых направление вектора намагниченности совпадает с направлением внешнего поля. Эти

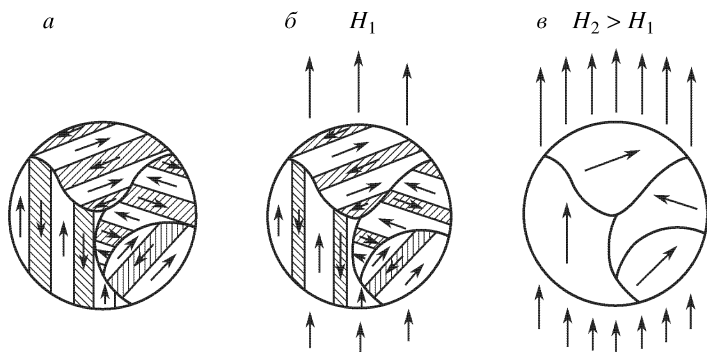


Рис. 42.12

домены будут обладать минимумом энергии и поэтому окажутся в состоянии устойчивого равновесия. Соседние домены обладают максимумом энергии. Поэтому энергетически выгодно, если магнитные моменты некоторых атомов изменят свое направление и присоединятся к тем доменам, энергия которых минимальна. Этот процесс называется смещением границ доменов (рис. 42.12 б).

По мере роста напряженности внешнего магнитного поля границы доменов сдвигаются все сильнее. При этом стенки доменов начинают встречать на своем пути дефекты кристалла — дис-

локации, внедрения и т. п. (см. § 32.4). Эти дефекты препятствуют изменению направления магнитного момента у атомов, расположенных вблизи дефекта (препятствуют перемещению стенок домена). По мере роста поля потенциальная энергия атомов (магнитных диполей) вблизи дефекта возрастает настолько, что превысит энергию активации (см. § 34.3). В этом случае магнитные моменты атомов вблизи дефекта скачком изменяют свое направление на противоположное — иными словами, стенка домена скачком срывается с места и движется до следующего дефекта. Таким образом, процесс намагничивания поликристаллического вещества идет не плавно, а скачками. Это явление называется *эффектом Баркгаузена*.

Оно может быть обнаружено экспериментально. К пучку из никелевой проволоки подносят магнит; происходит скачкообразное намагничивание никеля, что приводит к скачкообразному изменению магнитного поля. Благодаря явлению электромагнитной индукции (см. гл. 43) в обмотке, навитой на никелевый пучок, возникают импульсы тока, которые хорошо слышны в телефоне.

Скачкообразный характер процесса намагничивания поликристаллического ферромагнетика приводит к необратимым потерям энергии (перемещение дислокаций и других дефектов, возникновение упругих волн, энергия которых переходит во внутреннюю, и т. п.). Следовательно, и процесс намагничивания в сильных полях происходит необратимо. При уменьшении магнитного поля структура вещества не будет восстанавливаться: домены при размагничивании будут иметь другую форму и ориентировку по сравнению с процессом намагничивания. Это и является причиной гистерезисного эффекта.

3. В достаточно сильных полях все стенки доменов сдвинутся к границам кристаллических зерен, и каждое зерно окажется намагниченным вдоль того направления легкого намагничивания, которое составляет наименьший угол с направлением внешнего поля (рис. 42.12 в). Если еще больше усилить напряженность намагничивающего поля, то магнитные моменты зерен начнут поворачиваться, выстраиваясь вдоль поля. Этот процесс требует сильных полей, в результате чего в этой области намагниченность меняется мало и рост кривой намагничивания замедляется.

Наконец, когда магнитные моменты всех зерен выстроятся вдоль поля, наступает магнитное насыщение — с ростом внешнего поля намагниченность вещества перестает возрастать.

4. Как видно, используя представления о доменной структуре ферромагнетиков, можно объяснить все особенности процесса



их намагничивания. Точка Кюри оказывается той температурой, выше которой происходит разрешение доменной структуры.

Остается ответить на два вопроса. Прежде всего нужно объяснить, какие силы приводят к тому, что внутри домена магнитные моменты всех атомов самопроизвольно выстраиваются вдоль направления легкого намагничивания. А затем нужно найти причины того, почему одни вещества обладают ферромагнитными свойствами, а другие нет. Ответ на эти вопросы смогла дать только квантовая теория магнитных явлений.

### § 42.9. Опыт Эйнштейна и де-Гааза

1. В предыдущих параграфах использовалось представление о том, что атомы парамагнитных и ферромагнитных веществ имеют магнитный момент и во внешнем магнитном поле эти моменты ориентируются вдоль поля. В § 42.2 мы выяснили, что отношение орбитального магнитного момента к орбитальному моменту импульса равно половине удельного заряда электрона. Весьма важно экспериментально проверить эти представления. Идея такого эксперимента была предложена в 1915 г. Эйнштейном, опыт в том же году он поставил вместе с де-Гаазом.

Суть опыта такова. Подвесим стержень из ферромагнитного материала на тонкой нити и поместим его в катушку так, чтобы ось стержня и подвес точно совпадали с направлением вектора индукции намагничивающего поля. Пропуская ток через обмотку катушки, намагнитим стержень до насыщения, а затем, изменив направление тока в катушке, намагнитим стержень до насыщения в противоположном направлении (рис. 42.13). Процесс перемагничивания заключается в том, что направления магнитных моментов атомов меняются на противоположные. Но вместе с изменением направления магнитного момента меняется и направление момента импульса электронов.

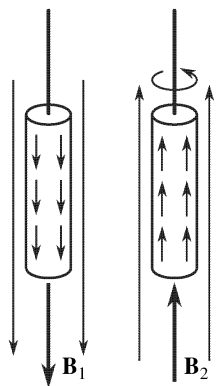


Рис. 42.13

Система электронов и положительных ионов, образующих кристаллическую решетку стержня, является замкнутой, так как никакие механические моменты на нее не действуют. Но тогда, согласно известному закону сохранения (см. § 22.7), суммарный момент импульса электронов и ионной решетки не должен измениться.

А так как при перемагничивании стержня момент импульса электронов меняется, то соответственно должен появиться момент импульса у самого стержня такой, чтобы их алгебраическая сумма сохранила первоначальное значение; благодаря этому стержень поворачивается вокруг оси, параллельной полю.

Так было экспериментально доказано наличие у атомов магнитного момента, вызванного внутриатомным движением электронов. Наличие магнитного момента приводит, согласно (42.1), к появлению механического момента импульса.

2. В этом же году С. Дж. Барнетт показал, что существует эффект, в некотором смысле обратный эффекту Эйнштейна–де-Гааза. А именно, он обнаружил, что если железный стержень привести в быстрое вращение, то он намагничивается. Из этого эксперимента также можно было найти отношение магнитного момента к моменту импульса.

3. Тщательный анализ результатов экспериментов показал, что как в опыте Эйнштейна и де-Гааза, так и в опыте Барнетта отношение магнитного момента к моменту импульса имеет ожидаемый знак, соответствующий отрицательному заряду электронов, но числовое значение величины оказалось в два раза больше, чем полученное по формуле (42.1), т. е.

$$\frac{p_m}{L} = \frac{e}{m_e}. \quad (42.17)$$

Можно предположить следующее объяснение полученного результата. Предположим, что у электрона имеется не только орбитальный магнитный момент, для которого справедливо соотношение (42.1), но и еще один магнитный момент — *спиновый*, для которого выполняется соотношение (42.17). Если еще учесть, что орбитальные магнитные моменты могут быть скомпенсированы, то результаты опытов Эйнштейна–де-Гааза и Барнетта объясняются просто.

Оказалось, что наличие спинового магнитного момента у электрона непосредственно вытекает из опыта Штерна и Герлаха.

## § 42.10. Опыт Штерна и Герлаха

1. В 1921 г. О. Штерн и В. Герлах поставили эксперимент по прямому измерению магнитных моментов атомов различных химических элементов. Для этой цели пучок атомов пропусклся через магнитное поле с сильной неоднородностью, т. е. с большим значением градиента  $\Delta B / \Delta z$ . Для получения такого большого

градиента использовался электромагнит с особой формой полюсных наконечников (рис. 42.14).

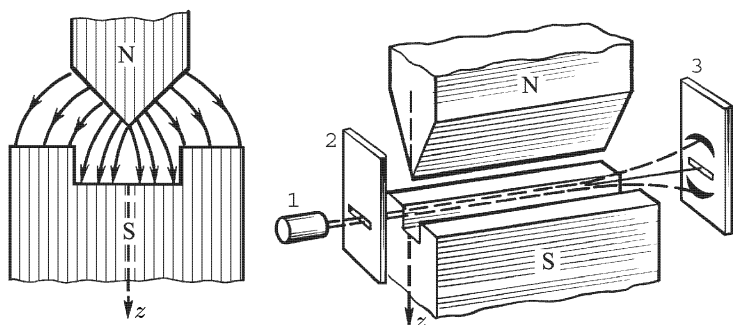


Рис. 42.14

Атомы металла, испаряясь в печи 1, проходят через диафрагму 2, образуя узкий пучок. В отсутствие магнитного поля этот пучок оставляет след в центре фотопластинки 3. Если включить магнитное поле, то вдоль оси  $z$  на атомы действует сила  $F_z = -p_{mz} \frac{\Delta B}{\Delta z}$  (см. (41.19)), где  $p_{mz}$  — проекция магнитного момента на ось  $z$ . Под действием этой силы атомы отклоняются вверх или вниз, в зависимости от того, направлена проекция магнитного момента вдоль или против оси. Измерив отклонение пучка и зная градиент индукции поля, можно вычислить проекцию магнитного момента атома.

2. Согласно классическим представлениям, любые ориентации магнитного момента относительно оси  $z$  равновероятны, так что проекция магнитного момента может принимать любые значения от  $-p_m$  до  $+p_m$ , включая нуль. Соответственно будет меняться и сила, действующая на атомы. А так как в пучке атомов очень много, то, согласно классическим представлениям, пучок должен размыться в широкую полосу. Оказалось, что такая размытая полоска никогда не возникает! Итак, предположение о равновероятной ориентации магнитных моментов в произвольных направлениях, лежащее в основе классической физики, не соответствует действительности.

3. Опыт показал, что атомы некоторых веществ вовсе не отклоняются в магнитном поле, например атомы ртути. Это значит, что у этих атомов отсутствуют магнитные моменты; следовательно, все эти вещества должны быть диамагнетиками, что соответствует действительности.

Особенно интересный результат получился в опытах с щелочными металлами: литием, натрием, калием (а также с алюминием и некоторыми другими). Здесь атомный пучок разделился на два, оба они отклонились на одну и ту же величину, но в противоположные стороны (рис. 42.14). Отсюда следует, что проекция магнитного момента данного атома на ось  $z$  может иметь *только два* равных по величине и противоположных по знаку значения. Измерив величину этого отклонения, удалось показать, что в данном случае проекция магнитного момента атома равна магнетону Бора:

$$p_{mz} = \pm \mu_B. \quad (42.18)$$

### § 42.11. Спин электрона

1. Проанализируем подробнее результат, полученный со щелочными металлами, на примере лития. Литий — третий элемент в Периодической системе элементов Менделеева, и потому вокруг его ядра обращаются три электрона (см. § 73.2). Но вместе с тем литий, как и все щелочные металлы, — одновалентный элемент. Это приводит нас к выводу, что один из электронов лития чем-то отличается от двух других. Как будет показано в § 73.1, два электрона лития находятся на той же орбите, что и два электрона гелия, а третий электрон находится на другой орбите.

Электроны, находящиеся на гелиевой орбите, не дают вклада в магнитный момент атома, так как их магнитные моменты скомпенсированы (см. § 42.4). Следовательно, магнитный момент атома возникает за счет нескомпенсированного магнитного момента валентного электрона. Но так как у атомов всех щелочных металлов имеется один валентный электрон, то все они должны иметь нескомпенсированный магнитный момент. В результате все щелочные металлы должны быть парамагнетиками, что и наблюдается.

2. Однако внимательный анализ показывает, что этот нескомпенсированный магнитный момент не может быть орбитальным моментом.

В 1925 г. С. Гаудсмит и Г. Уленбек в результате анализа ряда трудностей, существовавших в атомной физике (в том числе и с объяснением результатов опыта Штерна и Герлаха), пришли к выводу, что электрон должен обладать собственным моментом импульса, который был назван *спином* (от английского spin — вращение вокруг собственной оси) (см. § 72.5).

3. Обратимся к выяснению роли спина в происхождении ферромагнетизма. Я.И. Френкель и В. Гайзенберг показали, что при

электростатическом взаимодействии электронов в веществе энергия взаимодействия состоит из двух частей: энергии кулоновского поля и еще одного слагаемого, характеризующего так называемое *обменное* взаимодействие — чисто квантовомеханический эффект, не имеющий классического аналога (см. § 74.3).

Оказывается, что при параллельной ориентации спинов энергия обменного взаимодействия отрицательна, что соответствует силам притяжения. Но ведь минимум энергии — это условие устойчивого равновесия системы (см. § 19.6). Следовательно, в результате действия обменных сил спины атомов должны были бы выстроиться в одном направлении, если бы этому не мешало тепловое движение.

У парамагнетиков энергия обменного взаимодействия меньше энергии теплового движения, вследствие чего эти вещества самопроизвольно намагнититься не могут. Что же касается ферромагнетиков, то у них при температурах ниже точки Кюри энергия обменного взаимодействия значительно больше энергии теплового движения, в результате чего спины большой группы атомов ориентируются все в направлении легкого намагничивания, и тем самым образуются области самопроизвольного намагничивания, т. е. домены.

## § 42.12. Антиферромагнетизм

1. При изучении свойств ферромагнетиков Ландау пришел в 1933 г. к выводу, что должны существовать вещества, у которых при низких температурах магнитные моменты ориентируются не параллельно, как это имеет место у ферромагнетиков, а антипараллельно, т. е. магнитные моменты у двух соседних атомов расположены противоположно друг другу. В 1938 г. было экспериментально обнаружено, что соединения  $\text{MnO}$ ,  $\text{MnS}$ ,  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ ,  $\text{NiCr}$  и ряд других действительно обладают антиферромагнитными свойствами.

На рис. 42.15 изображена схема кристаллической решетки окиси марганца ( $\text{MnO}$ ). Светлыми кружочками без стрелок обозначены атомы кислорода, не имеющие магнитного момента: черными кружочками — парамагнитные атомы марганца; стрелками изображены направления их магнитных моментов. Видно, что в кристалле имеются два периода: период решетки (химический период), равный длине ребра куба, параллельным переносом которого можно построить всю кристаллическую решетку, и магнитный период, равный длине ребра того куба, параллельным

переносом которого можно построить магнитную решетку. Используя явление дифракции нейтронов (см. § 69.2), удалось экспериментально показать, что период магнитной решетки вдвое больше периода кристаллической решетки.

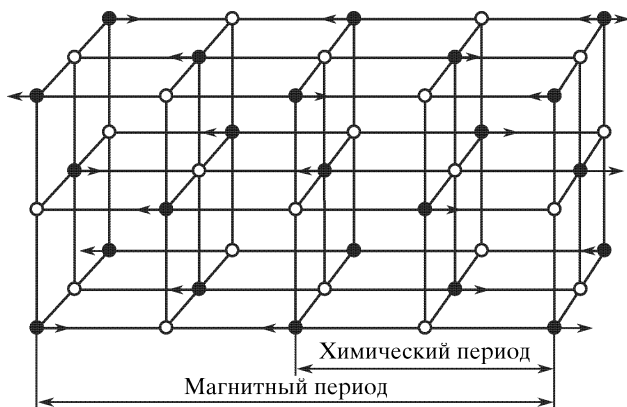


Рис. 42.15

2. У антиферромагнетиков существует температура, аналогичная температуре Кюри у ферромагнетиков, выше которой разрушается магнитный порядок, изображенный на рис. 42.15, и вещество превращается в обычный парамагнетик. Эта температура  $T_N$  называется *точкой Нееля*; она, как и точка Кюри, является температурой фазового перехода второго рода.

Но если выше точки фазового перехода ферромагнетики и антиферромагнетики ведут себя в основном одинаково — они превращаются в парамагнетики, то ниже этой температуры они ведут себя совершенно по-разному. У ферромагнетиков ниже точки Кюри благодаря спонтанному намагничиванию и образованию доменов магнитная восприимчивость скачком возрастает в сотни и даже тысячи раз, и затем, вплоть до температур, близких к абсолютному нулю, магнитная восприимчивость мало зависит от температуры. У антиферромагнетиков при температурах ниже точки Нееля возникает магнитный порядок, увеличивается число антипараллельных моментов, и намагниченность резко уменьшается; соответственно уменьшается и магнитная восприимчивость. По мере снижения температуры магнитный порядок становится все более совершенным, так как уменьшается энергия тепловых колебаний, которые мешают упорядоченной ориентации магнитных моментов. Следовательно, по мере приближения темпера-

туры антиферромагнетика к абсолютному нулю его магнитная восприимчивость также стремится к нулю (рис. 42.16).

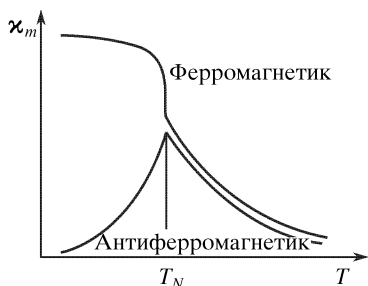


Рис. 42.16

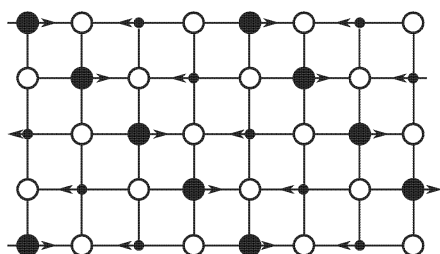


Рис. 42.17

3. Представим себе вещество с антиферромагнитным порядком, у которого половина атомов марганца заменена другими парамагнитными атомами, имеющими большой магнитный момент, например атомами железа. На рис. 42.17 эти атомы изображены черными кружочками большого радиуса с более длинной стрелкой. При температуре ниже точки Нееля это вещество окажется спонтанно намагниченным, поскольку разность магнитных моментов двух соседних парамагнитных атомов не будет равна нулю.

Материалы с такими свойствами действительно существуют, их называют ферритами, а магнитные свойства ферритов — *ферри-магнетизмом*. Ферриты получают путем спекания порошков,

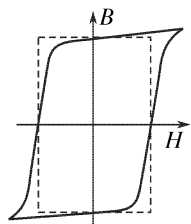


Рис. 42.18

состоящих из тщательно перемешанных окислов железа ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) с окислами других металлов — лития, никеля, марганца и т. д. В зависимости от состава и характера обработки можно получить ферриты с разнообразными свойствами. Так, коэрцитивная сила никель-цинковых ферритов составляет примерно 1 А/м, а у кобальтовых ферритов — около  $2 \cdot 10^5$  А/м. У магний-марганцевых ферритов гистерезисная петля близка к прямоугольной (рис. 42.18), что позволяет применять их в качестве элементов запоминающих устройств в электронных вычислительных машинах.

Магнитная индукция у ферритов значительно меньше, чем у металлических ферромагнетиков. Но ферриты обладают одним важным преимуществом: если металлические ферромагнетики являются хорошими проводниками электрического тока, то фер-

риты обладают сравнительно низкой проводимостью. Это позволяет использовать ферриты в качестве сердечников устройств, работающих на токах высокой частоты, где применять стальные сердечники невозможно.

## Глава 43

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

### § 43.1. Открытие Фарадея

1. Основываясь на том, что вокруг проводника с током возникает магнитное поле, М. Фарадей еще в 1821 г. пришел к выводу, что с помощью магнитного поля можно создать ток в проводнике. Об этом свидетельствует запись в его дневнике за этот год: «Превратить магнетизм в электричество». Однако лишь через 10 лет, после напряженных исканий, ему наконец удалось решить эту задачу. Фарадей обнаружил, что если намотать на какой-либо сердечник две обмотки и в одной из них менять силу тока (например, замыкая или размыкая цепь), то во второй (называемой вторичной) обмотке возникнет ток.

Затем он установил, что ток во вторичной обмотке резко усиливается, если сердечником является железо. Далее оказалось, что обмотку с током можно заменить магнитом и ток в катушке возникает либо при перемещении катушки относительно магнита, либо, наоборот, при перемещении магнита в катушке.

2. С открытием Фарадея началась новая эра как в теории электромагнетизма, так и в ее практических приложениях. Было окончательно обосновано единство электрических и магнитных явлений, что послужило толчком для разработки теории электромагнитного поля. Это удалось сделать Максвеллу в 70-х годах прошлого столетия. С другой стороны, открытие Фарадея послужило базой для развития современной электротехники, так как в основе действия всех современных электрических машин лежит явление электромагнитной индукции.

### § 43.2. Явление электромагнитной индукции и сила Лоренца

1. Механизм возникновения индукционного тока в движущемся проводнике можно объяснить с помощью силы Лоренца. Пусть проводник, в котором имеются свободные положительные и от-



рицательные заряды, движется с скоростью  $\mathbf{v}$  перпендикулярно направлению вектора индукции  $\mathbf{B}$  (рис. 43.1). В этом случае на заряды действует сила Лоренца  $F_m = evB$ , направленная согласно правилу левой руки (см. § 41.1) вдоль проводника.

Под действием силы Лоренца происходит *разделение зарядов*: положительные заряды накапливаются на одном конце проводника, отрицательные — на другом. Эти заряды создают внутри проводника электростатическое (кулоновское) поле. Если проводник разомкнут, то движение зарядов под действием силы Лоренца будет происходить до тех пор, пока электрическая сила, действующая на заряд со стороны кулоновского поля, не уравнивает силу Лоренца.

Мы видим, что действие лоренцевых сил аналогично действию некоторого электрического поля, которое было бы направлено против кулоновского поля. Поскольку это поле вызвано не распределением зарядов, а неэлектростатическими (в нашем случае — лоренцевыми) силами, то это поле является *сторонним полем*. Напряженность стороннего поля

$$E^* = \frac{F_m}{e} = vB. \quad (43.1)$$

2. Замкнем проводник, движущийся в магнитном поле, на внешнюю нагрузку, как это изображено на рис. 43.2. По проводнику потечет ток, и свободные электроны станут двигаться

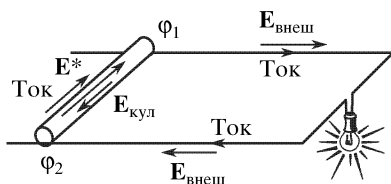


Рис. 43.2

вдоль проводника со скоростью  $\mathbf{w}$ . Вектор суммарной скорости (см. (3.20)).

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

Изменится и сила, действующая на электрон: кроме составляющей  $F_v$ , направленной вдоль проводника, возникнет еще составляющая  $F_w$ , направленная против вектора  $\mathbf{v}$  (рис. 43.3). Модуль

этой силы

$$F_w = ewB. \quad (43.2)$$

Сила Лоренца, действующая в этом случае на электрон,

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_w.$$

Естественно, что она перпендикулярна вектору  $\mathbf{V}$ .

3. Опыт показывает, что в этом случае разность потенциалов окажется меньше, чем при разомкнутой цепи; соответственно уменьшится и напряженность кулоновского поля внутри проводника.

Напряженность стороннего поля определяется лишь скоростью проводника и индукцией магнитного поля. Следовательно, она не изменится при замыкании цепи. Таким образом, если в разомкнутом проводнике напряженности кулоновского и стороннего полей равны, то в замкнутой цепи напряженность кулоновского поля меньше напряженности стороннего поля (рис. 43.2).

4. Проследим теперь за направлением движения носителей тока. Направление тока определяется направлением движения положительных зарядов вдоль поля, т. е. из области с более высоким потенциалом в область с низким потенциалом.

Во внешнем участке цепи положительные заряды движутся из области с потенциалом  $\varphi_1$  в область с потенциалом  $\varphi_2$  под действием электрического поля с напряженностью  $E_{\text{внешн}}$ . Работа, совершаемая этим полем при перемещении заряда, равна

$$A_{\text{внешн}} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (43.3')$$

Во внутреннем участке цепи положительные заряды движутся из области с низким потенциалом  $\varphi_2$  в область с более высоким потенциалом  $\varphi_1$ . Это возможно потому, что в данном случае сторонние силы (силы Лоренца) больше кулоновских сил, которые противодействуют движению зарядов. Работа, совершаемая при перемещении заряда во внутреннем участке цепи, равна разности работ, совершаемых сторонним и кулоновским полями; кулоновские силы являются консервативными, и их работа не зависит от формы траектории (см. § 18.7). Итак, работа по перемещению заряда во внутреннем участке цепи

$$A_{\text{внутр}} = ql(E^* - E_{\text{кул}}) = qlvB - q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (43.3'')$$

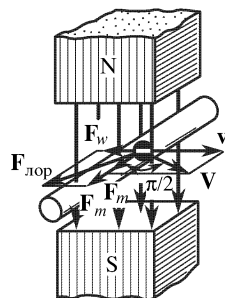


Рис. 43.3

### § 43.3. Электродвижущая сила индукции

1. Воспользовавшись уравнениями (39.11) и (43.1), получим выражение для ЭДС индукции:

$$\mathcal{E} = E^* l = v B l. \quad (43.4)$$

Заметим, что мы рассмотрим случай, когда вектор скорости перпендикулярен вектору индукции магнитного поля. Предоставляем читателю возможность доказать, что в общем случае

$$\mathcal{E} = B l v \sin \alpha, \quad (43.5)$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями вектора скорости и вектора индукции магнитного поля.

2. Вычислим работу, совершаемую при перемещении заряда по замкнутой цепи. Сопоставив выражения (43.3'), (43.3'') и (43.4), получим

$$\begin{aligned} A_{\text{замкн}} &= A_{\text{внешн}} + A_{\text{внутр}} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q l v B - q(\varphi_1 - \varphi_2) = \\ &= q l v B = q \mathcal{E} = A_{\text{стор.}} \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{замкн}}}{q}. \quad (43.6)$$

Итак, мы видим, что работа по перемещению заряда по замкнутой цепи равна работе сторонних сил. Это позволяет дать другое определение понятию ЭДС: *электродвижущая сила* равна отношению работы, которая совершается при перемещении заряда по замкнутой цепи один раз, к величине перемещаемого заряда.

### § 43.4. Явление индукции в неподвижном проводнике

1. Чтобы выяснить механизм явления электромагнитной индукции в неподвижном проводнике, воспользуемся схемой, изображенной на рис. 43.4. Здесь система отсчета  $xyz$  связана с замкнутым проводником, а система отсчета  $x'y'z'$  — с источником магнитного поля, например с постоянным магнитом. Пусть проводник и магнит приближаются друг к другу со скоростью  $v$ .

В системе отсчета  $xyz$ , связанной с проводником, заряды неподвижны относительно системы отсчета, следовательно, сила Лоренца на них действовать не может. Тем не менее при приближении магнита к проводнику в последнем возникает ток. Этот результат полностью соответствует принципу относительности,

согласно которому все инерциальные системы отсчета равноправны и явления (в данном случае ток) определяются лишь относи-

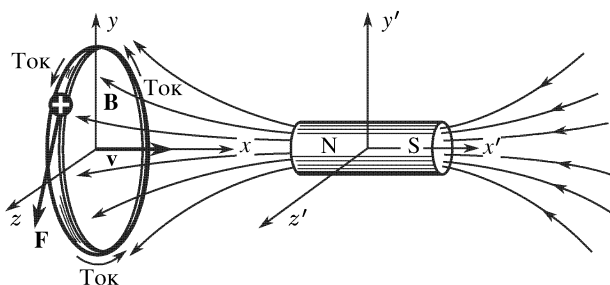


Рис. 43.4

тельной скоростью сближения проводника и магнита. Но все же нас интересует, какие силы в этом случае вызывают циркуляцию зарядов по проводнику.

2. Известно, что движение зарядов может возникнуть либо под действием электрических сил, либо под действием сил Лоренца. Поскольку в системе отсчета  $x y z$ , связанной с проводником, силы Лоренца не действуют, мы приходим к выводу, что ток в проводнике вызывается *индуцированным электрическим полем*, которого нет в системе  $x' y' z'$ .

Индукционное электрическое поле обладает некоторыми особенностями:

а) Это поле не является кулоновским — оно вызвано не каким-то распределением зарядов, а приближением к проводнику магнита (т. е. источника магнитного поля).

б) В отличие от силовых линий кулоновского поля, которые начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах, *силовые линии индуцированного поля замкнуты сами на себя*. Поэтому данное поле называют *вихревым*.

в) *Индукционное поле не является консервативным*, поскольку работа, совершаемая этим полем при перемещении заряда по замкнутой цепи, не равна нулю. Следовательно, энергетической характеристикой индуцированного поля является не потенциал, а электродвижущая сила индукции (ЭДС индукции).

### § 43.5. Напряженность индуцированного поля

1. Найдем напряженность индуцированного электрического поля. В системе отсчета  $x' y' z'$  (рис. 43.4) на заряд действует сила Лоренца  $F'_m = q v B'$ , в системе  $x y z$  — электрическая сила  $F_e = q E$ . Соотношение между этими

силами мы получили в § 40.2, а именно  $F' = F\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Итак,  $qvB' = qE\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , или

$$E = \frac{vB'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (43.7)$$

2. Электродвижущая сила в системе  $x'y'z'$  численно равна работе, совершаемой сторонними (в данном случае лоренцевыми) силами при перемещении единичного заряда:  $\mathcal{E}' = F'l/q = vB'l$ . В системе отсчета  $xyz$  ЭДС численно равна работе, совершаемой индуцированным электрическим полем при перемещении единичного заряда по замкнутой цепи один раз, т.е.  $\mathcal{E} = Fl/q = El$ . Но длина проводника в обеих системах одна и та же, так как он расположен перпендикулярно направлению движения; напряженность индуцированного поля выражается формулой (43.7). Итак,

$$\mathcal{E} = \frac{vB'l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\mathcal{E}'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (43.8)$$

Обычно при явлении электромагнитной индукции скорость движения проводников значительно меньше скорости света, и практически ЭДС в обеих системах отсчета совпадают.

### § 43.6. Электромагнитное поле и принцип относительности

1. Анализ явления электромагнитной индукции с точки зрения двух разных инерциальных систем отсчета приводит нас вновь к тому же выводу, который был получен в § 40.3, а именно, что разделение единого электромагнитного поля на электрическую и магнитную составляющие зависит от того, в какой системе отсчета описывается поле. В самом деле, в системе отсчета, относительно которой заряды покоятся (см. рис. 40.2), взаимодействие между ними осуществляется с помощью поля, которое мы называем электростатическим. Магнитного поля в этой системе отсчета нет. В другой системе отсчета, относительно которой заряды движутся, взаимодействие между ними осуществляется с помощью поля, которое можно разбить на две составляющие — электрическую и магнитную. Можно сказать, что в этой системе имеются два поля, электрическое и магнитное, и взаимодействие между зарядами в этой системе отсчета осуществляется с помощью обоих полей.

С аналогичным случаем мы встречаемся в установке, изображенной на рис. 43.3. В системе отсчета, связанной с магнитом, имеется только магнитное поле, и движение зарядов в проводнике возникает за счет сил Лоренца. В системе отсчета, связанной с проводником, кроме магнитного поля, имеется вихревое электрическое поле, которое и создает ток.

2. Мы вновь приходим к выводу, что «электрические и магнитные поля не существуют независимо от состояния движения координатной системы». Эта формулировка принадлежит Эйнштейну и взята из его первой работы по теории относительности, которая появилась в 1905 г. под названием «К электродинамике движущихся тел».

Согласно Эйнштейну, для вычисления силы, которая действует на заряженное тело, нужно умножить величину заряда на напряженность электрического поля в той точке, где находится заряженное тело. При этом выражение для напряженности электрического поля должно быть преобразовано к системе отсчета, относительно которой исследуемое тело покоится.

### § 43.7. Закон индукции Фарадея

1. Нам осталось рассмотреть явление электромагнитной индукции в том случае, когда и проводник, в котором возникает индукционный ток, и источник магнитного поля покоятся в данной системе отсчета. В фарадеевском опыте с двумя катушками, намотанными на какой-либо сердечник, ток во вторичной обмотке возникает лишь в том случае, если меняется магнитное поле, создаваемое током в первичной обмотке. Заметим, что способ изменения магнитного поля не играет никакой роли. Можно одну катушку перемещать относительно другой, можно с помощью рубильника включать или выключать ток в первичной обмотке, можно менять силу тока в первичной обмотке с помощью реостата — результат будет один и тот же: при любых изменениях магнитного поля во вторичной обмотке возникнет индукционный ток. Нам уже известно, что в замкнутом проводнике циркуляция зарядов вызывается индуцированным электрическим полем. Таким образом, мы приходим к выводу, что любые изменения магнитного поля сопровождаются возникновением вихревого электрического поля. Такую трактовку явления индукции предложил Максвелл, и она оказалась весьма плодотворной.

2. Преобразуем формулу (43.5) так, чтобы она стала пригодной для вычисления ЭДС индукции и в тех случаях, когда проводник неподвижен, а меняется магнитное поле. Для этой цели оказывается необходимым ввести новую скалярную характеристику магнитного поля: *поток вектора магнитной индукции*, или, короче, *магнитный поток*  $\Phi$ .

Пусть плоская площадка  $abcd$  площадью  $S$  расположена в однородном магнитном поле перпендикулярно направлению сило-

вых линий (рис. 43.5 а). Потоком вектора индукции  $\mathbf{B}$  через данную площадь  $S$  называется произведение этих величин:

$$\Phi = BS. \quad (43.9)$$

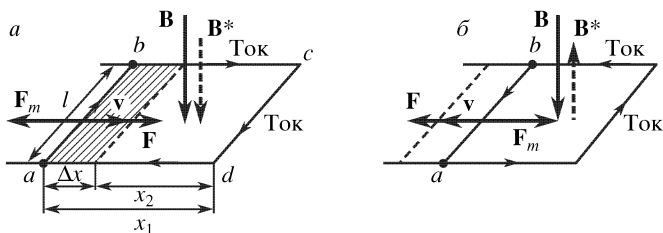


Рис. 43.5

В случае неоднородного магнитного поля (как и в неоднородном электрическом поле, см. § 37.9) поток вектора магнитной индукции

$$\Phi = \int B \cos \alpha dS. \quad (43.9')$$

Здесь  $\alpha$  — угол между направлением вектора  $\mathbf{B}$  и нормалью  $\mathbf{n}$  к площадке в данной точке поля.

Единица магнитного потока в СИ — *вебер* (Вб); это магнитный поток, пронизывающий поверхность с площадью  $1 \text{ м}^2$ , расположенную перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией 1 Тл:  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$ .

3. При перемещении проводника  $ab$  со скоростью  $v = dx/dt$  в цепи индуцируется ЭДС индукции  $\mathcal{E} = Blv = Bl dx/dt$ . Выражение в числителе преобразуется так:  $Bl dx = -B dS = -d\Phi$ . Знак минус появился потому, что магнитный поток убывает. ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (43.10)$$

4. Данное выражение выведено для случая, когда проводник движется относительно источников магнитного поля. В этом частном случае выражения (43.10) и (43.5) равноправны и расчитать величину ЭДС можно с помощью любого из них. Вместе с тем выражение (43.10) пригодно для описания явления электромагнитной индукции и в том случае, когда проводник неподвижен, а индуцированное электрическое поле возникает за счет изменения магнитного потока.

Итак, во всех случаях электромагнитной индукции ЭДС *равна производной магнитного потока по времени, взятой с обратным знаком*. Это и есть закон Фарадея для явления индукции.

### § 43.8. Правило Ленца

1. Выясним смысл знака в выражении (43.10). Будем считать ЭДС положительной, если направление индуцированного электрического поля образует с направлением вектора  $\mathbf{B}$  праввинтовую систему (рис. 43.5 а). Здесь при движении проводника магнитный поток убывает, производная магнитного потока  $d\Phi/dt < 0$  и ЭДС  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt > 0$ .

Читатель легко убедится в том, что при изменении направления движения проводника на противоположное магнитный поток возрастает, производная потока  $d\Phi/dt > 0$  и ЭДС соответственно изменяет знак (рис. 43.5 б).

2. Знак ЭДС и соответствующее этому направление индуцированного тока можно найти с помощью весьма общего правила, которое сформулировал в 1833 г. Э.Х. Ленц. Для вывода этого правила обратимся вновь к рис. 43.5, где штриховой стрелкой обозначено направление вектора индукции  $\mathbf{B}^*$  магнитного поля, создаваемого индуцированным током. В случае, когда магнитный поток убывает, направления векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{B}^*$  совпадают, что препятствует уменьшению магнитного потока (рис. 43.5 а). Во втором случае, когда поток возрастает, вектор  $\mathbf{B}^*$  направлен противоположно вектору  $\mathbf{B}$ , что препятствует нарастанию магнитного потока (рис. 43.5 б). Таким образом, *индуцированный ток имеет такое направление, что своим магнитным полем он препятствует изменению магнитного потока, вызывающему явление индукции*. Это и составляет содержание правила Ленца.

### § 43.9. Электромагнитная индукция и закон сохранения энергии

1. Правило Ленца тесно связано с законом сохранения энергии и фактически является следствием этого общего закона природы. В самом деле, индуцированное электрическое поле, перемещая заряды по цепи, совершает работу. Но работа есть мера изменения энергии (см. § 16.4 и 21.1). Какими же преобразованиями энергии сопровождается явление электромагнитной индукции?

До сих пор мы учитывали работу лишь одной составляющей силы Лоренца — сторонней силы  $F_v = evB$ . Работа этой силы за время  $\Delta t$ :

$$A_v = F_v w \Delta t = evBw \Delta t.$$



Между тем вторая составляющая силы Лоренца  $F_w = ewB$  совершает за это же время отрицательную работу, поскольку эта сила направлена противоположно перемещению  $\Delta x = v \Delta t$ :

$$A_x = -F_w v \Delta t = -ewBv \Delta t.$$

Полная работа силы Лоренца, естественно, равна нулю (см. § 41.1).

2. Поскольку на каждый электрон действует сила  $F_w$ , направленная против движения проводника, то их сумма создает тормозящую силу  $F_{\text{торм}} = NF_w$ , где  $N = nSl$  — общее число свободных электронов в движущемся проводнике. Равномерное движение проводника со скоростью  $v$  обеспечивается *внешней силой*  $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{\text{торм}}$ , приложенной к проводнику со стороны первичного двигателя.

Работа этой силы за время  $t$  равна

$$A_{\text{мех}} = Fvt = NF_w vt = nSl \cdot ewB \cdot vt.$$

Учитывая, что сила тока  $i = enSw$  (см. (39.17)), а заряд  $q = it$  (см. (39.15)), получим

$$A_{\text{мех}} = qBlv. \quad (43.11)$$

Работа индуцированного поля за это же время (см. (39.5), (43.5))

$$A_{\text{эл}} = q\mathcal{E} = qBlv. \quad (43.12)$$

3. Итак, при отсутствии потерь работа внешней силы оказывается равной работе, совершаемой индуцированным полем при перемещении зарядов по цепи. Таким образом, явление электромагнитной индукции с энергетической точки зрения есть процесс преобразования механической энергии в энергию индуцированного электрического поля. На этом принципе и основано действие индукционных генераторов электрического тока.

### § 43.10. Самоиндукция

1. Вычислим магнитный поток, пронизывающий обмотку соленоида. Поток, пронизывающий один виток, равен, согласно определению, произведению площади, охватываемой витком, на индукцию магнитного поля, т. е.  $BS$ . Поскольку соленоид содержит  $w$  витков, то полный поток

$$\Phi = wBS. \quad (43.13)$$

Но  $w = nl$ , где  $l$  — длина соленоида, а  $n$  — число витков на единицу длины. С другой стороны, согласно (40.32) и (42.8),

$B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 i n$ . Подставив в (43.13), получим

$$\Phi = \mu\mu_0 n^2 S l i = L i. \quad (43.14)$$

2. Величина  $L$ , которая для длинного соленоида равна

$$L = \mu\mu_0 n^2 S l, \quad (43.15)$$

называется *индуктивностью соленоида*. Единицей индуктивности служит *генри* (Гн) — это индуктивность соленоида, в котором при токе 1 А создается магнитный поток 1 Вб: 1 Гн = 1 Вб/1 А.

При отсутствии в поле ферромагнитных материалов, а также в том случае, когда ферромагнетик находится в состоянии магнитного насыщения, индуктивность соленоида определяется только его размерами и густотой обмотки и не зависит от силы тока.

3. Из выражения (43.14) следует, что в случае, если ток в обмотке соленоида не меняется, то и пронизывающий его магнитный поток не меняется, и никакие индукционные явления здесь не происходят. Если изменить ток, то соответственно изменится и магнитный поток, и в соленоиде возникнет ЭДС индукции. В данном случае ток наводит ЭДС в той же цепи, где он протекает, поэтому данное явление называется *самоиндукцией*. Возникающую при этом ЭДС найдем, сравнив выражения (43.10) и (43.14):

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (43.16)$$

Итак, ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока в обмотке, т. е. производной силы тока по времени.

4. Знак ЭДС самоиндукции определяется согласно правилу Ленца. Если ток в цепи нарастает, то индуцированное поле должно препятствовать этому росту, следовательно, знак ЭДС самоиндукции противоположен знаку разности потенциалов на концах обмотки. Если ток в цепи убывает, то индуцированное поле должно препятствовать этому убыванию, следовательно, знак ЭДС окажется таким же, как и знак разности потенциалов на концах обмотки.

### § 43.11. Энергия электромагнитного поля

1. В § 37.7 и 38.4 было показано, что электрическое поле является носителем энергии, которая распределена в поле с объемной плотностью

$$w_e = \frac{\Delta W_e}{\Delta V} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon \varepsilon_0}.$$

Аналогичные выражения выведем для энергии магнитного поля.

Пусть в некоторой катушке ток возрастает от нуля до некоторого значения  $I$ ; соответственно и магнитный поток возрастает от нуля до значения  $\Phi = LI$  (рис. 43.6). Как было показано в предыдущем параграфе, в этом случае возникает ЭДС самоиндукции, которая препятствует нарастанию тока. Следовательно, внешний источник тока должен совершить работу против индуцированного поля, в результате чего энергия источника тока превращается в энергию магнитного поля. Изменение энергии магнитного поля равно по модулю элементарной работе, которая совершается при перемещении заряда  $dq$  по замкнутой цепи:

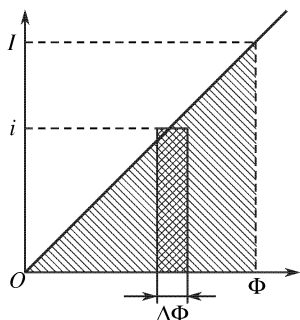


Рис. 43.6

$$dW_m = -\Delta A = -\mathcal{E} dq. \quad (43.17)$$

Учитывая, что  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$  (см. (43.10)), а ток  $i = dq/dt$  (см. (39.13)), получим

$$dW_m = \frac{d\Phi}{dt} dq = i d\Phi. \quad (43.18)$$

На графике (рис. 43.6) эта величина изображена площадью заштрихованного прямоугольника. Полная энергия поля численно равна площади заштрихованного треугольника:

$$W_m = \frac{I\Phi}{2} = \frac{LI^2}{2}. \quad (43.19)$$

Тот же результат даст интегрирование:

$$W_m = \int_0^I i d\Phi = \int_0^I Li di = \frac{LI^2}{2}.$$

2. Как показал Максвелл, энергия магнитного поля рассредоточена по всему объему поля, так что плотность энергии

$$w_m = \frac{\Delta W_m}{\Delta V} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (43.20)$$

Для вывода этого соотношения выразим в (43.19) индуктивность по формуле (43.15), а ток — через напряженность поля по (40.32); получим

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 n^2 V \cdot H^2}{2 \cdot n^2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V.$$

Отсюда непосредственно следует (43.20).

3. Аналогично тому, как в § 37.8 было получено выражение для силы взаимодействия между пластинами конденсатора (37.26), можно вычислить силу, с которой стальная пластинка притягивается к полюсам электромагнита:

$$F = -\frac{B^2}{2\mu\mu_0} S. \quad (43.21)$$

Данное выражение справедливо лишь в том случае, если индукция магнитного поля в зазоре между сердечником электромагнита и пластинкой не отличается от индукции поля в сердечнике, иными словами, если магнитный поток не рассеивается. Для этого зазор должен быть очень узким, так что его ширина должна быть много меньше диаметра сердечника электромагнита.

4. Мы уже неоднократно указывали, что разделение единого электромагнитного поля на электрическую и магнитную составляющие определяется системой отсчета. Поэтому и выражение для плотности энергии электромагнитного поля следует писать в виде

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (43.22)$$

И лишь в некоторых специальных случаях, которые были рассмотрены выше, то или иное слагаемое может оказаться равным нулю.

### § 43.12. Включение цепи с индуктивностью

1. Составим цепь постоянного тока из двух параллельных ветвей. В одну из них включим последовательно лампу накаливания и катушку с большой индуктивностью  $L$  и активным сопротивлением  $R$ , в другую — такую же лампу и резистор с таким же сопротивлением. При замыкании рубильника мы заметим, что в цепи с резистором лампа вспыхивает сразу, в то время как в цепи с катушкой лампа разгорается постепенно, и лишь через некоторое время  $\Delta t$  она станет гореть нормально. Таким образом, в цепи с индуктивностью ток нарастает постепенно, как это показано на рис. 43.7.

Причина заключается в том, что при нарастании тока в катушке возникает ЭДС самоиндукции, которая согласно закону Ленца препятствует нарастанию тока. Закон Ома в этой цепи запишется так:

$$i = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_L}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{L}{R} \frac{\Delta i}{\Delta t}.$$

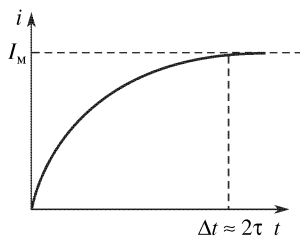


Рис. 43.7

И лишь спустя время  $\Delta t$  ток достигнет максимального значения  $I_m = \mathcal{E}/R$ , и его рост прекратится.

2. Оценим время нарастания тока. Согласно закону сохранения энергии работа, совершаемая источником тока при перемещении заряда по цепи, частично идет на изменение внутренней энергии проводника (джоулево тепло),

частично на увеличение энергии магнитного поля:

$$A = Q + W_m,$$

или так:

$$\mathcal{E} I_{\text{ср}} \Delta t = I_{\text{ср}}^2 R \Delta t + \frac{L I_{\text{м}}^2}{2},$$

где  $I_{\text{м}} = \mathcal{E}/R$  — максимальная сила тока в цепи,  $I_{\text{ср}}$  — средняя сила тока в течение промежутка времени  $\Delta t$ . Полагая приближенно, что  $I_{\text{ср}} \approx I_{\text{м}}/2 = \mathcal{E}/(2R)$ , получим

$$\frac{\mathcal{E}^2 \Delta t}{2R} \approx \frac{\mathcal{E}^2 R \Delta t}{4R^2} + \frac{L \mathcal{E}^2}{2R^2}.$$

Отсюда следует, что ток в цепи достигает максимального значения через промежуток времени, примерно равный

$$\Delta t \approx \frac{2L}{R} \approx 2\tau. \quad (43.23)$$

Как и в случае зарядки конденсатора (см. § 39.8), выражение  $\tau = L/R$  называется *постоянной времени* для цепи, состоящей из катушки и резистора, или иначе *временем релаксации*. Эта величина служит характеристикой того промежутка времени, в течение которого в цепи устанавливается постоянный ток.

## Глава 44

# ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ, ТЕПЛОЕМКОСТЬ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

## § 44.1. Экспериментальные основы электронной теории проводимости металлов

1. Мы уже неоднократно пользовались представлением о том, что проводимость металлов обусловлена наличием свободных электронов, которые могут легко перемещаться между ионами, находящимися в узлах кристаллической решетки. Ознакомимся сейчас с экспериментами, лежащими в основе этого.

Первые опыты были проведены Э. Рикке в 1901 г. Три цилиндра — два медных и один алюминиевый — с хорошо отшлифованными торцами ставились друг на друга и присоединялись к источнику тока. В течение года по проводникам протекал ток  $\sim 0,1$  А, так что общий заряд, прошедший через проводники, превысил  $3,5 \cdot 10^6$  Кл. Тем не менее никаких химических изменений в проводниках не произошло. Отсюда следует, что ток в металлах обусловлен движением частиц, не имеющих отношения к химической структуре металлов. Этими частицами, естественно, не

могут быть ионы, которые у разных веществ различны, а могут быть лишь электроны.

2. Решающий эксперимент поставили в 1916 г. Т. Стюарт и Р. Толмен, измерив удельный заряд частиц, осуществляющих проводимость в металлах. Суть эксперимента заключалась в следующем. На катушку наматывался длинный проводник, присоединенный к гальванометру (рис. 44.1). Катушка приводилась в быстрое вращение и затем резко тормозилась.

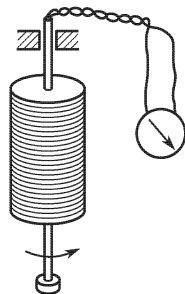


Рис. 44.1

В процессе торможения система отсчета, связанная с проводником, является неинерциальной. Как было показано (см. § 24.1–24.3), в неинерциальных системах отсчета на тела действует сила инерции  $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\mathbf{w}$ , где  $\mathbf{w}$  — ускорение системы отсчета. Под действием этой силы свободные частицы, находящиеся в металле, будут перемещаться в направлении движения проводника аналогично тому, как перемещается вперед пассажир при резком торможении вагона. При этом в проводнике возникает ток, направление которого зависит от знака этих частиц (рис. 44.2). Сила инерции является в данном случае сторонней силой, следовательно, ЭДС

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стоп}}}{q} = \frac{F_{\text{ин}} l}{q} = \frac{-mwl}{q}, \quad (44.1)$$

где  $q$  — заряд свободной частицы,  $m$  — ее масса,  $l$  — длина проводника.

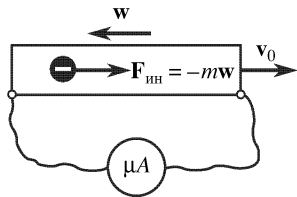


Рис. 44.2

Поскольку значения длины проводника и ускорения при торможении известны, то удельный заряд частицы можно было бы определить, измерив ЭДС. Однако оказалось, что измерение ЭДС связано с большими погрешностями, а гораздо точнее можно измерить полный заряд  $Q$ , протекающий через гальванометр при торможении провод-

ника.

3. Согласно определению силы тока (39.13), можно записать:  $Q = it$ , где  $t$  — время торможения. Но по закону Ома

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{mwl}{qR},$$

где  $R$  — суммарное сопротивление проводника и гальванометра.  
Ускорение

$$w = \frac{v - v_0}{t} = -\frac{v_0}{t},$$

поскольку проводник после торможения останавливается.

Итак, удельный заряд частицы равен

$$\frac{q}{m} = \frac{v_0 l}{QR}. \quad (44.2)$$

Знак заряда частицы определяется по знаку заряда  $Q$ , протекающего через гальванометр.

4. Опыт показал, что свободные частицы, осуществляющие проводимость в металлах, заряжены отрицательно. Их удельный заряд оказался равным: у меди  $1,60 \cdot 10^{11}$  Кл/кг, у серебра  $1,49 \cdot 10^{11}$  Кл/кг, у алюминия  $1,54 \cdot 10^{11}$  Кл/кг. Как видно, расхождение между полученными результатами и удельным зарядом электрона, равным  $1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг, составляет от 9 до 15 %, что для таких сложных опытов не выходит за пределы погрешностей. Отсюда можно с достаточной уверенностью утверждать, что ток в металлах есть результат упорядоченного движения свободных электронов.

## § 44.2. Эффект Холла

1. В § 39.2 была выведена зависимость плотности тока от концентрации свободных электронов в проводнике. Оказалось, что с помощью явления, которое обнаружил в 1880 г. Э. Холл, эта концентрация может быть измерена.

Сущность эффекта Холла заключается в следующем. Изготовим пластину из однородного материала (например, металла) в виде параллелепипеда и за счет какого-либо источника тока создадим в этой пластинке однородное электрическое поле вдоль

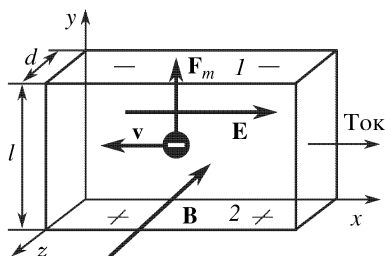


Рис. 44.3

оси абсцисс; тогда по пластинке в этом направлении потечет ток. Любая плоскость, перпендикулярная оси абсцисс, является эквипотенциальной поверхностью, и разность потенциалов между гранями 1 и 2 равна нулю (рис. 44.3). Если поместить эту пластинку в магнитное поле таким образом, что вектор индукции  $\mathbf{B}$  окажется параллельным

оси аппликата, то между гранями 1 и 2 возникнет поперечная разность потенциалов, называемая холловской разностью потенциалов:

$$\Delta\varphi_H = \frac{R_H i B}{d}, \quad (44.3)$$

где  $d$  — толщина пластинки,  $i$  — сила тока и  $B$  — индукция магнитного поля. Величина  $R_H$  называется *постоянной Холла*.

2. Причина возникновения поперечной разности потенциалов заключается в следующем. Упорядоченное движение электронов в пластинке происходит в направлении, перпендикулярном вектору индукции магнитного поля, со средней скоростью  $v_{\text{др}}$ . На движущиеся электроны действует сила Лоренца  $F_m = eBv$  (41.1), которая смещает их к верхней грани пластинки (рис. 44.3). В результате на гранях пластинки возникает избыточный заряд: на верхней — отрицательный, на нижней — положительный. Таким образом, вдоль оси ординат начинает действовать электрическое поле с напряженностью  $E_y$ , которое препятствует перемещению электронов к верхней грани. Равновесие восстановится, когда электрическая сила уравнивает силу Лоренца. Отсюда следует, что  $F_m = F_e$ , или

$$eBv_{\text{др}} = eE_y. \quad (44.4)$$

Холловская разность потенциалов

$$\Delta\varphi_H = E_y l = B l v_{\text{др}}. \quad (44.5)$$

Выразив из (39.17) среднюю скорость упорядоченного движения электронов через силу тока,  $v_{\text{др}} = i/(enS) = i/(enl)$ , и подставив в (44.5), получим

$$\Delta\varphi_H = \frac{1}{en} \frac{iB}{d}. \quad (44.6)$$

3. Сравнивая (44.3) и (44.6), мы видим, что постоянная Холла определяется концентрацией электронов и зарядом носителей тока:

$$R_H = \frac{1}{en}. \quad (44.7)$$

Итак, определив из опыта постоянную Холла, мы легко вычислим концентрацию свободных электронов в веществе.

4. *Подвижностью частицы  $\mu$*  называется отношение средней скорости ее упорядоченного движения к напряженности электрического поля (см. (39.26)):

$$\mu = \frac{v_{\text{др}}}{E} = \frac{\gamma}{en} = \gamma R_H. \quad (44.8)$$



Итак, зная удельную проводимость металла и постоянную Холла, можно найти подвижность электронов проводимости. Результаты экспериментов для некоторых металлов приведены в табл. 44.1. Здесь  $\rho$  — плотность металла,  $A$  — его атомная масса,  $N_A$  — постоянная Авогадро (см. § 26.9).

Таблица 44.1

	Постоянная Холла $R_H$ , $\text{м}^3/\text{Кл}$	Удельная проводимость $\gamma$ , $\text{Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$	Концентрация электронов проводимости $n = \frac{1}{eR_H}$ , $\text{м}^{-3}$
Алюминий	$0,30 \cdot 10^{-10}$	$4,08 \cdot 10^7$	$20,8 \cdot 10^{28}$
Медь	$0,55 \cdot 10^{-10}$	$6,41 \cdot 10^7$	$11,4 \cdot 10^{28}$
Литий	$1,70 \cdot 10^{-10}$	$1,17 \cdot 10^7$	$3,67 \cdot 10^{28}$
Натрий	$2,50 \cdot 10^{-10}$	$2,48 \cdot 10^7$	$2,50 \cdot 10^{28}$
Оксид цинка	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^2$	$3,9 \cdot 10^{28}$
	Концентрация атомов $n_0 = \frac{\rho N_A}{A}$ , $\text{м}^{-3}$	Среднее число свободных электронов на атом $\nu = n/n_0$	Подвижность электронов $\mu = \gamma R_H$ , $\text{м}^2 \text{В}^{-1} \text{с}^{-1}$
Алюминий	$6,03 \cdot 10^{28}$	3,46	$1,2 \cdot 10^{-3}$
Медь	$8,49 \cdot 10^{28}$	1,34	$3,5 \cdot 10^{-3}$
Литий	$4,60 \cdot 10^{28}$	0,80	$2,0 \cdot 10^{-3}$
Натрий	$2,54 \cdot 10^{28}$	0,99	$6,2 \cdot 10^{-3}$
Оксид цинка	$\sim 4 \cdot 10^{28}$	$\sim 10^{-5}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$

5. Из таблицы видно, что одновалентные металлы — литий и натрий — имеют в среднем около одного свободного электрона на атом; трехвалентный алюминий — около трех свободных электронов; медь, которая бывает как одно-, так и двухвалентной, — несколько меньше полутора электронов на атом.

Подвижность электронов мала, следовательно, мала и скорость их упорядоченного движения. В самом деле, напряженность электрического поля в металлах редко бывает более  $1 \text{ В/м}$ , и средняя скорость упорядоченного движения  $v_{\text{др}} = bE$  не превосходит  $1 \text{ мм/с}$ , а чаще всего она значительно меньше.

Измерения постоянной Холла были произведены в очень широком интервале температур. Оказалось, что в металлах постоянная Холла не зависит от температуры, следовательно, и *концентрация свободных электронов не зависит от температуры*. Это

означает, что тепловое движение не играет никакой роли в образовании свободных электронов в металлах.

6. Значительно более сложные явления наблюдаются при проведении опыта Холла с веществами, которые называются *полупроводниками*: селен, кремний, германий, окислы ряда металлов и т. п. В табл. 44.1 приведены характерные данные для одного полупроводника — окиси цинка. Мы видим, что постоянная Холла здесь больше, чем у металлов, примерно в  $10^5$  раз; удельная проводимость в  $10^5$  раз меньше, примерно во столько же раз меньше и концентрация свободных электронов — следовательно, здесь лишь незначительное число атомов ионизовано. Но главное не в этом. Основная особенность полупроводников заключается в том, что постоянная Холла с ростом температуры резко падает, следовательно, *концентрация свободных электронов растет при увеличении температуры полупроводника*. Второй характерной особенностью полупроводников является то, что у некоторых из них эффект Холла имеет противоположный знак — при таких же направлениях тока и индукции магнитного поля, как на рис. 44.3, верхняя грань пластины заряжается положительно (рис. 44.4). Единственное разумное объяснение можно дать, если предположить, что проводимость в этих веществах осуществляется за счет движения не отрицательных, а положительных зарядов.

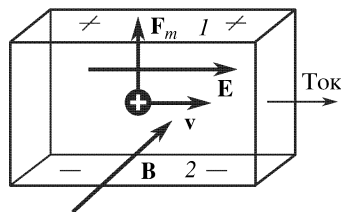


Рис. 44.4

Мы приходим к парадоксу, который классическая электронная теория объяснить не может. Более подробно квантовая теория проводимости полупроводников будет рассмотрена в гл. 45.

### § 44.3. Электронный газ

1. В 1900 г. П. Друде создал электронную теорию проводимости металлов. Дальнейшее развитие этой теории на основе статистики Максвелла–Больцмана принадлежит Х. Лоренцу. С точки зрения теории Друде–Лоренца совокупность свободных электронов можно рассматривать, как некоторый идеальный газ, называемый *электронным газом*. Друде и Лоренц постулировали, что свойства электронного газа аналогичны свойствам обычного идеального газа.

Далее мы увидим, что аналогия между электронным газом и идеальным газом является упрощенной, и как раз для метал-

лов она приводит к ряду трудностей (см. § 44.12). Тем не менее в данной главе мы будем рассматривать совокупность электронов проводимости как идеальный газ, что позволит элементарными методами объяснить механизм ряда явлений, происходящих в металлах и полупроводниках.

2. Среднюю энергию теплового движения электронов в классической теории рассчитывают по той же формуле, по которой вычисляется средняя кинетическая энергия молекул идеального одноатомного газа (см. (26.8));

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{m \langle u^2 \rangle}{2}.$$

При комнатных температурах ( $T \approx 300$  K) получим

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 10^5 \text{ м/с}.$$

3. С точки зрения квантовых представлений следует для вычисления кинетической энергии электрона проводимости воспользоваться формулой (16.26). Для скорости хаотического движения электронов проводимости получим

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{2\langle \varepsilon \rangle}{m}} = \sqrt{\frac{\hbar^2 n^{2/3} \cdot 2}{2m \cdot 2}} = \frac{\hbar n^{1/3}}{m} \approx \frac{10^{-34} \cdot 10^{10}}{10^{-30}} \approx 10^6 \text{ м/с}.$$

Это на порядок выше, чем по классическому расчету. Температура электронного газа

$$T_{\text{эл}} = \frac{2\langle \varepsilon \rangle}{3k} = \frac{2\hbar^2 n^{2/3}}{2m \cdot 3k} \approx \frac{10^{-68} \cdot 10^{20}}{3 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ K},$$

что на два порядка выше температуры решетки. Тем не менее теплообмен между электронным газом и кристаллической решеткой не происходит (см. § 44.5).

4. Мы видим, что средняя скорость теплового движения электронов превосходит среднюю скорость их упорядоченного движения (см. § 39.2 и 44.2) примерно в  $10^9$  раз! На той основе можно представить себе механизм возникновения тока. Пока в проводнике отсутствует электрическое поле, электроны беспорядочно движутся во всевозможных направлениях. При возникновении поля электроны начинают медленно перемещаться по направлению, противоположному направлению силовых линий поля. Это медленное упорядоченное движение часто называют «дрейфом»; оно практически не влияет на тепловое движение частиц.

Не следует смешивать скорость дрейфа электронов со скоростью электрического тока. Под скоростью тока понимают скорость передачи электрической энергии вдоль проводов. Опыт и теория показывают, что скорость тока весьма велика — она равна скорости распространения электромагнитных волн (см. § 59.1). Энергию от источника к потребителю передает электромагнитное поле, проводник же с дрейфующими электронами служит лишь «направляющей» для потока энергии.

#### § 44.4. Вывод закона Ома из электронной теории

1. С помощью модели электронного газа можно выяснить, почему в металлах и полупроводниках выполняется закон Ома. Идея вывода заключается в следующем.

При отсутствии электрического поля в проводнике кинетическая энергия конкретного электрона  $K_{0i} = mu_i^2/2$ , где  $u_i$  — скорость теплового движения электрона с номером  $i$ . За счет электрического поля с напряженностью  $E$  возникает дрейф электронов против поля со средней скоростью  $v_{др}$ . В конце свободного пробега скорость дрейфового движения данного электрона равна  $v_i$ , его полная скорость относительно ионной решетки  $w_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i$ , а кинетическая энергия  $K_i = mw_i^2/2$ .

Как видно из рис. 44.5,  $w_i^2 = u_i^2 + 2u_i v_i \cos \alpha_i + v_i^2$ , следовательно, кинетическая энергия электрона к концу пробега

$$K_i = \frac{mw_i^2}{2} = \frac{mu_i^2}{2} + mu_i v_i \cos \alpha + \frac{mv_i^2}{2}.$$

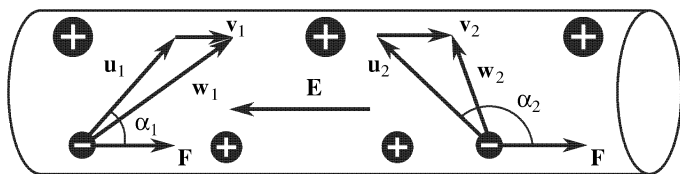


Рис. 44.5

Итак, изменение кинетической энергии конкретного электрона за счет действия электрического поля на длине свободного пробега

$$\Delta K_i = K_i - K_{0i} = mu_i v_i \cos \alpha + \frac{mv_i^2}{2}. \quad (44.9)$$

Чтобы получить *среднее приращение кинетической энергии* электронов  $\langle \Delta K \rangle$ , надо усреднить (44.9) по всем номерам, для

чего надо записать это выражение для каждого электрона, все их сложить и разделить на число электронов  $N$ :

$$\begin{aligned}\langle \Delta K \rangle &= \frac{1}{N} (\Delta K_1 + \Delta K_2 + \dots + \Delta K_N) = \\ &= \frac{1}{N} (m u_1 v_1 \cos \alpha_1 + m u_2 v_2 \cos \alpha_2 + \dots + m u_N v_N \cos \alpha_N) + \\ &\quad + \frac{1}{N} \left( \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m v_2^2}{2} + \dots + \frac{m v_N^2}{2} \right).\end{aligned}$$

Но при огромном числе электронов, движущихся совершенно беспорядочно по всевозможным направлениям, косинусы пробегают всевозможные значения от  $+1$  до  $-1$ , следовательно, сумма в первой скобке обратится в нуль. Обозначив

$$v^2 = \frac{1}{N} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2),$$

получим

$$\langle \Delta K \rangle = \frac{m v^2}{2}, \quad (44.10)$$

где  $v$  — усредненная конечная скорость дрейфа электрона. Учитывая, что при  $E = \text{const}$  дрейф — равноускоренное движение, получим для средней скорости дрейфа  $v_{\text{др}} = v/2$  (см. § 4.6).

2. Как известно, изменение кинетической энергии равно работе силы (см. § 16.14):

$$\Delta K_i = A_i = F l_i = e E l_i,$$

где  $l_i$  — проекция перемещения данного электрона на направление действия силы. Как видно из рис. 44.5, за время свободного пробега  $\Delta t_i$  проекция

$$l_i = u_i \Delta t_i \cos \alpha_i + \frac{1}{2} v_i \Delta t_i.$$

Здесь учтено, что электрон движется равноускоренно и средняя скорость его свободного пробега равна  $v_i/2$ . Для усреднения величины работы по всем электронам вновь сложим все работы и разделим на число электронов:

$$\begin{aligned}\langle \Delta K \rangle &= \langle A \rangle = \\ &= \frac{e E}{N} \left[ (u_1 \Delta t_1 \cos \alpha_1 + u_2 \Delta t_2 \cos \alpha_2 + \dots + u_N \Delta t_N \cos \alpha_N) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \dots + v_N \Delta t_N) \right].\end{aligned}$$

По соображениям, указанным выше, сумма в первой скобке равна нулю.

Если ввести по определению *среднее время свободного пробега*

$$\tau = \frac{1}{2Nv} (v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \dots + v_N \Delta t_N),$$

то выражение для среднего приращения кинетической энергии примет вид

$$\langle \Delta K \rangle = e E v \tau. \quad (44.11)$$

3. Приравняв (44.10) и (44.11), получим  $v = 2eE\tau/m$ , а для средней скорости дрейфа

$$v_{др} = \frac{v}{2} = \frac{eE\tau}{m}. \quad (44.12)$$

Учитывая, что тепловая скорость  $\langle u \rangle$  примерно в  $10^8$ – $10^9$  раз больше скорости дрейфа, определим среднюю длину свободного пробега электрона:

$$\lambda = \tau \langle u \rangle. \quad (44.13)$$

Тогда средняя скорость дрейфа

$$v_{др} = \frac{eE\lambda}{\langle mu \rangle}, \quad (44.12')$$

а подвижность электрона (39.26)

$$\mu = \frac{v_{др}}{E} = \frac{e\tau}{m} = \frac{e\lambda}{\langle mu \rangle}. \quad (44.14)$$

Сопоставив (44.14) с экспериментально полученными значениями подвижности, найдем, что средняя длина свободного пробега электрона равна  $10^{-7}$ – $10^{-8}$  м, что в 100–1000 раз больше расстояния между узлами кристаллической решетки металла. Причины этого будут выяснены в § 75.9, где будет рассмотрена квантовая теория проводимости металлов.

4. Подставив (44.12) или (44.12') в выражение для плотности тока (39.18), получим

$$j = \frac{e^2 n \tau}{m} E = \frac{e^2 n \lambda}{\langle mu \rangle} E. \quad (44.15)$$

В металлах концентрация электронов и время их свободного пробега не зависят от напряженности электрического поля. Отсюда следует, что плотность тока в металлах пропорциональна напряженности поля, а это и есть *закон Ома* (см. (39.24)).

Для удельной проводимости и удельного сопротивления получим

$$\gamma = \frac{e^2 n \tau}{m} = \frac{e^2 n \lambda}{\langle m u \rangle}, \quad \rho = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{e^2 n \tau} = \frac{\langle m u \rangle}{e^2 n \lambda}. \quad (44.16)$$

Анализ выражений (44.16) позволяет выяснить некоторые особенности металлов и полупроводников, в частности зависимость проводимости от температуры и структуры кристаллической решетки.

5. Из опыта известно, что проводимость металлов примерно на пять порядков больше проводимости полупроводников. Причину такой колоссальной разницы можно объяснить на основе электронной теории.

Расстояния между узлами кристаллической решетки у всех твердых тел примерно одинаковы, следовательно, и средние длины свободного пробега электронов проводимости в разных твердых телах не могут сильно различаться. С другой стороны, постоянная Холла у металлов меньше, чем у полупроводников, в  $10^5$  раз, следовательно, во столько же раз больше концентрация электронов проводимости. Но именно во столько же раз больше и их удельная проводимость (см. табл. 44.1), что полностью согласуется с формулой (44.16).

6. Удельное сопротивление чистых металлов в несколько раз меньше удельного сопротивления сплавов (табл. 44.2).

Таблица 44.2

		$\rho$ (при 0 °C), Ом · мм <sup>2</sup> /м	$\alpha$ (от 0 °C до 100 °C), 10 <sup>-3</sup> К <sup>-1</sup>
Металлы	Алюминий	0,0245	4,5
	Железо	0,089	6,5
	Медь	0,0156	4,3
	Платина	0,0981	3,92
	Родий	0,043	4,4
	Никель	0,0614	6,8
	Хром	0,127	—
Сплавы	Платина–родий (90/10)	0,187	1,66
	Никель–хром (80/20)	1,03	1,0
	Сталь	0,12–0,45	3,3–1,5
	Константан	0,48	0,02

В § 75.9 на основе квантовых представлений будет выяснена причина зависимости проводимости тела от степени совершенства его кристаллической решетки. Оказывается, что наличие в решетке примесей и дефектов, а также особенности тепловых колебаний частиц твердого тела приводят к уменьшению длины свободного пробега электрона и тем самым — к уменьшению проводимости.

Что касается причины того, почему в металлах концентрация электронов проводимости не зависит от температуры и примесей, а у полупроводников такая зависимость имеется, то на базе классической электронной теории это объяснить невозможно. Квантовые представления об этом эффекте будут изложены в гл. 75.

### § 44.5. Вывод закона Джоуля–Ленца

1. В § 39.7 мы получили выражение (39.33) для расчета изменения внутренней энергии проводника, по которому протекает ток. Однако механизм нагревания проводника там не был раскрыт. На основе электронной теории это явление можно объяснить следующим образом.

Электрон, разгоняемый электрическим полем, приобретает к концу свободного пробега избыточную кинетическую энергию  $\langle \Delta K \rangle$ . В конце свободного пробега электрон соударяется с ионом, масса которого в несколько тысяч раз больше массы электрона.

В результате удара избыточная энергия электрона передается иону, и последний начинает более интенсивно колебаться. Итак, возрастание внутренней энергии проводника с током есть результат бомбардировки ионной решетки электронами, которые ускоряются полем.

2. Количество теплоты рассчитаем следующим образом. Пусть длина проводника равна  $l$ , его поперечное сечение  $S$ ; общее число электронов проводимости в нем  $N = nSl$ , где  $n$  — их концентрация. За время  $t$  электрон испытает  $Z = t/2\tau$  соударений. Количество теплоты, которое при этом электронный газ передаст кристаллической решетке,

$$Q = NZ \langle \Delta K \rangle. \quad (44.17)$$

Подставив значения величин, получим

$$Q = nSl \frac{t}{2\tau} \frac{mv^2}{2} = nSl \frac{t}{\tau} \frac{e^2 E^2 \tau^2}{m}. \quad (44.18)$$



Но напряженность поля можно выразить через напряжение на участке, воспользовавшись выражением (39.10):  $E = u/l$ ; вместе с тем, согласно (44.16),  $e^2 n \tau / m = 1/\rho$ , где  $\rho$  — удельное сопротивление.

Итак,

$$Q = \frac{S}{\rho l} u^2 t = \frac{u^2 t}{R} = i^2 R t. \quad (44.19)$$

3. Механизм передачи энергии от электронного газа к кристаллической решетке далеко не так прост, как он описан выше. В самом деле, почему при ударе электрона об ион последнему передается именно избыточная энергия упорядоченного движения, а не меньшая или большая энергия? Ведь, с одной стороны, нам известно, что электроны проводимости и в отсутствие тока в проводнике обладают огромной кинетической энергией, которая оценивается по формуле энергии локализованной частицы (см. § 16.7). Учитывая, что концентрация электронов проводимости в металлах  $n \approx 10^{29} \text{ м}^{-3}$  (см. § 44.2), получим

$$\langle K \rangle = \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m} \approx \frac{10^{-68} \cdot 2 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31}} \approx 10^{-19} \text{ Дж} \approx 1 \text{ эВ}.$$

Среднее значение избытка кинетической энергии упорядоченного движения электрона под действием электрических полей с напряженностью порядка  $E \approx 100 \text{ В/м}$  равно

$$\langle \Delta K \rangle = \frac{e^2 E^2 \lambda^2}{m \langle u^2 \rangle} \approx \frac{1,6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 10^4 \cdot 10^{-16}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{12}} \text{ Дж} \approx 10^{-32} \text{ Дж} \approx 10^{-13} \text{ эВ}.$$

Итак, избыточная энергия упорядоченного движения электрона составляет совершенно ничтожную часть его полной энергии ( $\Delta K/K \approx 10^{-13}$ ). Почему же именно этот избыток энергии дает тепловой эффект?

С другой стороны, основываясь на законах сохранения энергии и импульса (см. § 17.2–17.4), можно показать, что при соударении электрона с ионом лишь небольшая часть кинетической энергии электрона  $K_{\text{эл}}$  превратится в кинетическую энергию иона  $K_{\text{ион}}$ .

Нетрудно убедиться, что при неупругом соударении  $\Delta K_{\text{ион}}/K_{\text{эл}} = m/(M+m)$ , при упругом  $\Delta K_{\text{ион}}/K_{\text{эл}} = 4mM/(m+M)^2$ , где  $m$  и  $M$  — массы электрона и иона. Учитывая, что  $m/M \approx 10^{-4}$ , мы видим, что практически  $\Delta K_{\text{ион}}/K_{\text{эл}} \approx m/M \approx 10^{-4}$ . Почему же передается не эта часть кинетической энергии электрона, а всего лишь  $10^{-13}$  его энергии, т. е. гораздо меньше?

4. Качественно это явление объясняется следующим образом. Электроны проводимости и кристаллическая решетка образуют как бы два «газа» — квантовый и классический, заполняющие один и тот же объем. Их температуры существенно различны. Температура решетки порядка 300–500 К, температура электронного газа  $T_{\text{эл}} \approx \hbar^2 n^{2/3}/3k \approx 3 \cdot 10^4 \text{ К}$  (см. § 44.3). Несмотря на столь большую разницу в температурах, теплообмен между электронным газом и решеткой при отсутствии тока не происходит. Дело в том, что благодаря соотношению неопределенностей энергия электронов проводимости не может стать меньше величины  $\langle K \rangle = \hbar^2 n^{2/3}/2m$  (16.26), которая выражает собой минимальное значение энергии локализованной частицы.

Ситуация существенно меняется при возникновении тока. За счет действия электрического поля электроны приобретают избыточную кинетиче-

скую энергию упорядоченного движения. И хотя этот избыток энергии крайне невелик, именно он и нарушает термодинамическое равновесие. Возникает процесс теплообмена между «перегретым» электронным газом и кристаллической решеткой, и избыток энергии, получаемой электронным газом от электрического поля, передается решетке. Это и ведет к нагреву проводника, т. е. к выделению тепла Джоуля–Ленца.

## § 44.6. Работа выхода

1. Электроны, движущиеся внутри металла, могут иногда вылетать за его пределы, образуя над металлом «электронное облако». Часть этих электронов вновь возвращается в металл, другие снова его покидают. Явление это весьма похоже на испарение жидкостей (см. § 35.1, 35.2). Поверхность металла и электронное облако образуют двойной электрический слой, аналогичный плоскому конденсатору. Толщина этого слоя равна нескольким межатомным расстояниям ( $d \approx 10^{-10}$ – $10^{-9}$  м). Разность потенциалов в этом слое называется *поверхностным скачком потенциала на границе металл–вакуум* или *контактной разностью потенциалов* между металлом и вакуумом.

Для оценки этой величины сделаем следующий ориентировочный расчет. Представим себе, что электрон вылетел из металла; тогда в последнем возникает положительный заряд, равный по модулю заряду электрона. Этот положительный заряд называется «электрическим изображением» электрона (рис. 44.6). Оказывается, что взаимодействие электрона с металлом равно взаимодействию между электроном и его «изображением», т. е. сводится к взаимодействию точечных зарядов, которое мы умеем рассчитывать. Согласно (37.4) имеем для контактного скачка потенциала (при  $d \approx 5 \cdot 10^{-10}$  м)

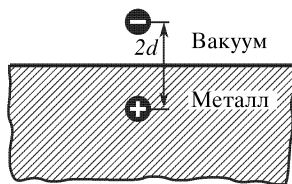


Рис. 44.6

$$\varphi_{\text{конт}} \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2d} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 36\pi \cdot 10^9}{4\pi \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} \text{ В} \approx 1,4 \text{ В}.$$

2. Для того чтобы электрон, находящийся в металле, мог выйти за его пределы, он должен совершить работу против сил притяжения от своего «изображения» и против сил отталкивания от отрицательно заряженного электронного облака. Эта работа называется *работой выхода*  $A_0$  и равна той минимальной энергии, которую нужно сообщить электрону проводимости, чтобы он мог

выйти из металла в вакуум:

$$A_0 = e\varphi_{\text{конт}}. \quad (44.20)$$

Ориентировочный расчет дает для работы выхода величину  $A \approx 1,5 \text{ эВ} = 2,4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ , по порядку величины соответствующую экспериментальным данным (табл. 44.3).

Таблица 44.3

	$A_0$ , эВ		$A_0$ , эВ		$A_0$ , эВ
Литий, натрий, калий	2,3	Платина	5,3	Цезий	1,9
Цинк	4,2	Барий	2,5	Барий на вольфраме	1,1
Вольфрам	4,5	Кальций	2,7	Цезий на вольфраме	1,4

3. Потенциальная энергия проводимости в металле меньше энергии свободного электрона. Полагая, что потенциальная энергия в вакууме равна нулю, мы получим, что его энергия в металле  $U = -A_0 = -e\varphi_{\text{конт}}$ . Эту энергию можно изобразить графически, откладывая по оси абсцисс координату электрона, а по оси

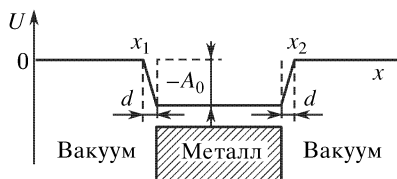


Рис. 44.7

ординат — потенциальную энергию (рис. 44.7). Здесь толщина «электронного облака»  $d$  сильно преувеличена. График имеет вид ямы, которая так и называется — «потенциальная яма». Поэтому обычно, желая указать, что электрон в металле имеет отрицательную потенциальную энергию, говорят, что электрон находится в «потенциальной яме».

4. Для того чтобы электрон проводимости вылетел за пределы металла, необходимо, чтобы его кинетическая энергия оказалась больше работы выхода (или, в крайнем случае, равна ей). Эту энергию электрон может получить разными путями.

Один из путей — освещение металла. Электрон, получив энергию от световой волны, сможет совершить работу выхода. Это явление называется *фотоэлектронной эмиссией* и будет рассмотрено в § 68.1–68.3.

Второй путь — бомбардировка поверхности металла частицами, имеющими энергию в несколько сотен электронвольт.

Третий путь — повышение температуры металла. Явление испускания электронов нагретым телом называется *термоэлектронной эмиссией* (см. § 47.1).

### § 44.7. Контактная разность потенциалов

1. В конце XVIII в. А. Вольта заметил, что между двумя соприкасающимися металлами возникает контактная разность потенциалов. Происхождение этого скачка потенциала можно объяснить на основе электронной теории.

Рассмотрим два металла с разной концентрацией электронов ( $n_1 > n_2$ ). Поскольку в месте их контакта оба металла имеют одинаковую температуру, то и средняя скорость теплового движения электронов в этом месте одна и та же. Для простоты рассуждений положим, что длина свободного пробега у них примерно одинакова. За счет теплового движения электронов происходит их диффузия (см. § 25.4, 25.5). Число электронов, которые переносятся из первого металла во второй, равно одной шестой числа электронов, находящихся в слое толщиной  $\lambda$ , т.е.  $N_1 = (1/6)n_1 S \lambda$ . Из второго металла в первый переносится  $N_2 = (1/6)n_2 S \lambda$  электронов. Но по условию  $n_1 > n_2$ , следовательно, второй металл приобретает больше электронов, чем он передаст первому.

Итак, в результате диффузии электронов один металл зарядится положительно, второй — отрицательно. Возникающее при этом электрическое поле будет препятствовать диффузии. Диффузия в данном случае играет такую же роль, как будто бы в месте контакта действует стороннее поле. Перетекание электронов из одного металла в другой прекратится, когда возникшая разность потенциалов уравнивает ЭДС стороннего поля.

2. Качественно оценим контактную разность потенциалов из следующих соображений. Ток в контактном слое

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e(N_1 - N_2)}{\tau} = \frac{e\lambda S}{6\tau} (n_1 - n_2) = \frac{eS\langle u \rangle}{6} (n_1 - n_2).$$

Разность потенциалов, по закону Ома, равна произведению тока на сопротивление контактирующих слоев:  $R = R_1 + R_2 = \rho_1 \lambda / S + \rho_2 \lambda / S$ , где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — их удельные сопротивления. Учитывая (44.16), имеем

$$R = \frac{m\langle u \rangle}{e^2 S} \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

Итак,

$$\Delta\varphi = iR = \frac{m\langle u^2 \rangle (n_1 - n_2)}{3e} \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

Подставив  $m\langle u^2 \rangle = 3kT$  и проделав несложные преобразования, получим

$$\Delta\varphi = \frac{kT}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right). \quad (44.21)$$

Мы видим, что контактная разность потенциалов зависит только от температуры и химического состава металлов. Квантовые представления об этом явлении изложены в § 75.11.

### § 44.8. Термоэлектричество

1. Составим замкнутую цепь из двух металлов и будем поддерживать во всех точках цепи одинаковую температуру. Оказывается, что при этом условии за счет контактных скачков потенциала ток в цепи возникнуть не может, ибо ЭДС в этой цепи равна нулю:

$$\mathcal{E} = \Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{21} = \frac{kT}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} - \frac{n_1}{n_2} \right) = 0.$$

Этот результат можно было предвидеть на основе первого и второго начал термодинамики. В самом деле, ток совершает работу, следовательно, для его создания необходим источник энергии. Это не может быть и энергия окружающей среды, ибо согласно второму началу термодинамики теплообмен между телами с одинаковой температурой не происходит (см. гл. 28).

2. Совершенно иной результат получится, если температуры спаев будут разными. Пусть, например,  $T_1 > T_2$ . Тогда выражение для ЭДС примет вид

$$\mathcal{E} = \Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{21} = \frac{k}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right) (T_1 - T_2). \quad (44.22)$$

Мы видим, что здесь ЭДС нулю не равна; поэтому в цепи возникает термоэлектрический ток. Явление это было обнаружено Т. Зеебеком в 1821 г.

Выражение (44.22) можно записать так:

$$\mathcal{E} = \alpha(T_1 - T_2) = \alpha\Delta T. \quad (44.23)$$

Здесь  $\alpha = \frac{k}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right)$  — постоянная величина, характеризующая свойства контакта данных двух металлов, ЭДС  $\mathcal{E}$  называется *термоэлектродвижущей силой*, а  $\Delta T$  — это разность температур обоих спаев.

3. Термо-ЭДС, возникающая при контакте двух металлов, очень мала. Хотя формула (44.22) была получена с помощью довольно грубых приближений, все же ее можно применить для качественной оценки величины этой

ЭДС. Взяв концентрации  $n_1$  и  $n_2$  ( $\Delta T = 1$  K), например, для меди и алюминия из табл. 44.1, получим

$$\alpha = \frac{k}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right) \approx \frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{1,61 \cdot 10^{-19}} \left( \frac{21}{11} - \frac{11}{21} \right) \approx 1,2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{В}}{\text{К}} = 120 \frac{\text{мкВ}}{\text{К}}.$$

Опыт дает для этой термоэлектрической пары металлов величину в 30 раз меньшую:  $\alpha = 3,4$  мкВ/К.

Если мы заменим один из металлов полупроводником, то термоэлектродвижущая сила должна существенно увеличиться, поскольку концентрации электронов в металлах и полупроводниках различаются на 4–5 порядков. Пользоваться формулой (44.22) здесь нельзя даже для качественных расчетов, но тот факт, что термопара «металл–полупроводник» даст значительно большую термо-ЭДС по сравнению с термопарой «металл–металл», подтверждается экспериментально.

4. Обычно термопары применяются для измерения температур, особенно в тех случаях, где применение жидкостных (например, ртутных) термометров исключается. Достоинством термопарных термометров является их высокая чувствительность; возможность присоединения к самописцам, автоматически записывающим изменение температуры с течением времени; малые размеры, малая собственная теплоемкость, а также широкий диапазон измеряемых температур — от  $+2000$  °C до  $-200$  °C.

Вместе с тем термопары могут быть использованы и как источники тока. Правда, у них низкий КПД (менее 1 %) и малая ЭДС. Однако подобрав определенные типы полупроводников и соединив термопары последовательно в термобатарею, можно получить и достаточно большую ЭДС, порядка нескольких десятков вольт. Такие термобатареи были созданы под руководством А.Ф. Иоффе. Они могут работать от любого источника тепла, например от керосиновой лампы, и питать радиоприемник.

5. С точки зрения термодинамики термопара вполне аналогична тепловой машине (см. гл. 29). Здесь есть два тела с разной температурой, играющие роль нагревателя и холодильника, а рабочим телом служит электронный газ. В отличие от обычной тепловой машины, где часть внутренней энергии нагревателя превращается в механическую, в термопаре она превращается в энергию электрического тока.

Известно, что если к тепловой машине подводить механическую энергию от внешнего источника, то она будет работать в режиме теплового насоса или холодильной установки (см. § 29.8). По аналогии можно ожидать, что если через термопару пропустить ток от внешнего источника, то между спаями должна возникнуть разность температур. Такой эффект действительно наблюдается в эксперименте. Он называется *эффектом Пельтье* в честь ученого, который в 1834 г. обнаружил это явление.

Для получения более значительной разности температур здесь также следует применить полупроводниковые термопары. Термоэлектрические холодильники, использующие эффект Пельтье в полупроводниках, были созданы в 1954 г. группой ученых ленинградского Института полупроводников, которым руководил А.Ф. Иоффе.

## § 44.9. Теплоемкость

1. Как было показано в § 27.4, 27.5, для газов следует различать изохорную  $c_V$  и изобарную  $c_p$  теплоемкости, которые значительно отличаются друг от друга ( $\gamma = c_p/c_V \approx 1,7\text{--}1,4$ ). У твердых тел эти теплоемкости различаются очень мало: от 3 %

для меди и золота до 8 % у щелочных металлов. Поэтому в дальнейшем мы не будем эти величины различать и станем говорить просто о теплоемкости твердого тела.

Рассматривая выражение для внутренней энергии идеального газа, мы пришли к выводу, что ее можно представить как сумму кинетических энергий молекул плюс постоянное слагаемое, поскольку сумма потенциальных энергий молекул и их энергий покоя является постоянной величиной (см. § 27.1). Иную картину мы имеем в твердом теле. Здесь частицы совершают колебания в узлах кристаллической решетки, а в колебательном процессе кинетическая энергия непрерывно переходит в потенциальную, и наоборот. Следовательно, средние значения изменений потенциальной и кинетической энергий частиц равны между собой:

$$\langle \Delta \varepsilon_{\text{пот}} \rangle = \langle \Delta \varepsilon_{\text{к}} \rangle = \frac{3}{2} k \Delta T. \quad (44.24)$$

Средняя энергия колебаний частицы есть сумма средних значений ее потенциальной и кинетической энергий, поэтому

$$\langle \Delta \varepsilon \rangle = \langle \Delta \varepsilon_{\text{пот}} \rangle + \langle \Delta \varepsilon_{\text{к}} \rangle = 3k \Delta T. \quad (44.25)$$

2. Внутренняя энергия одного киломоля одноатомного вещества равна произведению средней энергии колебаний одного атома на постоянную Авогадро. Используя соотношение (44.25), получим

$$\Delta U_m = N_A \langle \Delta \varepsilon \rangle = 3 N_A k \Delta T = 3 R \Delta T,$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная (см. § 26.9).

Теплоемкость одного моля по определению равна

$$C_m = \frac{\Delta U_m}{\Delta T} = 3R = 24,9 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}. \quad (44.26)$$

Мы получили закон Дюлонга и Пти, установленный ими в 1819 г.: *молярная теплоемкость химически простых кристаллических тел приблизительно равна  $3R$* .

3. *Удельная теплоемкость* есть отношение молярной теплоемкости к атомной массе элемента:

$$c = \frac{C_m}{A} = \frac{3R}{A} = \frac{3N_A k}{N_A m_0} = \frac{3k}{m_0}, \quad (44.27)$$

где  $m_0$  — масса одного атома.

*Объемная теплоемкость* есть отношение молярной теплоемкости к молярному объему:

$$C = \frac{C_m}{V_m} = \frac{3N_A k}{N_A v} = \frac{3k}{v}, \quad (44.28)$$

где  $v$  — объем элементарной ячейки кристалла.

На рис. 44.8 приведены теплоемкости некоторых веществ — изоляторов и металлов. Анализ экспериментальных данных приводит нас к выводу, что закон Дюлонга и Пти является весьма приближенным; он выполняется лишь при достаточно высоких температурах. При низких температурах теплоемкость твердых тел быстро уменьшается и вблизи абсолютного нуля стремится к нулю.

4. Классическая теория не позволяет объяснить зависимость теплоемкости твердых тел от температуры. Впервые это явление объяснил в 1907 г. Эйнштейн на основе квантовых представлений. Полученная им формула качественно правильно передавала зависимость теплоемкости от температуры, изображенную на рис. 44.8. Более точную теорию, также основанную на квантовых представлениях, разработал в 1912 г. П. Дебай. В частности, он показал, что для каждого вещества имеется определенная характеристическая температура  $\Theta_D$  (температура Дебая), начиная с которой выполняется закон Дюлонга и Пти:

$$\Theta_D = \frac{\hbar a}{2kd} = \frac{\pi \hbar a}{kd}, \quad (44.29)$$

где  $a$  — скорость звука,  $d$  — характерное расстояние между частицами в кристаллической решетке.

Вычислим температуру Дебая для алюминия ( $a = 6400$  м/с,  $d = 0,4$  нм):

$$\Theta_D = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 6400}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 0,4 \cdot 10^{-10}} = 384 \text{ К},$$

что хорошо совпадает с экспериментальными данными (см. рис. 44.8). Малые значения теплоемкости алмаза при довольно высоких температурах означают, что для него температура Дебая велика:  $\Theta_D \approx 2500$  К; это объясняется весьма большим значением скорости звука в алмазе и малыми расстояниями между атомами ( $a = 1,6 \cdot 10^4$  м/с,  $d = 0,154$  нм).

5. Нейман (в 1831 г.) и Копп (в 1863 г.) показали, что молярные теплоемкости химических бинарных соединений равны суммам атомных теплоемкостей содержащихся в них элементов. Исходя из закона Дюлонга и Пти, получим, что для соединений типа АВ молярная теплоемкость  $C_m = 2 \cdot 3R = 49,86$  Дж/(моль · К) = 11,93 кал/(моль · К), а для соединений типа АВ<sub>2</sub> теплоемкость  $C_m = 3 \cdot 3R = 74,79$  Дж/(моль · К) = 17,89 кал/(моль · К).

Экспериментальные значения теплоемкости при постоянном давлении для некоторых веществ при комнатных температурах приведены в табл. 44.4. Как видно, указанная закономерность для некоторых кристаллов и жидкостей выполняется с очень незначительной погрешностью. В то же время ясно, что столь

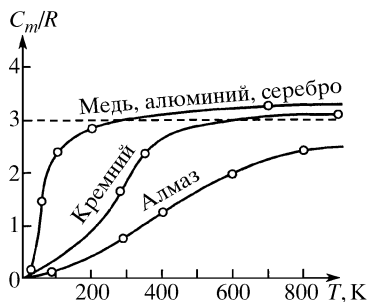


Рис. 44.8



упрощенная теория не в состоянии объяснить все детали процесса изменения внутренней энергии химических соединений при изменении их температуры.

Таблица 44.4

Вещество	Химические соединения	$C_m, \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	Погрешность
<b>Кристаллы</b>			
Хлорид калия	KCl	51,4	3 %
Хлорид натрия	NaCl	49,7	0,3 %
Хлорид серебра	AgCl	50,8	2 %
Иод	J <sub>2</sub>	54,2	10 %
Иодид калия	KJ <sub>2</sub>	55,0	10 %
Оксид свинца	PbO	48,5	3 %
Сульфид свинца	PbS	49,4	1 %
Сульфид цинка (сфалерит)	ZnS	45,2	9 %
Лед (–1 °C)	H <sub>2</sub> O	37,8	50 %
Лед (–160 °C)	H <sub>2</sub> O	18,0	76 %
Оксид титана (II) рутил	TiO <sub>2</sub>	55,0	26 %
Карбид кальция	CaC <sub>2</sub>	62,3	17 %
Фторид кальция	CaF <sub>2</sub>	67,0	10 %
Хлорид цинка	ZnCl <sub>2</sub>	74,5	0,3 %
Едкий натр	NaOH	80,2	7 %
<b>Жидкости</b>			
Вода	H <sub>2</sub> O	75,2	0,5 %
Серовуглерод	CS <sub>2</sub>	75,7	1 %
Синильная кислота	HCN	70,6	5 %

Заметим, что мы не учли разницу между теплоемкостью при постоянном объеме, которую дает теория, и теплоемкостью при постоянном давлении, которая найдена экспериментально. Дело в том, что погрешность здесь не превышает 5 % для большинства твердых тел и жидкостей.

6. Странным представляется тот факт, что теплоемкость льда вдвое меньше теплоемкости воды, хотя по своему химическому составу они ничем не отличаются. Объяснить это явление позволяет квантовая теория теплоемкостей.

Поскольку плотности воды и льда мало отличаются, то это означает, что характерное расстояние в обоих агрегатных состояниях почти одно и то же (различие меньше 2 %) и составляет  $2,76 \cdot 10^{-10}$  м. Но скорость звука в воде при 0 °C равна 1403 м/с,

у льда 3980 м/с. Отсюда следует, что температура Дебая у воды равна 126 K =  $-147^\circ\text{C}$ , а у льда 346 K =  $73^\circ\text{C}$ . Но жидкая вода не существует при  $-150^\circ\text{C}$ , она гораздо раньше замерзает, и ее теплоемкость измеряется при температурах выше  $0^\circ\text{C}$ , т.е. намного выше температуры Дебая, когда теплоемкость уже достигла классического предела  $9R$ . Теплоемкость же льда измеряется обычно тоже вблизи  $0^\circ\text{C}$ , т.е. при температурах, много ниже температуры Дебая. Неудивительно, что здесь теплоемкость значительно меньше, чем у воды (ср. с рис. 44.8).

### § 44.10. Теплоемкость металлов

Совершенно неожиданным является результат, что закон Дюлонга и Пти применим к металлам. В самом деле, в формуле (44.26) мы положили, что внутренняя энергия кристалла определяется только энергией колебаний частиц в узлах решетки. Но ведь в металлах имеются электроны проводимости, совокупность которых мы рассматриваем как идеальный газ. Следовательно, здесь внутренняя энергия должна быть равна сумме энергий решетки и электронного газа.

Полагая, что средняя энергия теплового движения электронов  $\langle \varepsilon_{\text{эл}} \rangle = (3/2)kT$  и число свободных электронов, приходящихся на один атом, равно  $\nu$ , получим для одного моля

$$\begin{aligned} \Delta U_m &= N_A \langle \Delta \varepsilon_{\text{реш}} \rangle + \nu N_A \langle \Delta \varepsilon_{\text{эл}} \rangle = \\ &= N_A \left( 3k\Delta T + \frac{3}{2} \nu k\Delta T \right) = 3R\Delta T \left( 1 + \frac{1}{2} \nu \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует выражение для молярной теплоемкости:

$$C_m = 3R \left( 1 + \frac{1}{2} \nu \right). \quad (44.30)$$

Итак, теплоемкость металлов должна была бы значительно превосходить теплоемкость изоляторов. Однако это не соответствует экспериментальным данным, согласно которым закон Дюлонга и Пти справедлив и для металлов (см. § 75.6–75.8).

### § 44.11. Теплопроводность диэлектриков

1. Если на концах стержня поддерживать некоторую разность температур, то происходит передача энергии в форме тепла от горячего конца к холодному. Пусть длина стержня равна  $l$  и площадь поперечного сечения  $S$ . Температуру нагретого участка обозначим через  $T_1$ , холодного через  $T_2$ , ось абсцисс направим

вдоль стержня. Величина  $\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}$  называется *градиентом температуры*. Она показывает, как быстро меняется температура вдоль стержня. Величина  $\Delta Q/(S\Delta t)$  показывает, какое количество теплоты переносится через единицу площади поперечного сечения в единицу времени; она называется *тепловым потоком*.

Оказалось, что *тепловой поток пропорционален градиенту температуры* (закон Фурье):

$$\frac{Q}{S\Delta t} = -K \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (44.31)$$

Знак минус появился потому, что тепловой поток является положительной величиной, а градиент температуры — отрицательной.

Величина  $K$  называется *коэффициентом теплопроводности* или просто *теплопроводностью* вещества. Единицей теплопроводности в СИ служит Вт/(м · К). Характерные значения теплопроводности некоторых изоляторов приведены в табл. 44.4.

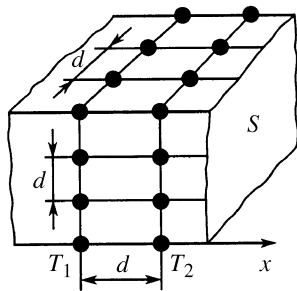


Рис. 44.9

2. Для анализа механизма теплопроводности рассмотрим два соседних слоя атомов (рис. 44.9). Пусть температура левого слоя равна  $T_1 = T$ , правого  $T_2 = T - \Delta T$ . Частицы, расположенные в этих слоях, имеют соответственно средние энергии  $\langle \varepsilon_1 \rangle = 3kT$  и  $\langle \varepsilon_2 \rangle = 3k(T - \Delta T)$ . Так как колебания частиц

в одном слое происходят более интенсивно, чем в другом, то происходит передача энергии из левого слоя в правый.

Одна частица передает энергию  $\Delta \varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = -3k\Delta T$ . В слое площадью  $S$  содержится  $N = S/d^2$  частиц, где  $d$  — расстояние между частицами. Следовательно, количество тепла  $q = N\Delta \varepsilon = -3kS\Delta T/d^2$ . Тепловой поток

$$\frac{Q}{S\Delta t} = -\frac{3k\Delta T}{d^2\Delta t} = -\frac{3k}{d^2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\Delta T}{\Delta x} = -\frac{3ka}{d^2} \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (44.32)$$

Величина  $a = \Delta x/\Delta t$  представляет собой скорость передачи тепловых колебаний. В принципе она не отличается от скорости передачи из слоя в слой любых других упругих колебаний, т. е. от скорости звука.

Сравнив (44.31) и (44.32), мы видим, что коэффициент теплопроводности

$$K = \frac{3ka}{d^2} = \frac{3kad}{v} = Cad = \frac{Cmad}{V_m}, \quad (44.33)$$

где  $C$  — теплоемкость единицы объема вещества (см. § 44.9).

Выражение (44.33) позволяет качественно объяснить причину анизотропии теплопроводности в некоторых монокристаллах (см. § 32.1). Суть дела сводится к тому, что в монокристаллах расстояния между атомами и скорость звука в разных направлениях различны, вследствие чего разной окажется и теплопроводность.

3. Теплопроводность, рассчитанная по формуле (44.33), приведена в табл. 44.5. Мы видим, что для пластмасс, аморфных тел и жидкостей получается неплохое совпадение теории и эксперимента. Для кристаллов наша упрощенная теория дает значения теплопроводности, которые в несколько раз меньше экспериментальных.

Таблица 44.5

Вещество	Скорость звука $a$ , км/с	Теплопроводность $K$ , Вт/(м · К)	$d$ , нМ	$\frac{3ka}{d^2}$
Пластмассы	2,0–2,6	0,1–0,4	0,5	0,3
Кирпич	3,6	0,6–1,1	—	—
Стекло	5,7–4,3	1,0–0,8	0,5	0,9–0,7
Хлористый натрий	4,75	7,1	0,282	2,4
Лед (–5 °С)	3,23	2,2	0,32	1,3
Вода (20 °С)	1,47	0,61	0,31	0,64
Ацетон (25 °С)	1,17	0,16	0,5	0,19
Четыреххлористый углерод	0,93	0,11	0,5	0,15

Это можно объяснить, воспользовавшись соображениями, которые выдвинул Дебай в 1914 г. Звуковые волны, воспринимаемые человеческим ухом, имеют частоту в диапазоне примерно 20 Гц–20 кГц, ультразвуки — от 20 кГц до 100 МГц. Эти волны, распространяясь в кристаллах, практически не рассеиваются, аналогично тому как свет, не рассеиваясь, проходит через прозрачные среды типа стекла или воды. Тепловые колебания имеют гораздо более высокую частоту, порядка  $10^{10}$ – $10^{13}$  Гц (гиперзвуки). Оказывается, что такие высокочастотные волны интенсивно рассеиваются в кристаллах, аналогично тому как свет рассеивается в мутных средах. Чем интенсивнее рассеяние звуковых волн, соответствующих тепловым колебаниям кристалла, тем медленнее идет процесс передачи тепла и тем меньше теплопроводность вещества. Основываясь на этих представлениях, Дебай получил для теплопроводности выражение

$$K = \frac{1}{3} Ca\Lambda, \quad (44.34)$$

где  $\Lambda$  — среднее расстояние, которое звуковая волна проходит без рассеяния. Если ввести представление о том, что звуковые волны распространяются

в виде некоторых элементарных порций, называемых квантами звукового поля или *фононами*, то это — *средняя длина свободного пробега фонона*. Сравнив с (44.33), мы видим, что  $\Lambda \approx 3d$ .

4. Рассеяние звуковых волн происходит на неоднородностях кристаллической решетки, совершенно аналогично рассеянию электронов проводимости (см. § 44.4). Неоднородность решетки является результатом наличия в ней дефектов, а также особого характера тепловых колебаний частиц в узлах решетки (см. § 75.9). В аморфных телах и жидкостях имеется ближний порядок упаковки частиц, следовательно, большое число дефектов; поэтому здесь теплопроводность будет малой, что и подтверждает эксперимент (см. табл. 44.4). В кристаллах, где порядок упаковки частиц значительно выше и дефектов меньше, волна может пройти без рассеяния значительно большее расстояние. Расчет дает для хлористого натрия при  $0^\circ\text{C}$  значение  $\Lambda = 2,3 \text{ нм} \approx 8d$ , для кварца вдоль оптической оси при этой же температуре  $\Lambda = 4,0 \text{ нм} \approx 13d$  и т. д. Этим и объясняется расхождение между опытом и расчетом по формуле (44.33).

С ростом температуры вещества усиливаются колебания частиц в узлах кристаллической решетки и уменьшается расстояние, которое звуковые волны проходят без рассеяния. Это должно привести к уменьшению теплопроводности, аналогично тому как с ростом температуры уменьшается электрическая проводимость. Опыт подтверждает этот вывод, но при относительно высоких температурах. При низких температурах теплопроводность убывает за счет резкого уменьшения теплоемкости.

## § 44.12. Теплопроводность металлов

1. Сравнительные данные о теплопроводности и удельной проводимости некоторых металлов при  $T = 273 \text{ K}$  приведены в табл. 44.6.

Таблица 44.6

Вещество	$K$ , Вт/(м · К)	$\gamma$ , Ом <sup>-1</sup> · м <sup>-1</sup>	$K/(\gamma T)$
Медь	385	$64,1 \cdot 10^6$	$2,2 \cdot 10^{-8}$
Алюминий	228	$40,8 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^{-8}$
Натрий	135	$23,8 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^{-8}$

Как видно, теплопроводность металлов очень велика. Она не сводится к теплопроводности решетки, следовательно, здесь должен действовать еще один механизм передачи тепла. Оказывается, что в чистых металлах теплопроводность осуществляется практически полностью за счет электронного газа, и лишь в сильно загрязненных металлах и сплавах, где проводимость мала, вклад теплопроводности решетки оказывается существенным.

Для вывода рассмотрим два слоя металла, толщина каждого из которых равна средней длине свободного пробега электрона. За время  $\tau = \lambda/\langle u \rangle$  из одного слоя в другой переходит  $N = (1/6)nS\lambda$  электронов. Электроны, переходящие из левого слоя в правый,

переносят энергию  $W_1 = N\langle\varepsilon_1\rangle$ ; встречный поток переносит энергию  $W_2 = N\langle\varepsilon_2\rangle$ . Согласно классической теории средняя энергия электрона  $\langle\varepsilon\rangle = (3/2)kT$ . Отсюда следует:

$$Q = W_1 - W_2 = N(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{1}{6} nS\lambda \cdot \frac{3}{2} k(T_1 - T_2). \quad (44.35)$$

Тепловой поток

$$\frac{Q}{S\Delta t} = \frac{1}{4} n\lambda k \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1} \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}.$$

Поскольку  $x_2 - x_1 = 2\lambda = 2\langle u\rangle\Delta t$ , где  $\langle u\rangle$  — средняя скорость теплового движения электронов, то

$$\frac{Q}{S\Delta t} = -\frac{1}{2} n\lambda\langle u\rangle k \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (44.36)$$

Сравнив (44.36) и (44.31), получим выражение для коэффициента теплопроводности электронного газа:

$$K = \frac{1}{2} n\lambda k\langle u\rangle. \quad (44.37)$$

2. По этой формуле мы не можем вычислить теплопроводность, так как длина свободного пробега электрона нам не известна. Однако, разделив (44.37) на  $\gamma = e^2 n\lambda / \langle mu\rangle$ , которой пользовался Друде вместо (44.16), получим

$$\frac{K}{\gamma} = \frac{km\langle u^2\rangle}{e^2}.$$

Но  $m\langle u^2\rangle = 3kT$ , следовательно,

$$\frac{K}{\gamma} = \frac{3k^2 T}{e^2} = 2,23 \cdot 10^{-8} T. \quad (44.38)$$

Полученное выражение называется *законом Видемана и Франца* в честь ученых, которые в 1853 г. обнаружили, что при одной и той же температуре отношение теплопроводности к удельной проводимости у всех металлов одно и то же. Зависимость этого отношения от температуры показал Лоренц.

3. Сопоставив экспериментальные данные табл. 44.6 с формулой (44.38), можно убедиться, что практически теплопроводность металлов целиком определяется теплопроводностью электронного газа, которая при температурах, далеких от абсолютного нуля, в сотни раз превосходит теплопроводность кристаллической решетки.

Таким образом, мы видим, что классическая электронная теория позволяет не только качественно объяснить механизм теплопроводности металлов, но и получить количественные соотношения — закон Видемана и Франца, который хорошо согласуется с экспериментом.

4. Подведем итог. Идея Друде–Лоренца, согласно которой совокупность электронов проводимости в металлах можно рассматривать как идеальный газ, оказалась весьма плодотворной. На этой основе оказалось возможным объяснить ряд явлений, связанных с электрической проводимостью и теплопроводностью металлов. Во всех этих случаях мы полагали, что электронный газ подчиняется статистике Максвелла–Больцмана, как и обычный одноатомный идеальный газ, вследствие чего средняя энергия теплового движения свободного электрона  $\langle \varepsilon_{\text{эл}} \rangle = (3/2)kT$ .

Оказывается, что это предположение, позволяющее, например, отлично объяснить особенности теплопроводности металлов (закон Видемана и Франца), не позволяет получить правильных значений теплоемкости металлов. Справедливость для металлов закона Дюлонга и Пти можно объяснить, введя предположение, что электронный газ не участвует в теплоемкости, — но тогда не удастся объяснить особенности теплопроводности металлов.

Полученное противоречие показывает, что классическая электронная теория принципиально несостоятельна. Решение этой проблемы удалось получить на основе идей квантовой механики, и мы к ней вернемся в гл. 75.

## Глава 45

### ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

#### § 45.1. Собственная электронная и дырочная проводимость полупроводников

1. Между металлами, у которых удельное сопротивление порядка  $10^{-6}$ – $10^{-8}$  Ом · м, и изоляторами с удельным сопротивлением  $10^8$ – $10^{13}$  Ом · м находится огромное количество материалов, относящихся к полупроводникам. Их удельное сопротивление изменяется в очень широком интервале от  $10^{-5}$  до  $10^8$  Ом · м. Почти вся окружающая нас природа состоит из полупроводящих веществ. Окислы металлов, сульфиды и теллуриды многих ме-

таллов имеют полупроводниковые свойства. В Периодической системе Менделеева полупроводники образуют группу элементов, показанную на рис. 45.1. Слева и снизу от элементов, принадлежащих к полупроводникам, находятся металлы. Справа и сверху располагаются элементы, которые в твердом состоянии являются диэлектриками.

5 B (1,1)	6 C (5,2)		
	14 Si (1,1)	15 P (1,5)	16 S (2,5)
	32 Ge (0,72)	33 As (1,2)	34 Se (1,7)
	50 Sn (0,1)	51 Sb (0,12)	52 Te (0,36)
			53 I (1,25)

Рис. 45.1

Типичными представителями полупроводников, имеющими широкое применение в технике, являются германий, кремний и теллур.

2. Германий (Ge) — один из наиболее широко применяемых полупроводниковых элементов. Он расположен в IV группе четвертого периода Периодической системы. В изолированном атоме германия на внешней оболочке находятся четыре электрона. Остальные 28 электронов размещаются на внутренних застроенных оболочках. Кристалл германия имеет атомную кристаллическую решетку, весьма сходную с кристаллической решеткой алмаза (см. § 33.4). Четыре валентных электрона каждого атома вступают в ковалентные химические связи с электронами соседних атомов в решетке, так что свободных электронов в чистом германии нет (рис. 45.2). Таким образом, чистый кристалл германия должен был бы быть хорошим изолятором.

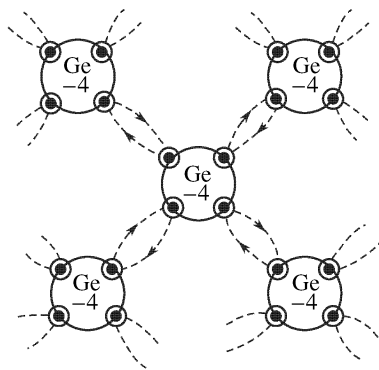


Рис. 45.2

В современной полупроводниковой технике широко используется кремний (Si). Четырнадцать электронов в изолированном атоме кремния располагаются вокруг ядра так, что четыре из них, как у германия, находятся на внешней оболочке. В твердом кристаллическом кремнии внешние



валентные электроны, так же как и у германия, вступают в ковалентные химические связи. Кремний также должен был бы быть изолятором.

3. Ковалентные связи в германии и кремнии могут достаточно легко разрываться уже при сравнительно низких температурах. При этом будут образовываться свободные электроны, и у полупроводников такого типа возникнет *собственная электронная проводимость чистого полупроводника*. Опыты показали, что с повышением температуры удельная электропроводность чистых полупроводников увеличивается. Это является важнейшим отличием полупроводников от обычных металлов, у которых, как известно (см. § 44.5), проводимость уменьшается с повышением температуры. Причина заключается в том, что в полупроводниках при увеличении температуры значительно возрастает концентрация электронов проводимости, что следует из опытов по определению постоянной Холла в этих веществах. Увеличение концентрации электронов проводимости перекрывает эффект уменьшения длины свободного пробега, и сопротивление убывает.

Для разрыва ковалентной связи необходима энергия, называемая *энергией активации* собственной проводимости. На рис. 45.1 энергии активации полупроводниковых элементов (в электрон-вольтах) указаны в кружках.

4. Кроме электронной проводимости в полупроводниках возможен другой тип проводимости. В самом деле, пусть электрон, получивший энергию за счет теплового возбуждения, разорвал ковалентные связи с другими электронами и ушел со своего места, превратившись тем самым в электрон проводимости. Тогда в том месте, откуда ушел электрон, возникает избыточный положительный заряд, ибо, как подчеркивалось, вещество электрически нейтрально. Как принято говорить, образуется *положительная дырка*. Она ведет себя как положительный заряд, равный по модулю заряду электрона. На освободившееся от электрона место — дырку — может переместиться соседний электрон, а это равносильно тому, что переместилась «положительная дырка»: она появится в новом месте, откуда ушел электрон.

Так, например, если из шеренги учащихся вышел один из них и образовалась «вакансия», то все другие могут последовательно передвигаться на освободившиеся места. Все будет происходить так, как будто свободное место передвигается в сторону, *противоположную* перемещению людей.

5. Во внешнем электрическом поле электроны перемещаются в сторону, противоположную направлению напряженно-

сти электрического поля. Положительные дырки перемещаются в направлении напряженности электрического поля, т. е. в ту сторону, куда под действием электрического поля *перемещался бы положительный заряд*. Электропроводность полупроводника, обусловленную перемещением положительных дырок, называют *собственной дырочной проводимостью*. Процесс перемещения дырок вдоль направления напряженности электрического поля, а электронов — в противоположном направлении, происходит по всей массе полупроводника. Таким образом, в полупроводниках наряду с обычной электронной проводимостью наблюдается дырочная проводимость.

Суммарная плотность тока, согласно (39.18), равна

$$j = en_e v_{\text{др}}^{(e)} + en_h v_{\text{др}}^{(h)}, \quad (45.1)$$

где индексами  $e$  и  $h$  (от англ. hole — дырка) обозначены концентрации и средние скорости дрейфа электронов и дырок.

Выразив среднюю скорость дрейфа через подвижность (39.26) и учитывая, что в чистых полупроводниках концентрации электронов проводимости и дырок равны, т. е.  $n_e = n_h = n$ , получим закон Ома в дифференциальной форме:

$$j = enE(\mu_e + \mu_h). \quad (45.2)$$

Подвижность носителей тока выражается через их массу и длину свободного пробега (см. § 44.4). Однако не следует забывать, что электроны проводимости и дырки сильно взаимодействуют с кристаллической решеткой. Это взаимодействие учитывают, вводя в выражение (44.14) вместо массы свободного электрона так называемую *эффективную массу*  $m^*$ :

$$\mu_e = \frac{e\tau}{m_e^*} = \frac{e\lambda}{m_e^* \langle u \rangle}, \quad \mu_h = \frac{e\tau}{m_h^*} = \frac{e\lambda}{m_h^* \langle u \rangle}. \quad (45.3)$$

Эффективные массы электронов проводимости и дырок  $m_e^*$  и  $m_h^*$  существенно отличаются от массы свободного электрона, принимая в различных веществах значения от 0,1 до 100 масс свободного электрона. В результате подвижности электронов и дырок в полупроводниках существенно отличаются; так, у германия  $\mu_e = 0,36 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$  и  $\mu_h = 0,18 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ; у кремния  $\mu_e = 0,19 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$  и  $\mu_h = 0,05 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ . В зависимости от того, подвижность каких частиц больше — электронов или дырок, существуют полупроводники с преобладающей собственной электронной или дырочной проводимостью.

## § 45.2. Примесная электронная и дырочная проводимость полупроводников

1. Внесение примесей в полупроводник сильно влияет на его электрические свойства. Примесями являются, например, атомы или ионы посторонних химических элементов, внедренные в решетку полупроводника. Роль примесей играют также различного рода дефекты и искажения в кристаллической решетке: пустые узлы, сдвиги, возникающие при деформациях кристалла, трещины и т.п. Примеси вносят изменения в периодическое поле кристалла и влияют на поведение электронов.

Примеси могут по-разному влиять на количество носителей тока в полупроводниках. С одной стороны, они могут служить дополнительными поставщиками электронов в кристалл. С другой стороны, примеси могут быть центрами для «прилипания» электронов, имеющихся в кристалле.

2. Рассмотрим, например, что произойдет, если в решетке германия один из атомов будет замещен атомом примеси, который имеет пять валентных электронов (фосфор, мышьяк, сурьма) (рис. 45.3). Четыре электрона примесного атома будут связаны

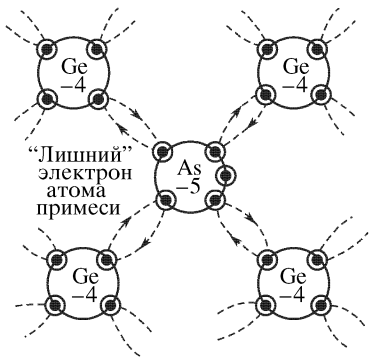


Рис. 45.3

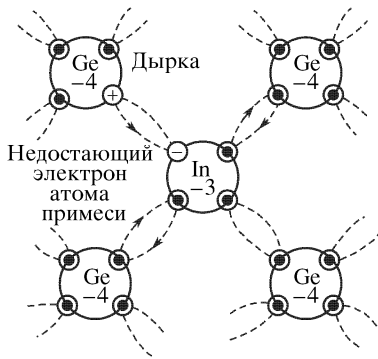


Рис. 45.4

ковалентными связями с электронами соседних атомов германия, а пятый электрон легко отрывается от атома и превращается в электрон проводимости. Атомы примесей, поставляющие «лишние» электроны в кристалл полупроводника, называются *атомами-донорами* (от латинского *donare* — дарить, жертвовать). Для того чтобы оторвать электрон от атома примеси, нужна незначительная энергия  $\Delta\mathcal{E}_e$ , которую можно получить нагреванием. Например, для кремния энергия  $\Delta\mathcal{E}_e = 0,054$  эВ, если атомом примеси является мышьяк.

Описанный тип проводимости получил название *проводимости  $n$ -типа*, а полупроводники с такой проводимостью называются *электронными* или *полупроводниками  $n$ -типа* (от латинского *negativus* — отрицательный).

3. Предположим теперь, что в кристаллическую решетку германия внедрен примесный атом с тремя валентными электронами — бор, алюминий, индий (рис. 45.4). У такого атома не хватает одного электрона, чтобы образовать полный комплект ковалентных связей, необходимых для решетки германия (см. рис. 45.2). Но примесный атом может создать все связи, если он заимствует электрон у ближайшего атома германия. Тогда на месте электрона, ушедшего от атома германия, образуется положительная дырка. В свою очередь эта дырка может быть заполнена электроном из следующего соседнего атома германия и т. д. Процесс последовательного заполнения положительных дырок электронами эквивалентен, как мы видели (см. § 45.1), движению дырки в полупроводнике в противоположном направлении, т. е. появлению дырочной проводимости.

Примесные атомы данного типа называются *акцепторами* (от латинского *acceptor* — приемщик). Описанный тип проводимости получил название *проводимости  $p$ -типа*, а полупроводники с такой проводимостью называются *дырочными* или *полупроводниками  $p$ -типа* (от латинского *positivus* — положительный).

4. Плотность тока в случае примесной проводимости выражается той же формулой (45.1), что и в случае собственной проводимости. Однако концентрации электронов проводимости и дырок при наличии примесей не равны, т. е.  $n_e \neq n_h$ . Поэтому закон Ома в дифференциальной форме примет вид

$$j = eE(n_e\mu_e = n_h\mu_h). \quad (45.4)$$

Очевидно, что если  $n_e\mu_e = n_h\mu_h$ , то превалирует электронная проводимость; при  $n_e\mu_e < n_h\mu_h$  — дырочная. Носители тока, определяющие тип проводимости, называются *основными*. Обычно концентрация основных носителей тока намного больше, чем неосновных.

5. В заключение обратим внимание на очень существенное отличие поведения носителей тока в полупроводниках от свойств электронов в металлах. В металлах концентрация электронов и их энергия практически не зависят от температуры. Этот вывод подтвержден экспериментально и означает, что числом носителей тока в металлах практически нельзя управлять. В полупроводниках, при любом характере их проводимости, число носителей тока

значительно меньше, чем в металлах. Но концентрация носителей тока в полупроводниках и их энергия весьма сильно зависят от температуры и свойства примесей. Это создает возможность управления числом носителей тока и их энергией в полупроводниках, широко применяемую в полупроводниковых устройствах.

### § 45.3. Выпрямление на границе металл–полупроводник

1. Уже давно было известно, что контакт металла с поверхностью полупроводника выпрямляет переменные токи весьма высоких радиочастот. Это позволило создать кристаллические детекторы и выпрямители радиочастот, а впоследствии — усилители (кристадины). Выпрямление на границе металл–полупроводник, односторонняя приводимость контакта, связаны с существованием на поверхности контакта особого *барьерного* или *запирающего слоя*, который затрудняет прохождение тока в одном направлении и облегчает движение зарядов в противоположном направлении.

2. Запирающий слой представляет собой тонкий слой вблизи контакта, характеризующийся резким изменением потенциальной энергии электронов на протяжении слоя. Возникновение такого слоя связано с тем, что по обе его стороны происходит скопление электрических зарядов противоположных знаков. Образуется так называемый *двойной электрический слой зарядов*, взаимодействующих с теми зарядами, которые проходят через контакт.

Двойной слой образует электрическое поле, в котором движется поток электронов. Движение это связано с преодолением определенного потенциального барьера. Если к контакту приложено прямое напряжение — потенциальный барьер уменьшается, и ток проходит. При обратном напряжении потенциальный барьер для электронов возрастает, и в этом направлении ток не проходит.

3. Предположим, что с металлом граничит полупроводник *n*-типа и что работа выхода электронов у металла больше, чем у *n*-полупроводника. Тогда электроны будут переходить из полупроводников в металл, и приконтактный слой электронного полупроводника обеднится свободными электронами и зарядится положительно. Металл, получивший избыточное количество электронов, заряжается отрицательно. Между металлом и полупроводником образуется двойной электрический слой.

Контактная разность потенциалов на границе металл–полупроводник обусловлена относительно малой концентрацией подвижных носителей тока в полупроводнике. Равновесная толщи-

на двойного электрического слоя в области контакта оказывается значительной. Двойной электрический слой на границе металл–полупроводник по своим свойствам резко отличается от остального объема полупроводника. Важнейшее отличие состоит в том, что потенциальная энергия электронов в этом слое повышается по сравнению с энергией электронов в остальном объеме.

4. Важной особенностью этого слоя, основой выпрямляющего действия контакта металла с полупроводником, является различие в сопротивлениях этого слоя для разных направлений тока. При пропускном направлении тока, когда минус подан на полупроводник, потенциал запирающего слоя снижается и ток проходит через барьер. Это означает, что двойной слой становится тоньше, создаются облегченные условия для перехода электронов из полупроводника в металл — снижается потенциальный барьер для электронов.

При противоположном (обратном) направлении тока приложенное напряжение приводит к дальнейшему обеднению электронами части полупроводника, граничащей с металлом. Потенциал двойного электрического слоя растет, и в этом направлении ток через контакт проходить не будет.

5. Действие запирающего слоя на границе металла с полупроводником существенно зависит от площади контактной поверхности. Запирающий слой появляется только при малых размерах контакта, что объясняется неоднородностью примесных включений по объему полупроводника. Имеются небольшие области, где примеси присутствуют, есть области, где их нет. Запирающий слой образуется в местах скопления примесей. Если контактная поверхность велика, то всегда найдутся участки с большой электропроводностью, которые будут шунтировать запирающий слой и снижать его выпрямляющее действие.

#### § 45.4. Выпрямление на границе электронно-дырочного перехода

1. Область монокристаллического полупроводника, в которой происходит смена проводимости с электронной на дырочную (или наоборот), называется *электронно-дырочным переходом* ( $p$ – $n$ -переход). Такой  $p$ – $n$ -переход образуется в кристалле полупроводника, если в нем с помощью соответствующих примесей будут созданы участки с различной ( $n$  и  $p$ ) проводимостью. Так, если при выращивании монокристалла германия в расплав вводить необходимые примеси, то получается монокристалл, в котором

имеются последовательно расположенные области с различными типами проводимости.

Внесение примесных центров вызывает в полупроводниках стабильные изменения проводимости заранее предусматриваемого характера.

2. Существование тонкого пограничного слоя, в котором имеет место переход проводимости одного типа в другой, является основой вентильного действия такой границы.

При соприкосновении двух полупроводников с различными типами проводимости начинается образование контактного двойного слоя. Электроны из  $n$ -полупроводника будут диффундировать в дырочный полупроводник  $p$ . Это приведет к обеднению электронами  $n$ -полупроводника вблизи границы и к образованию избыточного положительного заряда в  $n$ -кристалле. Диффузия дырок из  $p$ -полупроводника будет происходить в противоположном направлении и усилит образование избыточных электрических зарядов противоположного знака на границе электронно-дырочного перехода. Таким образом создается двойной электрический слой толщины  $l$  (рис. 45.5), который препятствует

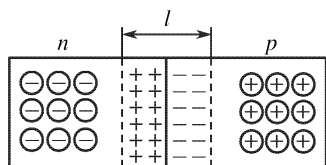


Рис. 45.5

дальнейшему переходу электронов и дырок через границу раздела двух полупроводников. Этот двойной слой является для носителей тока и потенциальным барьером высотой в несколько десятых вольта. Такой барьер электроны и дырки могут преодолеть лишь при очень высокой температу-

ре, порядка тысяч градусов, поэтому контактный слой является для носителей тока запирающим слоем.

Полупроводник с одним  $p$ - $n$ -переходом называется *полупроводниковым диодом*.

3. Действие внешнего электрического поля существенным образом влияет на потенциал запирающего слоя. Предположим, что  $n$ -полупроводник подключен к отрицательному полюсу источника, а полюс положительный подан на  $p$ -полупроводник (рис. 45.6). Тогда под действием электрического поля электроны в  $n$ -полупроводнике перемещаются к границе раздела полупроводников. Дырки в  $p$ -полупроводнике под действием того же поля движутся навстречу электронам также к этой границе. При таком пропускном (прямом) направлении

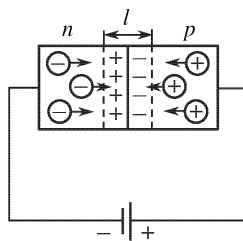


Рис. 45.6

тока в полупроводнике толщина запирающего слоя будет непрерывно уменьшаться. Электроны, переходя границу, «заполняют» дырки, и в пограничном слое происходит рекомбинация электронов с дырками.

Граница  $p$ – $n$ -перехода не будет представлять существенного сопротивления для тока, вызываемого внешним напряжением. Это напряжение необходимо только для того, чтобы поддерживать встречное движение электронов и дырок.

4. Если изменить полярность приложенного к полупроводникам напряжения, дырки в  $p$ -полупроводнике и электроны в  $n$ -полупроводнике будут перемещаться от границы раздела в противоположные стороны (рис. 45.7). В этом случае около границы раздела будет увеличиваться размер запирающего слоя  $l$ , в котором концентрация подвижных носителей тока — электронов и дырок — будет значительно меньше, чем в остальном объеме полупроводника. В области, обедненной подвижными зарядами, будет возрастать двойной электрический слой неподвижных зарядов противоположного знака. В полупроводнике  $p$ -типа вблизи границы будут находиться частицы, заряженные отрицательно. По другую сторону от границы в  $n$ -полупроводнике соберутся положительно заряженные частицы.

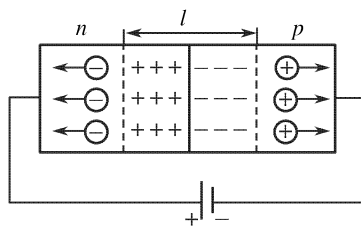


Рис. 45.7

Чем больше будет приложенное запирающее напряжение, тем толще двойной слой, обедненный подвижными носителями тока, и вследствие этого тем выше потенциальный барьер. При достаточном обратном напряжении запирающий слой представляет собой практически изолятор, в котором отсутствуют подвижные носители тока. Действие прямого пропускного напряжения приводит, наоборот, к нейтрализации поля двойного слоя, к снижению потенциального барьера на границе  $p$ – $n$ -перехода (за счет рекомбинации электронов и дырок). В результате при приложенном переменном напряжении осуществляется односторонняя проводимость.

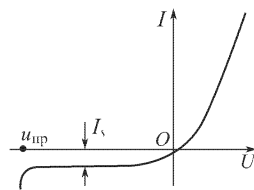


Рис. 45.8

Вольтамперная характеристика электронно-дырочного перехода изображена на рис. 45.8. Здесь  $I_s$  — ток насыщения,  $u_{пр}$  — напряжение пробоя.



## § 45.5. Транзистор

1. Особо важную роль в современной технике — электронике, радиотехнике, вычислительной технике, автоматике — играют *транзисторы*. Так называются полупроводниковые устройства, позволяющие управлять электрическими сигналами, усиливать и генерировать электромагнитные колебания. Этот термин образован от сокращения двух английских слов *transfer* — переносить и *resistor*, т. е. сопротивление, в котором сигнал переносится из одной области в другую, и при этом его параметры меняются.

Первые, хотя и весьма несовершенные транзисторы были созданы еще в 20-е годы. Однако понимание физической сущности явлений, происходящих в транзисторах, и их широкое внедрение в технику началось в 1948 г., когда Дж. Бардин, У. Браттейн и У. Шокли создали первый транзистор на полупроводниках.

Чаще всего для изготовления транзисторов применяется кремний, реже — более дорогой германий. Дело в том, что подвижность носителей тока в германии и кремнии больше, чем в других полупроводниках. Важными свойствами германия и кремния, которые обеспечили им наибольшее применение, являются также их механическая прочность, химическая устойчивость, относительно медленная рекомбинация дырок и электронов: заряженные частицы противоположных знаков «успевают» пройти в этих полупроводниках тонкие слои, порядка 0,01–0,1 мм, без воссоединения друг с другом.

Существуют два класса транзисторов — *полевые транзисторы* (иногда называемые также *униполярными*), и *биполярные транзисторы* (чаще называемые просто транзисторами). У униполярных транзисторов основным является один тип носителей тока (либо электроны, либо дырки), в биполярных носителями тока служат и те и другие. Рассмотрим устройство и принцип действия каждого из них.

2. На рис. 45.9 *а* изображен полевой транзистор с каналом *p*-типа (т. е. с дырочной проводимостью), а также его условное изображение на схемах; на рис. 45.9 *б* — транзистор с каналом *n*-типа (т. е. с электронной проводимостью). Названия электродов и схема включения изображены здесь же.

Поскольку на затвор подан потенциал в обратном (запирающем) направлении, то основные носители тока уходят от области *p*–*n*-перехода, сила тока через затвор ничтожна и реализуется неосновными носителями (см. рис. 45.8). Основные носители отталкиваются от *p*–*n*-перехода, и в основном полупроводнике — *канале* — образуется *обедненная зона*, т. е. область, обедненная

основными носителями. На рис. 45.9 она отмечена штриховкой. В результате сопротивление канала сильно возрастает, и сила тока в основной цепи (*ток стока*) оказывается малой.

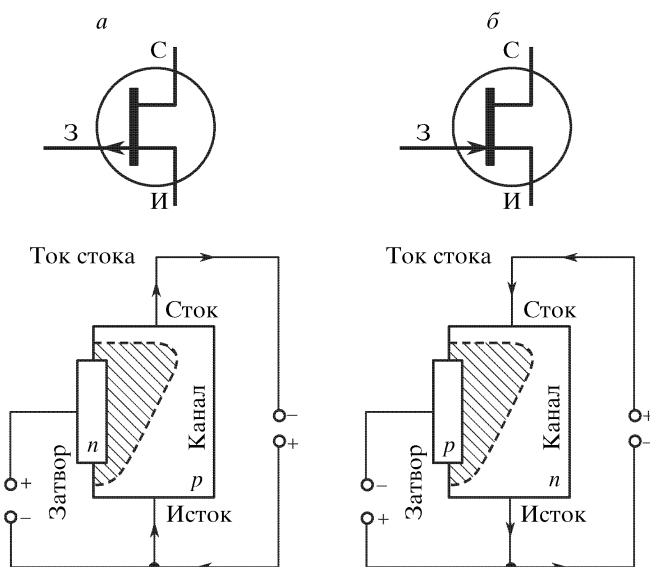


Рис. 45.9

Если мы на затвор подадим дополнительный электрический сигнал с той же полярностью, то размер обедненной зоны возрастет, и ток в стоке еще больше уменьшится. Если же на затвор подать сигнал с обратной полярностью, то размер обедненной зоны и сопротивление канала соответственно уменьшатся, и ток в стоке возрастет.

Таким образом, колебания потенциала на затворе вызовут колебания силы тока в цепи стока. Транзистор станет работать в режиме усиления мощности колебаний.

3. Схема биполярного транзистора типа  $p-p-n$  изображена на рис. 45.10 а; транзистора типа  $p-n-p$  — на рис. 45.10 б. Здесь же указаны названия электродов и схема включения. Как видно, у биполярного транзистора есть два  $p-n$ -перехода: на границе коллектор–база и база–эмиттер. Варьируя концентрацию примесей в разных областях полупроводника, добиваются, чтобы концентрация носителей тока в коллекторе была значительно меньше, чем в эмиттере и базе.

4. Подадим на базу  $n-p-n$  транзистора положительный потенциал — порядка 0,6 В для кремниевого и 0,2 В для германиевого

(рис. 45.10 а). Тогда  $p$ - $n$ -переход между базой и эмиттером будет включен в пропускном направлении, а между базой и коллектором — в запиорном. Электроны потекут из эмиттера в базу и ча-

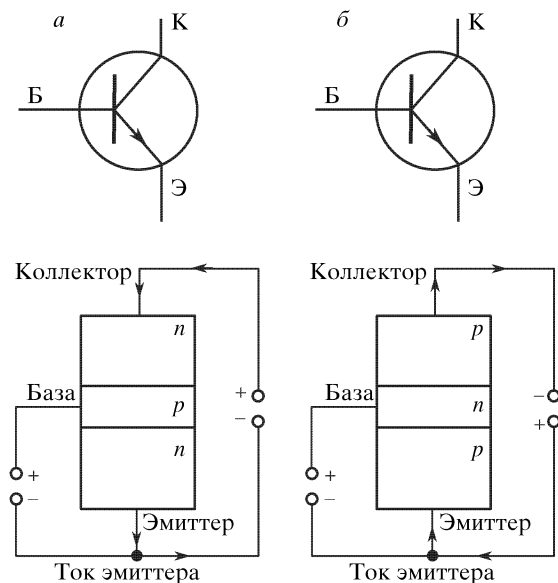


Рис. 45.10

стично будут рекомбинировать с дырками (что создаст довольно слабый ток базы), а большинство электронов проходит через  $p$ - $n$ -переход в коллектор. В результате возникает эмиттерный ток и соответственно почти такой же силы ток в коллекторе.

Если подавать на базу дополнительный электрический сигнал с той же полярностью, то сила тока в эмиттере увеличится. Если же на базу подать дополнительный электрический сигнал с обратной полярностью, то сила тока эмиттера (и коллектора) уменьшится.

Таким образом, биполярный транзистор, как и полевой, может работать в режиме усиления мощности колебаний. Правда, коэффициент усиления мощности у биполярного транзистора меньше, чем у полевого. Но у биполярного транзистора есть другие достоинства. Поэтому выбор того или иного типа транзистора зависит от реальных условий, в которых он должен работать.

5. Заметим, что транзисторы могут использоваться и в других целях — не только для усиления сигналов, но и как резисторы, сопротивления которых можно менять в широких пределах за счет

изменения потенциала базы (или затвора). Полупроводниковые диоды, включенные в запертом направлении, могут выполнять функции конденсаторов с переменной емкостью, управляемой напряжением (варикап). Это позволяет с помощью одних только полупроводниковых устройств собирать сложные электронные схемы, которые способны генерировать электрические сигналы, усиливать их и на этой основе обрабатывать различную информацию.

В настоящее время разработаны специальные технологии, позволяющие на кремниевой пластинке размером в несколько квадратных миллиметров выполнять сложные схемы, содержащие десятки и сотни тысяч полупроводниковых диодов и транзисторов. Образующиеся при этом большие интегральные схемы (БИС) и сверхбольшие интегральные схемы (СБИС) являются основными узлами *микропроцессоров*.

Микропроцессоры являются в настоящее время основными элементами ЭВМ (компьютеров), электронных часов, различных устройств автоматики и телемеханики. Они управляют работой станков и целых линий автоматов (обрабатывающих центров); выполняют по заданным программам сложнейшие операции, включая вождение самолетов, поездов; стыковку космических кораблей; обрабатывают огромные массивы информации от множества регистрирующих приборов; помогают врачам ставить диагноз и т. д. Таким образом, полупроводниковые устройства и основанная на их базе микропроцессорная техника стала технической основой современного научно-технического прогресса.

#### § 45.6. Фотосопротивления и полупроводниковые фотодиоды

1. В предыдущих параграфах мы рассматривали механизм разрыва ковалентных связей в полупроводниках за счет энергии теплового движения. Однако разрыв ковалентных связей может произойти и за счет энергии, поглощаемой при облучении полупроводника светом или невидимыми глазом излучениями, быстрыми электронами и т. п. Возникающие при этом электроны проводимости и дырки являются носителями тока. Проводимость, обусловленная появлением свободных электронов и дырок при облучении полупроводников светом, называется *фотопроводимостью* (от греч. *phōs* (*phōtos*) — свет).

Не все заряды, освобожденные светом, будут участвовать в проводимости. Часть из них присоединяется к атомам примеси и возвращается вновь на места, оставленные другими зарядами.

Тем не менее в результате облучения полупроводника светом достаточной частоты концентрация свободных носителей тока возрастает и электропроводность полупроводника увеличивается. Оказывается, что знак заряда, подвижность и другие свойства «световых» носителей тока обыкновенно совпадают со свойствами обычных «темновых» носителей. Об этом, в частности, свидетельствуют измерения постоянной Холла (см. § 44.2).

Фотопроводимость может быть вызвана не только видимым светом. Существуют полупроводники, в которых разрыв ковалентных связей возникает под действием невидимого глазом теплового (инфракрасного) излучения (см. § 61.1). Тем самым присутствие даже слабо нагретых тел может быть обнаружено на больших расстояниях по тому действию, которое оказывает их излучение: в электрической цепи со светочувствительным полупроводником возрастает электропроводность. С помощью усилителей возрастание тока может быть доведено до величин, дающих сигнал о том, что обнаружено нагретое и излучающее тело.

2. На явлении фотопроводимости основаны приборы, называемые *фотосопротивлениями* или *фоторезисторами*.

Простейшее фотосопротивление представляет собой стеклянную пластинку, на которую нанесен тонкий слой полупроводника. На поверхности укреплены тонкоподводящие электроды. Все это покрыто прозрачным лаком. Для фотосопротивлений характерна нелинейная зависимость фототока от светового потока при больших освещенностях. Недостатком фотосопротивлений является зависимость их свойств от температуры.

Для создания фотосопротивлений в области видимого спектра применяются сернистый кадмий, сернистый таллий, в инфракрасной области — селенистый и теллуристый свинец.

3. Фотосопротивления применяются в звуковом кино, для сигнализации, в телевидении, автоматике и телемеханике. Они позволяют управлять на расстоянии процессами производства, автоматически отличать нарушения нормального хода процесса. Независимо от технических деталей того или иного устройства здесь используется общий принцип: изменение светового потока приводит к изменению сопротивления фоторезистора; это вызывает изменение силы тока в цепи, регистрируемое каким-либо прибором.

Фотосопротивления применяются для сортировки массовой продукции на производстве по их размерам и окраске. Пучок света падает на фоторезистор, отразившись от одного из сортируемых предметов, которые непрерывно подаются на конвейер. Окраска изделия или его размер определяют световой поток, по-

падающий на фоторезистор, и, следовательно, фототок. Можно устроить так, чтобы в зависимости от силы фототока изделие сбрасывалось с конвейера в тот или иной ящик.

Фоторезисторы обладают известной инерционностью. Фототок не сразу достигает максимума при освещении и не сразу спадает до темнового тока при выключении света.

Фоточувствительные полупроводниковые приборы обладают рядом преимуществ по сравнению с вакуумными фотоэлементами (механическая прочность, высокая чувствительность к различным областям спектра).

4. В приборах, которые по своей конструкции относятся к полупроводниковым диодам  $p$ - $n$ -типа, свет используется в качестве управляющего элемента. Такие приборы называются *фотодиодами*. Их действие основано на том, что освещение  $p$ - $n$ -перехода увеличивает концентрацию свободных носителей тока и приводит к резкому понижению его сопротивления. В результате увеличивается ток, протекающий через  $p$ - $n$ -переход под действием некоторой разности потенциалов.

5. Практически важным примером использования фотопроводимости являются вентильные твердые фотоэлементы с запирающим слоем. На рис. 45.11 изображена схема такого фотоэлемента. Он представляет собой две соприкасающиеся друг с другом пластинки, изготовленные из металла и его окиси (полупроводник), покрытые сверху тонким прозрачным слоем металла. Пограничный слой между металлом и его окисью обладает выпрямляющим свойством, он позволяет электронам проходить лишь в направлении от окиси металла к металлу (например, от закиси меди к меди). Под действием света возникает поток электронов, идущий только от полупроводника к металлу. Никакого внешнего напряжения для управления потоком электронов при этом не требуется. Вентильный фотоэлемент является устройством, которое превращает энергию световой волны в энергию электрического тока.

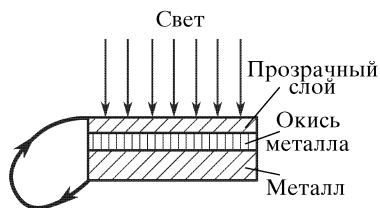


Рис. 45.11

Изменение интенсивности света и его цвета преобразуются в таком фотоэлементе в электрические токи. Свет, по возможности, должен действовать на весь объем активного вещества прибора. В этом случае возрастает концентрация электронов проводимости и за счет этого увеличивается сила тока.

Устройства данного типа используются на космических кораблях в виде *солнечных батарей*. Фотоэлементы данного типа используются в качестве фотоэкспонетров. Если удастся снизить стоимость этого типа фотоэлементов и повысить их КПД, то они станут основой для прямого преобразования энергии солнечного излучения в электрическую энергию на солнечных электростанциях (гелиоэлектростанциях), в быту, на транспорте. Уже созданы экологически чистые экспериментальные автомобили, приводимые в движение энергией, вырабатываемой солнечными батареями.

## Глава 46

# ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ЭЛЕКТРОЛИТОВ

### § 46.1. Электролитическая диссоциация

1. Опыт показывает, что *электролиты* — растворы солей, кислот и щелочей в воде — являются хорошими проводниками электрического тока. Ток в электролитах сопровождается *электролизом* — выделением вещества на электродах, погруженных в раствор. Таким образом, в отличие от металлов, обладающих электронной проводимостью, электролиты — это проводники, проводимость которых возникает за счет движения *ионов*.

Ни дистиллированная вода, ни растворимое вещество в твердом состоянии (типа ионного кристалла) свободных ионов не содержат, и потому все они — хорошие изоляторы. Следовательно, ионы возникают только в процессе взаимодействия растворенного вещества с молекулами воды. Процесс распада растворенного вещества на ионы под воздействием растворителя называется *электролитической диссоциацией*.

2. *Причина диссоциации заключается в том, что молекула воды имеет большой дипольный момент* ( $p_e = 6,1 \cdot 10^{-30}$  Кл·м), вследствие чего на расстояниях, имеющих порядок расстояния между молекулами в жидкостях ( $r \approx 5 \cdot 10^{-10}$  м), вокруг нее возникает сильное электрическое поле. Согласно (10.11) имеем

$$E \approx \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{6,1 \cdot 10^{-30} \cdot 36\pi \cdot 10^9}{4\pi \cdot 5^3 \cdot 10^{-30}} \approx 4 \cdot 10^8 \text{ В/м.} \quad (46.1)$$

Энергия взаимодействия иона натрия или хлора с молекулой воды примерно равна энергии взаимодействия между ионами

в кристалле NaCl. Поэтому в процессе растворения соли за счет тепловых соударений происходит распад вещества на ионы.

Процесс идет в двух направлениях: наряду с *диссоциацией* молекулы на два иона идет обратный процесс *рекомбинации* (*воссоединения*) ионов в нейтральную молекулу.

Положительные ионы, движущиеся к катоду, называются *катионами*, отрицательные — *анионами*, т.е. движущимися к аноду.

Заметим, что если растворенное вещество не диссоциирует на ионы, то раствор не является проводником. Примером могут служить водные растворы сахара и глицерина, которые являются хорошими изоляторами.

3. Молекулы воды обволакивают ион, образуя вокруг него *сольватную оболочку* (рис. 46.1). Это, во-первых, затрудняет рекомбинацию ионов, и при малых концентрациях раствора все растворенное вещество оказывается диссоциированным. Во-вторых, затрудняется движение ионов — фактически в растворе движется не отрицательный ион, а сольват — шарик, состоящий из иона и сольватной оболочки вокруг него, содержащей несколько слоев молекул растворителя.

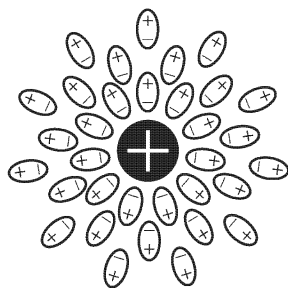


Рис. 46.1

## § 46.2. Закон Ома и проводимость электролитов

1. Если в электролит поместить два электрода и создать между ними разность потенциалов за счет источника тока, то возникнет упорядоченное движение сольватов. Положительно заряженные сольваты станут двигаться к катоду со скоростью  $v_+$ , отрицательные — к аноду со скоростью  $v_-$ . По аналогии с (39.18) получим выражение для плотности тока в электролите:

$$j = q_+ n_+ v_+ + q_- n_- v_- . \quad (46.1)$$

Здесь  $q$  — заряд иона,  $n$  — концентрация ионов.

Из закона сохранения электрического заряда следует, что сумма зарядов положительных и отрицательных ионов равна нулю, следовательно,

$$q_+ n_+ = q_- n_- = qn = \alpha qn_0 . \quad (46.2)$$

Здесь  $n_0$  — концентрация молекул растворенного вещества; коэффициент диссоциации  $\alpha = n/n_0$  есть отношение концентрации ионов к концентрации молекул вещества.



Плотность тока

$$j = qn(v_+ + v_-). \quad (46.3)$$

2. Скорость упорядоченного движения сольватов можно найти из следующих соображений. На сольват действует электрическая сила  $F_e = qE$  и сила сопротивления трения  $T = 6\pi\eta r v$ , где  $r$  — радиус сольвата и  $\eta$  — вязкость жидкости (см. § 11.8). Сольват движется равномерно, когда сила сопротивления уравнивает электрическую силу:  $qE = 6\pi\eta r v$ . Отсюда получим выражение для скорости сольватов

$$v = \frac{qE}{6\pi\eta r} \quad (46.4)$$

и для их подвижности (см. (39.26))

$$\mu = \frac{v}{E} = \frac{q}{6\pi\eta r}. \quad (46.5)$$

Из (46.5) и (46.3) следует, что для электролитов должен выполняться закон Ома:

$$j = qn(\mu_+ + \mu_-)E = \gamma E; \quad (46.6)$$

это подтверждается опытами.

3. Проводимость электролита равна

$$\gamma = qn(\mu_+ + \mu_-) = \frac{\alpha q^2 n_0}{6\pi\eta} \left( \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right). \quad (46.7)$$

Она много меньше проводимости металлов. Наибольшей проводимостью обладают растворы кислот, так как радиус сольвата, возникающего вокруг иона водорода (протона), в 5–10 раз меньше радиусов других сольватов.

С ростом температуры проводимость электролитов довольно быстро возрастает. Причина заключается в том, что с повышением температуры возрастает степень диссоциации раствора и уменьшается вязкость электролита.

### § 46.3. Законы Фарадея

1. Ион — это частица (атом, молекула, группа атомов), потерявшая или присоединившая к себе один или несколько электронов. Если валентность данного элемента равна  $Z$ , то заряд иона  $q = Ze$ .

Число ионов, выделившихся на электроде, равно полному заряду  $Q$ , прошедшему через электролит, деленному на заряд иона:

$$N = \frac{Q}{q} = \frac{Q}{Ze}.$$

Для химического элемента масса иона  $m_0$  равна атомной массе элемента  $A$ , деленной на постоянную Авогадро  $N_A$ . Масса вещества, выделившегося на электроде, равна массе иона, умноженной на число ионов:

$$m = m_0 N = \frac{A}{N_A} \frac{Q}{Ze} = \frac{1}{N_A e} \frac{A}{Z} Q. \quad (46.8)$$

2. Выражение (46.8) содержит в себе два закона, которые Фарадей сформулировал в 1832 г. на базе ряда экспериментов.

*Первый закон Фарадея:* масса выделившегося на электроде вещества пропорциональна электрическому заряду, протекающему через электролит:

$$m = KQ = Kit, \quad (46.9)$$

где  $m$  — масса вещества,  $Q$  — заряд,  $i$  — сила тока и  $t$  — время. Величина  $K = m/Q$  показывает, какая масса вещества выделится на электроде при прохождении через электролит заряда, равного одному кулону. Она называется *электрохимическим эквивалентом* вещества.

*Второй закон Фарадея:* электрохимические эквиваленты элементов прямо пропорциональны их химическим эквивалентам:

$$K = \frac{1}{F} \frac{A}{Z}; \quad (46.10)$$

здесь  $A$  — атомная масса элемента,  $Z$  — его валентность,  $A/Z$  — химический эквивалент — отношение атомной массы элемента к его валентности.

### 3. Постоянная Фарадея

$$F = N_A e = 9,648455 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}$$

численно равна электрическому заряду, который должен пройти через электролит, чтобы на электроде выделился один моль одновалентного вещества. В самом деле, положив в выражении (46.8)  $Z = 1$  и  $m = A$ , получим  $Q = F$ . Для выделения вещества с валентностью  $Z$  через электролит должен пройти заряд  $Q = ZF$ .

Найдя из опыта постоянную Фарадея и зная постоянную Авогадро, можно вычислить заряд одновалентного иона, равный заряду электрона, по формуле

$$e = \frac{F}{N_A}. \quad (46.12)$$

### § 46.4. Гальванический элемент

1. Опыт показывает, что если металлическую пластину опустить в электролит, то между ними возникает разность потенциалов. Явление это аналогично возникновению контактной разности потенциалов между двумя металлами (см. § 44.7), с той лишь разницей, что в электролите контактная разность потенциалов обусловлена диффузией ионов, а не электронов, как это имеет место при контакте металлов.

Диффузия ионов сопровождается химической реакцией между металлом и электролитом, что приводит к изменению внутренней энергии реагирующих веществ. Изменение энергии пропорционально числу прореагировавших атомов металла, иными словами — пропорционально массе металла, растворившегося в электролите:

$$\Delta U = \lambda m, \quad (46.12)$$

где  $U$  — внутренняя энергия,  $\lambda$  — удельная энергия химической реакции,  $m$  — масса вещества (см. § 20.4, 36.7).

2. Оказывается, что химическая реакция идет лишь в том случае, когда цепь замкнута и по ней течет ток. При этом происходит превращение энергии, выделяемой в результате химических реакций, в энергию электрического тока.

На основе этих соображений можно вычислить ЭДС гальванического элемента. Из закона сохранения энергии следует, что энергия химических реакций, происходящих на аноде и катоде, равна работе, совершаемой сторонними силами при перемещении заряда по цепи:

$$\Delta U_{\text{ан}} + \Delta U_{\text{кат}} = A_{\text{стор}} = Q\mathcal{E}. \quad (46.13)$$

Катодом гальванических элементов обычно служит цинк, и при его растворении в электролите выделяется энергия, т. е.  $\Delta U_{\text{кат}} > 0$ . Восстановительные реакции на аноде сопровождаются поглощением энергии,  $\Delta U_{\text{ан}} < 0$ . Используя соотношения (46.12) и (46.13), получим

$$\lambda_{\text{кат}} m_{\text{кат}} - \lambda_{\text{ан}} m_{\text{ан}} = Q\mathcal{E}. \quad (46.14)$$

Но по закону Фарадея  $m/Q = K$  — электрохимическому эквиваленту. Итак,

$$\mathcal{E} = \lambda_{\text{кат}} K_{\text{кат}} - \lambda_{\text{ан}} K_{\text{ан}}. \quad (46.15)$$

3. Для оценки значения ЭДС элемента учтем, что удельная энергия взаимодействия цинка с серной кислотой  $\lambda = 6,96 \cdot 10^6$  Дж/кг, электрохимический эквивалент цинка  $K = 3,39 \cdot 10^{-7}$  кг/Кл. Пренебрегая реакцией на аноде, получим

приближенно

$$\mathcal{E} \approx \lambda K = 6,96 \cdot 10^6 \cdot 3,39 \cdot 10^{-7} = 2,36 \text{ В.}$$

Опыт дает для элемента Грене и для кислотного (свинцового) аккумулятора  $\mathcal{E} \approx 2 \text{ В}$ , для щелочных аккумуляторов 1,8 В, для сухого элемента Лекланше 1,3 В. Как видно, порядок величины мы оценили правильно.

## Глава 47

### ТОК В ВАКУУМЕ

#### § 47.1. Термоэлектронная эмиссия

Если некоторый объем откачать до хорошего вакуума, то мы получим отличный изолятор, ибо здесь отсутствуют свободные электрические заряды. Однако проводимость в вакууме можно создать искусственно, если в этот объем вводить свободные заряды от какого-либо источника. Для этой цели используется явление *термоэлектронной эмиссии* — излучение электронов с поверхности нагретого металла.

Явление можно наблюдать с помощью следующего прибора. В стеклянном баллоне укрепляются два электрода: тонкая нить, которая служит катодом, и цилиндрический электрод — анод (рис. 47.1 а). В баллоне создается высокий вакуум. Схематически эта лампа изображается так, как показано на рис. 47.1 б.

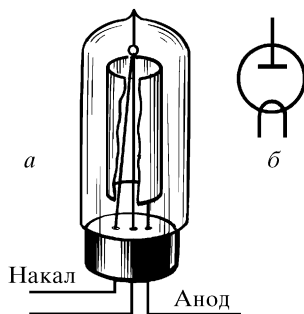


Рис. 47.1

В баллоне создается высокий вакуум. Схематически эта лампа изображается так, как показано на рис. 47.1 б.

2. Включим лампу в цепь, изображенную на рис. 47.2. Здесь Р — рубильник, БН — батарея накала, БА — батарея анода, МА — миллиамперметр. Если разомкнуть рубильник, то в цепи не будет тока даже в том случае, если потенциал анода довести до 300–400 В. При замыкании рубильника нить, которая служит катодом, раскаляется. При этом в цепи возникает ток. Отсюда мы заключаем, что из раскаленного катода вырываются отрицатель-

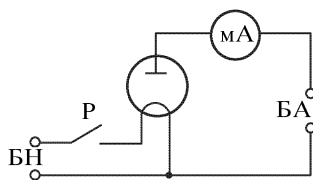


Рис. 47.2

но заряженные частицы. Измерение их удельного заряда привело к выводу, что это — *электроны*. Их называют *термоэлектронами*.

3. Явление термоэлектронной эмиссии аналогично испарению жидкости (см. § 35.1, 35.2). Так же как молекулы, энергия которых больше энергии испарения, вылетают из жидкости, так и электроны, энергия которых больше работы выхода, вылетают из металла. С ростом температуры число таких частиц очень быстро возрастает. Наконец, так же как над поверхностью жидкости образуется насыщенный пар, так и вокруг катода образуется *электронное облако*.

4. С помощью термоэлектронной эмиссии может быть решена проблема прямого преобразования внутренней энергии нагретых тел в энергию электрического тока. Для этого в цилиндрическом канале, который служит анодом, помещается катод в виде раскаленного стержня, разогреваемого за счет химических или ядерных реакций до высокой температуры. Электроны, эмиттированные с поверхности катода, улавливаются анодом, за счет чего между ними возникает разность потенциалов и во внешней нагрузке течет ток.

## § 47.2. Диод и его характеристика

1. Лампа, рассмотренная в предыдущем параграфе, называется *двухэлектродной электронной лампой* или, короче, *диодом*.

Применяются лампы с прямым и косвенным накалом. В лампах с прямым накалом нить накала из вольфрама служит одновременно катодом. Для получения значительной эмиссии нить нагревают до температуры 2000–2500 К. В лампах с косвенным накалом катод представляет собой никелевую трубочку, покрытую слоем окиси бария, стронция или кальция. Работа выхода с поверхности такого катода в несколько раз меньше, чем с вольфрама. Это позволяет снизить температуру накала до 1000 К. Подогрев катода обеспечивается небольшой спиралью, помещенной внутрь трубочки (рис. 47.3 а). На

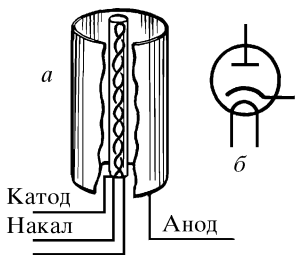


Рис. 47.3

лампах с косвенным накалом изображается, как показано на рис. 47.3 б.

2. Соберем цепь, изображенную на рис. 47.4. Резистор включен в схему так, что, перемещая скользящий контакт, можно менять потенциал анода от нуля (нижнее положение контакта) до напряжения на полюсах батареи анода. Резистор, включенный по этой схеме, называется *потенциометром*. Переключатель П

позволяет получить на аноде либо положительный потенциал относительно катода (в положении, изображенном на схеме), либо отрицательный, если перебросить контакты вверх.

Меняя плавно потенциал анода и регистрируя каждый раз величину анодного потенциала и тока, получим значения функции, выражающей зависимость тока от потенциала. График этой функции называется *вольт-амперной характеристикой* диода. На рис. 47.5 изображены три характеристики, снятые при разных температурах катода.

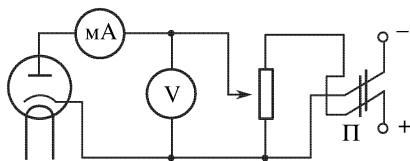


Рис. 47.4

3. Прежде всего бросается в глаза *нелинейность* характеристики. Это значит, что изменения тока не пропорциональны изменениям потенциала анода, иными словами, что здесь закон Ома не выполняется. Причина заключается в следующем.

Как известно (см. (39.18)), плотность тока  $j = env$ . В металлах и электролитах концентрация свободных зарядов (электронов или ионов) не зависит от тока, а средняя скорость движения зарядов пропорциональна напряженности поля. Отсюда и следует закон Ома (см. § 44.4). Совершенно иначе обстоит дело в электронной лампе. Благодаря наличию вокруг катода электронного облака зависимость скорости зарядов от напряженности поля оказывается более

сложной, и с ростом тока концентрация зарядов в электронном облаке уменьшается. В результате оказывается, что зависимость тока от потенциала на нарастающем участке характеристики выражается «законом трех вторых»:

$$i_a = B\varphi_a^{3/2}, \quad (47.1)$$

где  $B$  — некоторая константа, зависящая от размеров и формы электродов. Этот закон, полученный С.А. Богуславским и И. Ленгмюром, мы приводим без вывода.

4. Начиная с потенциала  $\varphi_s$ , сила тока перестает зависеть от потенциала анода, но зависит от температуры катода. Этот катод  $i_s$  называется *током насыщения*; его значение можно вычислить из следующих соображений. Максимальная плотность

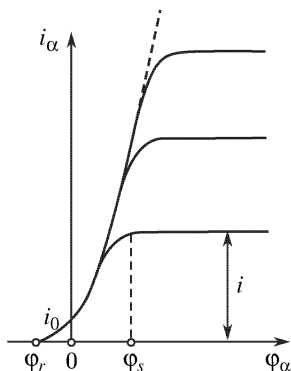


Рис. 47.5

тока в лампе равна произведению заряда электрона на число электронов, ежесекундно вылетающих с единицы поверхности катода, т. е.

$$j_s = eG, \quad (47.2)$$

где  $G$  — скорость испарения. Для ее вычисления мы можем воспользоваться формулой (35.4). При этом следует учесть, что для электронного газа согласно квантовомеханическим представлениям  $\alpha = 2$ . Подставив в (47.2), получим формулу Ричардсона–Дешмана:

$$j_s = BT^2 e^{-A_0/(kT)}, \quad (47.3)$$

где  $A_0$  — работа выхода электрона (см. § 44.9),  $T$  — температура металла,  $B$  — некоторая постоянная, зависящая от рода металла, из которого изготовлен катод.

5. Если подать на анод отрицательный относительно катода потенциал  $\varphi_r$ , то лампа запирается — анодный ток равен нулю. Это значит, что кинетической энергии электронов уже недостаточно, чтобы преодолеть действие поля, отталкивающего их от анода:

$$\frac{mv^2}{2} \leq e\varphi_r. \quad (47.4)$$

Измерив запирающий потенциал  $\varphi_r$ , можно определить максимальную кинетическую энергию (и скорость) электронов, покидающих катод.

### § 47.3. Триод и его характеристика

1. Для того чтобы управлять электронным током в лампе, в нее вводится третий электрод — сетка. Лампа с сеткой называется *трехэлектродной электронной лампой* или, короче, *триодом*. Сетка имеет вид проволочной спирали, помещенной между катодом и анодом (рис. 47.6 а). На схеме триод с подогревным катодом изображается, как показано на рис. 47.6 б. Все величины, относящиеся к сетке, отмечаются индексом  $g$  (англ. grid — сетка).

Соберем цепь по схеме рис. 47.7. Здесь резистор  $R_a$  является потенциометром, с помощью которого регулируется потенциал анода, а резистор  $R_g$  — потенциометром для регулировки потенциала сетки. Если подвижный контакт установить в средней точке потенциометра  $R_g$ , то потенциал сетки окажется равным потенциалу катода, т. е. нулю. При перемещении скользящего контакта ниже средней точки мы подадим на сетку отрицательный потенциал, выше средней точки — положительный.

2. Зафиксировав некоторый потенциал анода, будем менять потенциал сетки от отрицательных до положительных значений,

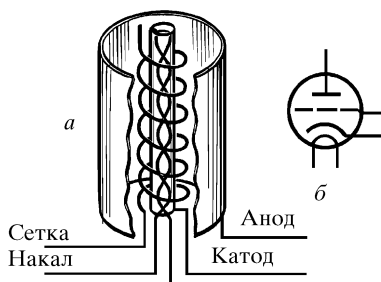


Рис. 47.6

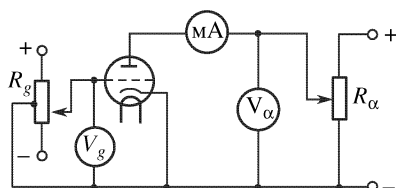


Рис. 47.7

регистрируя каждый раз анодный ток. На основе этих измерений построим *сеточную характеристику* триода, выражающую зависимость анодного тока от потенциала сетки при заданном потенциале анода (рис. 47.8). Анализ этой характеристики позволяет прийти к следующим выводам.

3. Характеристика *нелинейна*, следовательно, и здесь закон Ома несправедлив. Однако на небольшом участке в середине характеристики можно в первом приближении пренебречь нелинейностью. Далее, при положительных потенциалах сетки ток возрастает, при отрицательных — убывает. Явление это можно объяснить следующим образом. Если потенциал сетки равен нулю, то ток в лампе  $i_0$  определяется лишь потенциалом анода. Пусть на сетку подан положительный потенциал; тогда напряженности полей анода и сетки складываются, что приводит к росту скорости электронов и рассасыванию электронного объема. В результате ток увеличивается вплоть до тока насыщения  $i_s$ . При отрицательном потенциале сетки происходит обратный процесс: поле ослабевает, скорость электронов уменьшается, а концентрация электронного облака растет. В результате ток в лампе убывает. Наконец, при некотором отрицательном потенциале сетки  $\varphi_r$ , зависящем от анодного напряжения, кинетическая энергия электронов оказывается недостаточной для преодоления отталкивающего действия сетки и электроны не

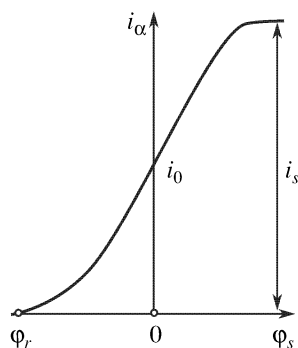


Рис. 47.8



могут прорваться в область между сеткой и анодом. Лампа *запирается*, т. е. ток в ней оказывается равным нулю.

Таким образом, меняя потенциал сетки, мы можем управлять током в лампе. По этой причине данная сетка называется *управляющей*.

#### § 47.4. Электронно-лучевая трубка

1. Специфическим электронным прибором является *электронно-лучевая трубка*. Схема ее устройства изображена на рис. 47.9. Электроны, излучаемые подогревым катодом, проходят через сетку (управляющий электрод) и ускоряются двумя анодами. Вся эта система, называемая *электронной пушкой*, служит для того, чтобы создать на экране сфокусированный пучок электронов. Экран покрыт *люминесцирующим* веществом (см. § 79.2) и ярко светится под действием бомбардирующих его электронов.

Фокусировка электронного пучка осуществляется следующим образом. На управляющий электрод (сетку) подается отрицательный потенциал (от  $-20$  до  $-70$  В). Поле этого электрода

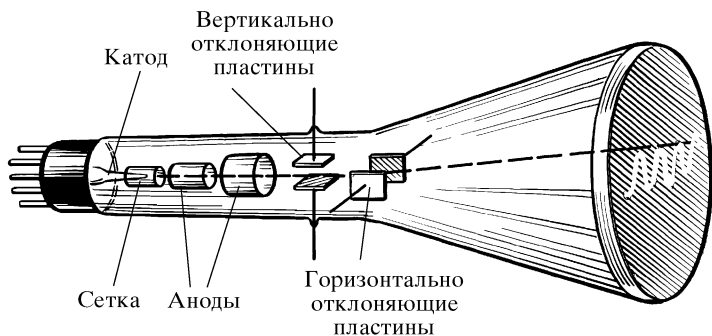


Рис. 47.9

сжимает электронный пучок, выходящий из катода. На первый анод подается положительный потенциал от  $+250$  до  $+500$  В, а на второй анод — от  $+1000$  до  $+2000$  В. В телевизионных трубках потенциалы еще выше. Меняя потенциалы управляющего электрода и анодов, можно изменить фокусировку и яркость пятна на экране трубки.

2. Далее пучок проходит через систему управляющих электродов. Если подать, например, на верхнюю вертикально отклоняющую пластину положительный потенциал, а на нижнюю — отрицательный, то электронный пучок отклонится вверх. При

изменении полярности пучок отклонится вниз. Таким образом, колебания потенциала на этих пластинах вызывают вертикальные колебания электронного пучка. Нетрудно убедиться, что колебания потенциала на горизонтально отклоняющихся пластинах вызовут горизонтальные колебания электронного пучка.

Трубка, в которой смещение электронного пучка осуществляется за счет изменения электрического поля между управляющими пластинами, называется трубкой с *электростатическим управлением*. Существуют трубки с *электромагнитным управлением*, которые применяются, например, в телевизорах. В этих трубках отсутствуют управляющие электроды, а на горловину трубки надеваются специальные катушки, по которым течет ток, величина и направление которого меняются. При изменении величины и направления вектора индукции магнитного поля соответственно меняются величина и направление силы Лоренца, отклоняющей электронный пучок.

## Глава 48

### ТОК В ГАЗАХ

#### § 48.1. Ионизация и рекомбинация

1. Для того чтобы газ стал проводником, его необходимо ионизовать, т. е. превратить нейтральные молекулы (или атомы) в ионы. Процесс ионизации заключается в том, что под действием некоторых излучений из молекул вылетают электроны, и тем самым молекулы превращаются в положительные ионы. Таким образом, электрический ток в газах — это встречный поток положительных ионов и свободных электронов.

Ионизация может происходить под действием коротковолнового излучения — ультрафиолетовых, рентгеновских и гамма-излучений, а также альфа-, бета- и космических частиц. Проводимость, возникающая под действием внешнего излучения, называется *несамостоятельной проводимостью*.

2. Обозначим через  $N_0$  число молекул газа в исследуемом объеме  $V$ . Концентрация молекулы  $n_0 = N_0/V$ . Часть молекул ионизована. Обозначим число ионов одного знака через  $N$ ; тогда их концентрация  $n = N/V$ .

Отношение числа ионов к общему числу молекул называется *степенью ионизации*,  $\alpha = N/N_0 = n/n_0$ . Обычно в газах при

несамостоятельной проводимости степень ионизации очень мала:  $\alpha \approx 10^{-12} - 10^{-10}$ .

Число нейтральных (неионизованных) молекул

$$N' = N_0 - N = N_0(1 - \alpha) \approx N_0,$$

то же относится и к их концентрации:  $n' \approx n_0$ .

3. Пусть в объеме  $V$  за счет действия каких-либо излучений возникло за время  $\Delta t$  некоторое число ионов:

$$\Delta N = \beta N' \Delta t \approx \beta N_0 \Delta t = \beta n_0 V \Delta t, \quad (48.1)$$

где  $\beta$  — коэффициент ионизации, зависящий от энергии ионизатора. Наряду с процессом ионизации идет обратный процесс *рекомбинации ионов* (иначе — *мобилизации*). Он заключается в том, что при столкновении положительного иона с электроном вновь образуется нейтральный атом или молекула. Число частиц, рекомбинировавших в объеме  $V$  за время  $\Delta t$ , пропорционально как числу положительных ионов, так и числу электронов. А так как число и тех и других частиц равно  $N$ , то вероятность рекомбинации пропорциональна  $N^2$ . Кроме того, она пропорциональна времени  $\Delta t$  и обратно пропорциональна объему  $V$  — в самом деле, чем ближе расположены друг к другу ионы разных знаков, тем вероятнее их рекомбинация. Итак,

$$\Delta N_{\text{рек}} = \frac{\gamma N^2 \Delta t}{V} = \gamma n^2 V \Delta t. \quad (48.2)$$

Здесь  $\gamma$  — коэффициент рекомбинации, зависящий от природы газа.

Через некоторое время после начала ионизации газа скорость рекомбинации  $\Delta N_{\text{рек}}/\Delta t$  сравнится со скоростью ионизации  $\Delta N/\Delta t$  и в газе установится динамическое равновесие. Этому состоянию соответствует определенная концентрация ионов, которую можно найти, приравняв выражения (48.1) и (48.2):

$$n = \sqrt{\beta n_0 / \gamma}. \quad (48.3)$$

## § 48.2. Несамостоятельный разряд

1. Для исследования этого процесса рассмотрим явления в *ионизационной камере*, схема которой изображена на рис. 48.1. Корпус сосуда, наполненного газом, обычно служит катодом. Анод имеет форму стержня; он изолируется от корпуса хорошим изолятором из янтаря, фарфора или специальных пластмасс. Жесткое излучение, типа рентгеновского, гамма- или космиче-

ского, проникает через стенки камеры. Мягкое излучение, типа бета- или альфа-частиц, вводится через специальное окошко.

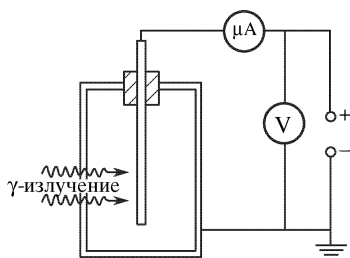


Рис. 48.1

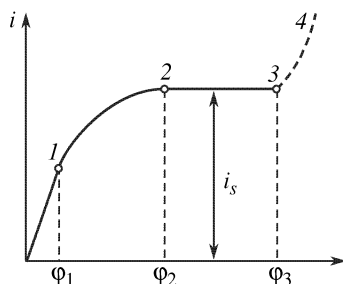


Рис. 48.2

Подадим на электроны камеры значительную разность потенциалов — от нескольких сот до нескольких тысяч вольт, в зависимости от конструкции камеры. Меняя разность потенциалов и измеряя соответствующий ей ток, снимем *вольт-амперную характеристику* газового разряда (рис. 48.2).

2. Если не обращать внимания на скачок тока на участке 3–4, то участок характеристики 0–1–2–3 очень похож на вольт-амперную характеристику диода. Участок 0–1–2–3 называется областью *несамостоятельного разряда*; область 3–4 характеризует переход к *самостоятельному разряду*.

Как видно, в области слабых токов (участок 0–1) характеристика приближенно линейна, значит, здесь справедлив закон Ома. На участке 1–2 закон Ома нарушается и рост тока происходит медленнее, чем рост потенциала. Наконец, на участке 2–3 ток не зависит от потенциала — это так называемый *ток насыщения*  $i_s$ .

3. Для того чтобы объяснить особенности разряда при разных значениях потенциала, вычислим силу тока в камере. Для простоты рассуждений положим, что электроды камеры изготовлены в виде плоских пластин, расположенных параллельно друг другу на небольшом расстоянии  $d$ . В этом случае поле между пластинами окажется однородным, а плотность тока во всех точках одинаковой. Так же, как и в электролитах, плотность тока выразится формулами (46.3) и (46.6):

$$j = en(v_+ + v_-) = en(\mu_+ + \mu_-)E, \quad (48.4)$$

где  $\mu_+$  — подвижность положительных ионов,  $\mu_-$  — подвижность электронов,  $n = \alpha n_0$  — концентрация ионов.

4. Анализируя механизм тока в электролитах, мы из формулы (46.3) получили закон Ома, поскольку там концентрация

ионов не зависела от тока. Иначе обстоит дело в газах. Здесь с ростом тока уменьшается концентрация ионов и зависимость тока от разности потенциалов оказывается довольно сложной функцией.

Рассмотрим, как изменится условие динамического равновесия между процессами ионизации и рекомбинации при наличии тока. За счет тока из объема между электродами за время  $\Delta t$  уносится определенное число ионов:

$$\Delta N_{\text{ток}} = \frac{Q}{e} = i \frac{\Delta t}{e} = j S \frac{\Delta t}{e}. \quad (48.5)$$

Условие динамического равновесия при наличии тока выглядит так:

$$\Delta N = \Delta N_{\text{рек}} + \Delta N_{\text{ток}}. \quad (48.6)$$

Подставив значения всех слагаемых, получим

$$\beta n_0 V = \gamma n^2 V + \frac{j S}{e}.$$

Учитывая, что  $d = V/S$  — это расстояние между электродами, имеем окончательно

$$\beta n_0 = \gamma n^2 + \frac{j}{ed}. \quad (48.7)$$

Итак, концентрация ионов оказалась функцией плотности тока. Исключив из системы равенств (48.4) и (48.7) концентрацию ионов  $n$ , получим некоторую функцию, выражавшую зависимость плотности тока от напряженности поля. График этой зависимости и является вольт-амперной характеристикой (см. рис. 48.2).

5. Рассмотрим два предельных случая, когда количество ионов, уносимых током, много меньше или много больше числа рекомбинирующих ионов.

Итак, пусть сперва  $\Delta N_{\text{ток}} \ll \Delta N_{\text{рек}}$ . Тогда вторым слагаемым в правой части (48.6) можно пренебречь. Мы вновь вернемся к равенству (48.3). Следовательно, при слабых токах концентрация ионов от тока практически не зависит, вследствие чего плотность тока примерно пропорциональна напряженности поля. На характеристике этому соответствует почти линейный участок 0–1.

Пусть теперь, наоборот, ток настолько велик, что практически все ионы уносятся током и рекомбинация не успевает произойти. Тогда  $\Delta N_{\text{ток}} \gg \Delta N_{\text{рек}}$ , и в равенствах (48.6) и (48.7) можно пренебречь первым слагаемым в правой части. Имеем

$$\beta n_0 \approx \frac{j_s}{ed}. \quad (48.8)$$

Мы видим, что плотность тока не зависит от поля. Это и есть *ток насыщения*.

#### 6. Сила тока насыщения

$$i_s = j_s S = \beta n_0 e V. \quad (48.9)$$

Как видно, она пропорциональна объему ионизации камеры, концентрации молекул газа (иными словами — давлению газа) и коэффициенту ионизации. Таким образом, с помощью ионизационной камеры, работающей в режиме тока насыщения, можно сравнить ионизирующую способность разных видов излучения. С этой целью ионизационные камеры широко применяются в ядерной физике.

### § 48.3. Ударная ионизация

1. Как видно из графика рис. 48.2, при разности потенциалов, превосходящей  $\varphi_3$ , ток в газе скачком возрастает, в то время как в большом интервале разностей потенциалов от  $\varphi_2$  до  $\varphi_3$  ток оставался неизменным. Анализ выражения для плотности тока (48.4) позволяет прийти к выводу, что внезапный и резкий скачок силы тока может возникнуть лишь по одной причине: при разности потенциалов, превосходящей  $\varphi_3$ , *скачком возрастает концентрация ионов*. Причиной такого резкого скачка является *ударная ионизация* газа.

Для того чтобы ионизовать атом или молекулу, требуется некоторая энергия  $\mathcal{E}_{\text{ион}}$ , значение которой зависит от химической природы газа. Для атомов водорода и кислорода  $\mathcal{E}_{\text{ион}} = 13,6$  эВ, для азота 14,5 эВ, для гелия 24,5 эВ, для атомов щелочных металлов — порядка 4–5 эВ. Если кинетическая энергия частицы, соударяющейся с атомом, превысит энергию ионизации, то при неупругом ударе возможна ионизация молекулы.

2. В газе кинетическая энергия  $K$  ионизирующей частицы возникает за счет работы  $A$  электрических сил, действующих на ион в электрическом поле:

$$K = A = F\lambda = eE\lambda, \quad (48.10)$$

где  $E$  — напряженность поля,  $\lambda$  — длина свободного пробега иона. Как положительные ионы, так и электроны движутся в поле с одинаковой напряженностью, но длина свободного пробега электрона оказывается много больше свободного пробега положительного иона. Следовательно, основную роль в ударной ионизации играют свободные электроны.

3. Вторая причина, по которой электроны являются более эффективными ионизаторами, заключается в том, что, благодаря закону сохранения

импульса, при ударе лишь часть кинетической энергии может превратиться во внутреннюю (см. § 21.7, 23.2). Оказывается, что чем меньше масса ионизирующей частицы по сравнению с массой молекулы, тем большая часть кинетической энергии сможет превратиться во внутреннюю и израсходоваться на ионизацию. Пусть масса ионизирующей частицы  $m$ , ее импульс  $p$  и до неупругого удара молекула с массой  $M$  покоится. Изменение внутренней энергии равно потере кинетической энергии:

$$\Delta \mathcal{E}_0 = K - K_1 = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^2}{2(M+m)} = \frac{p^2}{2m(M+m)} = K \frac{M}{M+m}, \quad (48.11)$$

где  $K = p^2/2m$  — энергия ионизирующей частицы. Масса иона равна массе молекулы, следовательно,  $\Delta \mathcal{E}_0 = K/2$ . Масса электрона в несколько тысяч раз меньше массы молекулы, поэтому в (48.11) отношение  $M/(M+m) \approx 1$  и  $\Delta \mathcal{E}_0 \approx K$ . Итак, даже при одинаковой кинетической энергии электрон в качестве ионизатора оказывается эффективнее иона в два раза.

4. При ударной ионизации и внешнем поле достаточной напряженности в газе создается *ионная лавина*. Вторичные электроны, возникшие за счет ударной ионизации, также разгоняются полем и в свою очередь ионизуют встречные молекулы. В результате такого рода *цепной реакции* даже небольшое число электронов, возникших в процессе внешней ионизации, способно вызвать значительный разрядный ток.

Вместе с тем этот процесс еще нельзя назвать самостоятельным разрядом, ибо при прекращении действия внешнего ионизатора разряд обрывается, как только все ионы нейтрализуются на электродах. Для возникновения развитого самостоятельного разряда необходимо, чтобы и положительные ионы приобрели способность выбивать свободные электроны либо из молекул газа, либо из катода. Как следует из выражения (48.10), этого можно достичь либо за счет увеличения напряженности поля, либо за счет увеличения длины свободного пробега иона.

#### § 48.4. Счетчик Гейгера–Мюллера

1. В процессе ударной ионизации происходит резкое возрастание числа пар ионов, примерно в  $10^4$ – $10^6$  раз. Следовательно, если в газовом объеме возникнет даже одна пара ионов (один положительный ион и один электрон), то благодаря ударной ионизации их число возрастет в миллионы раз. В этом случае говорят, что ионизационная камера работает в режиме *газового усиления*.

Газовое усиление используется в счетчиках Гейгера для счета отдельных частиц радиоактивного излучения. Благодаря выбору определенного режима работы счетчик считает каждую частицу в отдельности.

2. Чаще всего счетчик представляет собой герметически запаянную стеклянную трубку, к внутренним стенкам которой прилежит катод К — тонкий металлический цилиндр; анодом А — служит тонкая проводка, натянутая по оси счетчика (рис. 48.3). Для мягких бета- и альфа-частиц применяются счетчики, отличающиеся тем, что излучение поступает в рабочий объем счетчика с торца, затянутого тонкой пленкой.

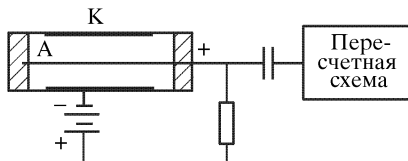


Рис. 48.3

Счетчик включается в регистрирующую схему. На корпус подается отрицательный потенциал, на нить — положительный. Последовательно счетчику включается резистор с сопротивлением несколько мегаом. С резистора через разделительный конденсатор с емкостью несколько тысяч пикофард сигнал подается на вход перерасчетной схемы.

3. Пусть в счетчик попала частица, создавшая на своем пути хотя бы одну пару ионов. Электроны, двигаясь к аноду (нити), попадают в поле с нарастающей напряженностью, их скорость стремительно возрастает, и на своем пути они создают ионную лавину.

Попав на нить, электроны снижают ее потенциал, вследствие чего по резистору течет ток. На его концах возникает импульс напряжения, который через конденсатор поступает на вход пересчетного устройства.

Высокий потенциал, который раньше целиком находился на аноде, переключается на резистор, и напряженность поля внутри счетчика уменьшается, вследствие чего уменьшается кинетическая энергия электронов (см. (48.10)). В связи с этим обрывается режим газового усиления. Таким образом, резистор играет роль *гасящего сопротивления*.

4. Благодаря тому, что подвижность положительных ионов меньше подвижности электронов, а также потому, что эти ионы движутся к катоду, где напряженность поля много меньше, чем у анода, скорость положительных ионов значительно меньше скорости электронов. В результате ионы достигают катода не ранее чем через время  $\tau \approx 10^{-4}$  с после начала разряда. В течение этого времени счетчик не способен регистрировать вновь поступающие в него частицы. В самом деле, пока положительно заряженное облако ионов заполняет рабочий объем счетчика, напряженность поля мала и ударная ионизация произойти не может. В связи с этим время  $\tau$  часто называют *мертвым временем* счетчика.

*Разрешающая способность* счетчика показывает, сколько частиц способен зарегистрировать счетчик в единицу времени как отдельные импульсы. Поскольку импульсы от двух частиц будут зарегистрированы отдельно,



если они следуют друг за другом через промежуток времени не меньший, чем мертвое время, то разрешающая способность равна около  $10^4$  импульсов в секунду.

### § 48.5. Самостоятельный разряд. Плазма

1. Как уже говорилось, для того чтобы в газе возник самостоятельный разряд, недостаточно наличия одного лишь процесса ударной ионизации. Нужно еще, чтобы за счет процессов, происходящих в газе при разряде, непрерывно возникали электроны, которые после ускорения принимали бы участие в ударной ионизации. Таких процессов может оказаться несколько. Иногда они действуют одновременно, иногда один из них начинает играть доминирующую роль — это зависит от давления газа, его температуры и напряженности поля. Рассмотрим важнейшие из них.

*Термоэлектронная эмиссия* с катода возникает в том случае, если катод имеет высокую температуру. Именно этот процесс обеспечивает *дуговой разряд*.

*Вторичная электронная эмиссия* с катода возникает в том случае, если кинетическая энергия положительных ионов оказывается достаточной, чтобы ударом выбить из катода электроны. Этот процесс обеспечивает *тлеющий разряд* (см. § 48.6).

*Термоионизация* газа происходит в тех случаях, когда кинетическая энергия молекул газа превышает энергию ионизации:

$$\frac{mv^2}{2} > \mathcal{E}_{\text{ион}}. \quad (48.12)$$

Ионизация газа при тепловых соударениях молекул требует достаточно высоких температур ( $\mathcal{E}_{\text{ион}} \approx 10$  эВ):

$$T > \frac{\mathcal{E}_{\text{ион}}}{k} \approx \frac{10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 10^5 \text{ К}.$$

На самом деле за счет максвелловского распределения молекул по скоростям (см. § 25.2) термоионизация возникает и при значительно более низких температурах.

*Фотоионизация* газа происходит под действием коротковолнового ультрафиолетового или рентгеновского излучения. Молекула газа, поглотив порцию энергии (квант излучения, см. § 68.3), которая больше энергии ионизации, выбрасывает электрон и превращается в положительный ион.

2. Ионизованный газ при значительной степени ионизации представляет собой фактически особое состояние вещества, от-

личное от газообразного, жидкого или кристаллического. Это состояние вещества называется *плазмой*.

Плазма, возникающая в результате ударной ионизации газа, называется *газоразрядной*. Ее отличительная особенность заключается в том, что практически здесь отсутствует обмен энергией между свободными электронами и ионами, и их средние кинетические энергии значительно отличаются. Последнее качественно объясняется тем, что длина свободного пробега электрона много больше, чем у иона, — примерно в 5–10 раз, вследствие чего электроны накапливают в электрическом поле примерно во столько же раз больше энергии.

По аналогии с температурой газа, которая вводится по формуле  $\langle \varepsilon \rangle = (3/2)kT$  (см. § 26.5), можно ввести *ионную температуру* и *электронную температуру*:

$$\langle \varepsilon_{\text{ион}} \rangle = \frac{3}{2} kT_{\text{ион}}, \quad \langle \varepsilon_{\text{эл}} \rangle = \frac{3}{2} kT_{\text{эл}}.$$

Оказывается, что  $T_{\text{эл}} \approx 5000$  К при  $T_{\text{ион}} \approx 300$  К.

Итак, газоразрядная плазма — это неравновесное или, как говорят, *неизотермическое* состояние вещества.

3. Высокотемпературная плазма, возникающая в результате термической ионизации, является равновесной или, другими словами, *изотермической плазмой*. Степень ее ионизации очень велика, благодаря чему она является очень хорошим проводником — проводимость высокотемпературной плазмы сопоставима с проводимостью металлов.

Температура поверхности Солнца и звезд равна нескольким тысячам градусов, их недра разогреты до миллионов градусов. Отсюда следует, что значительная масса вещества Вселенной, сконцентрированная в звездах, находится в состоянии высокотемпературной плазмы.

## § 48.6. Тлеющий разряд

1. Этот вид разряда удобно наблюдать в газоразрядной стеклянной трубке с двумя электродами, расстояние между которыми около 0,5 м, а разность потенциалов — около тысячи вольт. Оказывается, что при нормальном атмосферном давлении в трубке разряда нет (очень слабым несамостоятельным разрядом пренебрежем). При уменьшении давления газа примерно до 5–7 кПа в трубке наблюдается узкий светящийся шнур; при давлении около 60–70 Па разряд сплошь заполняет трубку, причем положительный столб у анода разбивается на ряд слоев — страт. Наконец,

при давлении около 2 Па свечение в трубке пропадает, но ярко начинает светиться стекло против катода.

Самостоятельный разряд, возникающий в газе при пониженном давлении, называется *тлеющим разрядом*.

2. Исследования показали, что потенциал в разрядной трубке распределяется весьма неравномерно, как это изображено на рис. 48.4. Вблизи катода напряженность поля значительно

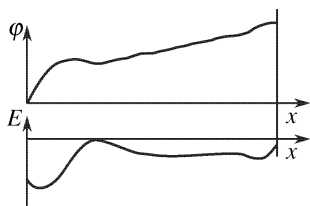


Рис. 48.4

больше, чем в светящемся столбе у анода. В результате заряды испытывают действие ускоряющей силы только в катодном темном пространстве, в области анодного свечения они движутся практически равномерно.

Электроны, разогнавшись в катодном пространстве, приобретают кинетическую энергию, достаточную для ударной ионизации газа. В результате этого в области анодного свечения образуется газоразрядная плазма, проводимость этой области резко увеличивается, а разность потенциалов падает. Энергия, выделяемая молекулами газа при рекомбинации ионов, и есть причина свечения газа. Характер свечения (его цвет) зависит от природы газа, заполняющего трубку. В свою очередь положительные ионы, разгоняясь в темном катодном пространстве, бомбардируют катод и ударом выбивают из него электроны. Естественно, что кинетическая энергия иона должна превосходить работу выхода электрона из катода, только в этом случае ион сможет выбить из катода электрон. Согласно (48.10) этого можно достичь либо путем увеличения напряженности электрического поля, либо путем увеличения длины свободного пробега иона. Разрежение газа как раз и служит этой цели.

Тлеющий разряд наблюдается в газосветных лампах. Неоновые, аргоновые, криптоновые, ртутные и натриевые лампы используются как специальные источники света в лабораториях, а также для рекламы. Заметим, что лампы из кварцевого стекла, заполненные парами ртути, являются источниками ультрафиолетового света.

Ионы, бомбардируя катод, вызывают местный разогрев металла на выступах. Последние расплавляются и испаряются. Возникшие пары металла оседают на холодных поверхностях. Этим пользуются для *катодного распыления металлов*, что позволяет получить очень тонкие и прочные металлические покрытия на

разных предметах. Таким методом получают высококачественные зеркала, полупосеребренные пластины стекла и т. п.

3. При давлении газа менее 1–2 Па свечение газа в трубке прекращается. Это значит, что соударения электронов с молекулами газа, ионизация последних и обратный процесс рекомбинации происходят относительно редко. Поэтому основная масса электронов, вылетев из катода и разогнавшись в катодном пространстве, летит далее свободно по инерции. Этим и объясняется тот факт, что электронный пучок в катодной трубке движется прямолинейно и перпендикулярно катоду независимо от положения анода (рис. 48.5). Исторически это был первый метод получения пучка свободных электронов. Крукс, получивший в конце прошлого века эти пучки, назвал их *катодными лучами*. В настоящее время этот термин сохраняется лишь по традиции.

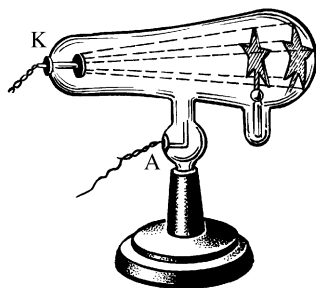


Рис. 48.5

Если поместить катод внутри разрядной трубки и просверлить в нем отверстие (канал), то за катодом можно заметить слабо светящийся пучок (рис. 48.6). Исследования показали, что эти частицы — положительные ионы, разогнанные полем в катодном пространстве и проскочившие по инерции через отверстия в закатодное пространство. Эти пучки частиц называют *анодными*, *закатодными* или *каналовыми* лучами.

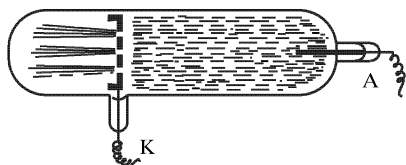


Рис. 48.6

Анодные лучи представляют собой источник положительных ионов газа, которым заполнена трубка. Такие источники положительно заряженных ионов применяются в масс-спектрометрах (см. § 41.8) и в ускорителях (см. § 41.4–41.6).

### § 48.7. Плазма в магнитном поле

1. В отсутствие магнитного поля плазма ведет себя как обычный газ. Причина заключается в том, что плазма квазинейтральна: даже в достаточно малых (но не микроскопических) объемах суммарный заряд электронов и положительных ионов равен нулю. Поэтому в отсутствие внешнего магнитного поля явления в плазме описываются обычными уравнениями гидродинамики (см. гл. 30).

Если плазма находится в магнитном поле, то в ее поведении проявляется ряд особенностей, вызываемых действием магнитного поля на движущиеся заряды. Наука о поведении плазмы, а также других проводящих жидкостей (например, жидких металлов) в магнитном поле называется *магнитной гидродинамикой*, а при больших числах Маха (см. § 30.6) — *магнитной газодинамикой*. В данной книге мы не сможем подробно остановиться на изложении этой новой, весьма интенсивно развивающейся области науки. Рассмотрим лишь некоторые основные понятия.

2. Пусть некоторый объем плазмы движется со скоростью  $v$  поперек силовых линий поля с индукцией  $\mathbf{B}$ . Тогда в этом объеме, как и в любом проводнике, находится ЭДС индукции (см. § 43.2). Если характерный размер участка плазмы равен  $l$ , то ЭДС, согласно (43.5), равна  $\mathcal{E} = vBl$ . Сопротивление участка плазмы  $R = \rho l / S \approx l / \gamma l^2 = 1 / \gamma l$ . По закону Ома индуцированный в плазме ток

$$i_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}}{R} \approx \gamma v B l^2. \quad (48.13)$$

По правилу Ленца (см. § 43.8) индуцированный ток взаимодействует с полем так, что возникающая сила взаимодействия препятствует перемещению плазмы. Таким образом, кроме обычных гидродинамических сил в плазме действуют еще и электромагнитные силы.

3. Точный учет этого взаимодействия связан с большими математическими трудностями. Однако оценить роль тех или иных сил можно с помощью некоторых безразмерных критериев, аналогичных числу Рейнольдса (см. § 11.8). *Магнитное число Рейнольдса*  $\text{Re}_m$  характеризует отношение магнитной индукции поля индуцированных токов к индукции внешнего магнитного поля:

$$\text{Re}_m = \frac{B_{\text{инд}}}{B}. \quad (48.14)$$

Для оценки этой величины учтем, что  $B_{\text{инд}} = \mu_0 H_{\text{инд}} \approx \mu_0 i_{\text{инд}} / l$ , где  $l$  — характерный размер участка плазмы, а индуцированный ток выражается формулой (48.13). Подставив, получим

$$B_{\text{инд}} \approx \mu_0 \gamma v B l, \quad (48.15)$$

$$\text{Re}_m = \mu_0 \gamma v l. \quad (48.16)$$

Значительные магнитные числа Рейнольдса возникают либо при большой проводимости плазмы, либо при значительных характерных размерах и скоростях. Последнее наблюдается особенно часто в астрономических масштабах и имеет большое значение в астрофизике.

4. При больших магнитных числах Рейнольдса ( $\text{Re}_m \gg 1$ ) перемещение плазмы в магнитном поле должно приводить к возникновению очень сильного индуцированного магнитного поля, во много раз превосходящего внешнее магнитное поле. Это требует затраты энергии, которая может быть получена только за счет кинетической энергии плазмы. Следовательно, индуцированные токи, взаимодействуя с внешним магнитным полем, препятствуют перемещению плазмы поперек поля.

При  $\text{Re}_m \gg 1$  может оказаться, что плазма практически не может перемещаться относительно поля. В этом случае говорят, что *магнитное поле заморожено в плазму* — перемещение плазмы сопровождается соответствующим изменением магнитного поля, так что плазма не пересекает его силовые линии. Наоборот, если менять внешнее магнитное поле, то при  $\text{Re}_m \gg 1$  плазма станет соответственно перемещаться, чтобы сохранилось условие замороженности. Этим пользуются для сжатия и разогрева плазмы с помощью быстро нарастающего магнитного поля.

5. Вторым характерным критерием в магнитной гидродинамике является *число Альвена*  $Al$ , равное отношению плотности энергии магнитного поля  $w_m = B^2/(2\mu_0)$  к *кинетической энергии единичного объема плазмы*, т. е. к плотности кинетической энергии  $w_k = \rho v^2/2$ :

$$Al = \frac{w_m}{w_k} = \frac{B^2}{\mu_0 \rho v^2}. \quad (48.17)$$

Число Альвена можно трактовать и иначе, как отношение давления магнитного поля  $p_m = B^2/2\mu_0$  к динамическому давлению (или напору)  $p_{дин} = \rho v^2/2$  (см. § 30.15).

6. При малых магнитных числах Рейнольдса возможно перемещение плазмы относительно поля; при этом возникают магнитные силы, которые можно оценить по закону Ампера (41.15). Подставив в эту формулу значение индуцированного тока из (48.13), получим

$$F_m = iBl \approx \gamma v B^2 l^3. \quad (48.18)$$

Для оценки этой силы ее сравнивают либо с силой сопротивления трения  $T \approx \eta lv$ , либо с силой сопротивления давления  $R \approx \rho v^2 l^2$ . Получим два новых критерия:

число Стюарта

$$N = \frac{F_m}{R} = \frac{\gamma B^2 l}{\rho v} = Al \cdot Re_m; \quad (48.19)$$

число Гартмана

$$Ha = \sqrt{\frac{F_m}{T}} = Bl \sqrt{\frac{\gamma}{\eta}} = \sqrt{N \cdot Re}. \quad (48.20)$$

Значение этих критериев можно понять из следующего примера. Если жидкость течет по трубе поперек магнитного поля, то при малых числах Гартмана или Стюарта магнитное поле слабо влияет на характер течения, и сопротивление движению возникает в основном из-за вязкости жидкости. Наоборот, при больших числах Гартмана или Стюарта вязкость жидкости отступает на второй план, сопротивление движению возникает в основном из-за взаимодействия жидкости с магнитным полем.

## § 48.8. МГД-генератор

1. На тепловых электростанциях процесс преобразования внутренней энергии топлива в энергию электрического тока весьма сложен, а КПД не превосходит 30 %. Энергия топлива в топке и котле преобразуется в энергию пара, в паровой турбине энергия пара преобразуется в кинетическую энергию ротора. Ротор турбины вращается вместе с ротором генератора, вследствие чего в статоре возбуждается ток. Цепочка преобразований энергии «топка–котел–турбина–генератор» оказывается достаточно сложной. Низкий КПД определяется в основном турбиной, у которой температура рабочего тела (пара) относительно низка ( $\leq 750^\circ\text{C}$ ), а также потерями на всех этапах преобразования энергии.

Между тем если раскаленные и в результате этого ионизованные газообразные продукты горения заставить двигаться поперек магнитного поля, то в этой плазме, как и в любом проводнике, возникает ЭДС индукции. Эту ЭДС можно снять с плазмы с помощью соответствующих электродов.

2. На этом принципе и основан *магнитогидродинамический генератор*, сокращенно: МГД-генератор. Схема его устройства изображена на рис. 48.7. Газ, возникающий при сгорании топлива,

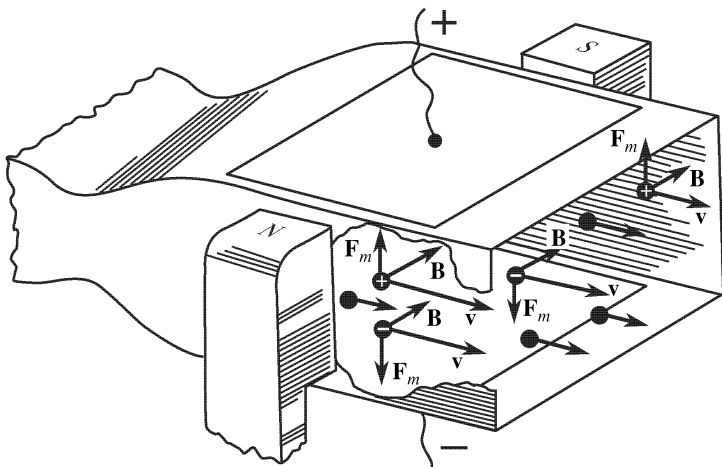


Рис. 48.7

проходит через сопло Лаваля (см. § 30.12), вследствие чего его внутренняя энергия превращается в кинетическую. При движении газа в сильном поперечном магнитном поле возникает ЭДС индукции — положительные ионы движутся к верхнему электроду, свободные электроны — к нижнему. Замыкая электроды на внешнюю нагрузку, получим в цепи ток.

Для анализа эффективности генератора нужно оценить его ЭДС, электрический и тепловой КПД.

3. Электрический КПД равен отношению мощности, потребляемой внешней нагрузкой, к полной мощности:

$$\eta_{\text{эл}} = \frac{i^2 R}{i^2 (R + r)} = \frac{R}{R + r},$$

где  $R$  — сопротивление внешней нагрузки,  $r$  — внутреннее сопротивление генератора. Для уменьшения внутреннего сопротивления генератора нужно повысить проводимость плазмы. Это можно сделать путем повышения температуры плазмы, а также путем добавления в газ в качестве присадок паров щелочных металлов, имеющих малую работу выхода электрона. Применяются соли калия, реже — цезия из-за его дороговизны.

Рабочие температуры газов в МГД-генераторе лежат выше 2000 К. Ниже этой температуры проводимость газа столь мала, что генератор вообще не работает.

4. Повышение температуры газа благотворно сказывается и на тепловом КПД генератора (см. § 29.5), который растет с ростом разности температур рабочего тела и окружающей среды. При температурах около 2000 К тепловой КПД стремится к 90 %. Кроме того, повышение температуры газа позволяет увеличить скорость движения газа в сопле Лавала, вследствие чего растет ЭДС. Вместе с тем резко возрастает износ стенок сопла, ибо высокие температуры разрушают любые материалы.

5. Росту ЭДС способствует также увеличение индукции магнитного поля. Для этой цели сопло МГД-генератора помещают в зазор мощного электромагнита. Магнит с железным сердечником и с охлаждаемыми обмотками позволяет получить поле с индукцией до 2 Тл, что соответствует магнитному насыщению железа.

В перспективе возможно применение магнитов без железа, но со сверхпроводящими обмотками. Плотность тока в таких обмотках доходит до  $2 \cdot 10^8$  А/м<sup>2</sup>, индукции поля — до 6 Тл. Но пока применение магнитов со сверхпроводящей обмоткой осложняется огромными трудностями поддержания в больших областях пространства температур жидкого гелия.

В настоящее время МГД-генераторы еще не вышли из стадии лабораторного эксперимента.



## Предметный указатель

- Абсолютный нуль 251  
Агрегатные состояния тела 186, 376  
Акцепторы 531  
Аморфные тела 336, 360  
Анизотропия 334  
Анионы 543  
Антиферромагнетизм 484
- Броуновское движение 235, 290
- Вектор 33  
— намагниченности 468  
— поляризации 414  
— смещения 415  
Вероятность нахождения молекул 256  
— термодинамическая 280, 281  
— —, связь с энтропией 284  
Вес 55  
Взаимодействие обменное 484  
— сильное 212  
— слабое 213  
— электромагнитное 89  
Влажность воздуха абсолютная 374  
— — относительная 375  
Водородная связь 349  
Возгонка 366  
Волна звуковая в газе 309  
— ударная 309  
— упругих возмущений 308  
Вольт-амперная характеристика 555  
— — диода 549  
Восприимчивость магнитная 468  
— электрическая 415, 421  
Время оседлой жизни 355  
— релаксации 275, 430, 500  
— свободного пробега среднее 509  
— собственное 122  
Вырождение газа 251  
Вязкость 106, 358
- Газ идеальный 244  
— —, уравнение состояния 248  
— электронный 344, 505  
Гальванический элемент 546  
— —, электродвижущая сила 546  
Генератор магнитогидродинамический 566  
— электростатический Ван-де-Граафа 410  
Геометрия неевклидова 220  
Гигрометр 374  
Гистерезис 475  
Гравитационная постоянная 82  
Градиент напряженности 402  
График движения 20
- Давление 59, 164  
— газа 241  
— критическое 372  
— насыщенного пара 368  
Дальний порядок 337  
Двигатель реактивный 317  
Движение вращательное 15, 197  
— замедленное 42  
— инерциальное 26  
— механическое 15  
— нестационарное 304  
— относительное 40  
— переносное 40  
— поступательное 15  
— равномерное 19  
— равнопеременное 42  
— сложное 40  
— стационарное 304  
— ускоренное 41  
Десублимация 366  
Детандер 390  
Деформация кристалла 340  
— пластическая 49  
— упругая 49  
Диамagnetизм 469  
Диамagnetик 466  
Динамометр 49  
Диод 548  
— полупроводниковый 534  
Диполь 93  
—, электрический момент 93, 325  
—, энергия в электрическом поле 400  
Дислокация 337  
Диссоциация 543  
— электролитическая 542

- Диффузия 237  
Диэлектрик 409  
Длина свободного пробега средняя 236  
— собственная 121  
Домены 477, 478  
Доноры 530  
Дырки 355, 528  
Дьюара сосуд 194
- Единица длины астрономическая 84  
Единицы, международная система 70–71  
Емкость электрическая 403
- Жесткость 51  
Жидкость, ближний порядок 353  
— идеальная 306  
— несжимаемая 305  
— перегретая 385, 389  
— переохлажденная 385  
— сжимаемая 305
- Закон «трех вторых» 549  
— Авогадро 253  
— Бойля–Мариотта 243  
— Видемана и Франца 525  
— Гей-Люссака 263  
— Гука 51, 52  
— движения 18  
— Дебая 421  
— Джоуля–Ленца 429, 511  
— динамики основной 128  
— диффузии 239  
— Дюлонга и Пти 518  
— индукции Фарадея 495  
— Кеплера 84, 208  
— Кулона 91  
— Кюри 472  
— Ньютона второй 61  
— — первый 26  
— — третий 52  
— Ома 426, 427, 509, 529  
— сложения векторов 34  
— — скоростей в векторном виде 40  
— — — классический 32  
— сохранения массы 196  
— — электрических зарядов 90  
— — энергии 150, 195  
— — — в ньютоновской механике 177  
— тяготения Ньютона 81  
— Фарадея второй 545  
— — первый 545  
— Фурье 522  
— Шарля 262  
Заряд поляризационный 414  
— точечный 90  
— удельный 459  
— электрический 89  
— электрона 413, 460
- Изотерма идеального газа 243  
— пара 371  
Изотопы 240, 462  
Изотропность пространства 16, 117  
Импульс 64, 141, 156  
Индуктивности, единица 497  
Индуктивность соленоида 497  
Индукция магнитного поля 438  
Интервал 124  
— времениподобный 124  
— пространственноподобный 124  
Ион 544  
Ионизационная камера 554  
Ионизация 553  
— ударная 557  
Ионная лавина 558
- Камера Вильсона 387  
Канал 536  
Капилляр 364  
Катионы 543  
Катодное распыление металлов 562  
— темное пространство 562  
Кельвин 249  
Кипение 388  
Колебание гармоническое 76  
Колебания нулевые 252  
Количество вещества 253  
— теплоты 192  
Коллайдер 459  
Конденсат 395  
Конденсатор 402, 416, 430  
Конденсация 367  
Контактная разность потенциалов 513  
Конус Маха 312

- Коэффициент гидравлического трения 321  
— диффузии 239, 357  
— замедления 163  
— ионизации 554  
— полезного действия двигателя 297, 300  
— Пуассона 264  
— расширения линейного 330  
— — объемного 330  
— рекомбинации 554  
— теплопроводности 522  
— трения покоя 100  
— — скольжения 102  
Кривая расширения 296  
— сжатия 296  
Криогенная техника 390  
Кристалл 333  
Кристаллизация 386  
Кристаллическая решетка 336, 346  
Кристаллы атомные 343  
— ионные 342  
— металлические 344  
— молекулярные 343  
Крыло 318  
Куб объемноцентрированный 347  
Кулон 92
- Линии индукции 439  
Линия геодезическая 224  
Лучи катодные 563
- Магнетон Бора 467  
Магнитная газодинамика 564  
— гидродинамика 564  
— проницаемость ферромагнетиков 473  
Магнитное насыщение 479  
Магнитный поток 493  
Масса атомная относительная 254  
— молекулярная относительная 254  
— молярная 254  
— покоя 128, 184  
— релятивистская 128  
— тела 58  
— эффективная 529  
Материальная точка 16  
Мениск 362  
Метод встречных пучков 459  
Микропроцессор 539
- Модель двухжидкостная 393  
Модуль объемного сжатия 323  
Молекулы полярные 419  
Момент времени начальный 20  
— импульса 205  
— — орбитальный 466  
— инерции 199  
— — тел простейшей формы 201, 202  
— магнитный 441  
— — атома 467  
— — спиновый электрона 481  
— силы 203  
Момент импульса, закон сохранения 206  
Монокристалл 334  
Мощность 155  
— , единица 156  
Мюоны 122
- Нагреватель 296  
Накопительные кольца 459  
Намагниченность вещества 467  
— остаточная 476  
Напряжение 322  
— касательное 101  
— на участке цепи 423  
Напряженность поля гравитационного 85  
— — магнитного 444  
— — стороннего 424  
— — суммарного 424  
— — электрического 96, 400  
— — электростатического 396  
Натяжение поверхностное 362  
Невесомость 67  
Носители тока основные 531
- Обедненная зона 536  
Оболочка адиабатная 194  
Одновременность, относительность 114  
Однородность времени 17  
— — и сохранение энергии 213  
— пространства 17, 117  
Опыт Барнетта 481  
— Кавендиша 82  
— Кулона 90  
— Майкельсона 112  
— Милликена 411  
— Перрена 294  
— Фарадея 487

- Штерна и Герлаха 481
- Эйнштейна и де-Гааза 480
- Ось кристаллографическая 334
- Падение свободное 56
- Пар насыщенный 367
- ненасыщенный (перегретый) 371
- пересыщенный (переохлажденный) 385, 386
- Парадокс близнецов 227
- Парамагнетизм 471
- Парамагнетик 465
- Параметры термодинамические 274
- Перегрузка 68
- Перемещение частицы средне-квадратичное 292
- Переход электронно-дырочный 533
- Переходы фазовые 376, 474
- Период обращения частицы 46, 449, 452
- Петля гистерезисная 476
- Плавление 382
- Плазма 561
- газоразрядная 561
- изотермическая 561
- сверхплотная 374
- Плечо диполя 93
- силы 203
- Плотная упаковка 322, 344–346
- Плотность вещества 59
- заряда поверхностная 402
- идеального газа 253
- критическая 372
- тока 425
- энергии поля 404, 416, 498
- Поверхность эквипотенциальная 397
- Пограничный слой 107
- Подвижность заряда 428
- частицы 503
- Позитрон 450
- Поле вихревое 491
- однородное 398
- стороннее 422, 488
- точечного заряда 96
- электрическое 95
- — индуцированное 491
- электромагнитное 492
- электростатическое 396
- Поликристалл 335
- Полимеры 351
- Полиморфизм 346
- Полупроводники 505
- *n*-типа 531
- *p*-типа 531
- Поляризация диэлектрика 414
- Поляризуемость деформационная (электронная) 418
- молекулы 326, 418
- ориентационная 419
- Постоянная Авогадро 254, 294
- Больцмана 247, 253, 294
- времени электрической цепи 430, 500
- Лошмидта 253
- магнитная 438
- Планка 136
- универсальная (молярная) газовая 254
- Фарадея 545
- Холла 503
- Потенциал поля электростатического 174, 396
- Потенциальная кривая 179, 328
- яма 180
- Потенциометр 548
- Поток вектора индукции 494
- — напряженности 405
- магнитный, единица 494
- тепловой 522
- Правило левой руки 446
- Ленца 495
- многоугольника 35
- параллелограмма 35
- Преобразования Галилея 30
- Лоренца 120
- Принцип автофазировки 456
- возрастания энтропии 298
- запрета 211
- инвариантности скорости света 113
- инерции 26, 27
- относительности Галилея 29
- — Эйнштейна 29, 113
- симметрии пространства–времени 213
- соответствия 126
- эквивалентности 222
- Причина и следствие 123
- Проводимость *n*-типа 531
- *p*-типа 531

- несамостоятельная 553
- собственная дырочная 529
- — электронная 528
- удельная 426
- электрическая 426
- Проводник 409
- Произведение векторов векторное 37
- — скалярное 36
- Проницаемость диэлектрическая 413
- магнитная 469
- Процесс адиабатный 194, 265
- изобарный 263
- изотермический 242, 264
- изохорный 262
- квазистатический 275
- компенсирующий 289
- необратимый 277
- обратимый 275
- тепловой 186
- Псевдоядра 355
- Психрометр 375
- Психрометрическая разность 376
- Пузырьковая камера 389
  
- Работа** 155, 165
- внешней силы 190
- выхода электрона 513
- при изменении объема газа 260
- элементарная 154
- Равновесие 182
- динамическое 367
- тела, имеющего ось вращения 204
- Радиус-вектор 33
- Разведка гравиметрическая 87
- Разделение газовых смесей 240
- Размерность физической величины 69
- Разряд дуговой 560
- несамостоятельный 555
- тлеющий 560
- Распределение барометрическое 258
- Максвелла 233
- Режим газового усиления 558
- Резистор 426
- Рекомбинация 543, 553
- ионов 554
  
- Самодиффузия** 238
- Самоиндукция 497
- Сверхтекучесть 393
- Связь 55
- Сжижение газа 390
- Сжимаемость вещества 322
- газа 323
- Сила 48
- Ампера 462
- внешняя 52, 141
- внутреннего трения 107
- внутренняя 141
- инерции 216
- коэрцитивная 476
- Кулона 91
- Лоренца 446, 489
- — обобщенная 447
- нормального давления 100
- поверхностного натяжения 362
- подъемная 318
- равнодействующая 53
- сопротивления 109
- термоэлектродвижущая 516
- тока 424
- трения 98
- — покоя максимальная 100
- тяги реактивная 145
- тяготения 81
- тяжести 55
- упругости 52
- уравнивающая 53
- центростремительная 64
- электродвижущая 423, 490
- — гальванического элемента 546
- — индукции 490
- — самоиндукции 497
- Силовая линия 396
- — магнитного поля 439
- Силы диссипативные 172
- ковалентные (гомеополярные) 343
- консервативные 171
- магнитные 434
- молекулярные 323, 326
- неконсервативные 172
- отталкивания 324
- притяжения 324
- , система уравновешенная 53
- сторонние 422
- центральные 222
- электрические 89
- Синхрофазотрон 454

- Система адиабатически изолированная 194
- единиц 69
  - замкнутая 194
  - отсчета 17, 214
  - — гелиоцентрическая 28
  - — геоцентрическая 27
  - — инерциальная 27, 66
  - — неинерциальная 66, 68, 215
- Скаляр 32
- Скорость 39
- волны 308
  - звука в идеальном газе 309
  - истечения 145
  - космическая 179
  - мгновенная 23, 39
  - молекулы наиболее вероятная 233
  - начальная 42
  - света 111, 119
  - средняя 22
  - — квадратичная 242
  - угловая 46, 197
  - установившаяся 110
- Слой барьерный (запирающий) 532
- зарядов двойной электрический 532
- Событие 122
- , промежуток времени между событиями 122
- Соленоид 445
- Солнечная батарея 542
- Сольватная оболочка 543
- Соотношение неопределенностей 137
- Сопло 314
- Лаваля 316
- Сопrotивление волновое 313
- гасящее 559
  - проводника удельное 426
  - электрическое 426
- Состояние вещества критическое 373
- метастабильное 361, 385
- Соударение, эффективное сечение 236
- Спектр масс 462
- Спин электрона 483
- Степень ионизации 553
- Сублимация 366, 382
- Счетчик Гейгера–Мюллера 558
- , мертвое время 559
  - , разрешающая способность 559
- Тело отсчета 17
- Температура 246, 251
- вырождения 251
  - Дебая 519
  - ионная 561
  - критическая 360, 372
  - , международная практическая шкала 249
  - термодинамическая 247
  - электронная 561
- Теорема Гаусса 408
- Неттера 213
  - Штейнера 201
- Теория тяготения Эйнштейна 224
- Тепловой двигатель 295
- Теплоемкость газа 262
- — двухатомного, квантовая теория 270
  - — , классическая теория 268
  - — молярная 263
  - — объемная 518
  - — удельная 261, 518
  - — — изохорная 262
  - металлов 521
  - твердого тела 518
- Теплообмен 191
- конвективный 191
  - кондуктивный 191
  - с помощью излучения 191
- Теплопроводность 191, 522
- , анизотропия 335
- Теплота плавления 354, 382
- удельная парообразования 192
  - — плавления 192
  - — сгорания 193
  - фазового перехода 382
- Термодинамика 193
- , начало второе 288, 298
  - , — — , статистический смысл 289
  - , — первое 193, 298
- Термоионизация 560
- Термометр газовый 248
- Термопара 517
- Термоэлектричество 516
- Термоэлектронная эмиссия 514
- Термоэлектроны 548
- Тлеющий разряд 562
- Ток в проводнике 462

- насыщения 549, 555, 557
- стока 537
- электрический 421, 424
- Точка Кюри 474
- Нееля 485
- росы 374
- тройная 381
- Траектория 18, 21
- Транзистор 536
- биполярный 536
- полевой 536
- униполярный 536
- Трение внешнее (сухое) 98
- внутреннее (жидкое или вязкое) 99
- качения 99, 103
- покоя 98
- скольжения 98
- Триод 550
- , сеточная характеристика 551
- Трубка Пит6 320
- Турбодетандер 390
- Угол атаки** 319
- краевой 363
- телесный 406
- трения покоя 101
- Удар 159
- абсолютно неупругий 160
- упругий 161
- — центральный 161
- Узловая линия 336
- плоскость 336
- Упаковка гексагональная 345
- кубическая гранецентрированная 346
- Уравнение Бернулли 307
- газового состояния 248, 255
- движения 65, 66
- импульса для потока идеальной сжимаемой жидкости 306
- Клапейрона–Менделеева 255
- неразрывности струи 305
- Пуассона 267
- Ускорение, единица 41
- мгновенное 41
- нормальное (центростремительное) 48
- свободного падения 57
- среднее 41
- угловое 210
- Ускоритель 450
- циклический 451
- Условие кипения 388
- устойчивого равновесия 183
- Фактор релятивистский** 128
- Ферромагнетизм 486
- Ферромагнетизм 474
- , классическая теория 477
- Ферромагнетик 465
- Фильтр скоростей 461
- Флуктуации 290, 291
- Фонон 524
- Формула Ричардсона–Дешмана 550
- Стокса 110
- Эйнштейна (для броуновского движения) 294
- Фотодиод 541
- Фотоионизация газа 560
- Фотопроводимость 539
- Фоторезистор 540
- Фотосопротивление 540
- Фотоэлектронная эмиссия 514
- Фронт волны 308
- Холодильная установка** 303
- Холодильник 296
- Центр инерции (масс)** 146
- Центры конденсации 386
- кристаллизации 386
- Цепная реакция 558
- Цикл замкнутый 295
- Карно 299
- разомкнутый 295
- Циклотрон 451
- Частица локализованная** 156, 157
- Частота 46
- Часы, синхронизация 114
- Число Альвена 565
- Гартмана 565
- Маха 310
- Рейнольдса 109
- — магнитное 564
- Стюарта 565
- Электризация** 89
- Электролиз 542
- Электролит 542
- Электрон 92, 411, 459, 481
- валентный 344

- , орбитальный момент импульса 466
- , подвижность 428
- , работа выхода 513
- Электронная пушка 552
- Электронно-лучевая трубка 552
- Электронное облако 548
- Электростатическая защита 410
- Электрохимический эквивалент 545
- Эмиссия вторичная электронная 560
  - термоэлектронная 547, 560
- Энергия активации 356, 528
  - внутренняя 183–185, 187, 188
  - — идеального газа 259
  - — , изменение при деформации тела 185
  - испарения 366
  - кинетическая 151
  - колебательного движения молекул 273
  - нулевая 252
  - поверхностная 362
  - поверхностного слоя жидкости 361
  - покоя 151
  - полная механическая 177
  - потенциальная 172
  - — гравитационных сил 173
  - — кулоновских сил 173
  - — упругих сил 173
  - релятивистская 151
  - электромагнитного поля 497
- Энтропия 284
- Эффект Баркгаузена 479
  - Доплера 134
  - Пельтье 517
- Эффекта Холла 502
- Эффективность теплового насоса 304
  - холодильной установки 303
- Явление Зеебека 516**
  - электромагнитной индукции 487, 495
- Ядерная реакция 188



Учебное издание

*ЯВОРСКИЙ Борис Михайлович*  
*ПИНСКИЙ Аркадий Аронович*

## ОСНОВЫ ФИЗИКИ

Том 1

### МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Редактор *Д.А. Муртова*  
Корректор *Л.Т. Варьяш*  
Оригинал-макет: *В.В. Худяков*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 20.01.03. Формат 60×90/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 36. Уч.-изд. л. 35,3.  
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997 Москва, Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ФГУП «Ивановская областная типография».  
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.  
E-mail: 091-018adminet.ivanovo.ru

ISBN 5 -9221 -0382 -2

